



Università degli studi di Genova

Analisi delle instabilità lineari e non lineari in uno strato limite

Giuseppe Zampogna

30 Ottobre 2012

Relatori:

Prof. A. Bottaro

Prof. M. Piana

Correlatore:

Prof. F. De Mari

Turbolenza

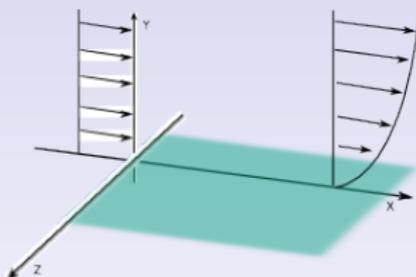
“I am an old man now, and when I die and go to heaven there are two matters on which I hope for enlightenment. One is quantum electrodynamics, and the other is the turbulent motion of fluids. And about the former I am rather optimistic.”

Sir Horace Lamb



- Problema studiato:
 - modello;
 - semplificazioni.
- Fondamenti di studio della stabilità:
 - flusso laminare e turbolento;
 - stabilità lineare e non lineare;
 - strato limite.
- Risoluzione numerica:
 - espansioni utilizzate;
 - metodo di Galerkin;
 - metodo di Newton-Raphson;
 - implementazione codice.
- Risultati, conclusioni e sviluppi futuri.

Consideriamo un fluido incomprimibile e omogeneo che scorre vicino a una lastra piana

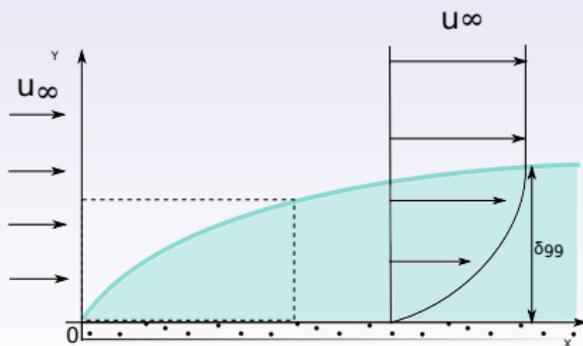


- Dominio: $D = \{(x, y, z, t) : y, t \geq 0\}$;
- Incognite: $\vec{U} : D \subseteq \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, P : D \subseteq \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$.

Assunzioni e semplificazioni

- Incomprimibile e omogeneo;
- spessore δ dello strato in cui si percepiscono gli effetti della viscosità infinitesimo;
- condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \vec{U}(x, 0, z, t) = 0 & \forall x, z \neq 0 \\ \vec{U}(x, y_\infty, z, t) = (\hat{U}_\infty, V(x), 0) & \forall x, z \neq 0, V(x) \approx O\left(\frac{\delta U}{L}\right) \end{cases}$$



Equazioni

Le equazioni che descrivono il moto sono:

$$\begin{cases} \partial_t \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{U} & (x, y, z, t) \in D \\ \nabla \cdot \vec{U} = 0 & (x, y, z, t) \in D \end{cases}$$

dove ρ rappresenta la densità e ν la viscosità. Le stesse equazioni adimensionali sono:

$$\begin{cases} \partial_t \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{U} & (x, y, z, t) \in D' \\ \nabla \cdot \vec{U} = 0 & (x, y, z, t) \in D' \end{cases}$$

con $\text{Re} = \frac{\hat{U}_\infty L}{\nu}$.

- Problema studiato:
 - modello;
 - semplificazioni.
- **Fondamenti di studio della stabilità:**
 - flusso laminare e turbolento;
 - stabilità lineare e non lineare;
 - strato limite.
- Risoluzione numerica:
 - espansioni utilizzate;
 - metodo di Galerkin;
 - metodo di Newton-Raphson;
 - implementazione codice.
- Risultati, conclusioni e sviluppi futuri.

Flusso laminare e turbolento

Flusso laminare

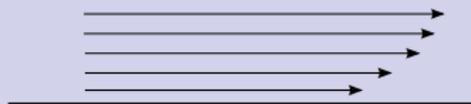
Un flusso si dice a regime laminare quando il moto è sufficientemente organizzato.

Flusso turbolento

Un flusso si dice a regime turbolento quando il moto del fluido avviene in maniera caotica; questo si verifica quando le forze viscosse non sono sufficienti a contrastare le forze di inerzia.

Flusso laminare e turbolento

Flusso laminare

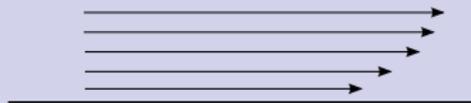


Flusso turbolento

Un flusso si dice a regime turbolento quando il moto del fluido avviene in maniera caotica; questo si verifica quando le forze viscosive non sono sufficienti a contrastare le forze di inerzia.

Flusso laminare e turbolento

Flusso laminare



Flusso turbolento



Stabilità

Consideriamo le equazioni di Navier Stokes e l'equazione di continuità

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{U} \\ \nabla \cdot \vec{U} = 0 \end{cases}$$

soddisfatta dalla coppia (\vec{U}, P) . Sia $(\vec{U} + \vec{u}, P + p)$ una perturbazione di (\vec{U}, P) .

Stabilità

Consideriamo le equazioni di Navier Stokes e l'equazione di continuità

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{U} \\ \nabla \cdot \vec{U} = 0 \end{cases}$$

soddisfatta dalla coppia (\vec{U}, P) . Sia $(\vec{U} + \vec{u}, P + p)$ una perturbazione di (\vec{U}, P) . Sostituendo si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{U} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{u} \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

Lo studio della stabilità consiste nel capire come si comporta una soluzione delle equazioni nel caso in cui venga perturbata.

