

UNIVERSITÀ DI GENOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA MECCANICA, ENERGETICA,
GESTIONALE E DEI TRASPORTI



TESI DI LAUREA TRIENNALE
IN
INGEGNERIA MECCANICA

Analisi del comportamento di treni di bolle in una cella di Hele-Shaw

Relatore:

Prof. Alessandro Bottaro

Studente:

Federico Luigi Zanella

Anno accademico 2025/2026

Sinossi

In questo lavoro di tesi, vengono analizzate le caratteristiche principali di treni di bolle e del loro flusso all'interno di celle separate da uno spessore molto piccolo, note come celle di Hele-Shaw. In primo luogo viene presentata la trattazione matematica del flusso che si sviluppa al suo interno e della frequenza di deformazione delle bolle dovuta all'interfaccia con il fluido. In seguito, vengono analizzati il diametro e la forma delle bolle, la distanza tra di esse, la lunghezza d'onda, l'ampiezza e la frequenza di oscillazione del treno, la quale viene rapportata alla frequenza naturale di deformazione per verificare la presenza di eventuali correlazioni, come, ad esempio, fenomeni di risonanza. Tutte queste caratteristiche sono normalizzate attraverso i principali numeri adimensionali (Reynolds, Archimede, Strouhal, capillarità, Weber, Bond) per rendere maggiormente confrontabili i risultati. Lo scopo principale è quello di individuare delle correlazioni tra i vari parametri adimensionali, in particolare quando si verifica la transizione dal regime di stabilità dei treni a quello di instabilità, ovvero quando le bolle cominciano ad interagire fra di loro, rendendo il moto di risalita caotico e irregolare.

Indice

Sinossi	i
1 Introduzione	1
1.1 Cosa è una cella di Hele-Shaw	1
1.2 Stato dell'arte	4
1.3 Possibili applicazioni degli studi eseguiti in una cella di Hele-Shaw . . .	6
2 Teoria della cella di Hele-Shaw	7
2.1 Flusso monofase	7
2.2 Frequenza propria di oscillazione di una bolla	12
3 Apparato sperimentale e rilevazione delle misure	15
3.1 Apparato sperimentale	15
3.2 Rilevazione delle misure	18
4 Osservazione e risultati	21
4.1 Diametro medio delle bolle	26
4.2 Distanza tra le bolle e periodicità della scia	35
4.3 Frequenza di oscillazione dei treni di bolle	40
Conclusione	44
Bibliografia	47

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Cosa è una cella di Hele-Shaw

Era il primo giugno del 1899 quando l'ingegnere inglese Henry Selby Hele-Shaw, allora quarantacinquenne, venne eletto membro della Royal Society per i risultati ottenuti nel campo della fluidodinamica. I suoi studi analizzarono il flusso dell'acqua intorno ad un oggetto posto all'interno di uno spazio ristretto tra due superfici piane: in queste particolari condizioni, il flusso apparve governato da leggi fisiche inaspettate, suscitando un grande interesse a partire dai ricercatori dell'epoca fino ad arrivare ai giorni nostri. L'importanza dei suoi studi fu tale che lo strumento da lui utilizzato per studiare il flusso, composto da due superfici piane poste ad una piccola distanza fra di loro, prende il suo nome: la cella di Hele-Shaw.

Primo professore d'ingegneria all'università di Bristol all'età di ventisette anni e, quattro anni dopo, primo professore d'ingegneria all'università di Liverpool, Hele-Shaw diede un contributo significativo nel settore dell'educazione tecnica nel campo dell'ingegneria, partecipando inoltre alla costruzione di tre importanti college. Dalle testimonianze dei suoi studenti, emerge il suo talento nel realizzare strumenti in modo da illustrare visivamente i principi alla base di differenti fenomeni. Tuttavia, viene messa in luce anche la sua grande attenzione nei confronti della cinematica dei meccanismi, che evidenzia la sua vena di inventore. Infatti, a partire dal 1906, Hele-Shaw abbandonò la vita accademica per dedicarsi allo sviluppo e alla realizzazione delle proprie invenzioni. Egli contribuì in diversi settori, da quello navale a quello automobilistico e infine aeronautico, e tra le sue invenzioni principali si ricordano le eliche a passo variabile, che fornivano al velivolo un aumento della spinta in fase di decollo, una frizione automobilistica che sfruttava la viscosità di un fluido invece

dell'attrito tra superfici, una trasmissione automobilistica idraulica, che permetteva un rapporto infinito e anche reversibile, nonché il giunto "Victaulic" per collegare le estremità di due tubi. Tuttavia, ciò che gli permise di vincere la "medaglia d'oro dell'istituto degli architetti navali" nel 1898 e, l'anno seguente, di essere eletto membro della Royal Society furono proprio i suoi studi nel campo della fluidodinamica.

Nelle sue lezioni sul moto dei fluidi, Hele-Shaw stava cercando di rendere visibili le linee di flusso dell'acqua attorno ad un oggetto contenuto in una "lantern slide" (strumento da lui inventato che permetteva di osservare il flusso intorno all'oggetto attraverso una lente). Inizialmente provò con sostanze coloranti e, in seguito, con particelle solide (come sabbia o spermaceti), ma non ottenne buoni risultati, poiché le prime si mischiavano con l'acqua, mentre le seconde si depositavano dove si formavano dei vortici, alterando il flusso. Tuttavia, un giorno, una crepa lasciò entrare delle piccole bolle d'aria e queste, agendo da tracciante, permisero la visualizzazione delle linee di flusso in modo chiaro e definito. In questo modo, Hele-Shaw poté mostrare le caratteristiche dei flussi attraverso oggetti differenti, tra cui scafi navali. Ciò che attirò maggiormente l'interesse dell'ingegnere inglese fu la regione trasparente che appariva sempre intorno alla superficie del corpo immerso. Egli affermò [Hele-Shaw, 1898, 1901] che "la linea chiara che si forma sul confine rappresenta una condizione di flusso degli strati d'acqua parallelo rispetto alla superficie dell'oggetto [...] dove è presente uno stato di taglio, mentre al di fuori, nella zona più scura, l'acqua è in uno stato di moto sinuoso, che corrisponde allo stato di maggiore velocità dell'acqua", aggiungendo in seguito "Ora, mentre il professor Reynolds era sorpreso dalla repentinità nel tempo in cui si manifesta il cambio di stato all'aumentare della velocità oltre un valore critico, il precedente esperimento sembra mostrare una repentinità nella posizione, che è ancor più sorprendente". Per studiare questo stato trasparente, Hele-Shaw provò a limitare il flusso costruendo delle celle le cui superfici erano poste ad una distanza pari allo spessore della regione stessa. In questo modo poté osservare che, ad una distanza di circa 0.5 mm tra le pareti, per ogni velocità dell'acqua che sperimentò si instaurava un flusso laminare stabile. I suoi primi risultati furono pubblicati dalla "Istituzione degli architetti navali" nel 1898 e gli permisero inizialmente di confrontare le linee di flusso attorno ad un oggetto cilindrico con quelle calcolate dalla funzione del modello del vortice di Lamb. In seguito, Hele-Shaw mostrò una corrispondenza tra le linee di forza calcolate da Clerk Maxwell di una grata sulla parete di un contenitore metallico che racchiude un conduttore con le linee di flusso ottenute dall'accoppiamento di una sorgente con un pozzo. Infine, le linee di flusso ottenute con una lastra piana inclinata rispetto

alla direzione del flusso vennero confrontate con i risultati matematici, mostrando una corrispondenza tra i due. Il legame tra i risultati ottenuti sperimentalmente nei suoi lavori e quelli derivanti dall'analisi matematica degli stessi casi suscitò grande interesse nella comunità scientifica e, per questo motivo, come già accennato, nel 1899 Hele-Shaw venne eletto membro della “Royal Society” e vinse il premio “medaglia d'oro dell'istituzione degli architetti navali”. Anche il fisico George Stokes mostrò interesse negli studi di Hele-Shaw e, nello stesso anno, pubblicò un “teorema” come appendice di alcuni risultati degli esperimenti di Hele-Shaw [Stokes, 1898]: egli dimostrò che il flusso di un fluido viscoso in un film sottile è governato dalle stesse leggi di un flusso inviscido potenziale. Questa scoperta fu di tale importanza che sulla rivista scientifica *Nature* fu pubblicato che “il teorema di Sir George Stokes diede grande importanza a questo lavoro” e che “gli studi del professor Hele-Shaw permisero all'idrodinamica di entrare nel campo delle scienze sperimentali”. Stokes affermò inoltre che “gli esperimenti di Hele-Shaw offrono una soluzione grafica completa, ottenuta sperimentalmente, ad un problema che, per la sua complessità, ostacolò i matematici, eccetto in alcuni semplici casi”.

Queste affermazioni mettono in luce che all'interno di una cella di Hele-Shaw, composta da due lastre piane parallele poste ad una piccola distanza fra di loro, si determinano condizioni al contorno tali da semplificare lo studio analitico del flusso che vi si sviluppa e da permetterne sperimentalmente la visualizzazione. Per tutto il diciannovesimo secolo, fino ai giorni nostri, numerosi sono gli studi eseguiti con la cella di Hele-Shaw grazie al suo vasto campo di applicazione nella sperimentazione.

1.2 Stato dell'arte

Gli studi condotti da Hele-Shaw hanno cambiato il modo di analizzare e visualizzare il flusso di un fluido e hanno inoltre influenzato la maniera di condurre esperimenti nel campo della fluidodinamica. Per questo motivo, già a seguito della pubblicazione dei suoi risultati e fino ai giorni nostri, la cella di Hele-Shaw e, più in generale, celle di piccolo spessore sono state oggetto di numerosi studi. Tra i principali vi è l'articolo pubblicato dal fisico Geoffrey I. Taylor e dal matematico Philip G. Saffman nel 1958 [Saffman and Taylor, 1958]: essi hanno descritto il moto di bolle in risalita all'interno della cella ed inoltre hanno concentrato la loro analisi sull'analogia del flusso in una cella di Hele-Shaw con quello che si sviluppa attraverso un mezzo poroso. Le caratteristiche di un treno di bolle e le interazioni che si sviluppano all'interno dello stesso sono state studiate nel 1986 dal fisico Tony Maxworthy [Maxworthy, 1986] e nel 2002 da Guillaume Mougin e da Jacques Magnaudet [Mougin and Magnaudet, 2002]. Il primo articolo ha, in particolare, analizzato i fenomeni della coalescenza delle bolle, ovvero il fenomeno per cui più bolle si uniscono per formarne una, del tip-splitting, ossia la separazione del treno in due paralleli, e dell'unione di due bolle di diametro molto differente, in cui quella più piccola si deposita sul 'naso' di quella più grande provocando un cambiamento dell'ellitticità e determinando un aumento della velocità di risalita. Nel secondo articolo, invece, viene analizzata numericamente l'instabilità del treno di bolle, che segue il tipico percorso a zig-zag e, in tre dimensioni, a spirale. Il fenomeno della coalescenza tra due bolle è stato studiato anche da Patricia Ern e Véronique Roig [Huisman et al., 2012] che hanno mostrato come la bolla antecedente mantenga una velocità di risalita costante, mentre quella posteriore accelera fino all'unione. Le stesse autrici hanno pubblicato un articolo nel 2015 [Filella et al., 2015] in cui vengono analizzate le oscillazioni delle bolle e dei vortici nella loro scia. Lo studio condotto da Xiang nel 2022 [Xiang et al., 2022] analizza gli effetti che la presenza di una parete ha sulle caratteristiche del treno di bolle e propone un'analisi analitica del moto a zig-zag delle bolle. Tali effetti sono stati studiati anche da Patricia Ern e Véronique Roig [Pavlov et al., 2021], nello specifico l'influenza di un doppio confinamento sulla velocità, sulla scia e sulla deformazione delle bolle. Tra gli studi più recenti, quello condotto nel gruppo di ricerca di Howard A. Stone presso l'Università di Princeton [Wu et al., 2024] analizza l'interazione tra due bolle, ovvero il modo in cui esse si muovono, superandosi o collidendo, fino a fondere l'una nell'altra. Poco tempo dopo, sempre il gruppo di Princeton, pubblica un altro articolo [Booth et al., 2025] in cui le

bolle vengono considerate come dipoli, approssimazione che permette di semplificare in modo significativo l'analisi numerica. Nel 2022, Benjamin Monnet [Monnet et al., 2022] pubblica un articolo in cui analizza la velocità di risalita, la deformazione e il coefficiente di resistenza delle bolle nella transizione tra regime viscoso ed inerziale. Nel 2024 pubblica un altro articolo Monnet et al. [2024], nel quale analizza l'andamento della velocità di risalita in relazione all'angolo di inclinazione delle celle. Egli osserva inoltre un'asimmetria dello spessore del film liquido intorno alla bolla nella cella inclinata dovuta alle forze di galleggiamento e cerca di individuare in tale fenomeno il motivo della discrepanza tra i risultati ottenuti sperimentalmente e teoricamente.

1.3 Possibili applicazioni degli studi eseguiti in una cella di Hele-Shaw

- **Ingegneria petrolifera e stoccaggio di CO₂:** Sfruttando l'analogia con il flusso attraverso un mezzo poroso, è possibile studiare la formazione e la coalescenza di bolle e il fenomeno del “viscous fingering” che si presenta all'interfaccia di due flussi dalle densità e viscosità differenti (denominata anche instabilità di Saffman-Taylor in nome degli ingegneri che studiarono le sue caratteristiche).
- **Microfluidica e dispositivi LOC (lab-on-a-chip):** Treni di bolle, creazione controllata e coalescenza di bolle sono centrali nei reattori a bolle bifase e nella microfluidica digitale. La cella di Hele-Shaw permette la visualizzazione su scala maggiore di questi fenomeni.
- **Dispositivi di trasferimento di massa e calore, reattori chimici e bio-reattori:** Il trasferimento di calore e di massa allo stato bifase gas-liquido è influenzato dal comportamento delle bolle nel fluido. La progettazione di colonne a riempimento e di microraettori è definita dallo studio di come forma e dimensioni influenzino la coalescenza e l'interazione delle scie delle bolle.
- **Geofisica e geotermia:** La cella di Hele-Shaw permette di studiare i fenomeni della formazione di colonne di bolle di gas, la velocità di risalita di raggruppamenti di bolle e le dinamiche di intrappolamento di gas.
- **Bioingegneria:** L'analisi della dimensione, del moto e della coalescenza delle bolle permette di studiare, per esempio, l'ossigenazione sanguigna oppure le macchine cuore-polmone per la circolazione extra-corporea.

Capitolo 2

Teoria della cella di Hele-Shaw

2.1 Flusso monofase

Per analizzare il flusso che si sviluppa all'interno di una cella di Hele-Shaw attorno ad un oggetto, si considerino due scale spaziali molto differenti tra loro definite dalla geometria stessa della cella. Ciò permette di semplificare le equazioni di Navier-Stokes anche quando il numero di Reynolds non sia necessariamente piccolo.

