Correzione esame 17/1/2005

Es. 1

$$v_x = x \cos(t)$$
$$v_y = y \sin(t)$$

1. Una linea di corrente è in ogni punto tangente al vettore velocità: $\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{y}{x}\tan(t)$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}\tan(t) \rightarrow \ln y = \ln\left[x^{\tan(t)}\right] + \text{cost}$$

$$\boxed{y = c\, x^{\tan(t)}}$$

2. Una traiettoria è una linea tracciata da una data particella.

$v_x = x \cos(t)$ $\qquad$ $v_y = y \sin(t)$

$dx = v_x\, dt$ $\qquad$ $dy = v_y\, dt$

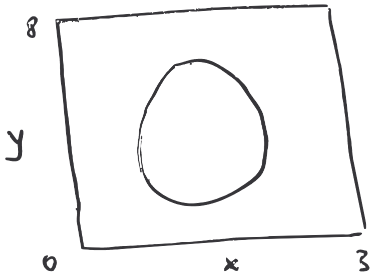
$\int \frac{dx}{x} = \int \cos(t)\, dt$ $\qquad$ $\int \frac{dy}{y} = \int \sin(t)\, dt$

$\ln x = \sin t + c_1'$ $\qquad$ $\ln y = -\cos t + c_2'$

$\boxed{x = c_1 e^{\sin t}}$ $\qquad$ $\boxed{y = c_2 e^{-\cos t}}$

$x = 1$ per $t=0 \rightarrow \boxed{c_1 = 1}$ $\qquad$ $y = 1$ per $t = 0 \rightarrow \boxed{c_2 = e}$

È facile osservare che la traiettoria nel piano (x,t) tra $t=0$ e $t=2\pi$ è chiusa su di sé stessa, a causa della periodicità delle funzioni seno e coseno



La derivata materiale del campo euleriano di velocità

è:
$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v} = \ldots$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} x\cos t \\ y\sin t\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} x\cos t \\ y\sin t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x\cos t \\ y\sin t\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -x\sin t \\ y\cos t\end{pmatrix} + x\cos t\,\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} x\cos t \\ y\sin t\end{pmatrix} + y\sin t\,\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} x\cos t \\ y\sin t\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -x\sin t \\ y\cos t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x\cos^2 t \\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y\sin^2 t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x\sin t + x\cos^2 t \\ y\cos t + y\sin^2 t\end{pmatrix}$$

Tale derivata materiale è uguale all'accelerazione della particella fluida, che si può ottenere prendendo la derivata 2ª nel tempo dell'eq. della traiettoria:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\sin t} \\ c_2 e^{-\cos t}\end{pmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = c_1 \cos t\, e^{\sin t} \qquad \dot{y}(t) = c_2 \sin t\, e^{-\cos t}$$

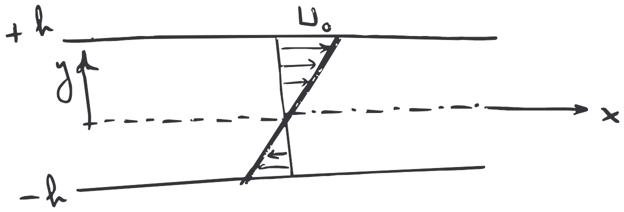
$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -c_1 \sin t\, e^{\sin t} + c_1 \cos^2 t\, e^{\sin t} \\ \ddot{y}(t) = c_2 \cos t\, e^{-\cos t} + c_2 \sin^2 t\, e^{-\cos t}\end{cases}$$

$$\ddot{x}(t) = c_1 e^{\sin t}\left[-\sin t + \cos^2 t\right] = -x\sin t + x\cos^2 t$$

$$\ddot{y}(t) = c_2 e^{-\cos t}\left[\cos t + \sin^2 t\right] = y\cos t + y\sin^2 t$$

Es. 2

1.



2. L'equazione caratteristica è:

$$\begin{vmatrix} -p-\lambda & \mu U_0/h \\ \mu U_0/h & -p-\lambda \end{vmatrix} = (p+\lambda)^2 - \frac{\mu^2 U_0^2}{h^2} = 0$$

$$\lambda_1 = -p - \frac{\mu U_0}{h} \qquad \lambda_2 = -p + \frac{\mu U_0}{h}$$

$$\lambda = \lambda_1 \quad \rightarrow \quad \frac{\mu U_0}{h} n_1 + \frac{\mu U_0}{h} n_2 = 0$$

$$n_1 = -n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \boxed{\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}}$$

$$\lambda = \lambda_2 \quad \rightarrow \quad -\mu\frac{U_0}{h} n_1 + \mu\frac{U_0}{h} n_2 = 0$$

$$n_1 = n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \boxed{\vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}}$$

Si noti che $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$; si osservi inoltre che gli sforzi principali λ_1 e λ_2 <u>non</u> dipendono da y, ed hanno lo stesso valore sull'asse $y=0$ ed in un punto $\forall$ del campo di moto.