Stabilità

Energia

Siano $V = V_1 \times V_2 \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e $F = (F_1, F_2, F_3) : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiamo energia di F il quadrato della norma nello spazio di Lebesgue $L^2(V_1)$

$$E_{V_1}^F := \|F\|_{L^2(V_1)}^2 = \frac{1}{2} \int_{V_1} F_i F_i dV_1$$

Stabilità

Una soluzione \vec{U} delle equazioni di Navier Stokes si dice stabile se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E_{V_1}^u(t)}{E_{V_1}^u(0)} = 0.$$

Stabilità

Consideriamo perturbazioni generiche nella forma di onde viaggianti a velocità di fase $\Re(c)$

$$\vec{u} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \vec{u}_{rs}(y) e^{i(r\alpha x + s\beta z - r\alpha ct)}.$$

Nel caso di perturbazione infinitesima è sufficiente considerare una perturbazione monocromatica nel tempo:

$$\vec{u}(x, y, z, t) = \vec{u}(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \alpha ct)}$$

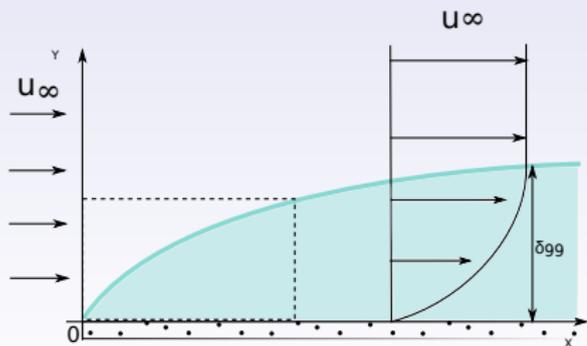
dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$.

Strato limite

Definizione

Lo strato limite è la porzione di spazio identificata dal seguente insieme

$$S = \{(x, y, z) \in D : x, z \in [0, +\infty), \forall x, z \ y \in [0, \delta_{x,z}], \\ \delta_{x,z} \text{ t.c. } U(x, \delta_{x,z}, z) = 0.99 \hat{U}_\infty\}.$$



- Problema studiato:
 - modello;
 - semplificazioni.
- Fondamenti di studio della stabilità:
 - flusso laminare e turbolento;
 - stabilità lineare e non lineare;
 - strato limite.
- **Risoluzione numerica:**
 - espansioni utilizzate;
 - metodo di Galerkin;
 - metodo di Newton-Raphson;
 - implementazione codice.
- Risultati, conclusioni e sviluppi futuri.

Polinomi di Chebyshev

Definizione

Sia $n \in \mathbb{N}$, l' n -esimo polinomio di Chebyshev di prima specie si denota con T_n

$$T_n(\gamma) = \cos(n \arccos \gamma) = \cos(n\theta)$$

dove $\gamma = \cos \theta \in [-1, 1]$ e $\theta \in [0, \pi]$.

Definizione

Sia $u \in L_w^2([-1, 1])$ con w tale che $w(\gamma) = (1 - \gamma^2)^{-\frac{1}{2}}$ (funzione peso). Si definisce sviluppo di Chebyshev

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{u}_n T_n(x) \quad \hat{u}_n = \frac{2}{\pi c_n} \int_{-1}^1 u(\gamma) T_n(\gamma) w(\gamma) d\gamma.$$

Espansioni utilizzate

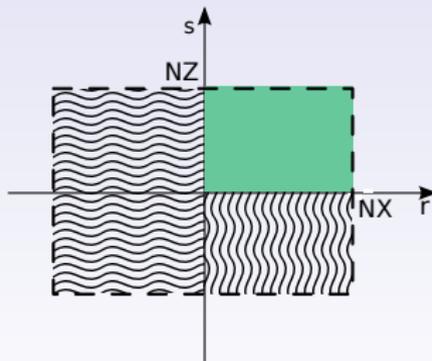
Consideriamo una soluzione

$$\vec{u}(x, y, z, t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \vec{u}_{rs}(y) e^{i(r\alpha x + s\beta z - r\alpha ct)}$$

Espansioni utilizzate

Consideriamo una soluzione

$$\vec{u}(x, y, z, t) = \sum_{r=0}^{NX} \sum_{s=-NZ}^{NZ} \vec{u}_{rs}(y) e^{i(r\alpha x + s\beta z - r\alpha ct)} + c.c.$$



Espansioni utilizzate

Consideriamo una soluzione

$$\vec{u}(x, y, z, t) = \sum_{r=0}^{NX} \sum_{s=-NZ}^{NZ} \vec{u}_{rs}(y) e^{i(r\alpha x + s\beta z - r\alpha t)} + c.c.$$

Utilizziamo lo sviluppo di Chebyshev per $\vec{u}_{rs}(y)$:

$$\vec{u} = \sum_{r=0}^{NX} \sum_{s=-NZ}^{NZ} \sum_{n=0}^{NY} \vec{u}_{r,s,n} T_n(\gamma(y)) e^{i(r\alpha x + s\beta z - r\alpha t)} + c.c.$$

dove γ è una trasformazione di y tale che $\gamma \in [-1, 1]$.