Con riferimento alla figura 2.1.1, si possono identificare le due differenti scale spaziali: la prima, L , corrisponde al diametro del disco, mentre la seconda, h_0 , è data dalla altezza della cella. In questo modo si può introdurre il coefficiente ϵ , che è dato dal rapporto tra le due dimensioni spaziali: poiché $h_0 \ll L$, risulta quindi $\epsilon = h_0/L \ll 1$. Denominando u^* , v^* e w^* le componenti della velocità lungo, rispettivamente, gli assi x^* , y^* e z^* , le equazioni tridimensionali di Navier-Stokes e l'equazione di continuità

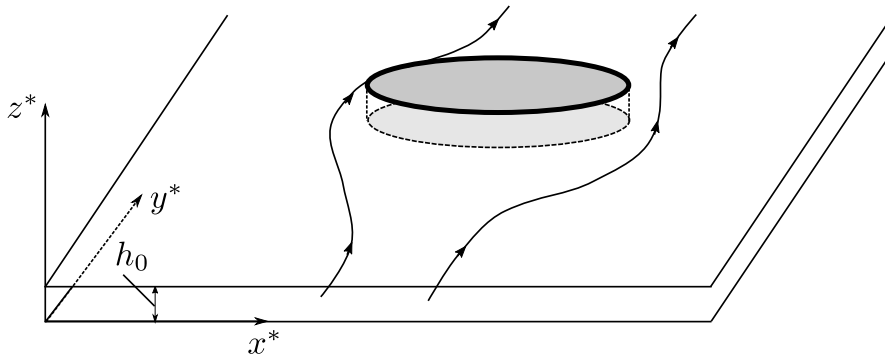


Figura 2.1.1 Flusso di Hele-Shaw intorno ad un ostacolo.

risultano essere:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} - \nu \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) = 0, \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} - \nu \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} \right) + g = 0, \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} - \nu \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right) = 0, \quad (2.1c)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0. \quad (2.1d)$$

Si è assunto che la gravità operi nella direzione negativa dell'asse y^* , da cui risulta $\mathbf{g} = (0, -g, 0)$. In un fluido omogeneo monofase di densità costante ρ (e viscosità cinematica ν), è possibile introdurre la pressione modificata $\pi^* = p^* + \rho g y^*$, dove p^* è la pressione statica e $\rho g y^*$ è il potenziale gravitazionale. Si voglia ora normalizzare le equazioni precedenti. Poiché sono presenti due scale spaziali differenti tra loro, è ragionevole rendere le coordinate x^* e y^* adimensionali con L e utilizzare h_0 per scalare la coordinata z^* . Conseguentemente, si assuma che le componenti della velocità nel piano della cella abbiano modulo differente rispetto alla componente trasversa, per questo motivo esse sono normalizzate rispettivamente con U e V . Dall'equazione di continuità (2.1d) si può notare come i primi due termini sono dell'ordine di U/L e l'ultimo dell'ordine di V/h_0 . Risulta quindi che la componente trasversa di velocità deve essere di ordine $V \approx U (h_0/L) = \epsilon U$. Le differenti scale di adimensionalizzazione sono dunque le seguenti:

$$t = \frac{t^*}{L/U}, \quad (x, y) = \frac{(x^*, y^*)}{L}, \quad z = \frac{z^*}{h_0}, \quad (u, v) = \frac{(u^*, v^*)}{U}, \quad w = \frac{w^*}{\epsilon U}, \quad p = \frac{\pi^*}{P}, \quad (2.2)$$

dove la scala di U è definita dalla velocità di una delle due superfici della cella o da quella imposta al fluido. Si noti che la scala P per la pressione modificata non è ancora stata definita. La forma adimensionale delle equazioni (2.1a-2.1d) risulta essere:

$$\epsilon^2 Re \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{h_0^2 P}{\mu U L} \frac{\partial p}{\partial x} - \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (2.3a)$$

$$\epsilon^2 Re \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{h_0^2 P}{\mu U L} \frac{\partial p}{\partial y} - \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad (2.3b)$$

$$\epsilon^4 Re \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{h_0^2 P}{\mu UL} \frac{\partial p}{\partial z} - \epsilon^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \epsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0, \quad (2.3c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.3d)$$

dove il numero di Reynolds $Re = UL/\nu$ è stato definito utilizzando la scala dimensionale maggiore L . Nelle equazioni precedenti, i termini convettivo e gravitazionale sono moltiplicati per $\epsilon^2 Re$, il quale viene denominato “numero di Reynolds ridotto”. Si può osservare che un termine viscoso è molto maggiore degli altri, poiché $\epsilon \ll 1$. Questo dimostra che si sta considerando un flusso governato dagli effetti viscosi: infatti, ad esempio nell’equazione (2.3a), il termine dominante è $\partial^2 u / \partial z^2$. Questo permette di determinare la scala di pressione P , poiché il gradiente di pressione deve essere scalato come $\partial^2 u / \partial z^2$ e risulta dunque $P \approx \mu UL / h_0^2$. Infine, assumendo $Re \approx 1$ o minore, le precedenti equazioni posso essere semplificate ottenendo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (2.4b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (2.4c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.4d)$$

Si noti che, affinché queste equazioni siano valide, è necessario che il numero di Reynolds ridotto sia piccolo e non il numero di Reynolds in sé: ciò permette di estendere notevolmente il campo di applicazione delle equazioni precedenti. L’equazione del moto nella direzione z (2.4c) implica che la pressione è invariante lungo quella direzione; questo è lo stesso risultato che si ottiene nel caso delle equazioni di strato limite e di piccoli spessori di acqua, poiché anche in questo caso si possono individuare due scale spaziali molto differenti fra loro. Integrando le equazioni (2.4a) e (2.4b) lungo la direzione z da 0 a 1, considerando nulle le velocità di parete, si ottiene:

$$u = -\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} z(1-z), \quad (2.5a)$$

$$v = -\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial y} z(1-z). \quad (2.5b)$$

Integrando ora l’equazione di continuità (2.4d) lungo la direzione z da 0 a 1, si ottiene

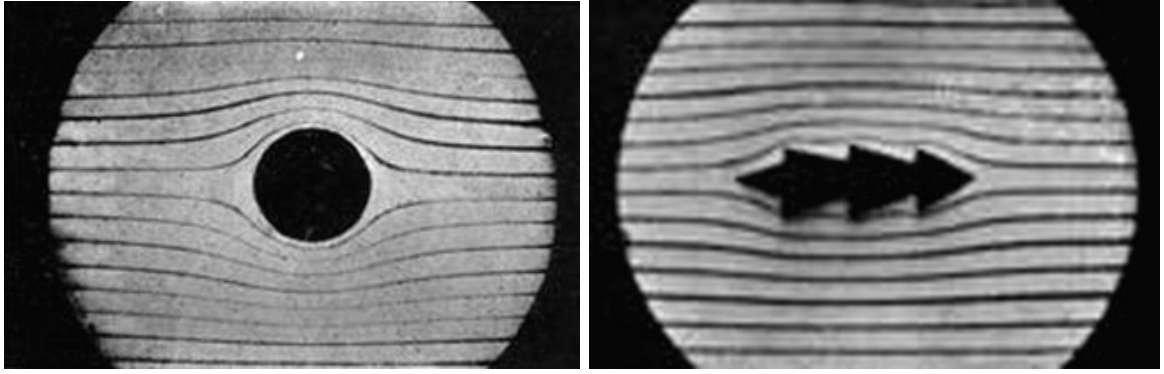


Figura 2.1.2 Fotografie originali scattate da Hele-Shaw nel 1898 Hele-Shaw [1898] di un flusso bidimensionale che attraversa oggetti di forma differente.

che la pressione statica è descritta da una funzione armonica, ovvero:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0. \quad (2.6)$$

È così possibile definire le componenti di velocità media come:

$$\bar{u} = \int_0^1 u \, dz = -\frac{1}{12} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \bar{v} = \int_0^1 v \, dz = -\frac{1}{12} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (2.7)$$

Da queste equazioni si nota che la pressione (divisa per un fattore -12) può essere interpretata come una funzione potenziale del vettore di velocità media $\bar{\mathbf{q}} = (\bar{u}, \bar{v})$. Poiché la pressione soddisfa l'equazione di Laplace (2.6) nel piano (x, y) , esse corrispondono esattamente alle equazioni che governano un flusso bidimensionale potenziale ed irrotazionale. Questo risultato è alquanto sorprendente, siccome, tipicamente, un flusso è irrotazionale (e quindi ammette un potenziale di velocità) quando gli effetti viscosi sono trascurabili. L'analogia tra un flusso che si sviluppa tra due superfici piane separate da una piccola distanza e un flusso potenziale implica che la cella di Hele-Shaw può essere utilizzata per visualizzare flussi bidimensionali irrotazionali attraverso oggetti, come si può osservare dalle immagini originali di Hele-Shaw nella figura 2.1.2. Si noti che al contorno dell'oggetto non è possibile imporre la condizione di aderenza poiché la velocità media $\bar{\mathbf{q}}$ si annulla sulla sua superficie. Ciò può essere spiegato dal fatto che in prossimità dell'oggetto le assunzioni da cui derivano le equazioni 2.4a-2.4c non sono più valide: infatti, intorno alla superficie si forma uno strato limite nel quale l'approssimazione di film sottile non vale e il flusso è tridimensionale.

In forma dimensionale, le componenti della velocità media sono:

$$\bar{u}^* = -\frac{h_0^2}{12\mu} \frac{\partial p^*}{\partial x^*}, \quad \bar{v}^* = -\frac{h_0^2}{12\mu} \left(\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \rho g \right). \quad (2.8)$$

Queste corrispondono esattamente alle componenti di velocità media per un flusso che si sviluppa all'interno di un mezzo poroso isotropo di permeabilità $h_0^2/12$, come espresso dalla legge di Darcy Darcy [1856]; Muskat [1937]; Mei and Vernescu [2010]. Queste due componenti di velocità formano un campo vettoriale bidimensionale solenoidale:

$$\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial y^*} = 0. \quad (2.9)$$

2.2 Frequenza propria di oscillazione di una bolla

Nell'analisi che segue si assuma l'ipotesi che il flusso che si sviluppa intorno alla bolla sia potenziale ($\vec{u} = \nabla\phi$) e si consideri la velocità nulla a distanza infinita dalla bolla stessa ($r \rightarrow \infty \implies u_\infty = 0$). Dalle equazioni di Navier-Stokes risulta quindi:

$$P = P_\infty - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (2.10)$$

Poiché le bolle si trovano all'interno di una cella di Hele-Shaw, si consideri che le deformazioni della stessa avvengano sul piano. In questo modo, il raggio può essere espresso come:

$$r(\theta, t) = R + \delta(\theta, t), \quad (2.11)$$

dove $\delta(\theta, t)$ rappresenta la deformazione dovuta all'oscillazione, che può essere analizzata considerando una singola armonica di ordine n della serie di Fourier, dove n definisce la geometria di deformazione:

$$\delta(\theta, t) = \delta_n(t) \cos(n\theta), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.12)$$

Per ricavare l'espressione del potenziale, si applichi il metodo di separazione delle variabili. Dall'equazione di continuità per un fluido incompressibile risulta che:

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (2.13)$$

che in coordinate polari equivale a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (2.14)$$

Si ponga quindi:

$$\phi(r, \theta, t) = S(r) P(\theta) T(t). \quad (2.15)$$

Da ciò si ottiene:

$$\begin{cases} -\frac{1}{P} P'' = k \\ \frac{r^2}{S} S'' + \frac{r}{S} S' = k \end{cases} \quad (2.16)$$

Dalla prima equazione si ricava che:

$$P = C_1 \cos(\sqrt{k}\theta) + C_2 \sin(\sqrt{k}\theta), \quad (2.17)$$

e, per simmetria delle deformazioni su θ , deve valere $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$, per cui $\sqrt{k} = n$, quindi:

$$P = C_1 \cos(n\theta). \quad (2.18)$$

La seconda equazione è del tipo di Eulero-Cauchy, per cui:

$$S = C_1 r^n + C_2 r^{-n}. \quad (2.19)$$

Considerando le ipotesi iniziali, si ottiene dunque:

$$\phi(r, \theta, t) = C(t) r^{-n} \cos(n\theta). \quad (2.20)$$

Ora si consideri l'interfaccia tra la superficie della bolla e il fluido. Devono valere le seguenti condizioni al contorno:

$$v(R) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{\partial \delta}{\partial t}, \quad (2.21a)$$

$$P_g - P_l = \kappa \sigma, \quad (2.21b)$$

$$P_l - P_{l0} = -\rho \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_R, \quad (2.21c)$$

dove P_g è la pressione gas interno alla bolla, P_l è la pressione del fluido, definita come la somma dei contributi statico (P_{l0}) e dinamico (p_{l0}). Dall'equazione 2.21a si ricava:

$$\dot{\phi} \Big|_R = -\frac{\ddot{\delta}_n R}{n} \cos(n\theta). \quad (2.22)$$

Per sviluppare l'equazione 2.21b è necessario prima definire la curvatura della bolla. In coordinate polari viene definita come:

$$\kappa = \frac{|r^2 + 2r_\theta'^2 - rr_\theta''|}{(r^2 + r_\theta'^2)^{3/2}}. \quad (2.23)$$

Sostituendo al raggio l'equazione 2.11 e applicando l'approssimazione di Taylor $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$, si ottiene:

$$\kappa = \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2}(\delta + \delta''_\theta), \quad (2.24)$$

perciò:

$$P_g - P_l = \sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{n^2 - 1}{R^2} \delta_n \cos(n\theta) \right). \quad (2.25)$$

Dall'equazione 2.21c si ricava:

$$p_{l0} = \rho \frac{\ddot{\delta}_n R}{n} \cos(n\theta). \quad (2.26)$$

Ricavando p_{l0} dall'equazione 2.25 ed eguagliando quindi 2.25 e 2.26, si ottiene:

$$\rho \ddot{\delta}_n \frac{R}{n} + \delta_n \left(\sigma \frac{n^2 - 1}{R^2} \right) = 0. \quad (2.27)$$

Essa equivale all'espressione di un oscillatore armonico, la cui pulsazione equivale a:

$$\omega_0^2 = n(n^2 - 1) \frac{\sigma}{\rho R^3}. \quad (2.28)$$

Si consideri il modo corrispondente a $n = 2$, perché ad esso corrisponde l'oscillazione fondamentale. Per $n = 0$ e $n = 1$ non si verificano deformazioni oscillatorie ma, rispettivamente, una perturbazione puramente radiale e uno spostamento rigido. Infatti, per entrambe il valore della pulsazione è nullo. Si ottiene dunque:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{6\sigma}{\rho R^3}}, \quad (2.29)$$

cui corrisponde la frequenza f_0 :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6\sigma}{\rho R^3}}. \quad (2.30)$$

Lo scopo di ricavare la frequenza naturale di deformazione delle bolle è quello di determinare la presenza di correlazioni con la frequenza di oscillazione del treno di bolle, come, ad esempio, fenomeni di risonanza (4.3).

Capitolo 3

Apparato sperimentale e rilevazione delle misure

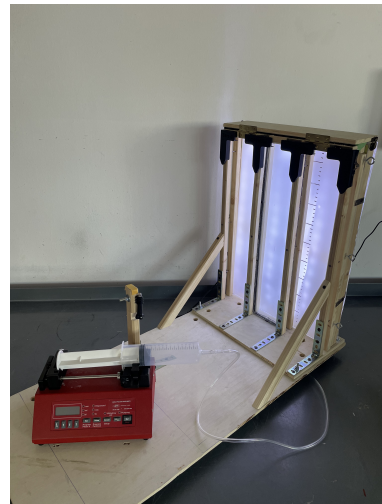
3.1 Apparato sperimentale

Per eseguire gli studi sono state costruite ed utilizzate tre celle di Hele-Shaw. Ognuna di esse è costituita da due lastre piane di vetro di 11 cm di larghezza, 50 cm di altezza e 0,4 cm di spessore, tra le quali la distanza è pari a 0,85 mm per la prima cella, 1,7 mm per la seconda e 2,6 mm per la terza (per semplicità, in seguito vi si farà riferimento come, rispettivamente, cella 1, cella 2 e cella 3). Tra le celle è stato interposto uno spessore ricavato con una stampante 3D FDM con filamento di PLA. L'accuratezza del risultato dipende da molti fattori, come le proprietà del materiale, la temperatura e l'umidità ambientali. Tuttavia, si può stimare una precisione compresa tra 0,15 mm e 0,30 mm. La struttura di supporto che mantiene le celle in posizione verticale è stata realizzata in legno, poiché questo materiale possiede buone capacità di smorzamento delle vibrazioni ed inoltre unisce grande flessibilità a semplicità di lavorazione. Il sistema di immissione dell'aria è composto da una pompa per siringhe (modello AL-1000) che permette l'erogazione di una portata costante, un tubo in PVC di circa 1 m e una valvola di non ritorno per impedire che l'acqua scenda dalla cella nel tubo. L'aria viene inoltre immessa all'interno della cella attraverso un ago a punta piatta collocato nella parte inferiore in posizione verticale. Nel corso degli esperimenti sono state utilizzate varie misure di aghi: in riferimento ai diametri interni, per la cella 1 sono stati impiegati aghi da 0,4 mm e 0,6 mm, per la cella 2 da 1,2 mm ed infine 1,55 mm per la cella 3. Per ogni cella è stata scelta la dimensione di ago che avesse il diametro esterno subito inferiore allo spessore della cella. In questo modo si riduce al

minimo la dimensione del film fluido presente tra la bolla e la parete, dando così maggior credito all'analisi bidimensionale dei fenomeni studiati. Le celle sono state riempite con acqua demineralizzata (si veda la tabella 3.1.1 per le proprietà; in tutti i calcoli è stata trascurata la densità dell'aria rispetto a quella dell'acqua) ed è stato inoltre utilizzato, solo a scopo qualitativo, un fluido reoscopico, per poter visualizzare il flusso che si sviluppa dietro le bolle. Quest'ultimo è stato ottenuto per mezzo di una soluzione acquosa contenente cristalli di acido stearico (è stato ricavato seguendo le indicazioni dell'articolo di Borrero-Echeverry et al. [2018]). Quando il fluido si muove, i cristalli si orientano secondo la deformazione locale del fluido, permettendo la visualizzazione del moto. Posteriormente è stato collocato il sistema di retroilluminazione, costituito da LED a luce bianca, che permettono una miglior visualizzazione delle bolle. I video sono stati registrati con due fotocamere (GoPro Hero 9 e iPhone 12 Pro) ad alto *frame rate* (60-100-120 fps), in modo da poter analizzare meglio le caratteristiche del flusso, come la velocità e la traiettoria delle bolle. I dati sono stati ricavati attraverso l'utilizzo del software MatLab, che ha permesso di estrarre i fotogrammi dai video per l'analisi della dimensione delle bolle, di misurarne la velocità di risalita, di tracciarne le traiettorie e di effettuare varie altre misure sull'oscillazione del treno di bolle. Per tutte le caratteristiche sono stati ricavati i valori medi dei dati misurati estrapolati da video della lunghezza di circa 30 secondi.



