



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica Aeronautica

**Analisi aerodinamica di
membrane flessibili mediante
metodi *Lattice Boltzmann***

Relatore

Chiar.mo Prof. Alessandro Bottaro

Correlatore

Dott. Matteo Bargiacchi

Candidato

Paolo Bertocchi

Anno Accademico 2013/2014

Sommario

Il presente lavoro di tesi riguarda lo studio di membrane flessibili immerse in un fluido in movimento. La resistenza aerodinamica di un corpo rigido risulta essere proporzionale al quadrato della velocità del flusso. Tale dipendenza tuttavia non è riscontrata nel caso di strutture deformabili, presenti specialmente in natura, capaci di modificare le proprie caratteristiche geometriche se sottoposte all'azione dinamica di un fluido in movimento, in grado perciò di realizzare una cosiddetta *riconfigurazione*.

Il problema esaminato in questo lavoro riguarda il caso particolare di un nastro sottile, fissato ad una estremità ed avente una massa collegata all'estremità opposta. L'indagine di questo problema viene effettuata sia da un punto di vista teorico sia tramite l'utilizzo di un codice numerico, basato sul metodo Lattice Boltzmann, in grado di simulare l'interazione tra strutture flessibili e fluido.

Il lavoro è strutturato in due parti: nella prima vengono esposte le principali caratteristiche del metodo Lattice Boltzmann, una tecnica relativamente recente della fluidodinamica computazionale che si sta affiancando a quella più tradizionale ed affermata basata sulla risoluzione delle equazioni di Navier-Stokes. Nella seconda parte viene introdotto il problema sotto studio, con l'illustrazione di un modello teorico in grado di cogliere alcuni aspetti osservati sperimentalmente e la presentazione dei risultati delle simulazioni numeriche.

Abstract

“Lattice Boltzmann simulations of the flow over flexible membranes”

The *Lattice Boltzmann method* (LBM) is a relatively recent technique of the Computational Fluid Dynamics (CFD) developed since the '90. The main features of this method are presented and a in-house numerical code able to simulate the interaction between a fluid and a flexible filament was used. The selected problem concerns about the so-called *reconfiguration* phenomenon, i.e. the ability of a deformable body moving in a fluid to change its geometric characteristics in order to reduce the aerodynamic drag. This behaviour is well known to occur in nature: the tree leaves in the wind or the marine organisms are paramount examples. In this thesis the particular case of a flexible ribbon immersed in a flow, with a mass attached to its bottom end, is investigated. The study is performed numerically and theoretically, with a model able to capture most of the interesting properties of the problem.

Indice

1	Introduzione	1
2	Il metodo Lattice Boltzmann	3
2.1	Cenni sulla teoria cinetica dei gas	3
2.2	Distribuzione di Maxwell-Boltzmann	7
2.3	L'equazione di Boltzmann	10
2.3.1	Modello Bhatnagar-Gross-Krook	14
2.3.2	Espansione alle scale multiple di Chapman-Enskog	14
2.4	Implementazione del metodo	15
2.5	Reticoli usati e classificazione	16
2.6	Condizioni al contorno	19
2.6.1	Bounce back	19
2.6.2	Condizione al contorno con velocità nota	20
2.6.3	Condizione al contorno con pressione nota	21
2.7	Forze di volume	22
2.8	Implementazione del codice	23
2.9	Simulazioni e validazione del codice	24
2.9.1	Flusso di Poiseuille	24
2.9.2	Lid-driven cavity	29
2.10	Cenni sulla parallelizzazione	37
3	Descrizione del codice utilizzato	38
3.1	Metodo dei contorni immersi	38
3.2	Implementazione con il metodo Lattice Boltzmann	41
3.3	Modello del filamento elastico	42
3.4	Schema a blocchi del codice	43
3.5	Validazione	45

4	Descrizione dell'esperimento e modello teorico	47
4.1	Introduzione	47
4.2	Descrizione dell'esperimento	48
4.3	Modello teorico	50
4.4	Risultati	53
5	Simulazioni numeriche	59
5.1	Parametri della simulazione	59
5.2	Risultati	62
6	Conclusione e sviluppi futuri	69

Capitolo 1

Introduzione

Il metodo Lattice Boltzmann, che verrà utilizzato in questo lavoro e le cui caratteristiche essenziali saranno analizzate nel seguito, è una tecnica relativamente recente della fluidodinamica computazionale (in inglese CFD, *Computational Fluid Dynamics*) che permette di simulare flussi incomprimibili non stazionari.

La tecnica attualmente più utilizzata ed affermata si basa sulla risoluzione delle equazioni di Navier-Stokes, ovvero le equazioni di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia, che costituiscono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari. Data la loro complessità, la risoluzione analitica è limitata solo a problemi aventi una geometria semplice, per i quali è possibile esprimere opportune ipotesi semplificative. Dal punto di vista generale, quindi, lo studio di problemi più complicati richiede una risoluzione numerica delle equazioni; per fare ciò il problema deve essere trasformato da continuo a discreto. I metodi di discretizzazione comunemente usati sono il metodo delle differenze finite, il metodo degli elementi finiti ed il metodo dei volumi finiti, quest'ultimo il più affermato nella maggior parte dei codici commerciali. In tutti i casi la procedura per effettuare una simulazione, definito il problema da analizzare, richiede la discretizzazione del dominio fluido, ovvero la generazione di una griglia di calcolo sulla quale vengono valutate le grandezze incognite del fluido.

Le equazioni di conservazione, che costituiscono il fondamento di questo approccio, derivano da una visione *continua* del fluido. In particolare, si definisce il numero di Knudsen come

$$Kn = \frac{\lambda}{L},$$

che rappresenta il rapporto tra il libero cammino medio delle molecole del fluido (λ) e una lunghezza caratteristica del dominio (L). Con questa definizione, l'ipotesi di mezzo continuo è valida per $Kn \ll 1$. In questo caso quindi la struttura molecolare del mezzo

non viene contemplata, di conseguenza si dice che la descrizione del fluido avviene ad un livello *macroscopico*. Al contrario, per $Kn \gg 1$, il fatto che il fluido sia costituito da particelle discrete non può essere trascurato e la descrizione deve inevitabilmente avvenire a livello *microscopico*.

La differenza principale del metodo Lattice Boltzmann, rispetto alla risoluzione delle equazioni di Navier-Stokes, risiede proprio nella rappresentazione fisica del fluido, che avviene ad un livello *mesoscopico*, posto a metà strada tra la descrizione macroscopica e quella microscopica. Il fluido viene considerato come costituito da particelle “fittizie” interpretate, come si vedrà nel seguito, dal valore di una funzione di distribuzione. L’equazione che governa l’evoluzione di tali particelle e che sta alla base del metodo è l’equazione di Boltzmann. La caratteristica fondamentale, quindi, è che la descrizione del fluido avvenga da un punto di vista statistico, ad un livello più elementare rispetto all’assunzione di fluido come mezzo continuo.

Tra i vantaggi che questa tecnica possiede, come vedremo in seguito, c’è sicuramente il fatto che non sia richiesta la generazione di una griglia di calcolo, passaggio tra i più delicati e dispendiosi con i metodi tradizionali; un altro vantaggio è l’intrinseca predisposizione al calcolo parallelo, che rende questo metodo particolarmente efficiente.