Metodo di collocazione

- si utilizzano punti di collocazione

$$\gamma_j = \cos \frac{\pi j}{N} \quad j = 0, \dots, N;$$

- si mappa l'intervallo $[0, y_{MAX}]$ nell'intervallo $[-1, 1]$ con la trasformazione

$$y = a \frac{1 + \gamma}{b - \gamma}$$

dove

$$a = \frac{y_i y_{MAX}}{y_{MAX} - 2y_i} \quad b = 1 + \frac{2a}{y_{MAX}}.$$

Metodo di Galerkin

- Sia L un operatore differenziale, si definisce $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ tale che $\mathbf{F} = L\vec{u}$;
- $\mathbf{F} = 0$;
- Si impone che il prodotto scalare in $L^2([0, \frac{2\pi}{\alpha}] \times [0, \frac{2\pi}{\beta}])$ di \vec{F} sia nullo cioè

$$\iint_{[0, \frac{2\pi}{\alpha}] \times [0, \frac{2\pi}{\beta}]} \mathbf{F} e^{-i(a\alpha x + b\beta z)} dx dz = 0$$

$$\forall a = 0, \dots, NX, b = 0, \dots, NZ.$$

Metodo di Newton Raphson

Consideriamo un funzionale

$$\mathbf{F} : A \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d.$$

Vogliamo trovare $x = (x^1, \dots, x^d)$ tale che $\mathbf{F}(x) = 0$. Il metodo di Newton Raphson è definito da

$$x_{n+1}^i = x_n^i + \delta_n^i \quad \forall i = 1, \dots, d, n = 0, \dots, \infty$$

dove $\delta_n = (\delta_n^1, \dots, \delta_n^d)$ è la soluzione del sistema lineare

$$\mathbf{J}(x_n)\delta_n^t = \mathbf{F}(x_n)$$

con

$$\mathbf{J}(x_n) = \begin{pmatrix} F_{x^1}^1(x_n) & \dots & F_{x^d}^1(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{x^1}^d(x_n) & \dots & F_{x^d}^d(x_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(x_n) = \begin{pmatrix} F^1(x_n) \\ \vdots \\ F^d(x_n) \end{pmatrix}.$$

Implementazione del codice

Si procede nel seguente modo:

- Studio lineare
 - deduzione linearizzazione equazioni del modello;
 - sostituzione tramite sviluppi;
 - risoluzione problema autovalori.
- Studio non lineare
 - deduzioni equazioni del modello;
 - sostituzione tramite sviluppi;
 - risoluzione del sistema non lineare.

Studio lineare

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t U + U \partial_x U + V \partial_y U + W \partial_z U = -\partial_x p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta U \\ \partial_t V + U \partial_x V + V \partial_y V + W \partial_z V = -\partial_y p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta V \\ \partial_t W + U \partial_x W + V \partial_y W + W \partial_z W = -\partial_z p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta W \\ \partial_x U + \partial_y V + \partial_z W = 0 \end{array} \right.$$

Consideriamo una perturbazione della soluzione del tipo $(\vec{U} + \varepsilon \vec{u}, P + \varepsilon p)$ dove $\vec{u} = (u, v, w)$.

Studio lineare

Sostituiamo alla soluzione \vec{U} la componente x del flusso di Blasius.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u' + U \partial_x u' + v' \partial_y U = -\partial_x p' + \frac{1}{\text{Re}} \Delta u' \\ \partial_t v' + U \partial_x v' = -\partial_y p' + \frac{1}{\text{Re}} \Delta v' \\ \partial_t w' + U \partial_x w' = -\partial_z p' + \frac{1}{\text{Re}} \Delta w' \\ \partial_x u' + \partial_y v' + \partial_z w' = 0. \end{array} \right.$$

Studio lineare

$$\begin{cases} -i\alpha r c \tilde{u}^{(1,1)} = B_u \\ -i\alpha r c \tilde{v}^{(1,1)} = B_v \\ -i\alpha r c \tilde{w}^{(1,1)} = B_w \\ i r \alpha \tilde{u}^{(1,1)} + \partial_y \tilde{v}^{(1,1)} + i s \beta \tilde{w}^{(1,1)} = 0. \end{cases}$$

$$c\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}.$$

$$\mathbf{A} = i\alpha \begin{pmatrix} \mathbf{T} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \mathbf{T} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \mathbf{T} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_0(\gamma_0) & \dots & T_{NY}(\gamma_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_0(\gamma_N) & \dots & T_{NY}(\gamma_N) \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{x} = (\hat{u}_{0,1,1}, \dots, \hat{u}_{NY,1,1}, \hat{v}_{0,1,1}, \dots, \hat{v}_{NY,1,1}, \hat{w}_{0,1,1}, \dots, \dots, \hat{w}_{NY,1,1}, \hat{p}_{0,1,1}, \dots, \hat{p}_{NY,1,1})^t;$$

Studio non lineare

Consideriamo nuovamente le equazioni perturbate, avendo sostituito la soluzione \vec{U} con la componente x del flusso di Blasius. È necessario inserire una nuova incognita k

$$k = 1 - \tilde{u}^{(0,0)}(y_{MAX}) \quad \text{Milinazzo \& Saffman J. Fluid Mech., Vol.160 pp. 281-295, 1985}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u' + \varepsilon u' \partial_x u' + \varepsilon v' \partial_y u' + \varepsilon w' \partial_z u' + kU \partial_x u' + kv' \partial_y U \\ = -\partial_x p' + \frac{1}{\text{Re}} \Delta u' \\ \\ \partial_t v' + \varepsilon u' \partial_x v' + \varepsilon v' \partial_y v' + \varepsilon w' \partial_z v' + kU \partial_x v' + \\ = -\partial_y p' + \frac{1}{\text{Re}} \Delta v' \\ \\ \partial_t w' + \varepsilon u' \partial_x w' + \varepsilon v' \partial_y w' + \varepsilon w' \partial_z w' + kU \partial_x w' \\ = -\partial_z p' + \frac{1}{\text{Re}} \Delta w' \\ \\ \partial_x u' + \partial_y v' + \partial_z w' = 0. \end{array} \right.$$