3. $\mu = 200\ [cp] = 2\left[\frac{g}{cm\ s}\right] = 2 \times 10^{-3} \times 10^{2}\left[\frac{kg}{m s}\right] = 0.2\ [kg\, m^{-1} s^{-1}]$

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$$

$$n_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \; , \; n_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} T_{n_1} & T_{n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \left(-\sqrt{3} - \frac{1}{2} \; , \; \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right)$$

Il <u>vettore</u> sforzo cercato è $\vec{T} = -2{,}232\,\vec{i} + 1{,}866\,\vec{j}$

$\boxed{\text{Es. 3}}$ Similitudine di Froude

$$Fr_1 = Fr$$

$$\frac{U'}{\sqrt{gL'}} = \frac{U}{\sqrt{gL}}$$

dove g = modulo dell'accelerazione di gravità, è uguale per modello e prototipo.

$$\rightarrow \frac{U'}{U} = \left(\frac{L'}{L}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{30}\right)^{1/2} = \lambda^{1/2}$$

Una portata è, dimensionalmente, data dal prodotto di una velocità per una sezione:

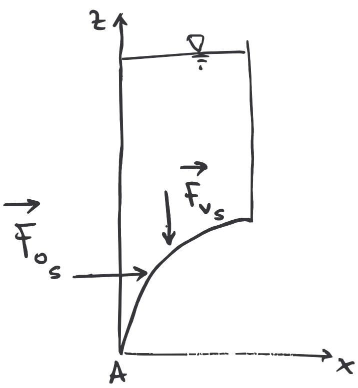
$$\frac{Q'}{Q} = \frac{U' L'^2}{U L^2} = \frac{U'}{U} \frac{L'^2}{L^2} = \lambda^{1/2} \lambda^2 = \lambda^{5/2}$$

La portata nel modello dovrà quindi essere

$$Q' = Q \lambda^{5/2} = 200 \cdot \left(\frac{1}{30}\right)^{5/2} \left[m^3 s^{-1}\right] =$$

$$= 40{,}57 \times 10^{-3} \left[\frac{m^3}{s}\right] = 40.57 \left[l\, s^{-1}\right]$$

$\boxed{\text{Es. 4}}$



Parte sinistra, metodo dei cilindri

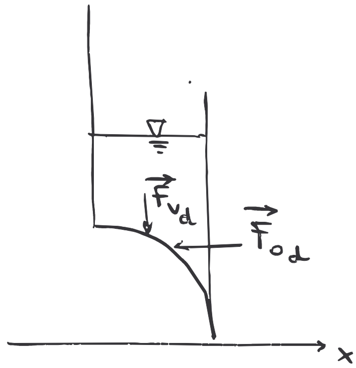
$$\vec{F}_{o_s} = \vec{i}\,\gamma\left(a+\frac{R}{2}\right)R = \vec{i}\,10^4(1,3)(0.6)\left[\frac{N}{m}\right]$$

$$\vec{F}_{v_s} = -\vec{j}\,\gamma\left[(a+R)R - \frac{\pi R^2}{4}\right] = -\vec{j}\,10^4(0.6)(1.287)\left[\frac{N}{m}\right]$$

$$\vec{F}_{o_s} = \vec{i}\;7,8\times 10^3\;[N\,m^{-1}]$$

$$\vec{F}_{v_s} = -\vec{j}\;6.7725\times 10^3\;[N\,m^{-1}]$$

Parte destra:



$$\vec{F}_{o_d} = -\vec{i}\,\gamma\left(b+\frac{R}{2}\right)R =$$

$$= -\vec{i}\;4.8\times 10^3\;[N\,m^{-1}]$$

$$\vec{F}_{v_d} = -\vec{j}\,\gamma\left[b+R-\frac{\pi R}{4}\right]R = -\vec{j}\;3.7725\times 10^3\;[N\,m^{-1}]$$

La forza totale è:

$$\vec{F}_o = \vec{i}\;3\times 10^3\;[N]$$ (per una profondità di 1 [m])

$$\vec{F}_v = -\vec{j}\;1,0545\times 10^4\;[N]$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_o^2+F_v^2} = 1,0963\times 10^4\;[N]$$

$$\vartheta = \tan^{-1}\frac{|F_v|}{|F_o|} \simeq 74.12^\circ$$

Ovviamente $\vec{F}$ passa per il punto O.