Capitolo 2

Il metodo Lattice Boltzmann

2.1 Cenni sulla teoria cinetica dei gas

Per comprendere al meglio l'equazione di Boltzmann ed il cosiddetto metodo Lattice Boltzmann è necessario fare alcuni richiami alla teoria cinetica dei gas. Tale teoria ha rivestito e riveste tuttora un ruolo fondamentale nella spiegazione fisica e nella determinazione delle proprietà di un gas. Grandezze *macroscopiche* come pressione e temperatura, infatti, trovano una definizione facendo riferimento invece a grandezze *microscopiche*, come il numero delle molecole del gas contenuto in un certo volume e la loro velocità. È molto importante il fatto che queste definizioni derivino dall'applicazione delle leggi della meccanica classica e che trovino, anche in parte, evidenza dal punto di vista sperimentale. Alcune previsioni della teoria cinetica, invece, non sono in accordo con gli esperimenti e storicamente questo fatto contribuì alla nascita della meccanica quantistica.

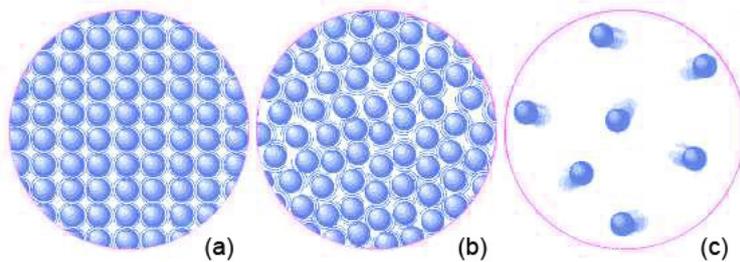


Figura 2.1: Struttura molecolare in un solido (a), in un liquido (b) e in un gas (c).

La materia che ci circonda è costituita da un numero elevatissimo di molecole che interagiscono tra loro (Fig. 2.1). Il modo in cui esse interagiscono definisce la differenza

tra un solido, un liquido ed un gas. In un solido le molecole sono molto ravvicinate le une alle altre, disposte in strutture più o meno regolari. La relativa vicinanza fa sì che i legami che si instaurano tra le molecole stesse siano molto intensi e questo spiega l'elevata resistenza dei solidi alle sollecitazioni esterne.

In un liquido le molecole sono ancora ravvicinate ma hanno una libertà di movimento superiore a quella dei solidi e i legami intermolecolari sono più deboli. In un gas, invece, le molecole possono essere considerate come indipendenti e non legate tra loro; le singole particelle si muovono in modo caotico a elevatissima velocità ed interagiscono solo per il brevissimo periodo in cui collidono tra loro o eventualmente con le pareti del recipiente dentro cui il gas è contenuto. Il cosiddetto *libero cammino medio*, ovvero la distanza statistica media percorsa da una particella tra due urti successivi, è elevata se confrontata con la dimensione caratteristica della molecola stessa e questo giustifica il fatto che quest'ultima possa essere considerata isolata. Per questo motivo, inoltre, la densità di un gas è generalmente molto minore di quella dei liquidi e dei solidi.

La descrizione fatta, nonostante sia molto qualitativa, sta alla base della teoria cinetica dei gas. Alla luce di queste considerazioni è infatti possibile formulare alcune ipotesi semplificative per un modello che spieghi in modo relativamente semplice il comportamento di un gas. In particolare le ipotesi che si fanno sono le seguenti:

1. le molecole del gas occupano un volume trascurabile se confrontato con quello totale occupato dal gas,
2. gli urti tra le molecole e con le pareti del recipiente sono considerati elastici (i.e. si conserva l'energia cinetica),
3. l'interazione tra le molecole diventa apprezzabile solo quando la distanza tra di esse è piccola (comparabile a quella delle particelle stesse).

Con queste ipotesi le molecole si considerano quindi assimilabili a punti materiali che obbediscono alle leggi della meccanica classica. Inoltre queste ipotesi descrivono bene il comportamento di quello che viene definito gas ideale, modello a cui si avvicinano i gas reali quando la densità è bassa o la temperatura elevata.

Pressione

La pressione esercitata da un gas sulle pareti del contenitore entro cui è contenuto si può vedere come dovuta alle molecole che impattano continuamente contro le pareti stesse. Con questa idea si può legare in modo abbastanza semplice la pressione alle grandezze

microscopiche del gas. Consideriamo una molecola di massa m e velocità \vec{v}_1 che impatti contro la parete di un contenitore avente lunghezza caratteristica L . Seguendo le ipotesi fatte applichiamo alla particella il secondo principio della dinamica e la conservazione dell'energia cinetica:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1),$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Con riferimento alla situazione illustrata in Fig. 2.2:

$$v_{x,2} = -v_{x,1} = -v_x,$$

$$v_{y,2} = v_{y,1} = v_y.$$

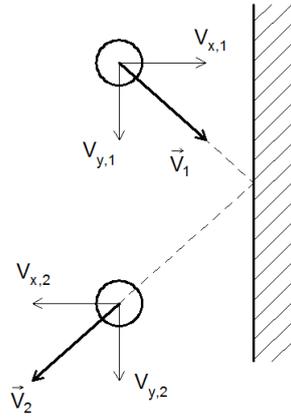


Figura 2.2: Sketch della collisione e del rimbalzo elastico di una particella sulla parete.

La variazione di quantità di moto della particella sarà quindi

$$\Delta p = m(v_{x,2} - v_{x,1}) = -2mv_x.$$

La forza agente sulla parete indotta da una singola particella risulta essere

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{\Delta t}.$$

Assumendo che la particella, dopo l'urto, percorra la distanza L con velocità v_x , rimbalzi sulla parete opposta del contenitore e torni indietro nuovamente con la stessa velocità,

potremo scrivere che

$$\Delta t = \frac{2L}{v_x} \Rightarrow F = \frac{2mv_x}{\frac{2L}{v_x}} = \frac{2mv_x^2}{2L} = \frac{mv_x^2}{L}.$$

Per la forza totale agente sulla parete dovremo tenere conto di tutte le N molecole, quindi

$$F_x = \frac{m}{L} \sum_{i=1}^N v_{i,x}^2.$$

Definendo la velocità quadratica media come

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_{i,x}^2,$$

si ottiene

$$F_x = \frac{mN}{L} \overline{v_x^2}.$$

La pressione in direzione x sarà quindi

$$P = \frac{F_x}{L^2} = \frac{mN}{L^3} \overline{v_x^2} = \frac{mN}{V} \overline{v_x^2},$$

essendo V il volume del contenitore. Tenendo conto delle altre due direzioni e del fatto che il gas ha distribuzione di velocità uniforme si può scrivere che

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}.$$

Si ottiene finalmente un'espressione per la pressione

$$P = \frac{1}{3} \frac{Nm}{V} \overline{v^2}.$$

Come si può vedere, in un gas ideale, la pressione è direttamente proporzionale al numero di molecole N ed alla loro velocità quadratica media $\overline{v^2}$.

Temperatura

Per trovare una relazione per la temperatura introduciamo l'equazione dei gas perfetti

$$PV = nRT,$$

dove n è il numero di moli del gas e R è la costante universale dei gas. Confrontandola con la relazione appena trovata per la pressione è possibile derivare un'espressione per la temperatura assoluta del gas. La velocità quadratica media, infatti, risulta essere

$$\overline{v^2} = \frac{3RT}{M},$$

essendo M la massa molare del gas. Calcolando l'energia cinetica media di una molecola del gas si ottiene

$$\overline{E_c} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{1}{2} m \frac{3RT}{M} = \frac{3}{2} \frac{RT}{N_A} = \frac{3}{2} k_B T,$$

dove $N_A = M/m$ è il numero di Avogadro e $k_B = R/N_A$ è la costante di Boltzmann.