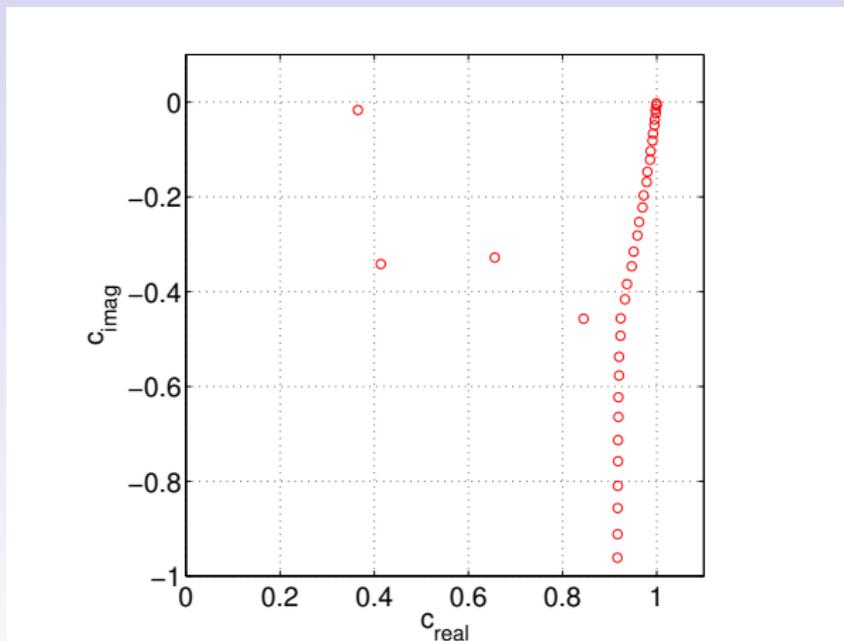
Il dominio di F è $\mathbb{R}^{2 \cdot 2(NX+1)(NZ+1)(NY+1)+NY+1+4}$.

- Problema studiato:
 - modello;
 - semplificazioni.
- Fondamenti di studio della stabilità:
 - flusso laminare e turbolento;
 - stabilità lineare e non lineare;
 - strato limite.
- Risoluzione numerica:
 - espansioni utilizzate;
 - metodo di Galerkin;
 - metodo di Newton-Raphson;
 - implementazione codice.
- Risultati, conclusioni e sviluppi futuri.

L'utilizzo del codice ha reso necessarie tre fasi:

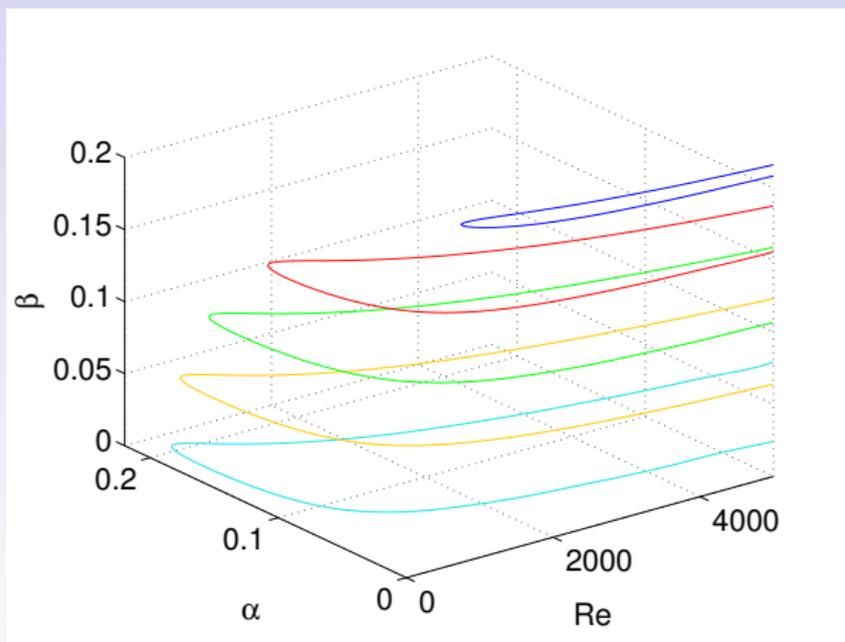
- validazione del codice;
- verifica della convergenza;
- visualizzazione dei risultati.