(a)



(b)

Figura 3.1.1 Foto dell'attrezzatura utilizzata per condurre gli esperimenti.

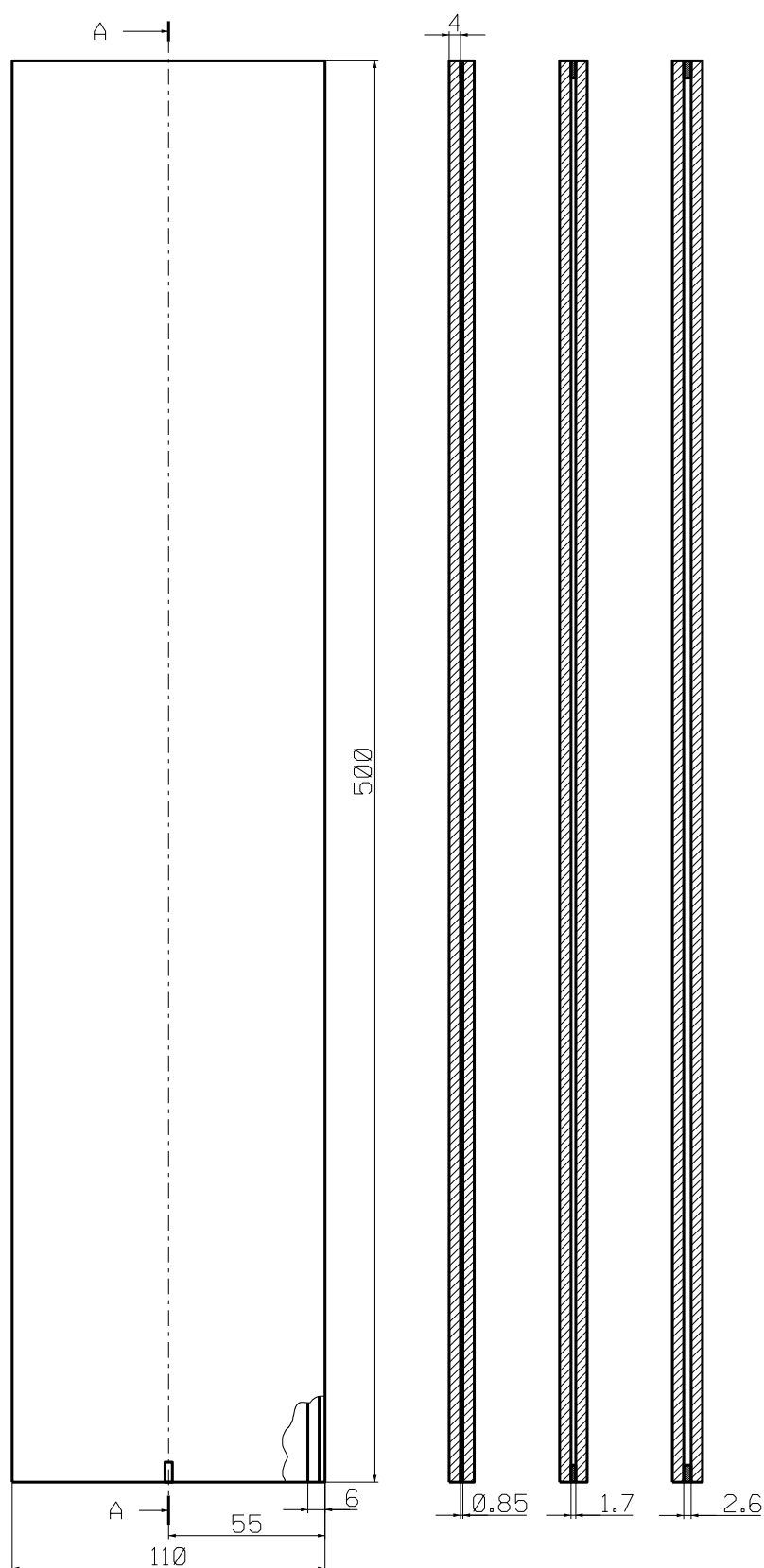


Figura 3.1.2 Vista frontale delle celle con le rispettive sezioni.

$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	$\mu \text{ (mPa s)}$	$\sigma \text{ (N/m)}$
998,6	1,05	0,073

Tabella 3.1.1 Proprietà dell'acqua a 18°C.

3.2 Rilevazione delle misure

In questo paragrafo viene spiegato come sono state effettuate le misure e vengono evidenziate le incertezze relative ad esse.

La prima misura rilevata è stata quella della temperatura dell'acqua, per poterne definire le proprietà. È stata misurata la temperatura ambientale con un termometro a fluido con sensibilità di 1°C.

Per determinare le dimensioni di lunghezza tramite il software MatLab, è stato necessario introdurre un sistema di calibrazione per convertire i pixel in millimetri. Per questo motivo, nelle immagini è stata inserita una scala di grandezza di riferimento: la distanza tra due segni neri orizzontali posti sulla destra è pari a 5 cm.

Per quanto riguarda la misura dei diametri medi delle bolle, da ogni video sono state estratti 10 fotogrammi. Ognuno di essi è stato analizzato con la funzione “*regionprops*” di MatLab, la quale calcola il diametro equivalente di una superficie pari a quello di un cerchio della stessa area. Risulta quindi:

$$D_{eq} = \sqrt{\frac{4 A}{\pi}}. \quad (3.1)$$

L'incertezza di questa misura è dovuta a quella legata alla valutazione dell'area, che dipende dalla densità di pixel dell'immagine. Esse hanno una densità pari a 72 ppi, che equivale a 0,35 mm per pixel. Le misure dei diametri equivalenti di MatLab posseggono quindi una deviazione standard pari a $\pm 0,2$ mm. Inoltre, è presente anche la varianza dovuta alle misure ripetute dei diametri medi delle bolle: per ogni valore di portata immessa nella cella, sono stati raccolti almeno 10 valori. La deviazione standard assume valori compresi tra 0,8 mm (laddove, essendo a bassi valori del numero di Reynolds, è stato possibile ricavare solo 10 valori) e 0,10 mm (dove sono stati ricavati più di 50 valori), con valor medio pari a 0,18 mm. L'errore totale sul diametro può essere calcolato attraverso la composizione quadratica media: tale valore risulta essere pari a

0,2 mm. Per cui il diametro medio delle bolle è:

$$D = D_{eq} \pm 0,2 \text{ mm} \quad (3.2)$$

e, considerando la misura minima rilevata, corrisponde ad un errore relativo del 4,6%.

Un'altra caratteristica è la velocità di risalita delle bolle. Nell'analisi è stato individuato il valor medio della componente parallela alla direzione del moto. Tale valore è stato ottenuto tracciando manualmente dieci bolle per ogni video in dieci momenti differenti. Nelle situazioni di instabilità (quando le bolle iniziano ad interagire fra di loro), la velocità è stata ricavata sia prima che questi effetti fossero rilevanti, ovvero in prossimità dell'ago di immissione, sia considerando le bolle "inseguite" perché, come dimostrato da Pavlov et al. [2021], per loro essa è costante. La velocità è stata determinata attraverso MatLab, il quale ha permesso di misurare la distanza percorsa verticalmente tra due punti considerando il tempo impiegato. L'errore sulla velocità è quindi composto da quello relativo alla misura della distanza e dalla varianza dovuta alla pluralità di punti per ogni bolla e alle misure ripetute per ogni video. Essendo il primo dell'ordine dei decimi di millimetro, esso può essere trascurato. Infatti, la deviazione standard della velocità delle singole bolle è nell'ordine dell'unità di centimetri al secondo, mentre quella relativa alle misure ripetute per ogni video ha valor medio pari a 0,66 cm/s. Quindi, applicando il metodo della composizione quadratica, si ottiene un errore totale pari a circa 1,1 cm/s. Per cui, la velocità media lungo la direzione parallela al moto è:

$$v = \bar{v} \pm 1,1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}, \quad (3.3)$$

con un errore relativo massimo pari a 10,8%.

Successivamente sono state ricavate le caratteristiche relative alle oscillazioni dei treni di bolle: distanza tra le bolle, lunghezza d'onda, ampiezza e inizio dell'oscillazione. L'immagine di figura 3.2.1 ne fornisce una visualizzazione. La distanza tra le bolle viene definita con la componente verticale. Tuttavia, è stato possibile misurarla tramite MatLab soltanto per bassi valori del numero di Reynolds, ovvero quando il treno è in una condizione di stabilità. Infatti, superata questa soglia, le bolle interagiscono fra di loro, non mantenendo quindi distanze regolari. Per questo motivo, come distanza fra le bolle è stata considerata quella in prossimità dell'uscita dall'ago, quando ancora gli effetti delle interazioni sono trascurabili. Soggetta a minor errore è la misura della frequenza d'uscita delle bolle, ottenuta visualizzando in sequenza i fotogrammi del video. Essendo stati registrati a 60 *fps* (si consideri il *frame rate* minore per l'errore

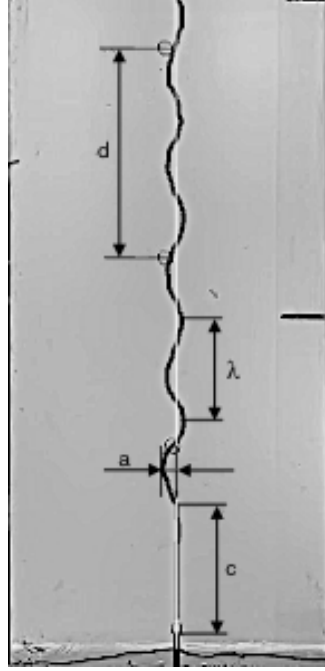


Figura 3.2.1 Visualizzazione delle caratteristiche dei treni di bolle: c è la distanza in cui iniziano le oscillazioni, a è la loro ampiezza, λ è la lunghezza d'onda e d è la distanza verticale tra due bolle consecutive.

maggiore), la sensibilità risulta quindi essere pari a $0,017 \text{ s}^{-1}$. Dato che la frequenza di uscita minore rilevata è poco maggiore dell'unità, se ne può trascurare l'errore relativo. Per questo motivo, si è misurata direttamente la frequenza e si è ricavata indirettamente la distanza tra le bolle come:

$$d = \frac{v}{f_u}. \quad (3.4)$$

Per quanto riguarda le misure della lunghezza d'onda, dell'ampiezza e dell'inizio delle oscillazioni, valgono le stesse considerazioni relative alla misura del diametro equivalente medio per l'errore dovuto al programma di MatLab. Risultano inoltre le deviazioni standard medie pari a 0,15 cm e 0,10 mm. Quindi:

$$\lambda = \bar{\lambda} \pm 0,04 \text{ cm}, \quad (3.5)$$

$$c = \bar{c} \pm 0,04 \text{ cm}, \quad (3.6)$$

$$a = \bar{a} \pm 0,2 \text{ mm}, \quad (3.7)$$

con gli errori relativi massimi rispettivamente pari a: 1,4%, 1,3% e 10%.

Capitolo 4

Osservazione e risultati

Lo studio effettuato si è concentrato sull'analisi di determinate caratteristiche dei treni di bolle al variare del numero di Reynolds: il diametro delle bolle, la distanza fra di esse e la loro frequenza di oscillazione. Nei grafici che seguiranno, i dati sono rappresentati mediante tre colori differenti, ognuno corrispondente ad una cella: il verde per la cella 1, il rosso per la cella 2, il blu per la cella 3.

In primo luogo, è importante notare che il modello teorico descritto in 2.1 è valido approssimativamente solo per la cella 1. La figura 4.0.1 mostra l'andamento del numero

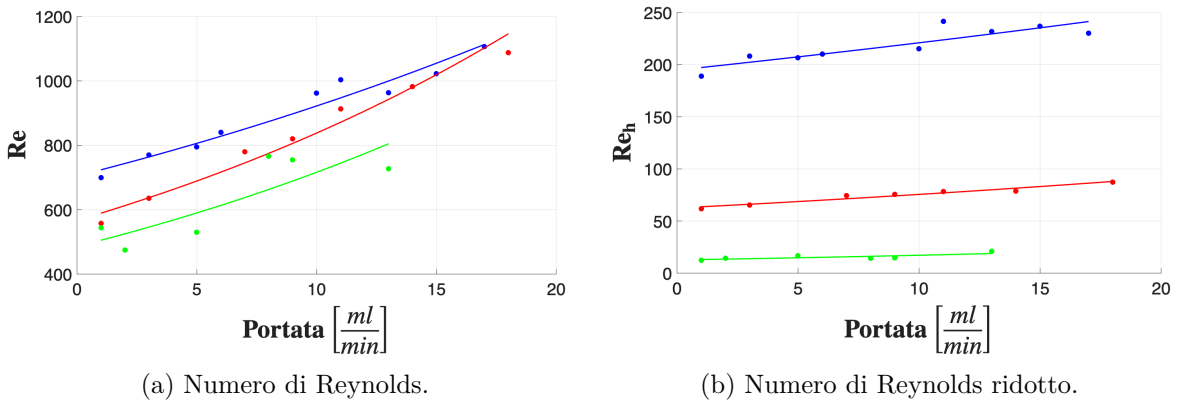
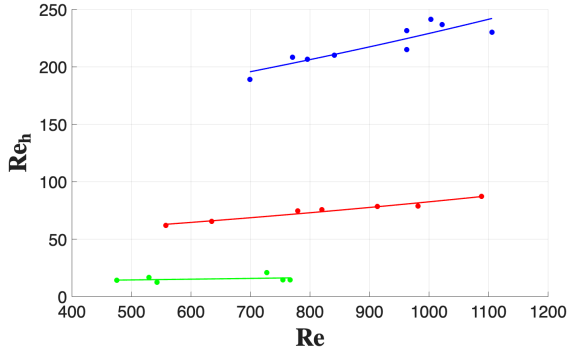
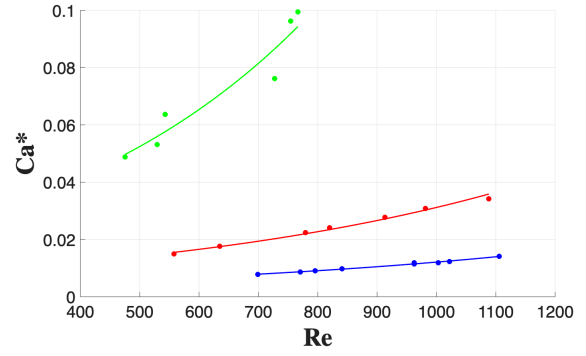


Figura 4.0.1 Andamento dei numeri di Reynolds e di Reynolds ridotto in funzione della portata d'aria.

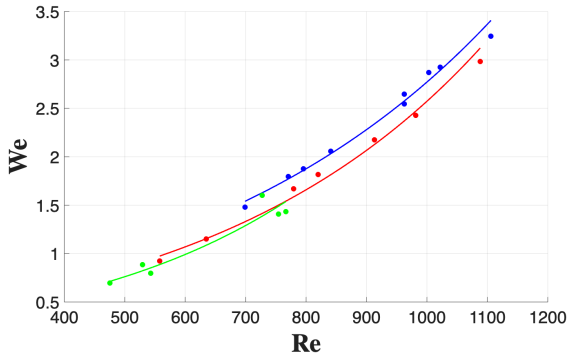
di Reynolds (4.0.1a) e del numero di Reynolds ridotto (4.0.1b) in funzione della portata d'aria immessa nelle celle. Si può osservare, infatti, in particolare nella figura 4.0.1b, che il valore del numero di Reynolds ridotto è dell'ordine di 10 solo per la cella 1, mentre per le altre è molto maggiore.