Come si può vedere dalla relazione appena trovata, la temperatura di un gas è proporzionale all'energia cinetica media delle molecole del gas stesso. Essendo funzione anche della massa di ciascuna molecola si conclude che, a parità di temperatura, per un gas più leggero le particelle si muovono mediamente ad una velocità maggiore. Acquista inoltre significato il concetto di zero assoluto, temperatura alla quale le particelle sono in quiete e non possiedono quindi energia cinetica.

È utile infine calcolare la velocità quadratica media molecolare per alcuni gas, in funzione della temperatura, per avere un'idea degli ordini di grandezza in gioco: per l'idrogeno alla temperatura di 273 K si ottiene $\sqrt{\overline{v^2}} = 1845\text{ m/s}$, per l'azoto $\sqrt{\overline{v^2}} = 493\text{ m/s}$ e per l'ossigeno $\sqrt{\overline{v^2}} = 461\text{ m/s}$.

In conclusione, dalle relazioni appena ricavate si può sottolineare la capacità della teoria cinetica nel legare, in modo relativamente semplice, grandezze macroscopiche di un gas, come pressione e temperatura, a quantità microscopiche come la massa e la velocità media delle molecole di cui il gas è costituito.

2.2 Distribuzione di Maxwell-Boltzmann

Come abbiamo visto, le molecole di un gas si muovono molto velocemente e in modo caotico, collidendo le une con le altre e con le pareti del contenitore. Le particelle si possono considerare, trascurando gli effetti quantistici, come punti materiali che essendo tali obbediscono alle leggi della meccanica classica. Dal punto di vista teorico, considerando un gas costituito da N molecole contenuto in un certo volume V , è possibile descrivere

in ogni istante temporale lo stato del sistema risolvendo le equazioni del moto:

$$\frac{d\vec{x}_i}{dt} = \vec{v}_i,$$

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{\vec{F}_i}{m},$$

per ogni molecola $i = 1, \dots, N$. Si tratta di un sistema di $6N$ equazioni differenziali da risolvere rispetto al tempo che permettono di stabilire, in ogni istante, posizione \vec{x}_i e velocità \vec{v}_i di ogni singola particella, nota la forza \vec{F}_i agente su di essa, ovvero lo stato di ogni singola particella nel cosiddetto *spazio delle fasi*. Se questo è vero dal punto di vista teorico, dal punto di vista pratico risolvere tale problema è pressoché impossibile per diversi motivi. Prima di tutto l'integrazione delle precedenti equazioni richiede la conoscenza simultanea delle $6N$ condizioni iniziali $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ e $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$, ovvero posizione e velocità di ogni singola particella all'istante $t = 0$. Questo è ovviamente irrealizzabile dal punto di vista pratico. Inoltre se anche si conoscessero le condizioni iniziali sarebbe impossibile risolvere le $6N$ equazioni differenziali considerando che, come ordine di grandezza, in un cm^3 di aria in condizioni standard vi sono circa 10^{19} molecole. Alla luce dei problemi pratici che si incontrano in un approccio del genere risulta ragionevole, avendo a che fare con un numero così elevato di gradi di libertà, procedere invece da un punto di vista statistico. Precedentemente si è fatto riferimento alla velocità delle molecole che costituiscono un gas, in particolare alla velocità media e alla velocità quadratica media. Nella realtà le particelle avranno ognuna una certa velocità, alcune velocità maggiore, alcune minore, avranno cioè una certa *distribuzione di velocità*. Quello che si vuole fare è determinare appunto tale distribuzione. Introduciamo quindi il concetto di *funzione di distribuzione*, ovvero funzione densità di probabilità. Il problema a questo punto è conoscere, considerando sempre lo stesso sistema di N molecole, quale sia la probabilità di trovare una particella nella posizione \vec{x} avente velocità \vec{v} all'istante t . Indicando con $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ questa probabilità, per definizione il numero probabile di molecole aventi queste caratteristiche sarà dato da $\Delta N = f(\vec{x}, \vec{v}, t)\Delta\vec{x}\Delta\vec{v}$, essendo $\Delta\vec{x}$ e $\Delta\vec{v}$ cubetti di dimensione finita, centrati in \vec{x} e \vec{v} nello spazio delle fasi. Facendo riferimento solo alla velocità, nel sistema di N particelle il numero di molecole dN probabile aventi velocità compresa tra v e $v + dv$ sarà dato da $dN = Nf(v)dv$. Si può dimostrare che la funzione $f(v)$ ha la seguente espressione

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}},$$

dove T è la temperatura del gas e m la massa di ogni molecola. Questa distribuzione, che prende il nome di *distribuzione di Maxwell-Boltzmann*, è molto importante in fisica e gioca un ruolo centrale nel metodo Lattice Boltzmann. A titolo di esempio essa è raffigurata in Fig. 2.3.

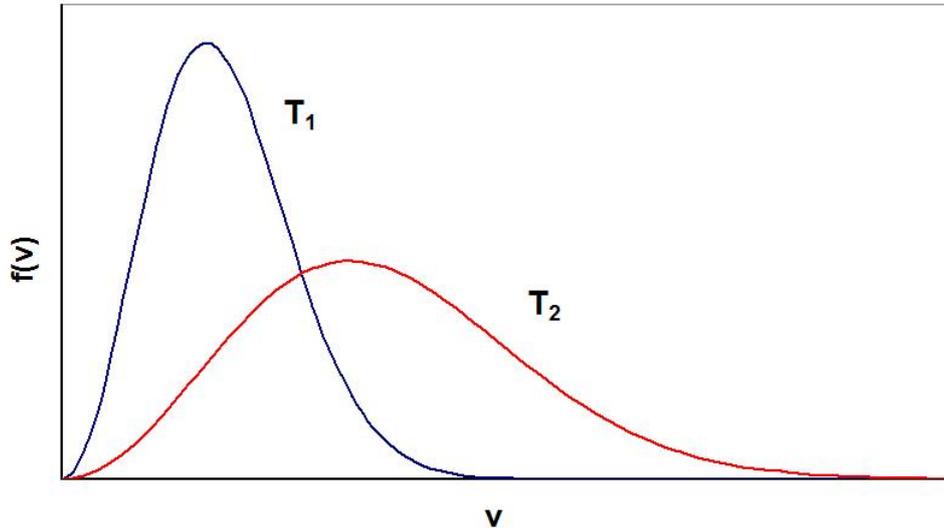


Figura 2.3: Distribuzione di Maxwell-Boltzmann per due diverse temperature ($T_2 > T_1$).

Come si può notare la probabilità aumenta raggiungendo un picco massimo e successivamente decresce esponenzialmente. La probabilità di trovare una molecola ad una certa velocità è nulla in quanto la probabilità è data dall'area sottesa dalla curva. Bisogna quindi integrare su un certo intervallo di velocità per trovare il numero di molecole aventi velocità entro quel range. Per definizione, l'area sottesa da tutta la curva è unitaria, ovvero

$$\int_0^{+\infty} f(v)dv = 1.$$

Dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann si possono ricavare alcune grandezze utili. Ponendo $\frac{df(v)}{dv} = 0$ si può trovare il valore della velocità in corrispondenza del quale si ha il picco massimo della curva, ovvero si trova la velocità più probabile

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

La velocità media invece risulta essere

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Infine è interessante valutare anche la velocità quadratica media, pari a

$$\overline{v^2} = \frac{3RT}{M}.$$

che coincide con l'espressione trovata precedentemente.