Procedimento



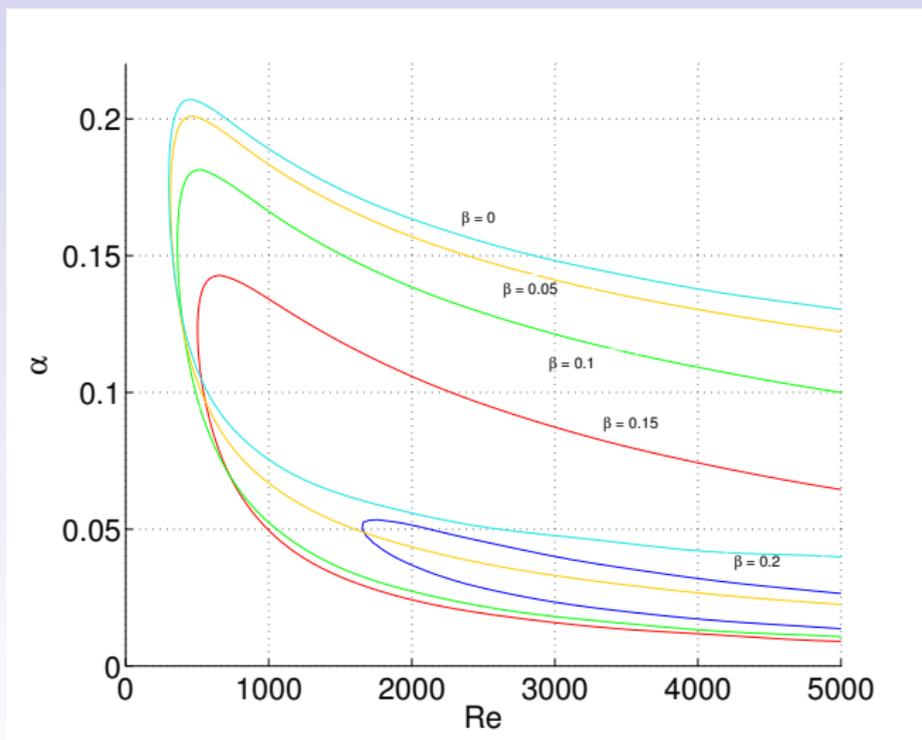
Spettro per $cA\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ per $\alpha = 0.12$, $\beta = 0$, $\text{Re} = 290.6$ e
 $NY = 500$.

Procedimento



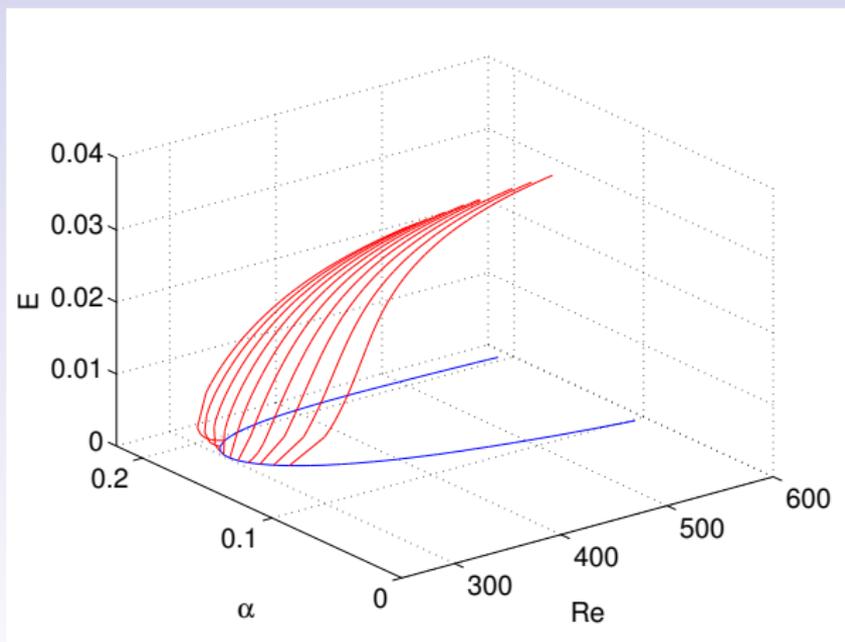
Curve neutre nello spazio dei parametri α, β, Re

Procedimento



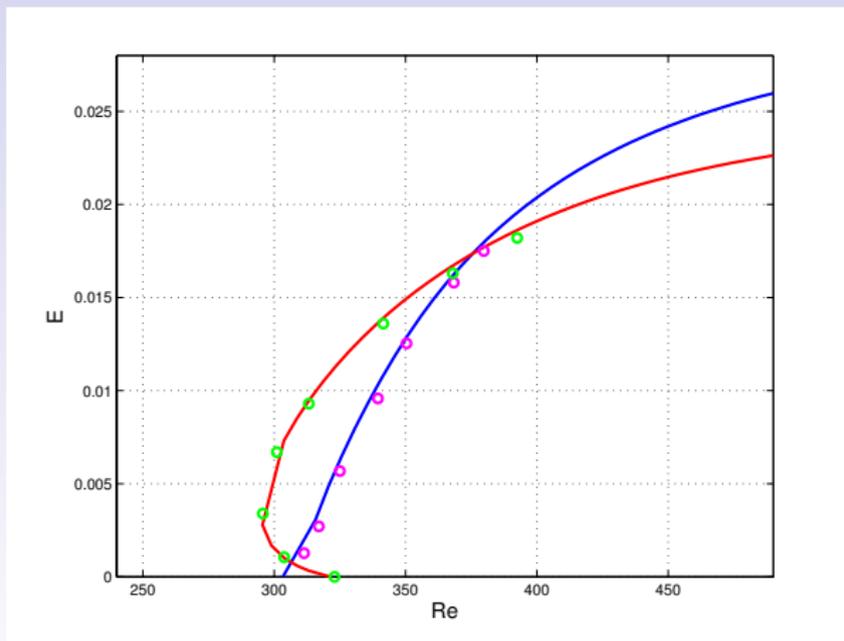
Curve di stabilità neutra al variare di β .