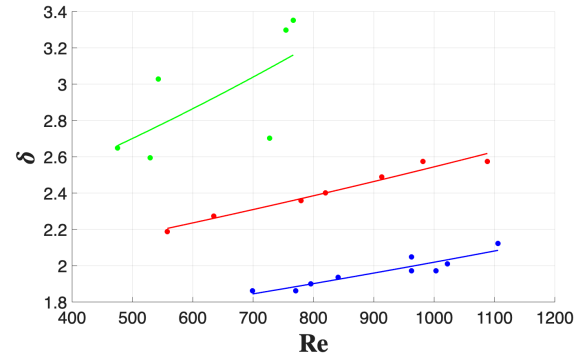
(a) Numero di Reynolds ridotto; $R_1^2 = 0,1$, $R_2^2 = 0,96$, $R_3^2 = 0,78$.



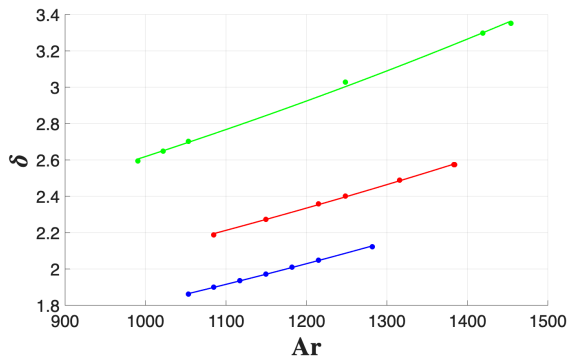
(b) Numero di capillarità ridotto; $R_1^2 = 0,91$, $R_2^2 = 0,98$, $R_3^2 = 0,99$.



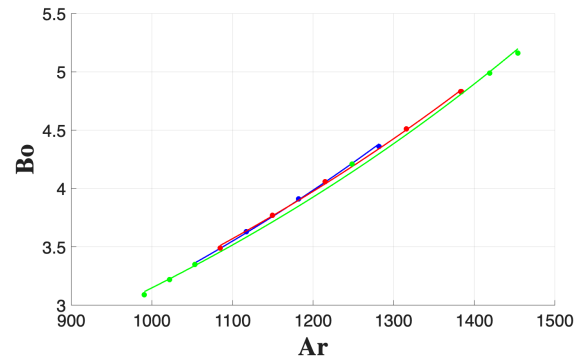
(c) Numero di Weber; $R_1^2 = 0,90$, $R_2^2 = 0,99$, $R_3^2 = 0,99$.



(d) Numero di Bretherton; $R_1^2 = 0,47$, $R_2^2 = 0,86$, $R_3^2 = 0,96$.



(e) Numero di Bretherton; $R_1^2 = 0,998$, $R_2^2 = 0,999$, $R_3^2 = 0,999$.



(f) Numero di Bond; $R_1^2 = 0,998$, $R_2^2 = 0,999$, $R_3^2 = 0,999$.

Figura 4.0.2 Confronto di cinque numeri adimensionali in funzione del numero di Reynolds e di Archimede.

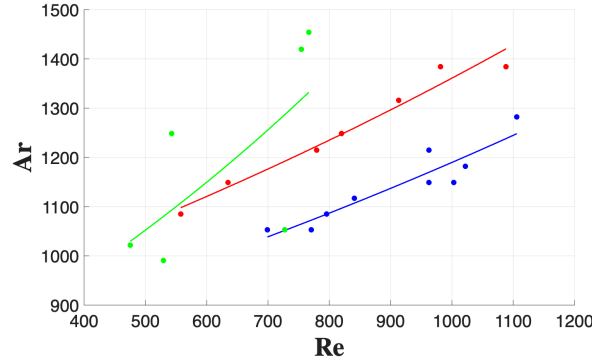


Figura 4.0.2 Numero di Archimede; $R_1^2 = 0,47$, $R_2^2 = 0,96$, $R_3^2 = 0,86$.

Successivamente, è importante valutare l'andamento di cinque numeri adimensionali per determinare quale regime si stia analizzando. Il primo è il numero di Reynolds ridotto, il quale rappresenta il rapporto tra il regime inerziale e quello viscoso. Introdotto nel capitolo 2.1, viene definito come:

$$Re_h = \left(\frac{\rho v D}{\mu} \right) \left(\frac{h}{D} \right)^2. \quad (4.1)$$

Deriva infatti dal bilancio della quantità di moto: la forza inerziale (per unità di volume) è proporzionale a $\rho v_b^2/d$, mentre il termine viscoso dominante deriva dal gradiente nello spessore, ovvero $\mu v_b/h_0^2$. Il loro rapporto è proprio Re_h . Quando $Re_h \ll 1$, dominano le forze viscose, mentre se $Re_h \gtrsim \mathcal{O}(1)$, allora le forze inerziali sono significative. Come mostra il grafico 4.0.2a, le celle 2 e 3 si trovano in un regime inerziale, mentre la cella 1 si trova nei valori di soglia, dove le forze inerziali sono principali, ma quelle viscose non sono trascurabili.

Il secondo è il numero di Capillarità diviso per ϵ^2 . Esso esprime il rapporto tra le forze viscose e capillari. Viene definito come:

$$Ca^* = \frac{\mu v}{\sigma_s} \left(\frac{D}{h} \right)^2, \quad (4.2)$$

e deriva dal bilancio di pressioni tra bolla e fluido: Δp_{visc} è proporzionale a $12 \mu v D/h_0^2$ (dalla legge di Darcy, 2.8), mentre Δp_{cap} è proporzionale a σ_s/D . Se $Ca^* \ll 1$, allora ci si trova nel regime capillare, mentre se $Ca^* \gtrsim \mathcal{O}(1)$, le forze viscose predominano. Come si può osservare dal grafico 4.0.2b, tutte le celle si trovano nel regime dominato dalle forze capillari.

Poiché è emerso che i casi in analisi si trovano sia nel regime inerziale sia in quello

capillare, si consideri dunque il loro rapporto, espresso dal numero di Weber, il quale viene definito come:

$$We = \frac{\rho v^2 D}{\sigma_s}. \quad (4.3)$$

Infatti, esso è il rapporto tra la forza inerziale $\rho v^2 D^2$ e la forza capillare $\sigma_s D$. Se $We \ll 1$, si è in un regime capillare, mentre se $We \gg 1$, predominano le forze inerziali. Dal grafico 4.0.2c si può notare come tutte le celle si trovino intorno all'ordine dell'unità. Ciò dimostra che, nei casi analizzati, non vi è predominanza del regime inerziale su quello capillare o viceversa, bensì essi concorrono.

Poiché le celle sono collocate in posizione verticale, anche gli effetti dovuti alla gravità (ovvero le forze di galleggiamento) sono importanti. Si considerino così i rapporti tra i regimi gravitazionale-capillare e gravitazionale-viscoso. Il primo è espresso dal numero di Bretherton, definito come:

$$\delta = Bo_h^{\frac{1}{3}} \frac{D}{h} = \left(Bo \frac{D}{h} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.4)$$

e introdotto da Wu et al. [2024]. Esso è stato dedotto dal numero di Bond ridotto ($Bo_h = Bo \epsilon^2$, il quale deriva dal numero di capillarità, dove la velocità viene considerata dell'ordine $\Delta \rho g h^2 / (12 \mu)$ (2.8)). Se $\delta \ll 1$, gli effetti di resistenza del film fluido sono predominanti e la pressione dovuta alla capillarità è significativa. Se $\delta \gtrsim 1$, è predominante la pressione dovuta al galleggiamento. Dal grafico 4.0.2d si può notare che tutte le celle si trovano in un regime gravitazionale. Il rapporto tra i regimi gravitazionale-viscoso è espresso dal numero di Archimede, definito come:

$$Ar = \frac{\rho D}{\mu} \sqrt{g D}. \quad (4.5)$$

Essendo $Ar \gg 1$, tutte le celle si trovano in un regime gravitazionale dove le forze viscose sono trascurabili.

Si noti il grafico di figura 4.0.2f, nel quale i dati delle tre celle collassano sulla stessa curva di tendenza. Infatti, il rapporto tra il numero di Bond e quello di Archimede è proporzionale alla radice quadrata del diametro equivalente medio delle bolle, il cui andamento è simile per le tre celle (si veda 4.1.1a).

Poiché sono dominanti le forze capillari ed inerziali, è interessante analizzare anche il rapporto tra i regimi gravitazionale ed inerziale. Esso si può osservare attraverso il rapporto tra il numero di Archimede e quello di Reynolds, come mostrato in figura 4.0.3. Si può notare che esso è vicino all'unità per tutte le celle (maggiore per le

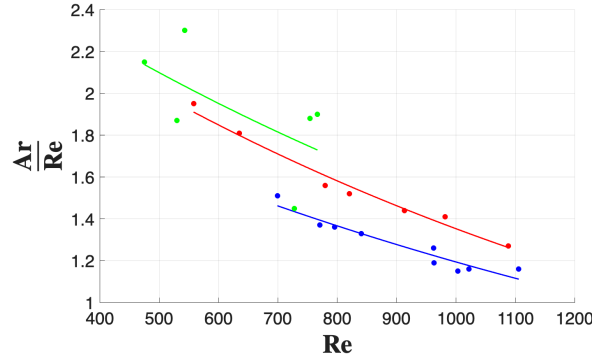


Figura 4.0.3 Rapporto tra il numero di Archimede e il numero di Reynolds in funzione di quest'ultimo. $R_1^2 = 0,36$, $R_2^2 = 0,98$, $R_3^2 = 0,92$.

celle a spessore minore), dunque, come ci si aspettava per transitività, anche le forze gravitazionali ed inerziali concorrono in modo uguale. Si noti che questo rapporto esprime anche un'altra caratteristica del treno di bolle (4.7).

Si può dunque affermare che i casi in esame si trovano nella condizione per cui le forze inerziali, capillari e gravitazionali posseggono la stessa importanza, dando luogo ad una sovrapposizione dei tre rispettivi regimi.

Eseguendo un bilancio delle forze su una bolla immersa in acqua, si consideri la forza di galleggiamento ($\rho g V$) e la forza di resistenza al moto ($0,5 \rho C_d A v^2$), trascurando la forza peso della bolla. Definendo il volume e l'area come:

$$V = \frac{\pi D^2}{4} h, \quad A = D h,$$

risulta che la velocità di risalita è pari a:

$$v = k \sqrt{g D}, \quad \text{dove } k = \sqrt{\frac{\pi}{2 C_d}}. \quad (4.6)$$

Dal rapporto tra i numeri di Archimede e di Reynolds si ottiene:

$$\frac{Ar}{Re} = \frac{v}{\sqrt{g D}}, \quad (4.7)$$

da cui si può stimare il coefficiente di resistenza (4.0.4). Inoltre, essendo strettamente legato alla forma delle bolle, l'andamento del coefficiente di resistenza potrebbe fornire informazioni sulla variazione del rapporto tra le dimensioni principali delle bolle (ovvero tra l'asse maggiore e l'asse minore).

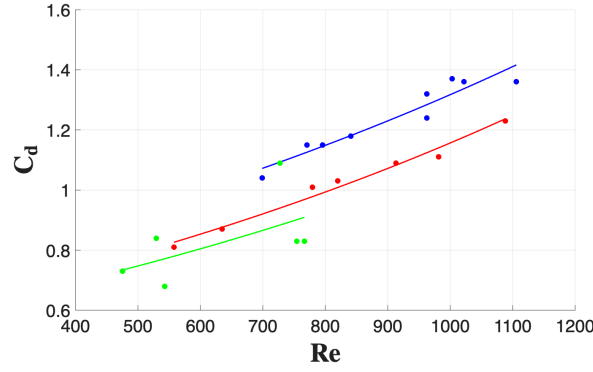
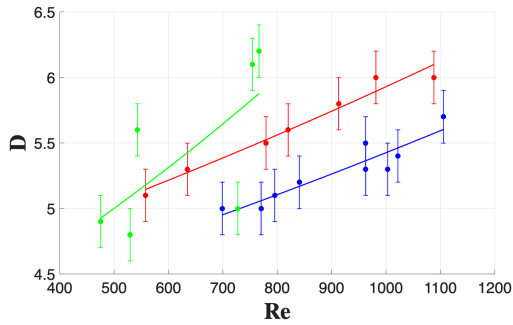


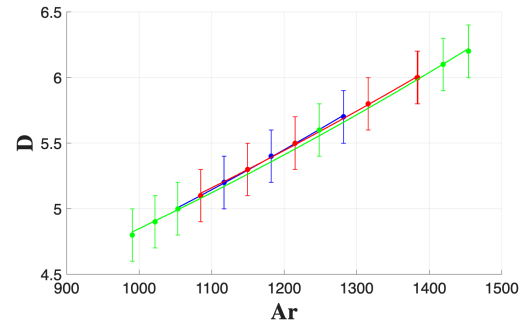
Figura 4.0.4 Andamento del coefficiente di resistenza in funzione di Reynolds. $R_1^2 = 0,32$, $R_2^2 = 0,97$, $R_3^2 = 0,90$.

4.1 Diametro medio delle bolle

Il diametro medio delle bolle è uno degli elementi principali che caratterizzano i treni. Il grafico di figura 4.1.1a mette in luce l'andamento del diametro medio in funzione del numero di Reynolds. Come si può osservare, il suo valore è crescente all'aumentare



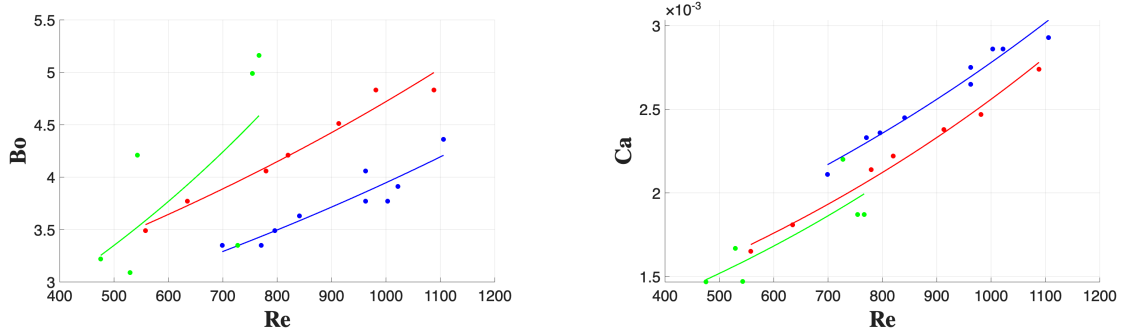
(a) Andamento del diametro medio [mm] in funzione di Reynolds. $R_1^2 = 0,47$, $R_2^2 = 0,96$, $R_3^2 = 0,86$.



(b) Andamento del diametro medio [mm] in funzione di Archimede. $R_1^2 = 0,998$, $R_2^2 = 0,999$, $R_3^2 = 0,999$.

Figura 4.1.1

del numero Reynolds, quasi con proporzionalità diretta. Esso assume valori minimi di circa 4,8 mm e valori massimi fino a 6,2 mm. Inoltre, è possibile notare come, a parità di numero di Reynolds, il diametro delle bolle decresce con lo spessore delle celle. Infatti, considerando ad esempio $Re = 750$, i valori dei diametri corrispondenti sono pari a circa 5 mm per la cella 3, 5,5 mm per la cella 2 e 6,1 mm per la cella 1. Ciò si può spiegare analizzando i numeri di Bond e di capillarità, che esprimono, rispettivamente, il rapporto tra le forze di galleggiamento e quelle capillari e il rapporto tra le forze viscose e quelle capillari. Il loro andamento è illustrato nella figura 4.1.2.



(a) Andamento del numero di Bond in funzione del numero di Reynolds. $R_1^2 = 0,48$, $R_2^2 = 0,86$, $R_3^2 = 0,96$.

(b) Andamento del numero di capillarità in funzione del numero di Reynolds. $R_1^2 = 0,67$, $R_2^2 = 0,98$, $R_3^2 = 0,96$.

Figura 4.1.2

Come si può notare, al diminuire dello spessore delle celle, il contributo della forza viscosa aumenta (4.0.1a) ed è maggiore anche il contributo delle forze capillari. Questo permette quindi di spiegare perché, analizzando lo stesso numero di Reynolds, il diametro è crescente al diminuire dello spessore delle celle. Per questo motivo, il contributo delle forze di galleggiamento è anch'esso crescente. Nel grafico 4.1.1b si può osservare che le tre curve di tendenza collasano, mostrando un andamento simile per tutte e tre le celle.