Come ultima considerazione si può osservare in Fig. 2.3 che aumentando la temperatura il picco della curva si sposta verso destra, questo significa che aumenta la probabilità di trovare molecole aventi velocità più elevata.

2.3 L'equazione di Boltzmann

Come abbiamo visto nel capitolo precedente il problema di descrivere un gas dal punto di vista microscopico viene affrontato dal punto di vista statistico, mediante l'introduzione di una funzione di distribuzione di velocità. Per un gas nello stato di equilibrio termico, ovvero quando le variabili termodinamiche macroscopiche non variano nel tempo, questa funzione assume la forma della distribuzione di Maxwell-Boltzmann. Tuttavia il caso di equilibrio termodinamico è uno stato particolare; nella maggior parte delle applicazioni si hanno condizioni di non equilibrio, per le quali vi è la presenza di un gradiente di temperatura o di pressione ed il sistema evolve spontaneamente nel tempo per raggiungere le condizioni di equilibrio. Il modo in cui questa evoluzione avviene è descritto dalla cosiddetta equazione di Boltzmann (o equazione del trasporto di Boltzmann) derivata storicamente nel 1872. La grandezza fondamentale di cui studiamo l'evoluzione è, come già visto, la funzione di distribuzione $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$. In un sistema di N molecole, all'istante temporale t , il numero dN di molecole che si trovano nella posizione \vec{x} aventi velocità \vec{v} sarà, per definizione

$$dN = f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{x} d\vec{v}.$$

Integrando sullo spazio delle fasi si ottiene il numero totale di molecole, ovvero

$$N = \iint f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{x} d\vec{v}.$$

Assumiamo che il sistema sia soggetto ad una forza esterna \vec{F} che agisce sulle molecole del gas. All'istante $t + dt$ la nuova posizione e la nuova velocità di ogni particella saranno

$$\vec{x} + d\vec{x} = \vec{x} + \vec{v}dt,$$

$$\vec{v} + d\vec{v} = \vec{v} + \frac{\vec{F}}{m}dt.$$

Si potrà quindi scrivere che, in assenza di collisioni tra le molecole del gas, il numero di particelle rimane costante all'interno del volume, ovvero

$$f(\vec{x} + \vec{v}dt, \vec{v} + \frac{\vec{F}}{m}dt, t + dt)d\vec{x}d\vec{v} = f(\vec{x}, \vec{v}, t)d\vec{x}d\vec{v}.$$

In realtà le collisioni tra le particelle avvengono, vi sarà quindi una differenza netta tra il numero di particelle all'istante $t + dt$ e quello all'istante t che si potrà esprimere come

$$\begin{aligned} dN_{coll} &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} dt d\vec{x}d\vec{v} = \\ &= f(\vec{x} + \vec{v}dt, \vec{v} + \frac{\vec{F}}{m}dt, t + dt)d\vec{x}d\vec{v} - f(\vec{x}, \vec{v}, t)d\vec{x}d\vec{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d\vec{x}d\vec{v}. \end{aligned}$$

Dividendo per $d\vec{x}$ e $d\vec{v}$ si ottiene

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}.$$

Scriviamo ora il differenziale totale della funzione

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial v_x}dv_x + \frac{\partial f}{\partial v_y}dv_y + \frac{\partial f}{\partial v_z}dv_z \right) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + d\vec{x} \cdot \nabla f + d\vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \vec{v} \cdot \nabla f dt + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} dt; \end{aligned}$$

dividendo per dt si ottiene

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}},$$

sostituendo $\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}$ si ricava la forma finale dell'equazione di Boltzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll},$$

dove $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ è la funzione di distribuzione, $\vec{F}(\vec{x}, t)$ il campo di forze esterno ed m la massa di ogni particella.

Se il campo di forze esterne è nullo l'equazione si semplifica e diventa

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}.$$

Abbiamo quindi trovato una equazione che descrive l'evoluzione nel tempo della funzione $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ di distribuzione delle velocità.

La difficoltà principale nella risoluzione della precedente equazione deriva dal fatto che il termine di collisione, ovvero il termine a secondo membro, non è noto a priori e può essere molto complicato; notiamo anche che annullare questo termine equivale ad assumere che non vi siano molecole che collidono tra loro. Il problema si può semplificare facendo alcune ipotesi:

1. si considerano solo collisioni binarie, ovvero collisioni tra due sole molecole, ipotizzando che il gas sia rarefatto e che quindi la probabilità che avvenga una collisione tra più di due particelle sia trascurabile,
2. l'influenza del campo di forze esterno è trascurabile,
3. le velocità delle due particelle, prima e dopo l'urto, non sono correlate (ipotesi di caos molecolare).

Con queste ipotesi si può dimostrare che l'equazione di Boltzmann, con il relativo termine di collisione, assume la forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f = \iint \sigma(\Omega) |\vec{v} - \vec{v}_2| (f' f'_2 - f f_2) d\Omega d\vec{v}_2,$$

dove si è posto $f = f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ e $f_2 = f(\vec{x}, \vec{v}_2, t)$, essendo \vec{v} e \vec{v}_2 le velocità delle due particelle prima dell'urto, $f' = f(\vec{x}, \vec{v}', t)$ e $f'_2 = f(\vec{x}, \vec{v}'_2, t)$, con \vec{v}' e \vec{v}'_2 le velocità delle particelle dopo l'urto e $\sigma(\Omega)$ un termine legato alla sezione d'urto.

L'equazione precedente è un'equazione integro-differenziale che descrive l'evoluzione spazio-temporale della funzione $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$, data una certa distribuzione iniziale $f_0(\vec{x}, \vec{v}, 0)$. Essendo funzione di sei variabili indipendenti non è direttamente visualizzabile sotto forma grafica, tuttavia essa è legata alle grandezze macroscopiche del gas in esame. Nota la funzione f , infatti, si possono determinare la densità ρ del fluido ed il vettore velocità \vec{u} tramite le relazioni

$$\rho(\vec{x}, t) = \int f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v},$$

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\rho(\vec{x}, t)} \int \vec{v} f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v}.$$

Si può dimostrare che, partendo da qualsiasi condizione iniziale, la soluzione stazionaria dell'equazione di Boltzmann semplificata, ovvero la soluzione che si raggiunge per $t \rightarrow \infty$, è proprio la distribuzione di Maxwell-Boltzmann vista in precedenza. Data quindi una certa distribuzione iniziale $f_0(\vec{x}, \vec{v}, 0)$ che in generale rappresenta un sistema non equilibrato, quest'ultimo evolve nel tempo in modo tale da raggiungere spontaneamente l'equilibrio termodinamico.