Procedimento



Soluzioni lineari e non lineari rappresentate nello spazio α , Re , E con $\beta = 0$.

Procedimento



Biforcazione subcritica e supercritica per $\alpha = 0.1966$ e $\alpha = 0.17$
con i risultati di Rotenberry Phys. Fluids A 5 (7) pp.1840-1842.

Verifica della convergenza

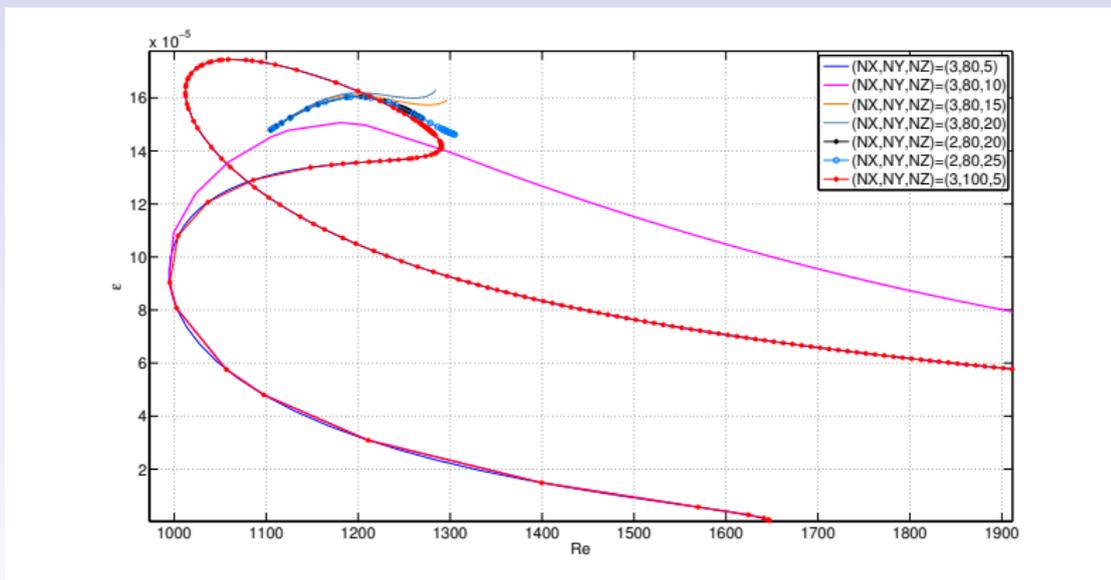
Il criterio stabilito per verificare la convergenza è il seguente:

$$|S_2 - S_1| \leq \epsilon_{toll}.$$

dove S_1 e S_2 sono due soluzioni calcolate con i troncamenti $(NX_1, NY_1, NZ_1, y_{MAX_1})$ e $(NX_2, NY_2, NZ_2, y_{MAX_2})$ rispettivamente.

Verifica della convergenza

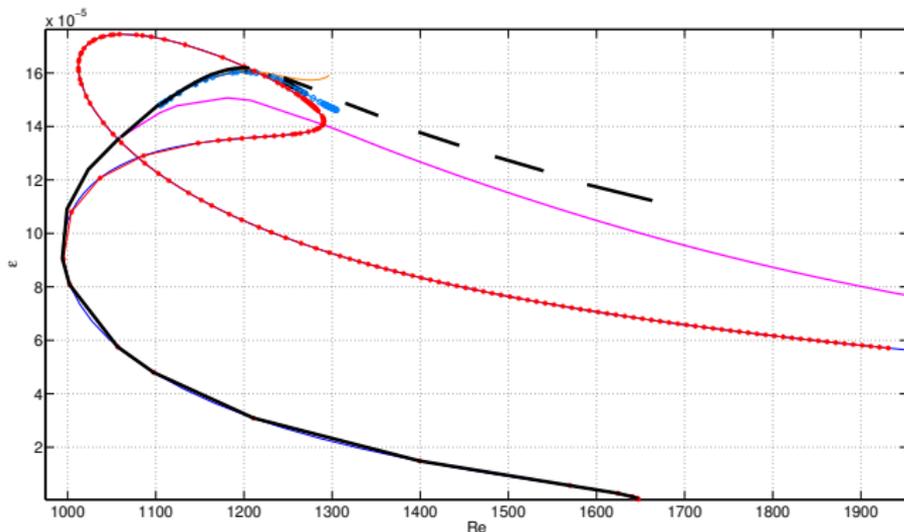
- Stima globale:



Soluzioni non lineari calcolate a partire dalla soluzione lineare corrispondente ai valori $(\text{Re}, \alpha, \beta) = (1647.299, 0.051, 0.2)$.

Verifica della convergenza

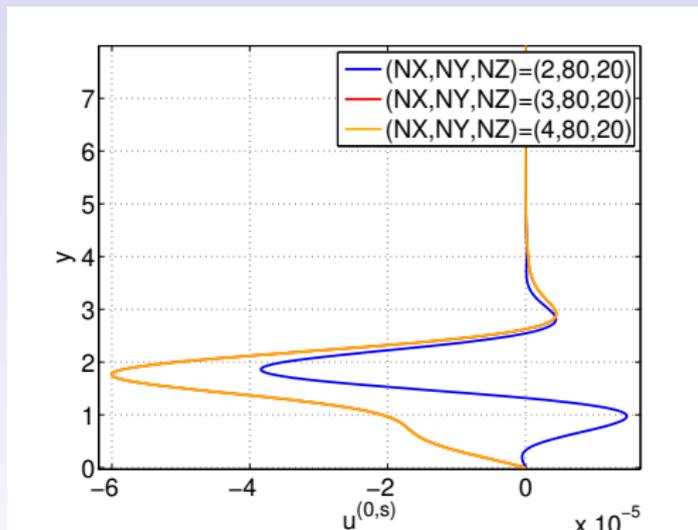
- Stima globale:



Soluzioni non lineari calcolate a partire dalla soluzione lineare corrispondente ai valori $(\text{Re}, \alpha, \beta) = (1647.299, 0.051, 0.2)$.