Come mostrano le immagini di figura 4.1.7, la forma delle bolle è quasi circolare e tende ad assumere un aspetto ad ellisse, allargandosi nella direzione perpendicolare al moto: questo è dovuto al fatto che si è in un regime inerziale, dove le forze viscosi sono trascurabili. Le deformazioni sono tali che il rapporto fra gli assi principali delle bolle (quello lungo la direzione del moto e quello perpendicolare ad essa) è pari a circa 0,8. Inoltre, esso rimane quasi costante nell'intervallo dei valori del numero Reynolds considerato (indicativamente è compreso tra 470 e 1100, come si può notare dall'ascissa del grafico). Esso è stato stimato tramite software, attraverso il sistema di misurazione già citato al paragrafo 3.2. Inoltre, un'altra stima è stata ottenuta grazie al confronto con l'articolo Filella et al. [2015]: viene definito il periodo delle oscillazioni di deformazioni come $t_\sigma = \sqrt{\rho L^3 / \sigma}$, con $L = D \sqrt{\chi}$. Così, confrontando tale equazione con quella ottenuta al paragrafo 2.2, si ricava:

$$\chi = \sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)}, \quad (4.8)$$

da cui $\chi \approx 0,878$.

Dalle immagini 4.1.7 è inoltre possibile osservare quanto descritto da Xiang et al. [2022] (figura 4.1.3): nel loro moto ascendente all'interno della cella, le bolle oscillano

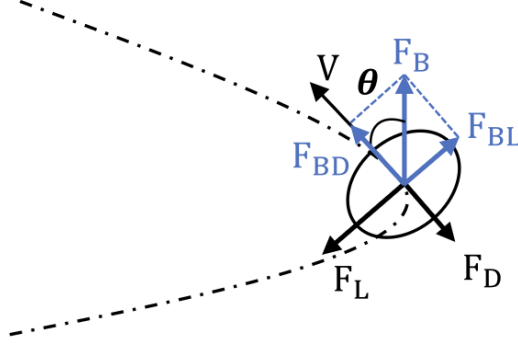


Figura 4.1.3 Schema della traiettoria e del moto delle bolle tratto da Xiang et al. [2022]. I vettori in figura rappresentano le forze in gioco: F_L è la portanza, F_D la resistenza e F_B , scomposto nelle componenti parallele alla portanza e alla resistenza, è la forza dovuta al galleggiamento. Il vettore V è il vettore velocità.

orizzontalmente rispetto ad un asse centrale (si consideri che esso passi per l'ago, in quanto origine del treno di bolle) e contemporaneamente varia l'angolo di inclinazione tra quest'asse e l'asse minore delle bolle (in figura indicato con θ). Ciò significa che la traiettoria e le oscillazioni di queste ultime sono una composizione di un moto traslatorio e uno rotatorio (rispetto all'asse centrale delle bolle perpendicolare al piano). Entrambi sono periodici e la traiettoria seguita è approssimabile ad una curva sinusoidale. La forma della traiettoria sarà analizzata nel paragrafo 4.2, mentre la frequenza di oscillazione nel paragrafo 4.3.

Sempre dalle immagini di figura 4.1.7 è possibile notare un'altra caratteristica legata alla forma delle bolle. Quando due di esse entrano in interazione tra di loro, la bolla che si trova davanti assume una forma ancora più allargata, mentre quella inseguitrice diventa più circolare. Questo fenomeno è maggiormente evidente se il diametro della bolla antecedente è maggiore dell'altra.

Le immagini di figura 4.1.4 sono state estratte dai video registrati utilizzando il fluido reoscopico. Le linee più chiare mostrano la direzione del flusso e le scie formate dalle bolle. Come si può notare, queste linee circondano interamente le bolle che muovono accoppiate. Infatti, la bolla anteriore, più deformata, devia il flusso, che si ricongiunge solo dopo la bolla posteriore. Per questo motivo, essa è meno soggetta alla forza di resistenza, assumendo così una forma più circolare.

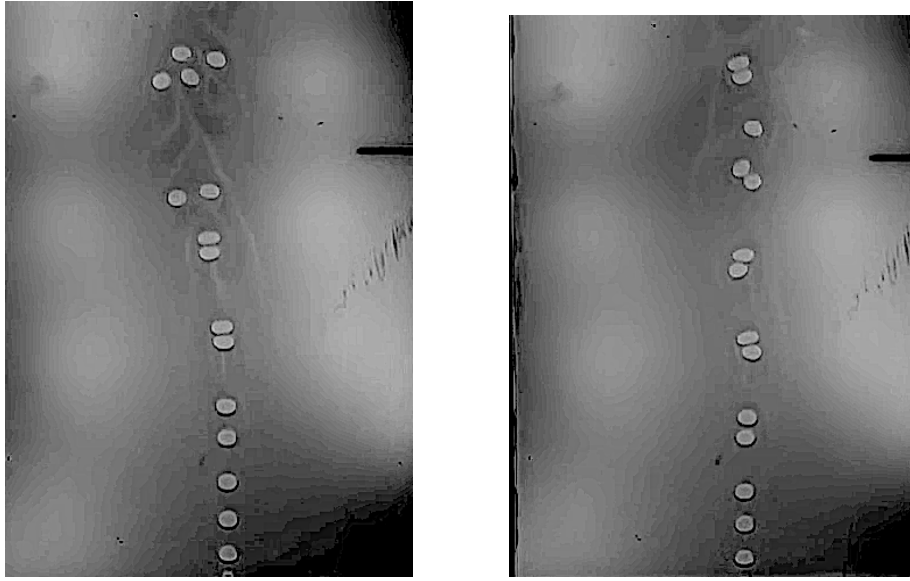


Figura 4.1.4 Fluido reoscopico

È interessante notare come vari la forma delle bolle per valori del numero di Reynolds superiori a quelli appartenenti all'intervallo precedentemente considerato. Quando il numero di Reynolds aumenta, si verificano dei fenomeni di instabilità del treno di bolle, quali la loro interferenza durante la risalita e la coalescenza delle stesse, che determina la formazione di bolle di dimensioni maggiori (questi fenomeni saranno meglio analizzati nel paragrafo 4.2). In queste condizioni, i video hanno fornito soltanto un'analisi qualitativa, poiché la caoticità del moto di risalita e le variazioni di dimensioni dovute alla coalescenza non hanno permesso di analizzare tramite software le differenti caratteristiche del treno di bolle, come la velocità di risalita o il diametro delle bolle; tuttavia, un dato rilevato è la portata immessa nelle celle, poiché viene impostata nella pompa.

Sebbene le bolle risultino maggiormente deformate in tutte e tre le celle, nella prima e nella seconda risulta maggiormente evidente. La coalescenza (assente nella terza cella) ha fatto sì che, fondendosi, si formassero bolle di dimensione maggiore. In queste circostanze, esse assumono una forma differente da quella circolare: si può notare un profilo quasi parabolico nella direzione del moto, mentre nell'altra direzione si può osservare un profilo a "V" rovesciata. Quest'ultimo è più pronunciato quando la velocità è maggiore: infatti si può notare maggiormente nelle bolle "inseguatrici". Nella figura 4.1.5a è inoltre evidente come, alle volte, bolle di dimensione inferiore si posizionino in una delle estremità inferiori di bolle più grandi. Questo perché rimangono intrappolate dai vortici che si formano (lo si può osservare nella figura 4.1.6, dove le immagini

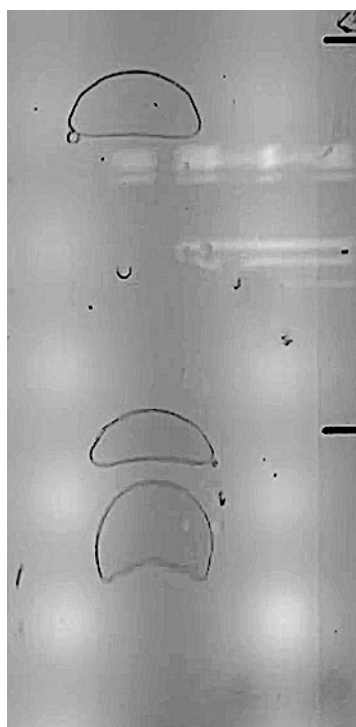
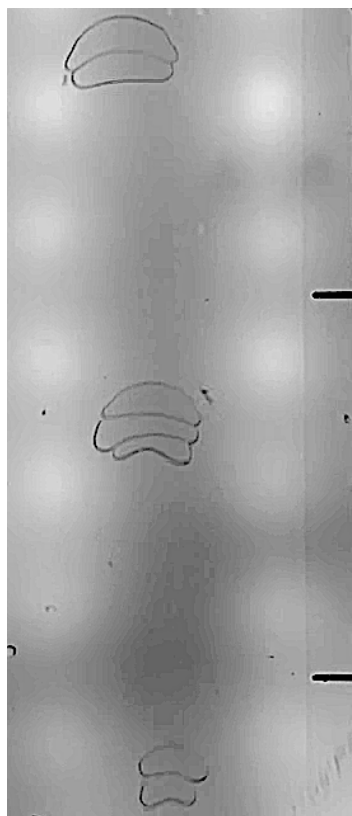
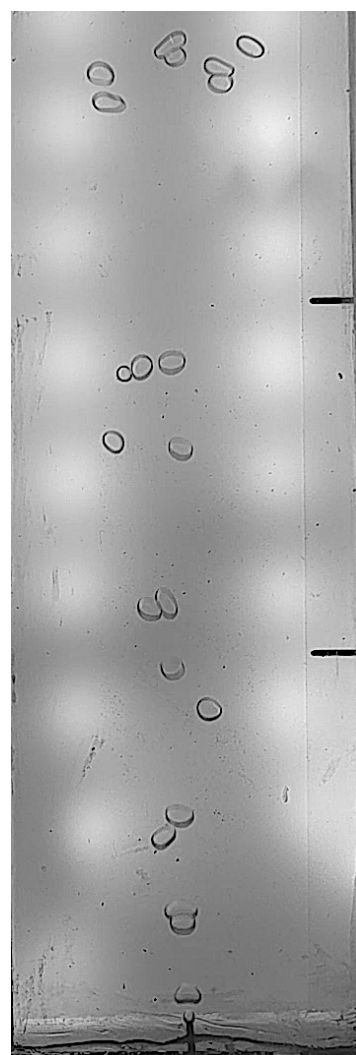
(a) Cella 1, 50 *ml/min*(b) Cella 1, 50 *ml/min*(c) Cella 3, 60 *ml/min*

Figura 4.1.5

sono disposte in ordine cronologico). Nella figura 4.1.5b si può notare un fenomeno già osservato e descritto da Maxworthy [Maxworthy, 1986], ovvero il *pairing*. Questo si presenta come un insieme di bolle di dimensioni simili che risalgono insieme, senza dar luogo alla coalescenza.

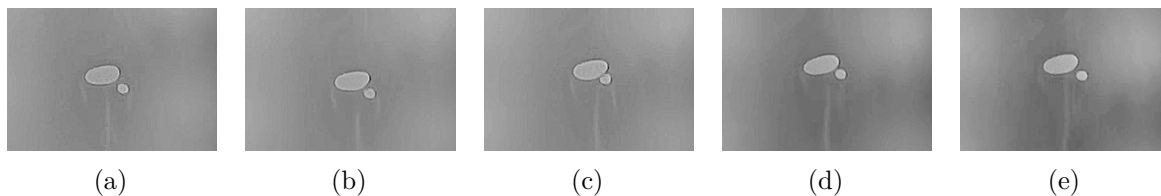


Figura 4.1.6 Evoluzione nel tempo di una bolla più piccola nei vortici generati da una bolla più grande

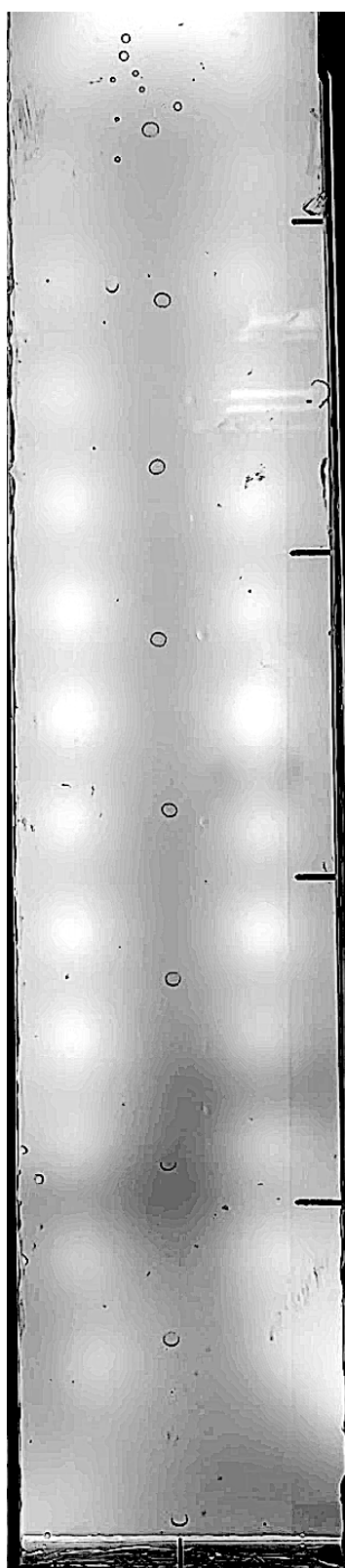
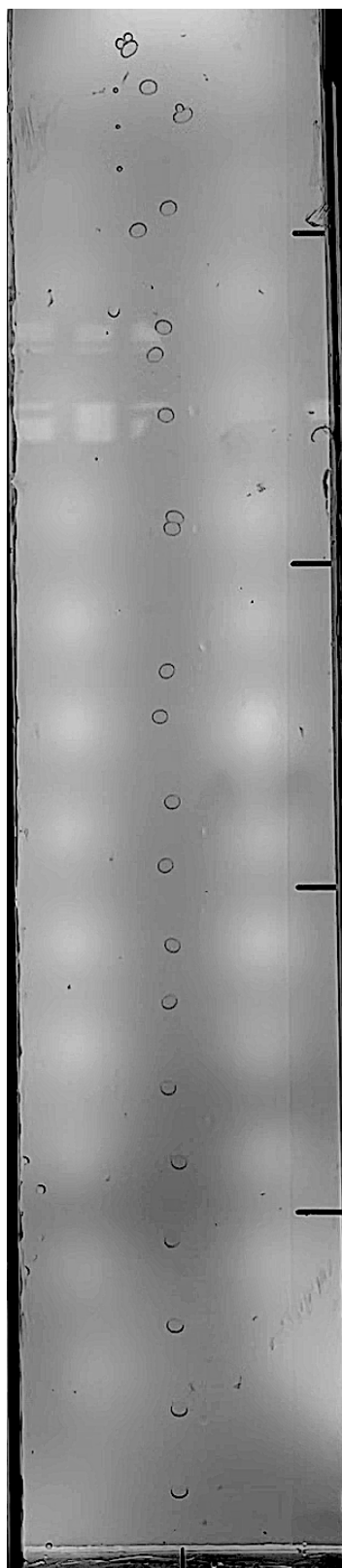
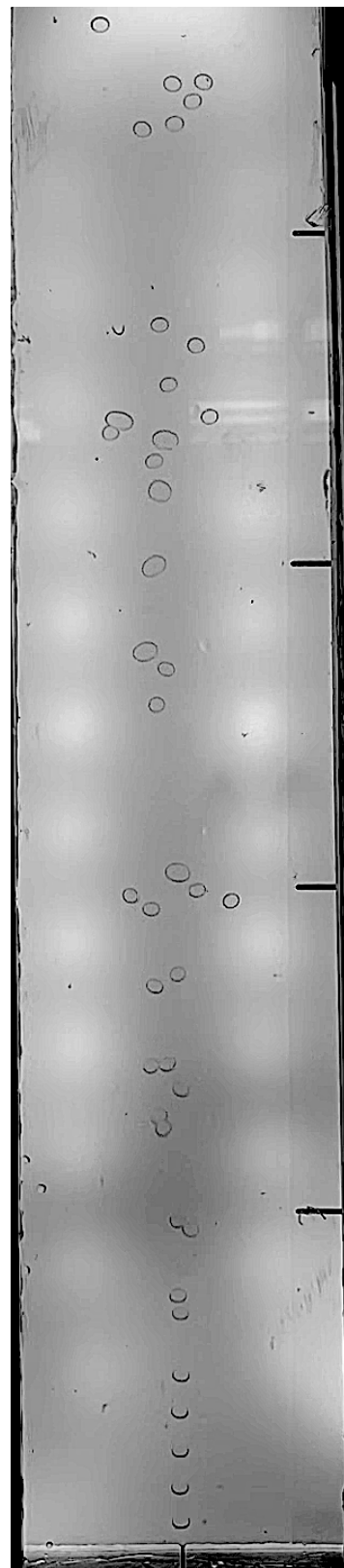
(a) $Re = 475$ (b) $Re = 529$ (c) $Re = 727$