Per comprendere adeguatamente il metodo Lattice Boltzmann, che si basa sull'equazione di Boltzmann appena vista, è utile descrivere, seppur in maniera qualitativa, i concetti di equilibrio termodinamico *globale* ed equilibrio termodinamico *locale*. Si parla generalmente di equilibrio termodinamico in riferimento ad un sistema per il quale le grandezze termodinamiche globali non variano nel tempo; un gas in quiete, ad esempio, racchiuso all'interno di un contenitore, per il quale temperatura e pressione siano uniformi all'interno del volume, si dice essere in equilibrio termodinamico *globale*. Tuttavia, dal punto di vista microscopico, un gas può trovarsi in uno stato di equilibrio termodinamico a livello locale anche in presenza di gradienti di temperatura o di pressione. L'equilibrio termodinamico *locale* avviene infatti in una scala temporale che si può assumere avere ordine di grandezza $\tau_\lambda = \frac{\lambda}{v_T}$, dove λ rappresenta il libero cammino medio della particella e $v_T \approx \sqrt{\frac{RT}{M}}$ è la velocità delle particelle associata alla temperatura T . È sufficiente che la scala di tempo globale di evoluzione del fenomeno macroscopico sia molto maggiore di τ_λ che la situazione si definisce di equilibrio globale. L'equilibrio globale, per essere raggiunto, richiede un tempo caratteristico molto più grande, dell'ordine di grandezza di diversi $\tau_h = \frac{l_M}{v_T}$, dove l_M rappresenta la scala caratteristica macroscopica. Si può dimostrare che la soluzione stazionaria dell'equazione di Boltzmann, ovvero per cui $\frac{\partial f(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\partial t} = 0$, è proprio la distribuzione di Maxwell-Boltzmann, scritta nella forma

$$f^{eq}(\vec{x}, \vec{v}) = \rho(\vec{x}) \left(\frac{m}{2\pi k_B T(\vec{x})} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2k_B T(\vec{x})} |\vec{v} - \vec{u}(\vec{x})|^2},$$

nella quale $\rho(\vec{x})$, $T(\vec{x})$ e $\vec{u}(\vec{x})$ sono la densità, temperatura e vettore velocità del fluido nel punto \vec{x} . La distribuzione scritta in questo modo rappresenta la probabilità di trovare una molecola avente un certo vettore velocità $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, per questo motivo differisce dalla distribuzione $f(v)$, che esprime invece la probabilità di trovare una certa molecola avente modulo della velocità v . Il termine $|\vec{v} - \vec{u}(\vec{x})|$ è detta velocità *peculiare*, ovvero la velocità delle molecole relativa a quella del fluido in movimento. Come già visto,

per $t \rightarrow \infty$, la soluzione risulta essere la stessa soluzione di equilibrio, quindi quella di Maxwell-Boltzmann, per la quale invece la velocità del fluido è nulla e densità e temperatura non sono più funzioni dello spazio, essendo uniformi in tutto il dominio. L'approccio all'equilibrio globale avviene quindi partendo da una distribuzione iniziale non equilibrata, si dice che il sistema "rilassa" localmente all'equilibrio, con ordine di grandezza temporale τ_λ , tramite il meccanismo di collisione tra le molecole; il sistema tende ad equilibrarsi globalmente, ovvero ad avere grandezze macroscopiche uniformi, in modo più lento, su una scala temporale di ordine τ_h .

2.3.1 Modello Bhatnagar-Gross-Krook

Come si è visto precedentemente la soluzione dell'equazione di Boltzmann è resa difficile soprattutto dal complicato termine di collisione presente al secondo membro. Risulta ragionevole allora approssimare l'effetto delle collisioni tra le molecole con una espressione matematicamente più semplice che consenta una trattazione meno complicata dell'equazione di Boltzmann, sia dal punto di vista analitico che dal punto di vista numerico.

L'approssimazione più utilizzata è quella del cosiddetto modello BGK. L'idea di base di questa semplificazione è assumere che l'effetto delle collisioni tra le molecole sia quello di far tendere la distribuzione $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ a quella di equilibrio locale $f^{eq}(\vec{x}, t)$ di Maxwell-Boltzmann, trascurando il meccanismo con cui questo avvenga. La distribuzione di equilibrio è espressa in funzione delle grandezze locali del fluido. Con queste ipotesi l'equazione di Boltzmann con la relativa approssimazione BGK per il termine di collisione diventa

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f = -\frac{f - f^{eq}}{\tau}.$$

Come si vede il problema risulta notevolmente semplificato. L'equazione, scritta in questa forma, è alla base del metodo Lattice Boltzmann e la sua risoluzione consente di studiare numericamente i più diversi problemi fluidodinamici.

2.3.2 Espansione alle scale multiple di Chapman-Enskog

Si accenna brevemente all'espansione alle scale multiple di Chapman-Enskog, grazie al quale si dimostra che è possibile, partendo dall'equazione di Boltzmann, derivare le equazioni di Navier-Stokes, ovvero l'equazione della continuità e della quantità di moto, valide per fluidi incomprimibili.

La dimostrazione si basa sull'espandere in serie di potenze la funzione di distribuzione $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ e la variabile temporale t , ovvero

$$f = f^{(0)} + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots,$$

$$t = t^{(0)} + \varepsilon t^{(1)} + \varepsilon^2 t^{(2)} + \dots$$

Il parametro ε dell'espansione è esattamente il numero di Knudsen $Kn = \frac{\lambda}{L}$, che rappresenta il rapporto tra il libero cammino medio delle molecole e la lunghezza caratteristica del dominio. Questo metodo è valido per piccoli valori di ε , ovvero quando la scala di lunghezza del problema è molto più grande del libero cammino medio delle particelle ($Kn \ll 1$). La distribuzione indicata con $f^{(0)}$ è esattamente la distribuzione di equilibrio locale di Maxwell-Boltzmann, alla quale vengono sommati ulteriori termini di non-equilibrio. Con questa tecnica si ricava anche l'espressione per il valore della viscosità cinematica, pari a

$$\nu = c_s^2 \left(\tau - \frac{1}{2} \right),$$

dove τ è il tempo caratteristico di rilassamento locale del problema. Tramite questo metodo si dimostra quindi l'analogia tra l'equazione di Boltzmann, che descrive il fluido da un punto di vista mesoscopico, e le equazioni di conservazione del modello della meccanica dei continui.

2.4 Implementazione del metodo

Nel presente capitolo vengono introdotti i concetti fondamentali di questo metodo ed il modo in cui si può implementare un algoritmo per la soluzione di problemi fluidodinamici. La base di questo metodo, come abbiamo visto, è l'equazione di Boltzmann con il modello BGK introdotto nel capitolo precedente, ovvero

$$\frac{\partial f(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f(\vec{x}, \vec{v}, t) = -\frac{1}{\tau} [f(\vec{x}, \vec{v}, t) - f^{eq}(\vec{x}, \vec{v}, t)].$$

Per essere risolta numericamente, tale equazione deve essere discretizzata sia nel tempo che nello spazio. Per fare ciò il primo passo è discretizzare lo spazio delle velocità \vec{v} riscrivendo quindi l'equazione per un insieme finito di velocità, che indicheremo con \vec{c}_i , dove il pedice i fa riferimento all'indice che rappresenta, come vedremo, la direzione di collegamento tra i diversi nodi del reticolo con cui lo spazio viene discretizzato. Con

queste ipotesi l'equazione di Boltzmann si riscrive come

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{c}_i \cdot \nabla f_i = -\frac{1}{\tau} [f_i - f_i^{eq}],$$

dove si è posto $f_i = f(\vec{x}, \vec{c}_i, t)$. Tradizionalmente queste grandezze vengono dette *popolazioni*. Possiamo anche interpretare la f_i come la probabilità di trovare una particella nella posizione \vec{x} all'istante t con $\vec{v} = \vec{c}_i$. A questo punto è possibile scrivere la discretizzazione dell'equazione precedente. L'evoluzione nel tempo e nello spazio di ogni funzione f_i sarà data dalla relazione

$$f_i(\vec{x} + \vec{c}_i, t + 1) = f_i(\vec{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_i(\vec{x}, t) - f_i^{eq}(\vec{x}, t)].$$

Una volta noti i valori delle popolazioni f_i si possono ritrovare le grandezze macroscopiche semplicemente tramite le relazioni

$$\rho(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^m f_i(\vec{x}, t),$$

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\rho(\vec{x}, t)} \sum_{i=1}^m f_i(\vec{x}, t) \vec{c}_i,$$

essendo m il numero di velocità discrete utilizzato, ρ la densità del fluido e \vec{u} il vettore velocità del flusso in ogni punto del dominio.