Verifica della convergenza

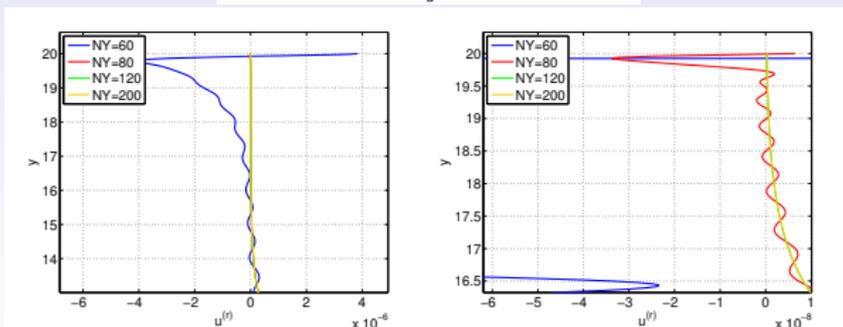
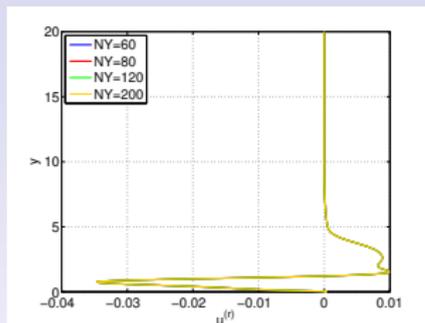
- Verifica per $\vec{u}^{(r,s)}$ in NX :



Funzione $\tilde{u}^{(0,20)}$ corrispondente a $\text{Re} = 1207.811$ e
 $(\alpha, \beta) = (0.051, 0.2)$.

Verifica della convergenza

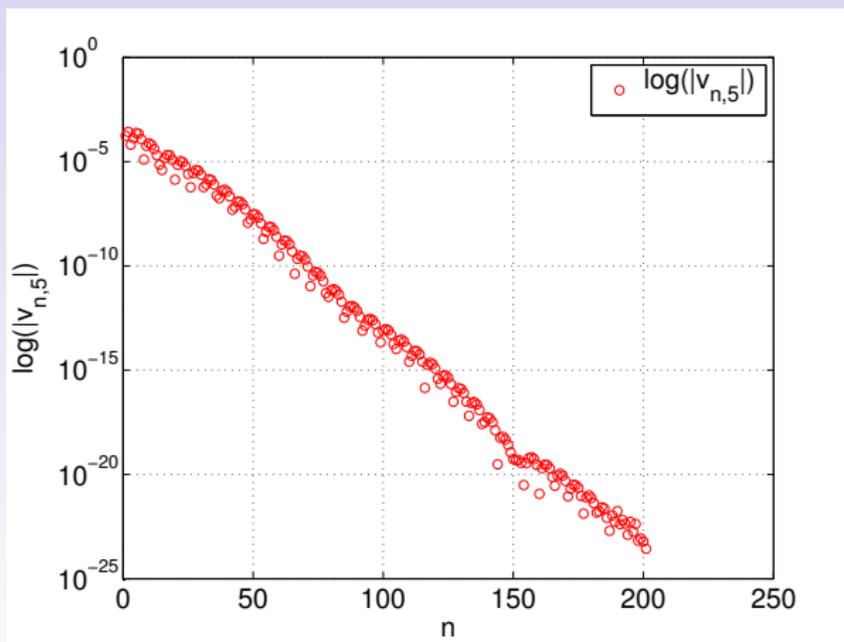
- Verifica per $\vec{u}^{(r,s)}$ in NY :



Funzione $\tilde{u}^{(5)}$, $(\alpha, \beta) = (0.2, 0)$, $\text{Re} = 641.322$, $NX = 6$.

Verifica della convergenza

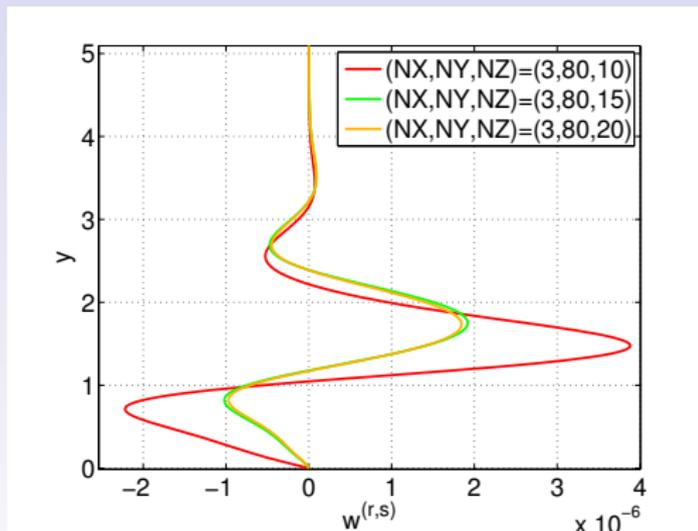
- Verifica per $\vec{u}^{(r,s)}$ in NY :



Moduli dei coefficienti dello sviluppo di Chebyshev per $v^{(5)}$ con $NX = 8$ e $NY = 200$ per $\alpha = 0.2$, $\beta = 0$ e $\text{Re} = 641.322$.