Figura 4.1.7 Cella 1

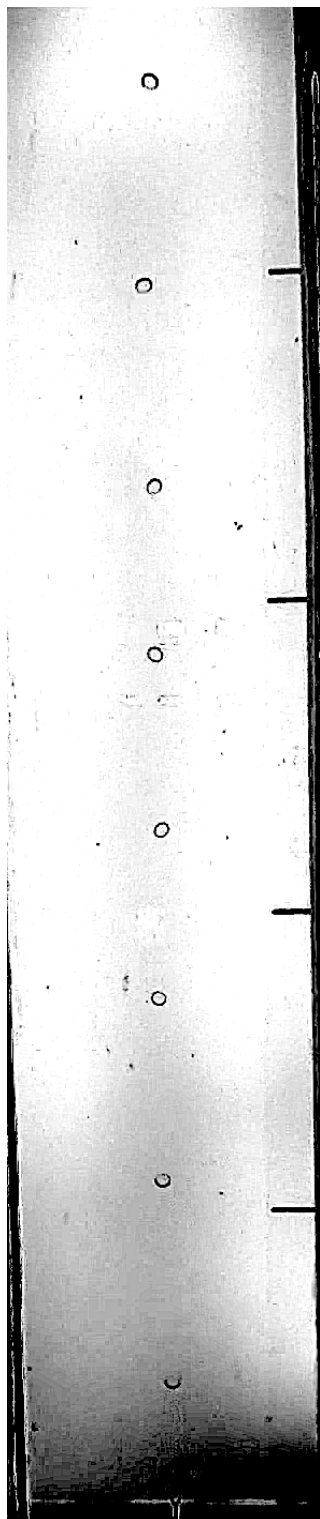
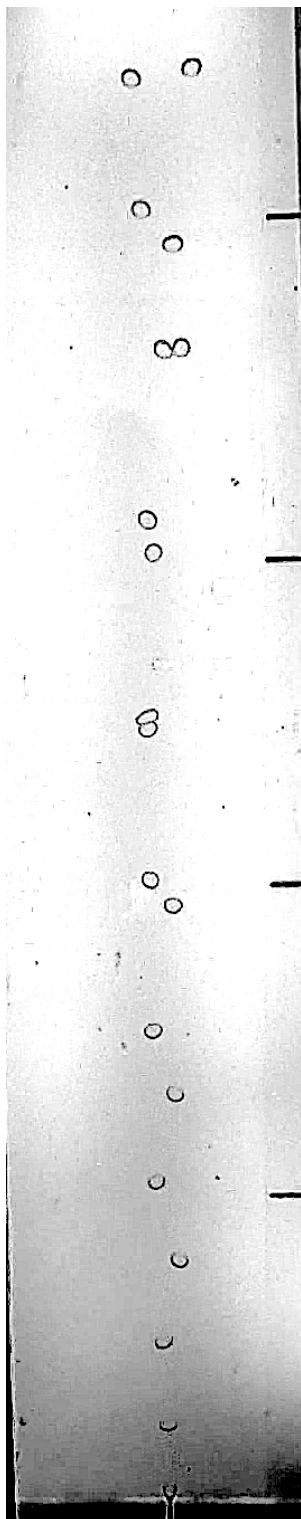
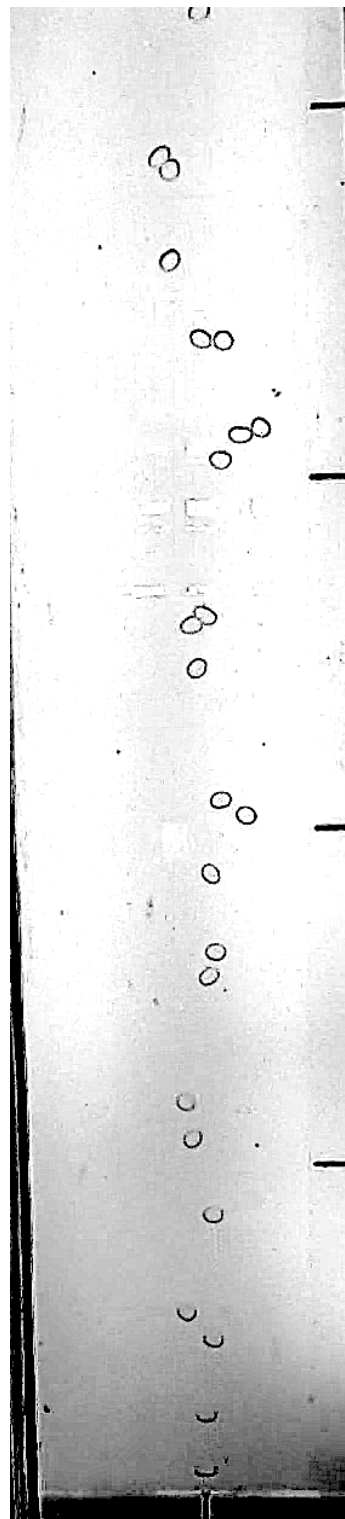
(d) $Re = 635$ (e) $Re = 913$ (f) $Re = 1088$

Figura 4.1.7 Cella 2

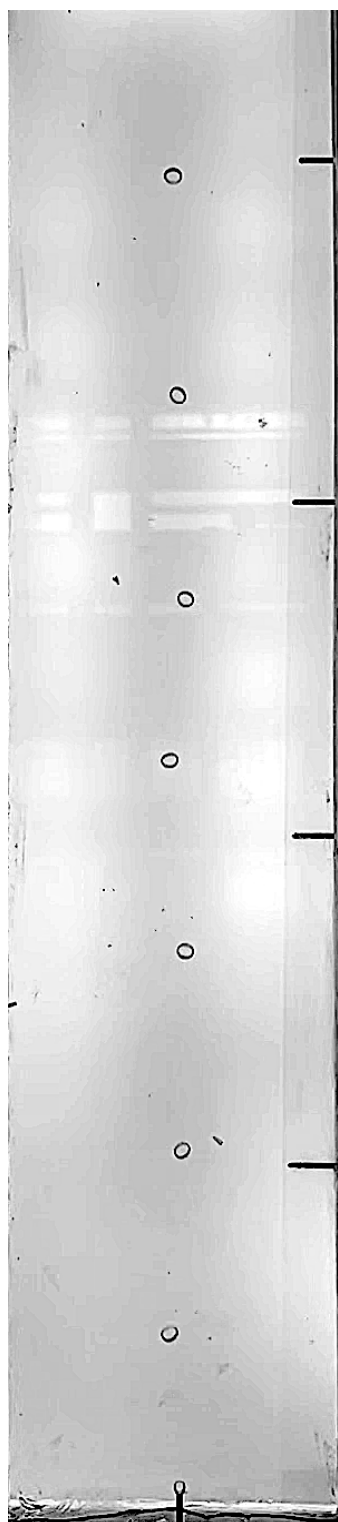
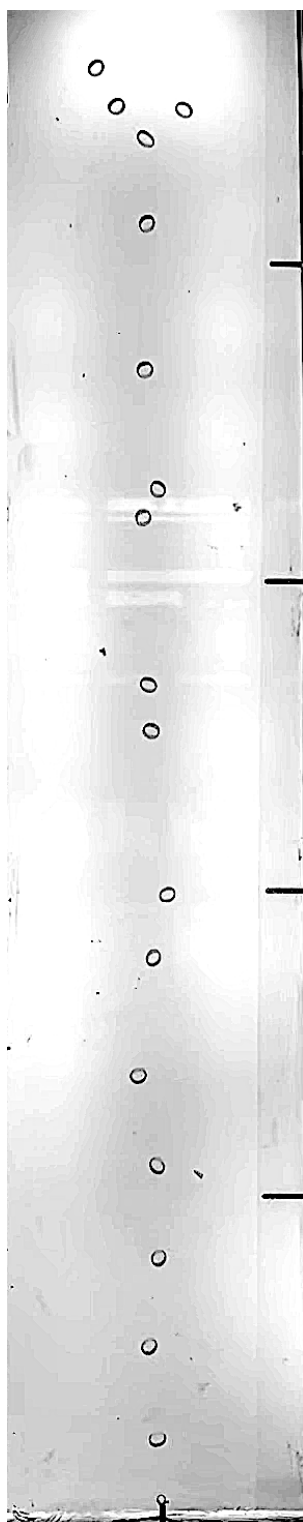
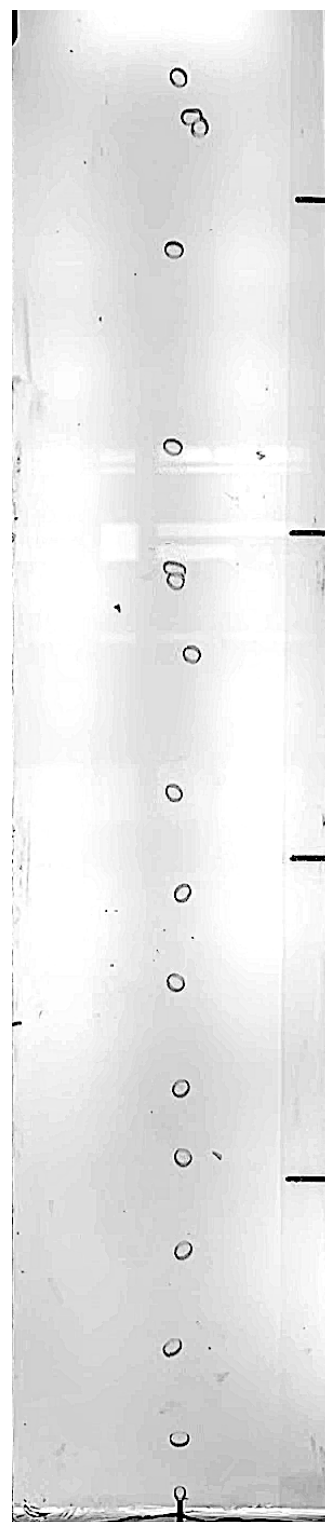
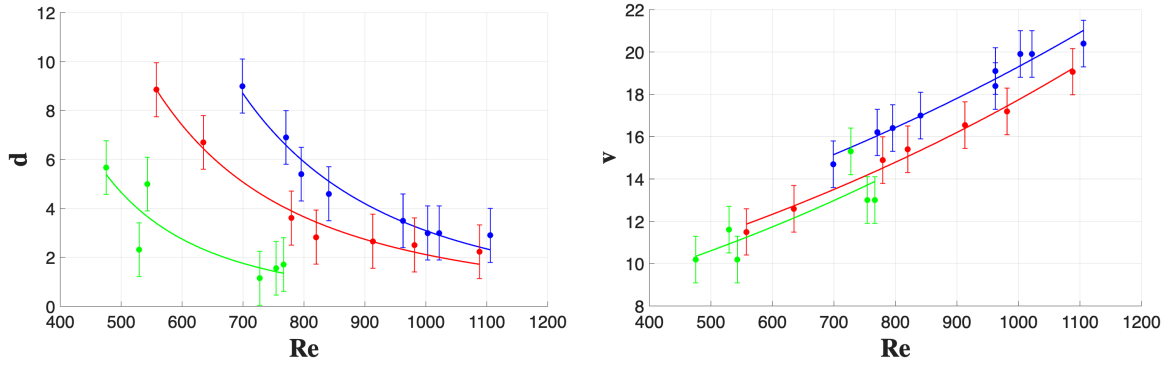
(g) $Re = 795$ (h) $Re = 1003$ (i) $Re = 1106$

Figura 4.1.7 Cella 3

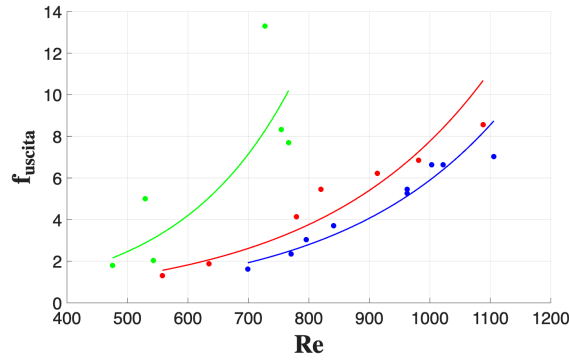
4.2 Distanza tra le bolle e periodicità della scia

Altre caratteristiche importanti appartenenti ai treni di bolle sono la distanza tra le stesse, la loro velocità di risalita e la loro frequenza di uscita dall'ago. Queste tre grandezze sono strettamente legate fra loro: infatti, il prodotto tra la distanza e la frequenza è pari alla velocità di risalita. Ciò è stato sfruttato per ricavare la distanza tra le bolle quando l'instabilità del treno non ha permesso di ricavare una quantità di dati sufficienti dai video.



(a) Distanza tra le bolle [cm]. $R_1^2 = 0,74$, $R_2^2 = 0,98$, $R_3^2 = 0,97$.

(b) Velocità delle bolle [cm/s]. $R_1^2 = 0,67$, $R_2^2 = 0,99$, $R_3^2 = 0,96$.



(c) Frequenza di uscita delle bolle [Hz].

Figura 4.2.1 Andamento di tre parametri in funzione del numero di Reynolds.

I tre grafici di figura 4.2.1 mostrano l'andamento delle caratteristiche precedentemente menzionate. Come si può notare, velocità e frequenza di uscita sono crescenti all'aumentare del numero di Reynolds, mentre la distanza decresce.

In seguito, nel grafico di figura 4.2.2 viene mostrato come vari il parametro adimensionale che si può ottenere dividendo la distanza tra le bolle per il loro diametro medio in funzione del numero di Reynolds. Anche il suo andamento è decrescente in funzione del numero di Reynolds. Questo parametro è stato introdotto con lo scopo di

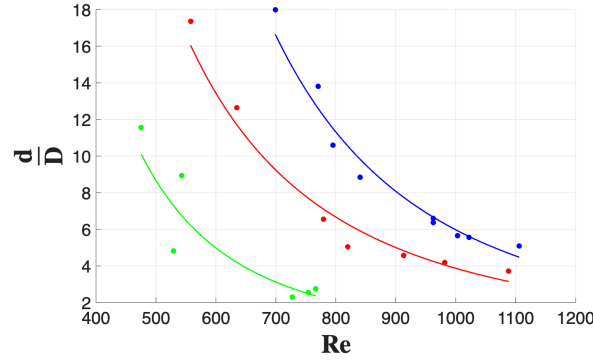
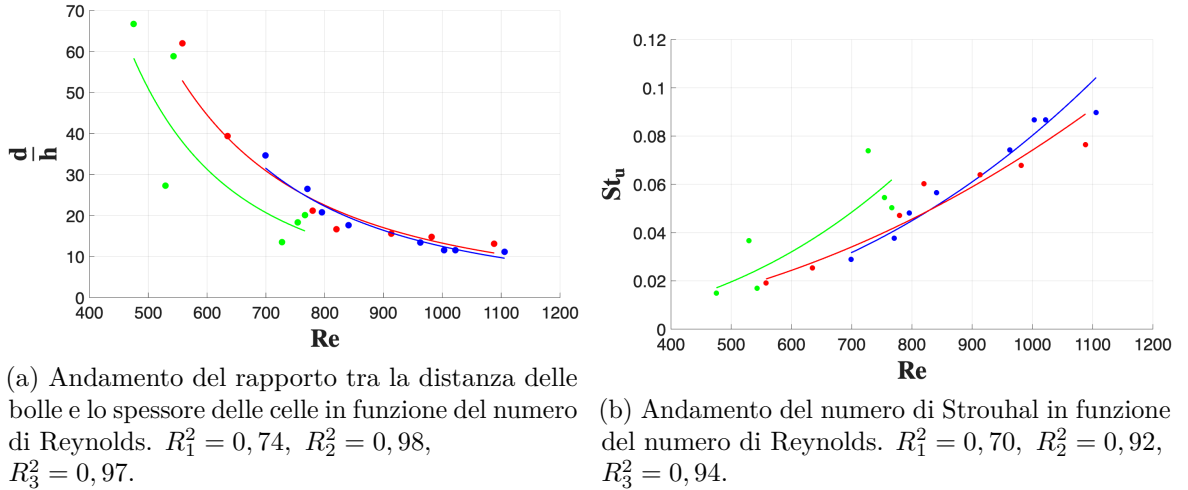


Figura 4.2.2 Andamento del rapporto tra la distanza delle bolle e il loro diametro. $R_1^2 = 0,84$, $R_2^2 = 0,99$, $R_3^2 = 0,97$

cercare un indicatore che rappresentasse la soglia per la transizione da un regime di stabilità ad uno di instabilità del treno. Sperimentalmente si è osservato che i valori di Reynolds che segnano la transizione da un regime all'altro sono approssimativamente: $Re = 600$ per la cella 1, $Re = 750$ per la cella 2 e $Re = 800$ per la cella 3. Dal grafico precedente si può notare come le tre curve, sebbene posseggano un andamento simile, non convergono ancora ad uno stesso valore. Per questo motivo, il parametro precedente è stato moltiplicato per ϵ , che corrisponde al rapporto tra la distanza tra le bolle e lo spessore tra le celle, il cui andamento viene mostrato dal grafico di figura 4.2.3a.