2.5 Reticoli usati e classificazione

Come suggerisce il nome del metodo, per la discretizzazione nello spazio si fa uso di reticoli (*lattices*), con i quali il dominio di interesse viene suddiviso. Si assume che in ogni nodo sia presente una particella “fittizia” (rappresentata dal relativo valore della funzione di distribuzione); ogni particella si sposta lungo una specifica direzione da un nodo all'altro del reticolo, in base alla relativa velocità posseduta dalla particella stessa. Si riportano brevemente nel seguito due dei tipi di reticolo maggiormente utilizzati nella risoluzione di problemi fluidodinamici, in due e tre dimensioni. Nel trattare la discretizzazione spaziale con questo metodo spesso si fa riferimento alla cosiddetta classificazione $DnQm$, dove Dn fa riferimento al numero di dimensioni del problema (ad es. $n = 1$ in una dimensione, $n = 2$ in due dimensioni, ecc.) e Qm indica invece il numero di velocità utilizzate, pari al numero di collegamenti tra il nodo centrale e i nodi vicini.

Reticolo D2Q9

Questo tipo di configurazione è una delle più utilizzate in fluidodinamica per domini bidimensionali. Si hanno nove velocità diverse, ognuna rappresentata per definizione dai seguenti vettori:

$$\begin{aligned}\vec{c}_0 &= (0, 0), \\ \vec{c}_1 &= (1, 0), \\ \vec{c}_2 &= (0, 1), \\ \vec{c}_3 &= (-1, 0), \\ \vec{c}_4 &= (0, -1), \\ \vec{c}_5 &= (1, 1), \\ \vec{c}_6 &= (-1, 1), \\ \vec{c}_7 &= (-1, -1), \\ \vec{c}_8 &= (1, -1).\end{aligned}$$

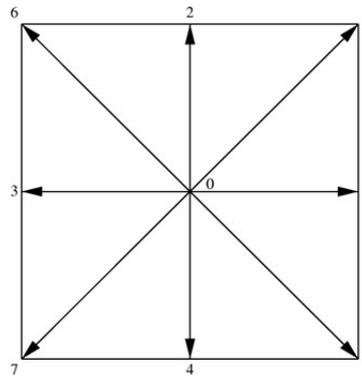


Figura 2.4: Reticolo D2Q9.

Si avranno quindi nove valori discreti per la funzione di distribuzione, ovvero $f = f_i$ per $i = 0, 1, \dots, 8$. Il valore con indice $i = 0$ indica che la particella è ferma nel nodo centrale del reticolo, in quanto possiede velocità nulla. In Fig. 2.4 si può apprezzare tale configurazione e la relativa definizione delle nove velocità.

Reticolo D3Q15

A titolo di esempio si riporta in Fig. 2.5 anche questa configurazione tridimensionale, tra le più utilizzate in fluidodinamica, avente quindici velocità.

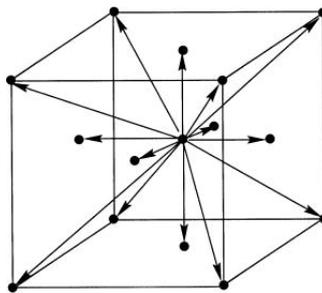


Figura 2.5: Reticolo D3Q15.

Riscriviamo l'espressione discretizzata dell'equazione di Boltzmann e facciamo alcune considerazioni:

$$f_i(\vec{x} + \vec{c}_i, t + 1) = f_i(\vec{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_i(\vec{x}, t) - f_i^{eq}(\vec{x}, t)].$$

Si può notare come l'applicazione di questa espressione possa essere considerata come somma di due contributi distinti:

1. fase di *collisione*, ovvero collisione tra le particelle e conseguente rilassamento verso la distribuzione di equilibrio. Formalmente:

$$f_i(\vec{x}, t + 1) = f_i(\vec{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_i(\vec{x}, t) - f_i^{eq}(\vec{x}, t)];$$

2. fase di *streaming*, ovvero propagazione delle particelle verso i nodi adiacenti

$$f_i(\vec{x} + \vec{c}_i, t + 1) = f_i(\vec{x}, t + 1).$$

La prima fase si può anche riscrivere come

$$f_i(\vec{x}, t + 1) = (1 - \omega) f_i(\vec{x}, t) + \omega f_i^{eq}(\vec{x}, t),$$

nella quale $\omega = \frac{1}{\tau}$ è detta *frequenza di rilassamento*. Rimane ancora da definire la distribuzione di equilibrio in forma discreta. Si può dimostrare che per un fluido incomprimibile, partendo dalla distribuzione di equilibrio continua, la forma discreta assume l'espressione

$$f_i^{eq}(\vec{x}, t) = w_i \rho(\vec{x}, t) \left[1 + 3 \frac{\vec{c}_i \cdot \vec{u}}{c^2} + \frac{9}{2} \frac{(\vec{c}_i \cdot \vec{u})^2}{c^4} - \frac{3}{2} \frac{\vec{u}^2}{c^2} \right].$$

I coefficienti indicati con w_i dipendono dal particolare tipo di reticolo utilizzato e sono ricavati da uno sviluppo in serie di Taylor troncato al secondo ordine. Tale relazione, inoltre, è valida solo per bassi numeri di Mach. Nel caso bidimensionale, per il reticolo *D2Q9*, i coefficienti valgono

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{4}{9}, \\ w_i &= \frac{1}{9} \quad \text{per } i = 1, 2, 3, 4, \\ w_i &= \frac{1}{36} \quad \text{per } i = 5, 6, 7, 8. \end{aligned}$$

Si può vedere che nel caso particolare in cui la velocità del fluido è nulla ($\vec{u} = \vec{0}$) i valori della distribuzione di equilibrio non sono altro che la densità moltiplicata per il relativo peso. Infine, utilizzando il reticolo *D2Q9*, si trova che $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e quindi $\nu_{LB} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{2} \right)$.

2.6 Condizioni al contorno

L'imposizione delle condizioni al contorno è una componente fondamentale nella risoluzione di un problema fluidodinamico. Sono infatti le condizioni al contorno che definiscono il problema che si vuole studiare e consentono di risolvere le equazioni che stanno alla base del modello utilizzato, le quali hanno validità generale. In questo capitolo vengono presentate le più comuni condizioni al contorno valide per il metodo Lattice Boltzmann. Per questo metodo, infatti, le condizioni al contorno sono relativamente semplici da implementare, tuttavia esse non risultano essere così intuitive rispetto ai metodi tradizionali basati sulla risoluzione delle equazioni della continuità e della quantità di moto. In queste ultime, infatti, le incognite delle equazioni da risolvere sono proprio le quantità macroscopiche del fluido che si vogliono conoscere, ovvero pressione e vettore velocità (nel caso di fluido incomprimibile). In un problema del genere, quindi, imporre le condizioni al contorno significa specificare condizioni direttamente su queste grandezze (ad es. per la *no-slip condition* si impone vettore velocità nullo in corrispondenza di una parete). Il metodo Lattice Boltzmann, come si è visto, ha invece origine da una descrizione mesoscopica del fluido e per questo motivo si basa sulla risoluzione dell'equazione di Boltzmann discretizzata nello spazio delle fasi, le cui incognite sono le popolazioni f_i nelle direzioni i . Le condizioni al contorno di conseguenza andranno imposte su queste ultime. Il legame tra le grandezze macroscopiche ai bordi e le relative distribuzioni tuttavia non è così diretto. Per questo motivo sull'argomento sono state proposte diverse soluzioni, a partire dai primi anni '90, e ancora oggi il problema è materia di studio.

