Compitino La Spezia, 16/11/2004

Es. 1, flusso di Poiseuille

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} -p & -2\mu y U_{max}/h^2 \\ -2\mu y \frac{U_{max}}{h^2} & -p \end{pmatrix}$$

1. $y=0$: $\mathbb{T} = \begin{pmatrix} -p & 0 \\ 0 & -p \end{pmatrix}$

tutte le direzioni sono principali, e i due (in realtà 3 ...) sforzi principali valgono $-p$

2. In un punto $\forall$, l'equazione caratteristica è:

$$\begin{vmatrix} -p-\lambda & -2\mu y \frac{U_{max}}{h^2} \\ -2\mu y \frac{U_{max}}{h^2} & -p-\lambda \end{vmatrix} = (p+\lambda)^2 - 4\mu^2 y^2 \frac{U_{max}^2}{h^4} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -p - 2\mu y \frac{U_{max}}{h^2} \\ \lambda_2 = -p + 2\mu y \frac{U_{max}}{h^2} \end{cases}$$

$\lambda = \lambda_1$: $\quad 2\mu y \frac{U_{max}}{h^2} n_1 - 2\mu y \frac{U_{max}}{h^2} n_2 = 0$

$$n_1 = n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_1 = \vec{i}\frac{1}{\sqrt{2}} + \vec{j}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\lambda = \lambda_2$: $\quad -2\mu y \frac{U_{max}}{h^2} n_1 - 2\mu y \frac{U_{max}}{h^2} n_2 = 0$

$$n_1 = -n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_2 = \vec{i}\frac{1}{\sqrt{2}} - \vec{j}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Si noti che : $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

3. $y_A = 0.1$

$h = 0.2$

$\mu = 10\ [cp] = 0.1 \left[\frac{g}{cm\ s}\right] = \underbrace{0.1 \times 10^{-3} \times 10^{2}}_{0.01}\ [kg\ m^{-1}\ s^{-1}]$

$P_A = 1\ [N\ m^{-2}]$

$U_{max} = 3\ [m\ s^{-1}]$

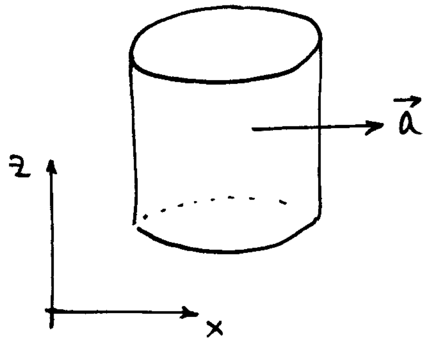
$$\rightarrow \quad \mathbb{T} = \begin{pmatrix} -1 & -0,15 \\ -0,15 & -1 \end{pmatrix}$$

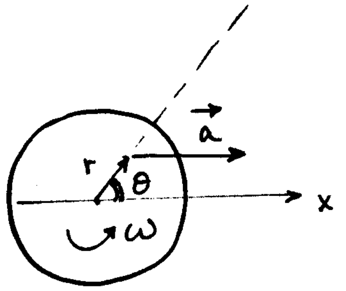
$$\vec{n} = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j} \qquad n_1 = \frac{4}{5}\ ;\ n_2 = -\frac{3}{5}$$

$$\begin{bmatrix} T_{n_1} & T_{n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -0,15 \\ -0,15 & -1 \end{bmatrix} = \left[-\frac{355}{500}\ ,\ \frac{240}{500} \right]$$

Il vettore sforzo cercato è $\vec{T} = -0,71\ \vec{i} + 0,48\ \vec{j}$

Es. 2 <u>Idrostatica in sistema non inerziale</u>





Forze d' inerzia :

$$d\vec{F}_{centrifuga} = \rho \omega^2 r\ \vec{e}_r\ dV$$

$$d\vec{F}_{accelerazione} = \rho a\ \vec{e}_x\ dV$$

$$\vec{\nabla} p = \vec{f}_{effettive} = \rho \omega^2 r\ \vec{e}_r - \rho g\ \vec{e}_z - \rho a\ \vec{e}_x =$$

(in coordinate cilindriche) $\rho \omega^2 r\ \vec{e}_r - \rho g \vec{e}_z - \rho a \cos\theta\ \vec{e}_r +$

$$+ \rho a \sin\theta\ \vec{e}_\theta$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r - \rho a \cos\theta$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho a \sin\theta$$

$$\rightarrow p = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} - \rho a r \cos\theta - \rho g z + \text{cost.}$$

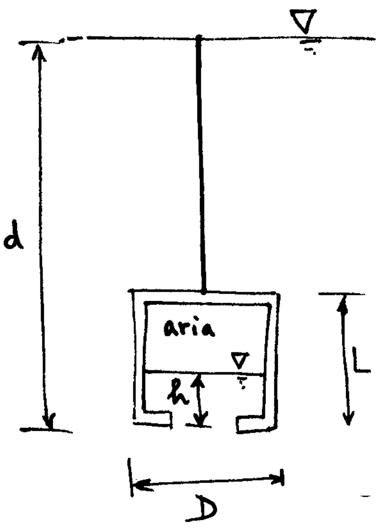
2. Forma della sup. libera : $p = p_{atm} = \text{cost}$

$$\rightarrow z_s = \frac{\omega^2 r^2}{2g} - \frac{a r \cos\theta}{g} + \text{cost.}$$