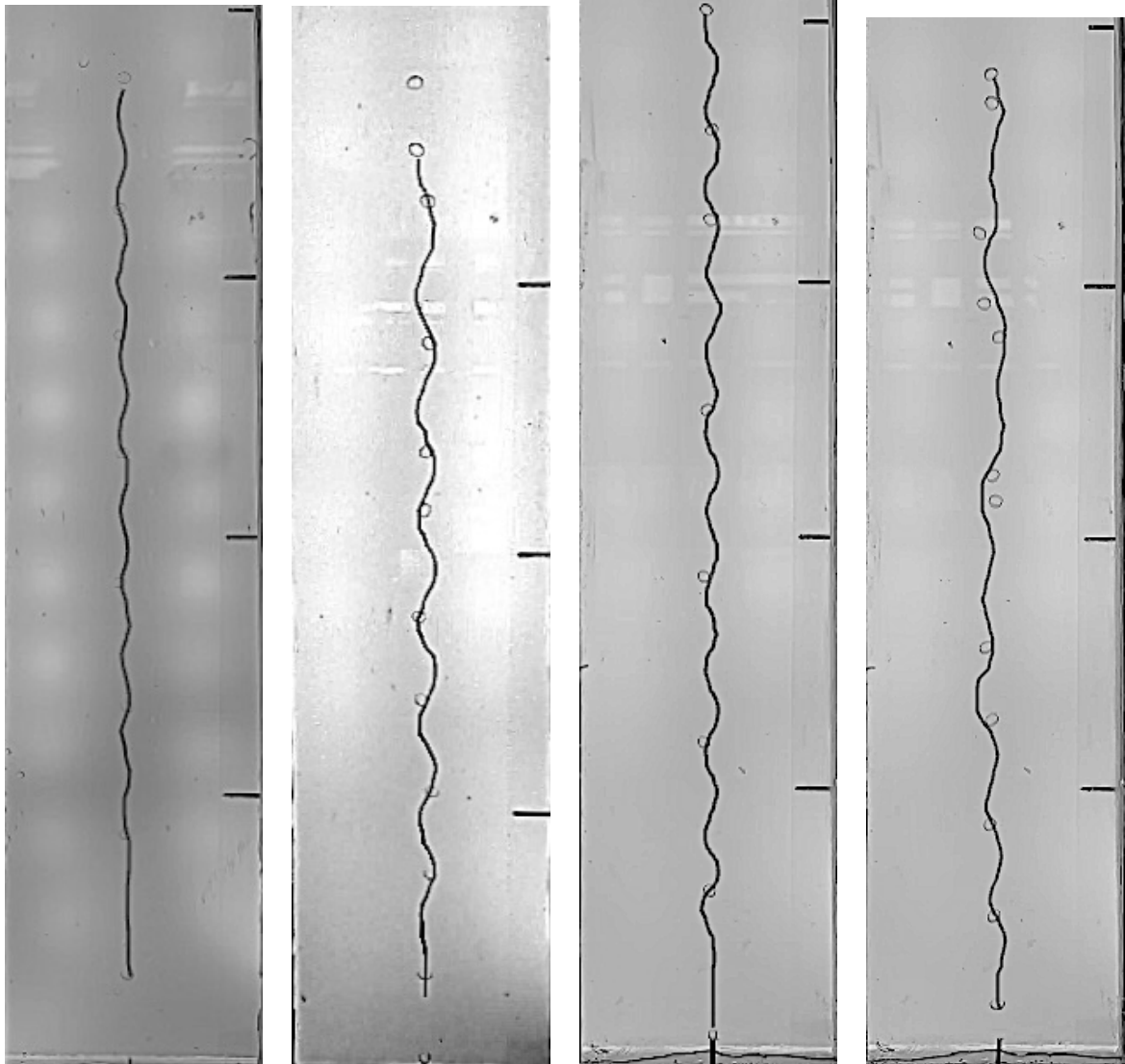
(a) Andamento del rapporto tra la distanza delle bolle e lo spessore delle celle in funzione del numero di Reynolds. $R_1^2 = 0,74$, $R_2^2 = 0,98$, $R_3^2 = 0,97$.

(b) Andamento del numero di Strouhal in funzione del numero di Reynolds. $R_1^2 = 0,70$, $R_2^2 = 0,92$, $R_3^2 = 0,94$.

Figura 4.2.3

Emerge, infatti, che l'andamento di questo parametro per le tre celle è molto simile. Inoltre, considerando i precedenti valori di soglia del numero di Reynolds, essi corrispondono ad un intervallo di d/h compreso tra 22 e 30. Il grafico 4.2.3b mostra

invece l'adimensionalizzazione del parametro della frequenza di uscita ($St_u = f_u h/v$): si può notare come, anche in questo caso, l'andamento delle tre curve è molto simile. La soglia di instabilità corrisponde a valori compresi tra 0,03 e 0,05.



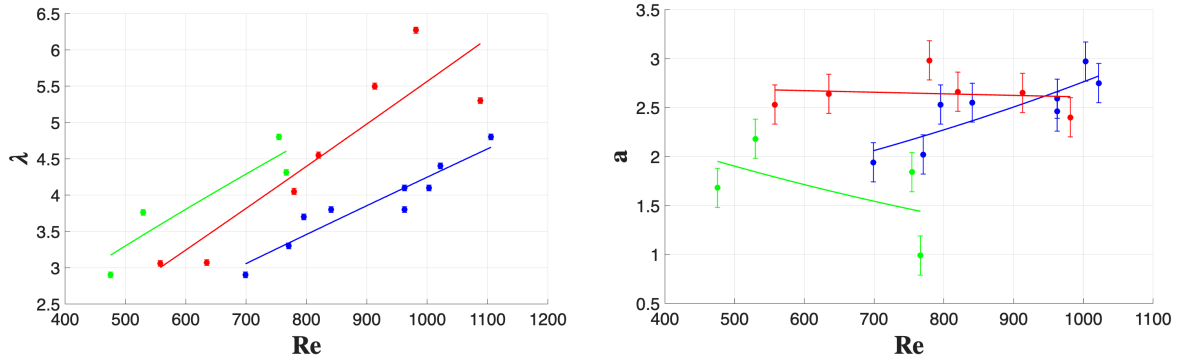
(a) Cella 1, $Re = 480$. (b) Cella 2, $Re = 780$. (c) Cella 3, $Re = 770$. (d) Cella 3, $Re = 960$.

Figura 4.2.4 Esempi di traiettorie delle bolle.

Le immagini di figura 4.2.4 mostrano la traiettoria percorsa dalle bolle durante il loro moto di risalita. La traiettoria è stata tracciata seguendo una bolla e sovrascrivendo la curva corrispondente sull'ultimo frame analizzato. Per questo motivo, la bolla che ha permesso di tracciare la traiettoria è, in ogni immagine, quella all'inizio di essa, nella parte superiore. Perciò, il fatto che tutte le bolle che seguono la prima si trovino sulla

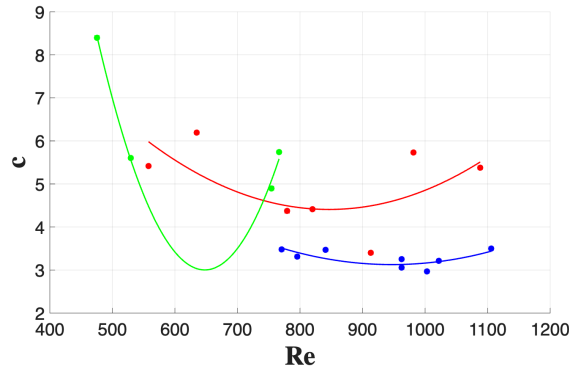
linea evidenziata dimostra che le bolle seguono tutte perfettamente la stessa traiettoria. Questo è vero quando il treno si trova al di sotto della soglia di instabilità (come nei casi 4.2.4a, 4.2.4b, 4.2.4c, ma si può osservare anche quando il treno ha superato di poco la soglia di instabilità (4.2.4d).

Per quanto riguarda le caratteristiche delle traiettorie, si possono analizzare l'ampiezza, la lunghezza d'onda e la distanza dall'ago in cui inizia l'oscillazione, mentre la frequenza verrà esaminata nel dettaglio nel paragrafo 4.3.



(a) Andamento della lunghezza d'onda [cm] in funzione del numero di Reynolds. $R_1^2 = 0,84$, $R_2^2 = 0,82$, $R_3^2 = 0,90$.

(b) Andamento dell'ampiezza [mm] in funzione del numero di Reynolds. $R_1^2 = 0,27$, $R_2^2 = 0,01$, $R_3^2 = 0,72$.



(c) Andamento del valore della distanza [mm] rispetto all'origine in funzione del numero di Reynolds. $R_1^2 = 0,99$, $R_2^2 = 0,39$, $R_3^2 = 0,59$.

Figura 4.2.5

Il grafico di figura 4.2.5a mostra l'andamento della lunghezza d'onda al variare del numero di Reynolds. Esso segue un andamento crescente ed inoltre aumenta al diminuire dello spessore della cella. L'ampiezza, invece, (come si può notare nel grafico 4.2.5b e anche nelle immagini di figura 4.2.4), cresce all'aumentare dello spessore delle

celle, mentre rimane quasi costante, mostrando una minima crescita, al variare del numero di Reynolds nel campo di stabilità del treno, poiché al di fuori la caoticità del moto rende difficile la sua misura. Questo è dovuto al fatto che le forze viscosive sono d'intensità crescente al diminuire dello spessore delle celle. Per quanto riguarda la distanza dall'ago in cui le bolle iniziano ad oscillare, non è di semplice individuazione poiché l'ampiezza di oscillazione presenta un transitorio iniziale, spesso non facilmente individuabile. Analizzando le traiettorie a differenti valori del numero di Reynolds per le tre celle (grafico di figura 4.2.5c), si è notato che l'origine delle oscillazioni presenta un andamento quasi parabolico, con il minimo in corrispondenza di valori del numero di Reynolds poco oltre quelli della soglia di instabilità (in particolare per le celle 1 e 2). In particolare, i risultati della cella 1 sono confrontabili con quelli presenti nell'articolo di [Xiang et al., 2022] nel caso in cui le pareti ai lati non influenzino il moto delle bolle. Per dimostrare quest'ultimo aspetto, in quell'articolo è stato introdotto un parametro, s^* , definito come il rapporto tra distanza tra la parete e le bolle e il loro diametro; è stato evidenziato che l'influenza è trascurabile a partire da $s^* = 7,9$. Nei casi in esame, il minor valore di tale parametro è pari a $s^* = 10$, oltre dunque la soglia massima di influenza.

4.3 Frequenza di oscillazione dei treni di bolle

Come anticipato nel paragrafo 2.2, è stata ricavata la frequenza naturale di deformazione delle bolle per verificare la presenza di una eventuale risonanza con l'oscillazione del treno. Il grafico di figura 4.3.1a mostra l'andamento della frequenza naturale in funzione del numero di Reynolds. Il suo andamento decrescente è giustificato dal fatto che essa è

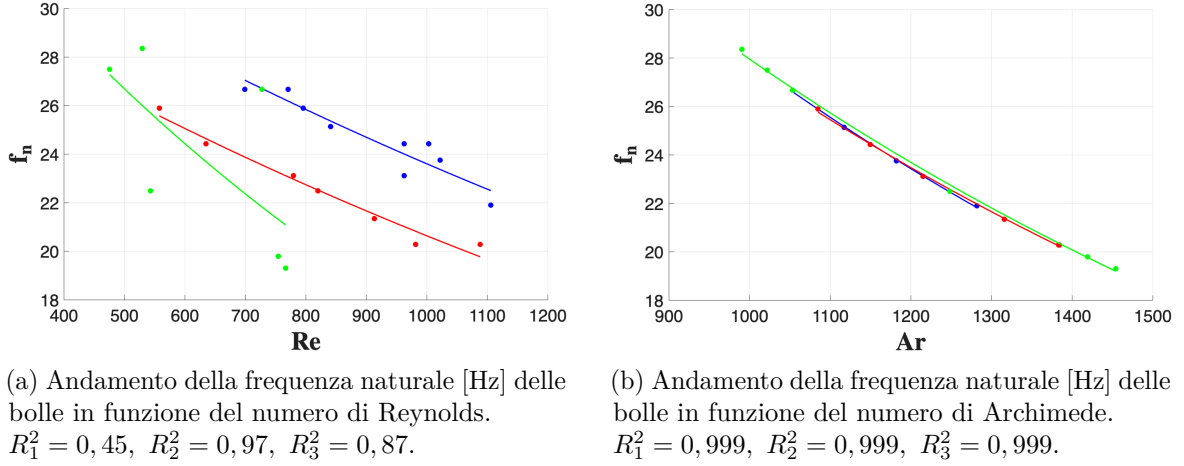


Figura 4.3.1

inversamente proporzionale al diametro, il quale è crescente con il numero di Reynolds. Il grafico di figura 4.3.1b mostra invece che per le tre celle la frequenza naturale di oscillazione assume lo stesso andamento rispetto al numero di Archimede.

I grafici di figura 4.3.2 mostrano invece la variazione della frequenza di oscillazione del treno di bolle in funzione dei numeri di Reynolds e di Archimede. In questo caso,

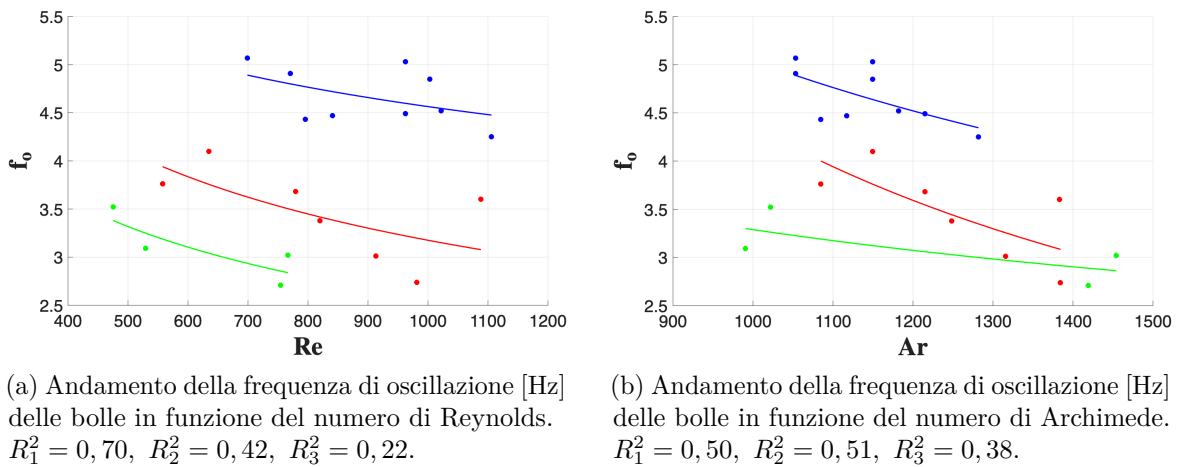


Figura 4.3.2

l'andamento rispetto ai due parametri adimensionali è simile, infatti, esso è leggermente decrescente all'aumentare del numero di Reynolds e di Archimede e inoltre varia molto tra le celle: in quelle a spessore inferiore, dove le forze viscose sono più intense, la frequenza è minore. Risulta quindi interessante analizzare il rapporto tra queste due frequenze, per verificare la presenza di risonanza oppure di qualche altra correlazione. Tale rapporto è illustrato nei grafici di figura 4.3.3. Come si può notare, non si è nella

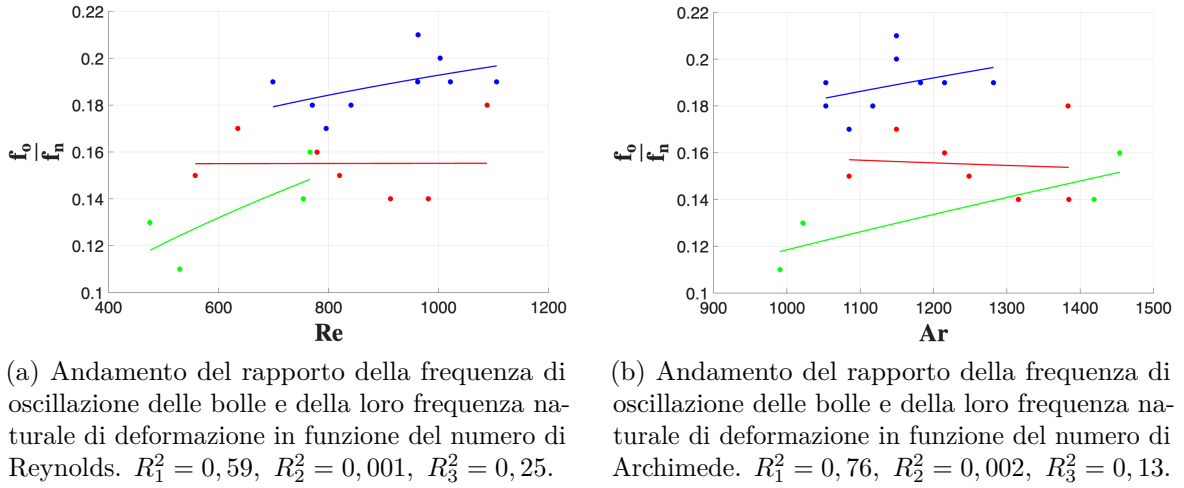


Figura 4.3.3

condizione di risonanza, in quanto il rapporto non è prossimo all'unità. Tuttavia, al netto del rumore delle misurazioni, si può osservare che l'andamento del rapporto tra le due frequenze è circa costante e crescente all'aumentare dello spessore delle celle, sia in funzione del numero di Reynolds, sia in funzione del numero di Archimede.