2.6.1 Bounce back

Questo tipo di condizione al contorno è una delle più utilizzate e consente di modellare pareti solide e ostacoli con la condizione di non scorrimento. Il metodo è semplice da implementare e si basa sull'assunzione che le particelle che si muovono in direzione delle pareti "rimbalzano" indietro nel dominio fluido. Esistono diverse metodi per implementare questa condizione. Un primo schema è porre la parete solida a metà tra i nodi del reticolo. Considerando una parete inferiore, le incognite da determinare ri-

sultano essere le componenti f_5, f_6, f_2 . Per quanto detto, assumendo che le particelle vengano proiettate indietro, si dovrà porre $f_5 = f_7, f_6 = f_8, f_2 = f_4$, che sono noti dal processo di streaming. Notare che in questo caso si avrà $f_5(i, j) = f_7(i - 1, j - 1)$, $f_6(i, j) = f_8(i + 1, j - 1)$, $f_2(i, j) = f_7(i, j - 1)$. Un'altra configurazione è porre la parete solida in corrispondenza dei nodi (Fig. 2.6). Per questo caso, più semplice, si avrà invece $f_5(i, j) = f_7(i, j)$, $f_6(i, j) = f_8(i, j)$, $f_2(i, j) = f_4(i, j)$.

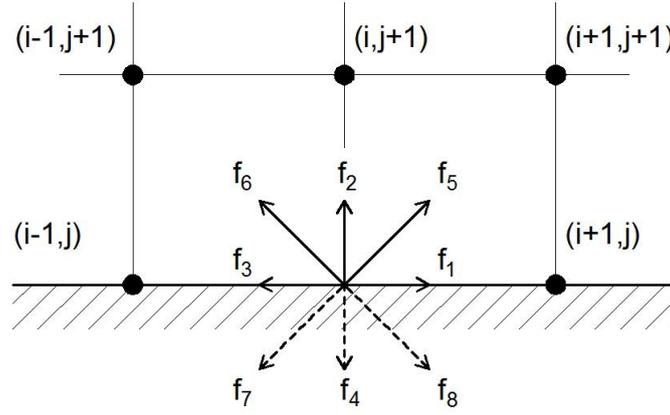


Figura 2.6: Parete inferiore in corrispondenza dei nodi.

2.6.2 Condizione al contorno con velocità nota

In questo caso è nota la velocità sul bordo. Si consideri noto, a titolo di esempio, il vettore velocità (u, v) sul bordo sinistro del dominio (Fig. 2.7). Riscriviamo le relazioni che forniscono densità e velocità

$$\rho = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8,$$

$$\rho u = f_1 + f_5 + f_8 - f_6 - f_3 - f_7,$$

$$\rho v = f_2 + f_5 + f_6 - f_4 - f_7 - f_8.$$

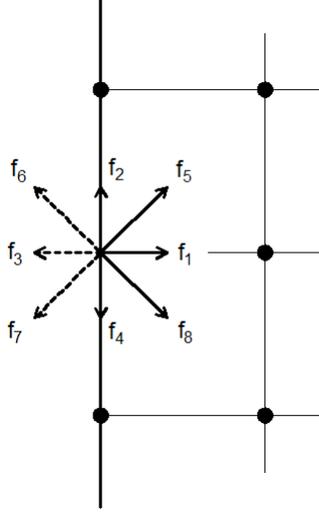


Figura 2.7: Condizione al contorno su parete sinistra.

Essendo note le due componenti della velocità al bordo si hanno quattro incognite, ovvero ρ , f_1 , f_5 , f_8 . L'equazione mancante per chiudere il problema si ottiene seguendo il metodo proposto da Zou & He (1997), ponendo

$$f_1 - f_1^{eq} = f_3 - f_3^{eq},$$

dove f_1^{eq} e f_3^{eq} sono le distribuzioni di equilibrio calcolate per $i = 1, 3$ rispettivamente. A questo punto è possibile risolvere il sistema. Il valore delle incognite risulta essere

$$\rho = \frac{1}{1-u} [f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_3 + f_6 + f_7)],$$

$$f_1 = f_3 + \frac{2}{3}\rho u,$$

$$f_5 = f_7 + \frac{1}{2}(f_4 - f_2) + \frac{1}{6}\rho u + \frac{1}{2}\rho v,$$

$$f_8 = f_6 - \frac{1}{2}(f_4 - f_2) + \frac{1}{6}\rho u - \frac{1}{2}\rho v.$$

2.6.3 Condizione al contorno con pressione nota

In questo caso la grandezza nota su uno dei lati del dominio fluido è la pressione. Assumiamo che la componente della velocità parallela alla parete sia nulla. La procedura per la determinazione delle incognite non differisce di molto dal caso precedente. Essendo

il modello incomprimibile vale la relazione $p = \rho c_s^2 = \frac{1}{3}\rho$. Imporre una certa pressione equivale quindi ad imporre una certa densità. Sempre nel caso particolare di pressione nota sul lato sinistro (Fig. 2.7) le incognite valgono

$$u = -1 + \frac{1}{\rho} [f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_3 + f_6 + f_7)],$$

$$f_1 = f_3 + \frac{2}{3}\rho u,$$

$$f_5 = f_7 + \frac{1}{2}(f_4 - f_2) + \frac{1}{6}\rho u,$$

$$f_8 = f_6 - \frac{1}{2}(f_4 - f_2) + \frac{1}{6}\rho u.$$

Particolare attenzione deve inoltre essere dedicata ai nodi che si trovano all'intersezione di diverse condizioni al contorno. Una trattazione specifica per ogni singolo nodo è sempre necessaria per ottenere condizioni al contorno consistenti.

2.7 Forze di volume

Nel simulare applicazioni reali spesso si deve tenere conto delle forze di volume che agiscono sul fluido (ad es. la forza gravitazionale, centrifuga, ecc.). L'effetto di tali forze può essere introdotto tramite un incremento di velocità, nel modo seguente. Scriviamo la seconda legge della dinamica:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{u}}{dt},$$

dove \vec{F} è la forza agente sul fluido. La massa è proporzionale alla densità e assumendo una unità di volume (in *lattice units*) la massa sarà pari a ρ ; inoltre al tempo potremo sostituire il tempo di rilassamento τ . L'incremento di velocità dovuto alle forze di massa risulterà quindi

$$\Delta\vec{u} = \frac{\tau\vec{F}}{\rho},$$

Questo incremento andrà sommato alla velocità calcolata in ogni punto, nota la funzione di distribuzione in ogni direzione. La velocità così calcolata sarà quella utilizzata per il calcolo della distribuzione di equilibrio f^{eq} , ovvero