Verifica della convergenza

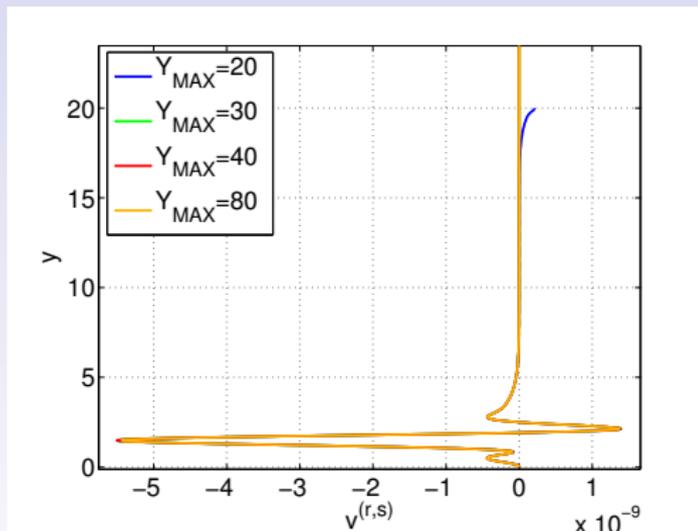
- Verifica per $\vec{u}^{(r,s)}$ in NZ:



Funzione $\tilde{w}^{(2,8)}$ corrispondente a $\text{Re} = (1105.040)$ e $(\alpha, \beta) = (0.051, 0.2)$.

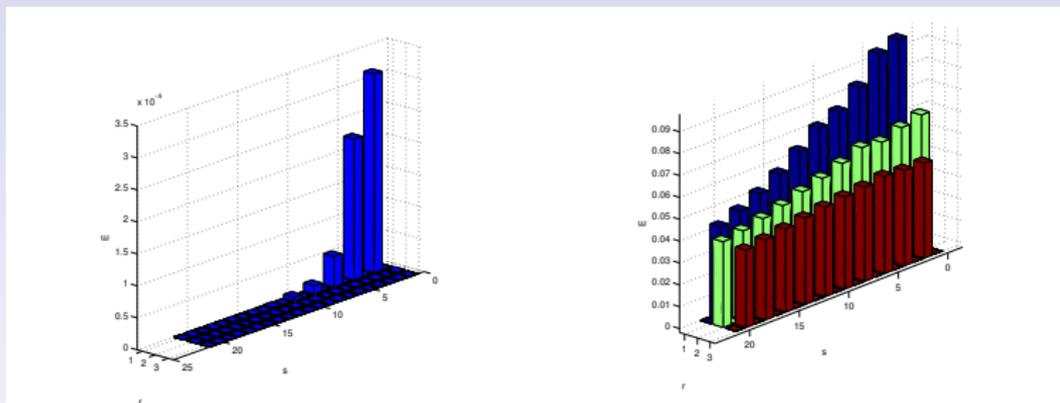
Verifica della convergenza

- Verifica per $\vec{u}^{(r,s)}$ in y_{MAX} :



Funzione $\tilde{v}^{(3,5)}$ corrispondente a $\text{Re} = 1045.95448$ e $(\alpha, \beta) = (0.051, 0.2)$.

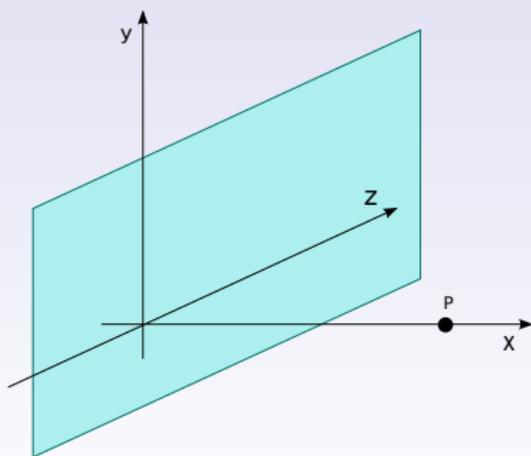
Verifica della convergenza



Energia di $\vec{u}^{(r,s)}(y) = (\tilde{u}^{(r,s)}(y), \tilde{v}^{(r,s)}(y), \tilde{w}^{(r,s)}(y))$ al variare di $r = 1, \dots, 3$ e $s = 0, \dots, 20$ per $(NX, NY, NZ) = (3, 80, 20)$, $\text{Re} = 1105.041$ e $(\alpha, \beta) = (0.051, 0.2)$.

Visualizzazione dei risultati

Infine il modo più intuitivo di rappresentare i risultati ottenuti é mettersi lungo la direzione di scorrimento del fluido e considerare dei piani a x costante in modo da visualizzare gli isocontorni del fronte d'onda:



Visualizzazione dei risultati

- Conclusioni:
 - sono state trovate soluzioni sia nel caso lineare sia non lineare per il problema bidimensionale e tridimensionale (fino a $\beta = 0.20$);
 - l'esperienza attesta strutture per valori di α e β in $[0.5, 0.6]$;
- Sviluppi futuri:
 - cambio dei parametri di continuazione;
 - *SSP*.