Si analizzi ora l'andamento del numero di Strouhal definito in due modi differenti: uno considerando il diametro, l'altro considerando lo spessore tra le celle. Risulta quindi:

$$a) \quad St_D = \frac{f D}{v} \qquad b) \quad St_h = \frac{f h}{v} \qquad (4.9)$$

ognuno valutato sia per la frequenza naturale di deformazione sia per la frequenza di oscillazione, indicati rispettivamente come St^n e St^o . I risultati ottenuti sono presenti nei grafici di figura 4.3.4.

Si osservi che, a parte 4.3.4a dove gli errori di misura sono maggiori perché si moltiplicano quelli relativi al diametro e quelli relativi al calcolo della frequenza di oscillazione, in tutti i casi l'andamento è simile per tutte le celle. In particolare, nel grafico 4.3.4c sembra che tutte e tre collassino nella stessa curva di tendenza. Inoltre, i grafici di figura 4.3.5 illustrano l'andamento di due dei numeri di Strouhal ricavati

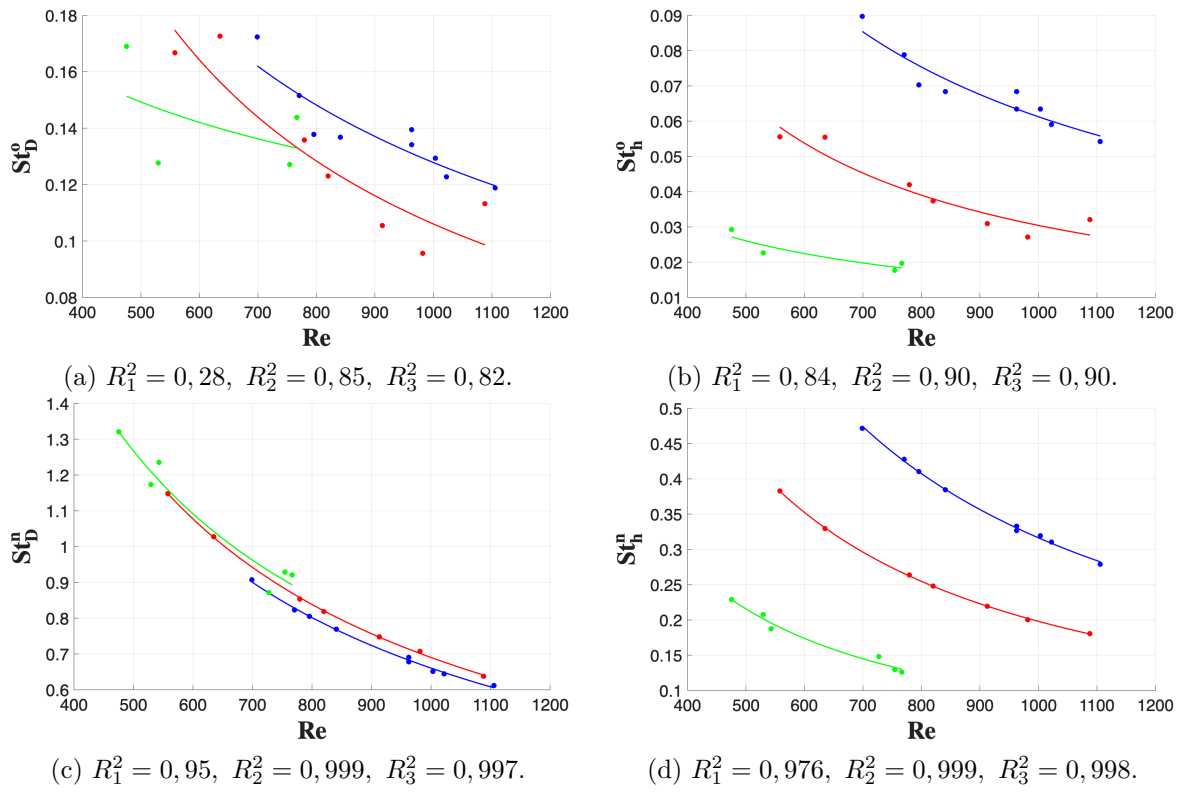


Figura 4.3.4 Andamento dei quattro numeri di Strouhal in funzione del numero di Reynolds.

in funzione del numero di Archimede. Si può notare un andamento simile a quello mostrato in relazione al numero di Reynolds.

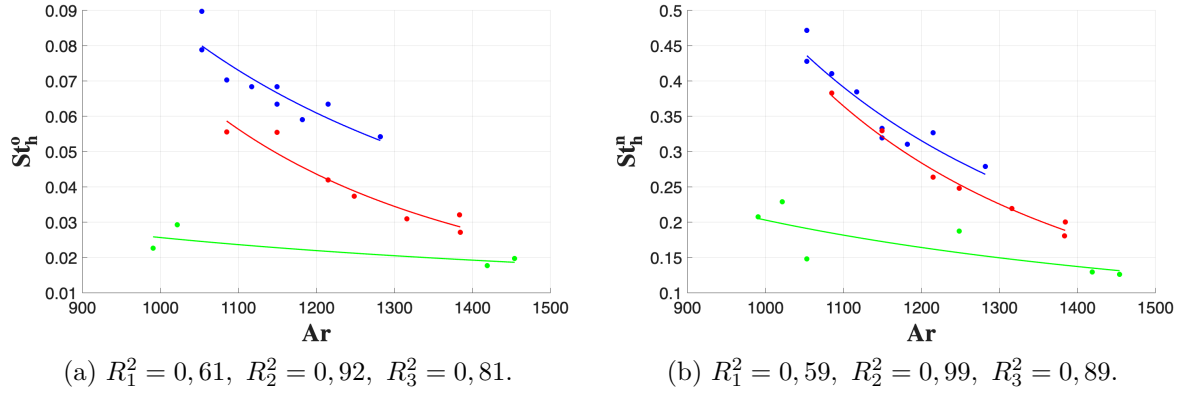


Figura 4.3.5 Andamento di due numeri di Strouhal in funzione del numero di Archimede.

Conclusione

Gli esperimenti condotti hanno permesso di ricavare dati significativi sulle caratteristiche proprie dei treni di bolle e del loro flusso all'interno di una cella di Hele-Shaw. Tutti i parametri sono stati ricavati sperimentalmente dalle osservazioni grazie all'utilizzo di un software. Il risultato principale del presente lavoro consiste nell'aver illustrato che, attraverso determinati parametri adimensionali, è stato possibile interpretare le osservazioni sperimentali in modo coerente. Infatti, sebbene i casi in esame si trovino in una condizione di coesistenza dei regimi gravitazionale, capillare ed inerziale, presentando dunque una dinamica complessa, i fenomeni che si sviluppano, quali deformazioni, oscillazioni e instabilità dei treni, mostrano correlazioni comuni nelle tre celle in esame quando vengono rappresentati attraverso opportuni numeri adimensionali.

Dapprima, l'analisi sull'andamento delle variazioni di forma e del diametro delle bolle hanno messo in luce che quest'ultimo cresce all'aumentare dei numeri di Reynolds e di Archimede e, in particolare, rispetto al secondo, esso varia quasi allo stesso modo per tutte e tre le celle. Inoltre è emerso che, essendo in un regime inerziale-capillare-gravitazionale, le bolle hanno una forma prossima a quella di un'ellisse, con un rapporto tra le dimensioni principali di circa 0,8. Tuttavia, per alti valori del numero di Reynolds, la bolla tende a deformarsi maggiormente, assumendo un aspetto a "V" rovesciata nella parte posteriore rispetto alla direzione del moto.

In seguito sono stati analizzati i parametri legati al treno di bolle. In primo luogo, sono stati individuati un regime di stabilità e uno di instabilità, dove le bolle interagiscono tra di loro. La transizione avviene per valori di Reynolds compresi tra 600 e 800. Per quanto riguarda la distanza verticale tra le bolle, il suo rapporto con lo spessore della cella ha un andamento decrescente rispetto al numero di Reynolds ed è simile per tutte e tre le celle, mostrando che la transizione tra stabilità ed instabilità del treno avviene a valori di tale rapporto compresi tra 22 e 30. Per la frequenza di uscita, il numero di Strouhal, ricavato con essa e con lo spessore delle celle, ha mostrato una tendenza simile per tutte e tre, con la soglia di instabilità che si trova

a valori compresi tra 0,03 e 0,05. All'interno del regime di stabilità, è stata notata la regolarità di oscillazione dei treni di bolle, con la lunghezza d'onda e l'ampiezza crescenti all'aumentare del numero di Reynolds.

Infine, si è analizzata la frequenza di oscillazione delle bolle, ponendola in relazione con la loro frequenza naturale di deformazione. Quest'ultima ha mostrato una curva di tendenza molto simile per tutte e tre le celle in funzione del numero di Archimede, mentre la frequenza di oscillazione varia molto con lo spessore delle celle. Sono stati inoltre introdotti quattro differenti numeri di Strouhal, sfruttando le combinazioni possibili con le due frequenze, il diametro delle bolle e lo spessore delle celle. Ne è risultato che posseggono tutti un andamento simile rispetto al numero di Reynolds e, in particolare, il numero di Strouhal, ottenuto con la frequenza naturale di deformazione e il diametro, mostra una curva di tendenza molto simile per tutte e tre le celle.

In conclusione, i risultati ottenuti evidenziano che un approccio basato sull'analisi adimensionale consente di mettere in relazione osservazioni sperimentali apparentemente differenti e suggeriscono l'esistenza di leggi di scala comuni, la cui verifica rappresenta lo sviluppo di questa ricerca. In tale prospettiva, questo lavoro costituisce una base sperimentale e metodologica per futuri studi, sia sperimentali sia numeriche, sulla dinamica dei flussi bifase confinati.

Ringraziamenti

Vorrei ora fare alcuni ringraziamenti.

Innanzitutto ringrazio il professor Alessandro Bottaro per la sua disponibilità e i consigli forniti durante la redazione di questo lavoro e il mio percorso accademico.

Ringrazio inoltre il professor Enrico Lertora ed il gruppo Zero-g di DOPE Hubs per il loro contributo nella costruzione dell'apparato sperimentale e nell'acquisizione dei video.

Infine vorrei ringraziare tutti i miei familiari e i miei amici per il supporto ed il sostegno datomi durante tutti questi anni.

Bibliografia

- G.K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.
- D.J. Booth, K. Wu, I.M. Griffiths, P.D. Howell, J.K. Nunes, and H.A. Stone. Bubble racing in a Hele-Shaw cell. *J. Fluid Mech.*, 1010:A19, 2025.
- D. Borrero-Echeverry, C. J. Crowley, and T. P. Riddick. Rheoscopic Fluids in a Post-Kalliroscope World. *Physics of Fluids*, 30, 2018.
- F.P. Bretherton. The motion of long bubbles in tubes. *J. Fluid Mech.*, 10:166–188, 1961.
- C. Chevalier, M. Ben Amar, D. Bonn, and A. Lindner. Inertial effects on Saffman–Taylor viscous fingering. *J. Fluid Mech.*, 552:83–97, 2006.
- H. Darcy. *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*. Dalmont, Paris, 1856.
- A. Filella, P. Ern, and V. Roig. Oscillatory motion and wake of a bubble rising in a thin-gap cell. *Journal of Fluid Mechanics*, 2015.
- A.L. Hazel and M. Heil. The steady propagation of a semi-infinite bubble into a tube of elliptical or rectangular cross-section. *J. Fluid Mech.*, 470:91–114, 2002.
- H.S. Hele-Shaw. Investigation of the nature of surface resistance of water and of stream-line motion under certain experimental conditions. *Trans. Inst. Naval Arch.*, 40:21–46, 1898.
- H.S. Hele-Shaw. *The Motion of a Perfect Liquid*. US Government Printing Office, 1901.
- S.G. Huisman, P. Ern, and V. Roig. Interaction and coalescence of large bubbles rising in a thin gap. *Physical review*, 2012.
- T. Maxworthy. Bubble formation, motion and interaction in a Hele-Shaw cell. *J. Fluid Mech.*, 173:95–114, 1986.
- C.C. Mei and B. Vernescu. *Homogenization Methods for Multiscale Mechanics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2010.
- B. Monnet, C. Madec, V. Vidal, S. Joubaud, and J.J. Soundar Jerome. Bubble rise in a Hele-Shaw cell: bridging the gap between viscous and inertial regimes. *J. Fluid Mech.*, 942:R3, 2022.

- B. Monnet, J.J. Soundar Jerome, V. Vidal, and S. Joubaud. Bubble dynamics in an inclined Hele-Shaw cell. *Physical Review Fluids*, 2024.
- G. Mougin and J. Magnaudet. Path instability of a rising bubble. *Physical Review Letters*, 88(1), 2002.
- M. Muskat. *The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media*. McGraw-Hill, New York, 1937.
- C.-W. Park and G.M. Homsy. Two-phase displacement in Hele-Shaw cells: theory. *J. Fluid Mech.*, 139:291–308, 1984.
- L. Pavlov, M.V. D’Angelo, V. Roig M. Cachile, and P. Ern. Oscillating bubbles rising in a doubly confined cell. *Anales AFA*, 2021.
- D. A. Reinelt. Interface conditions for two-phase displacement in Hele-Shaw cells. *J. Fluid Mech.*, 183:219–234, 1987.
- P. G. Saffman and G. I. Taylor. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proc. Royal Soc. A*, 245(1242): 312–329, 1958.
- G. Stokes. Experimental investigation of the motion of a thin film of viscous fluid. *Rep. Brit. Assoc.*, 1898.
- G.G. Stokes. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Trans. Camb. Philos. Soc.*, 8:287–305, 1845.
- H. Wong, C. J. Radke, and S. Morris. The motion of long bubbles in polygonal capillaries. Part 1. Thin films. *Journal of Fluid Mechanics*, 292:71–94, 1995a.
- H. Wong, C. J. Radke, and S. Morris. The motion of long bubbles in polygonal capillaries. Part 2. Drag, fluid pressure and fluid flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 292:95–110, 1995b.
- K. Wu, D.J. Booth, I.M. Griffiths, P.D. Howell, J.K. Nunes, and H.A. Stone. Motion and deformation of a bubble in a Hele-Shaw cell. *Phys. Rev. Fluids*, 9:123603, 2024.
- S. Xiang, Z. Jiana, A. Kherbeche, and M.-J. Thoravala. Experimental study of single bubble rising near vertical wall in Hele-Shaw cell. *Chemical Engineering Science, Elsevier*, 2022.
- X. Xu, M. Doi, J. Zhou, and Y. Di. Theoretical analysis for flattening of a rising bubble in a Hele-Shaw cell. *Phys. Fluids*, 32:092102, 2020.