3. Min della sup. libera : $\frac{\partial z_s}{\partial r} = 0$

$$\rightarrow \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{a \cos\theta}{g} \quad \Rightarrow \quad r_{min} = \frac{a \cos\theta}{\omega^2}$$

Es. 3 Spinte su superfici immerse



Volume d'aria nella campana quando inizia l'immersione : $V_0 = \pi L \left(\frac{D}{2}\right)^2$

Compressione dell'aria a $T = \text{cost.}$:

$$p_{atm} V_0 = p V \Big|_{\text{fine immersione}}$$

$$p_{atm} = 10^5 \ [N\, m^{-2}]$$

$$V_0 = \pi L \left(\frac{D}{2}\right)^2 = 1.5708 \ [m^3]$$

$$V_{\text{fine immersione}} = (L-h)\,\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = (2-h)\,\frac{\pi}{4} \quad [m^3]$$

$$P_{\text{fine immersione}} = \frac{P_{atm}V_0}{V_{\text{fine immersione}}} = \frac{\pi/2\; 10^5}{(2-h)\frac{\pi}{4}} = \frac{2\times10^5}{2-h} \quad \left[\frac{N}{m^2}\right]$$

h = livello H_2O all'interno della campana. Il livello sale finché la pressione lato acqua e lato aria è uguale, cioè:

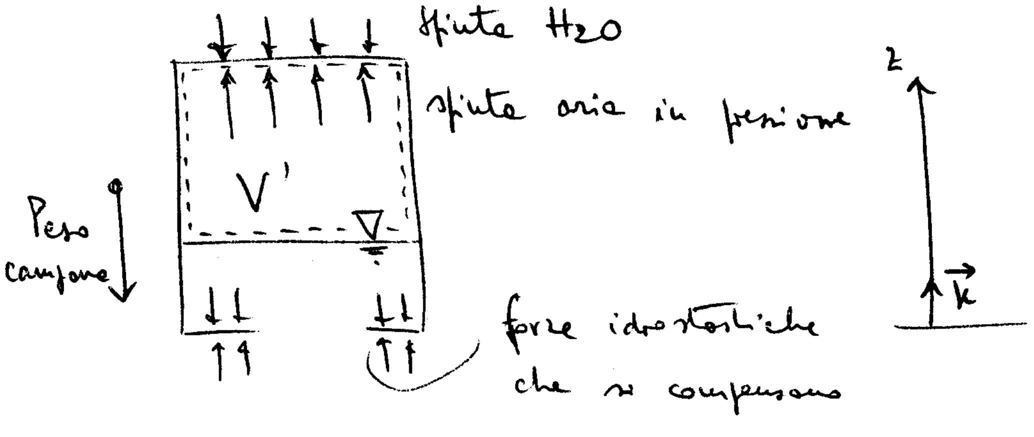
$$P_{atm} + \gamma_{H_2O}(d-h) = \frac{2\times10^5}{2-h} \;\rightarrow\; (2-h)\left[10^5 + 9810\,(10-h)\right] = 2\times10^5$$

1) $$h^2 - 22{,}193\,h + 20 = 0 \qquad h = \begin{cases} 21{,}25\,[m] \text{ non accettabile} \\ 0{,}941\,[m] \end{cases}$$

Quando h raggiunge la quota di 0,941 [m] la pressione

2) dell'aria nella campana sarà pari a $p_{\text{aria fine immersione}} = 188860\,[Pa]$

3) Quando la campana è a 10 [m] di profondità, le forze verticali sono:



$$\text{Spinta aria} + \text{spinta acqua} = \vec{k}\left(188860 - P_{atm} - \gamma_{H_2O}(d-L)\right)\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 =$$

$$\vec{k}\left(88860 - 9810\times 8\right)\times\pi\,\frac{1}{4} \cong \vec{k}\;8200 \quad [N]$$

Tale forza è anche uguale alla spinta di Archimede subita dal volume d'aria V':

$$\vec{k}\left(\gamma_{H_2O}(L-h)\,\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2\right) = \vec{k}\left(9810\times1{,}086\times\frac{\pi}{4}\right) \cong 8300 \quad [N]$$

La forza netta sulla campana è:

$$\vec{F}_v = \vec{k}\left[F_{archimede} - mg\right] = \vec{k}\left[\,8250 \quad - 47088\,\right][N]$$

quindi la campana affonderebbe se non fosse sostenuta, perché è soggetta ad una forza netta verso il basso di $\sim 38800\,[N]$

4) Rilasciando il vincolo, la campana comincerà ad affondare → la pressione dell'acqua aumenta ed aumenta anche la pressione dell'aria intrappolata. La nuova posizione di equilibrio si avrà quando:

$$P_{campana} = F_{Archimede}$$

$$47088 = \gamma_{H_2O}\,\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2(L-h) \quad \nRightarrow \quad L-h = 6.111\,[m]$$

IMPOSSIBILE

ciò significa che la campana non può riassestarsi in modo autonomo (h oltrepasserebbe L).

5) La campana non può riassestarsi → non si può quindi trovare una pressione dell'aria all'equilibrio. Si verifica una situazione in cui la campana continua a sprofondare sotto l'azione del suo peso $\left(F_{Archimede\,\underline{max}} = \gamma_{H_2O}\,L\,\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = 15409\,[N] \ll \text{Peso}\right)$

P.S. Si troverebbe una situazione di equilibrio nel caso del problema 3.18, p. 78, del libro di Pnueli e Gutfinger (in cui si ha $D = 2\,[m]$).