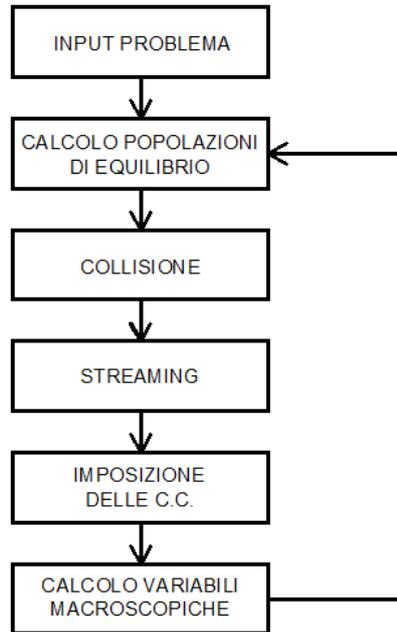
$$\vec{u}^{eq} = \vec{u} + \Delta\vec{u} = \vec{u} + \frac{\tau\vec{F}}{\rho}.$$

2.8 Implementazione del codice

È possibile a questo punto scrivere gli *steps* necessari per l'implementazione di un algoritmo che consenta di risolvere numericamente problemi fluidodinamici utilizzando il metodo Lattice Boltzmann. Nella presente trattazione si farà riferimento ad un dominio bidimensionale. I passaggi da seguire sono i seguenti:

1. dato il problema da risolvere si specificano le variabili della simulazione. Per ottenere risultati coerenti si dovrà fare in modo che il numero di Reynolds del problema reale sia uguale a quello della simulazione, ovvero $Re_{reale} = Re_{LB}$. In questo modo, nota la viscosità ν_{LB} , si otterrà il valore della frequenza di rilassamento ω ,
2. note le condizioni iniziali, ovvero $\rho_0(\vec{x})$ e $\vec{u}_0(\vec{x})$, si calcolano le popolazioni di equilibrio $f_i^{eq}(\vec{x})$ con la formula riportata precedentemente,
3. si impone la fase di *collisione*,
4. si impone la fase di *streaming*, ovvero si propagano le popolazioni nei nodi vicini a quello centrale, nelle relative direzioni,
5. si calcolano in ogni punto le variabili macroscopiche, densità e vettore velocità, con le relazioni viste,
6. si ricalcolano le nuove distribuzioni di equilibrio e si ripete il ciclo dal punto 3.

Per maggiore chiarezza si possono rappresentare i precedenti passaggi in un diagramma di flusso.



2.9 Simulazioni e validazione del codice

Per verificare l'effettiva validità del metodo sono state svolte alcune simulazioni, riportate di seguito, implementando il metodo Lattice Boltzmann in un codice numerico. Tutte le prove sono state validate utilizzando come risultati di riferimento soluzioni analitiche o dati presenti in letteratura.

2.9.1 Flusso di Poiseuille

La prima simulazione svolta è quella del cosiddetto flusso di Poiseuille. In questo caso si è fatto riferimento al caso, stazionario, in cui il fluido scorra tra due piastre parallele di dimensioni infinite, poste ad una certa distanza l'una dall'altra, sotto l'azione di una forza di volume omogenea in tutto il dominio, ad esempio la forza di gravità (Fig. 2.8). Per questo semplice problema è nota la soluzione analitica, che verrà utilizzata come riferimento per la validazione dei risultati.

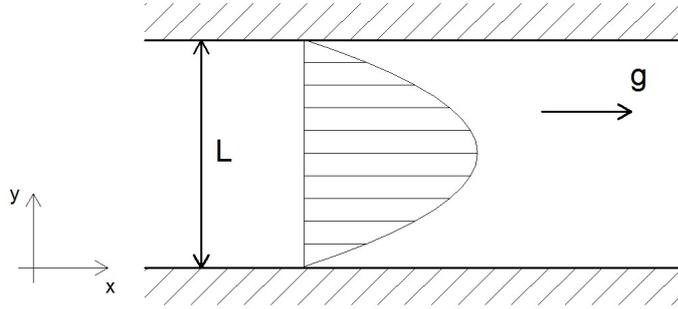


Figura 2.8: Flusso di Poiseuille soggetto a gravità.

Il criterio fondamentale per effettuare correttamente una simulazione con il metodo Lattice Boltzmann è fare in modo che i due flussi, quello reale e quello “numerico” della simulazione, siano in similitudine dinamica.

Indichiamo con le seguenti notazioni i dati di input del problema fisico:

ν = viscosità cinematica del fluido,

L = distanza tra le piastre,

g = accelerazione di gravità.

Le corrispondenti grandezze della simulazione sono invece:

ν_{LB} = viscosità cinematica nel LBM,

N_y = numero di nodi in direzione verticale,

g_{LB} = accelerazione di gravità nel LBM.

Il fluido, come abbiamo visto, è soggetto ad una forza di volume; si può allora assumere che i due flussi, per essere in similitudine dinamica, debbano avere lo stesso numero di Reynolds. Si dovrà porre perciò:

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{U_{LB}N_y}{\nu_{LB}}$$

dove $U = \sqrt{gL}$ è la velocità di riferimento nel caso fisico, quando è la gravità ad indurre il moto, e $U_{LB} = \sqrt{g_{LB}N_y}$. Per avere similitudine dinamica si dovrà quindi scegliere, per la simulazione, un insieme di valori che verifichi questa uguaglianza, tenendo conto tuttavia di alcuni fattori:

- la velocità del suono nel metodo Lattice Boltzmann, per il reticolo $D2Q9$, è pari a $c_s = 1/\sqrt{3}$. Questo significa che, per evitare problemi di instabilità numerica

nella simulazione, la massima velocità nel dominio dovrà avere ordine di grandezza $U_{LB} \ll 0,3c_s$ (che equivale ad assumere flusso in regime subsonico incomprimibile),

- $\nu_{LB} = c_s^2 \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{2} \right)$, ovvero la viscosità cinematica, essendo funzione di ω , è legata al passo temporale della simulazione.

Come abbiamo visto in precedenza l'implementazione delle forze di volume nel codice si può legare ad un incremento di velocità. In questo caso la forza di volume è pari a $F = \rho g$, quindi

$$\Delta u = \frac{\tau F}{\rho} = \tau g = \frac{g}{\omega}$$

Per quanto detto in precedenza si dovranno quindi scegliere valori di ω e g tali che l'incremento di velocità Δu sia il più piccolo possibile.

Le condizioni al contorno utilizzate per la simulazione del problema sono quelle di *bounce back* sulle pareti superiore ed inferiore (ovvero *no-slip condition*) e quelle di periodicità sul lato sinistro e destro del dominio, in modo tale da simulare un condotto di lunghezza infinita.

La soluzione analitica del problema, utilizzata per la validazione, si ottiene risolvendo le equazioni di Navier-Stokes. Per poter confrontare i risultati è opportuno risolvere le equazioni poste in forma adimensionale oppure, analogamente, adimensionalizzare la soluzione dimensionale.

Per questo problema il profilo di velocità risulta essere

$$u^*(y^*) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{gL^3}}{\nu} y^* (1 - y^*) = \frac{1}{2} Re y^* (1 - y^*),$$

dove

$$u^* = \frac{u}{\sqrt{gL}},$$

$$y^* = \frac{y}{L}.$$

Il profilo di velocità è quindi un profilo parabolico, per il quale il valore massimo è a metà della distanza tra le due pareti e per la condizione di non scorrimento la velocità si annulla in corrispondenza dei bordi.

Si riportano di seguito (Figg. 2.9-2.10-2.11-2.12) i risultati delle simulazioni svolte. Si è scelto di effettuare tre prove, variando di volta in volta il numero di Reynolds $Re = \frac{\sqrt{gL^3}}{\nu}$ che definisce il problema, in modo tale da verificarne l'effettiva validità per diversi casi.

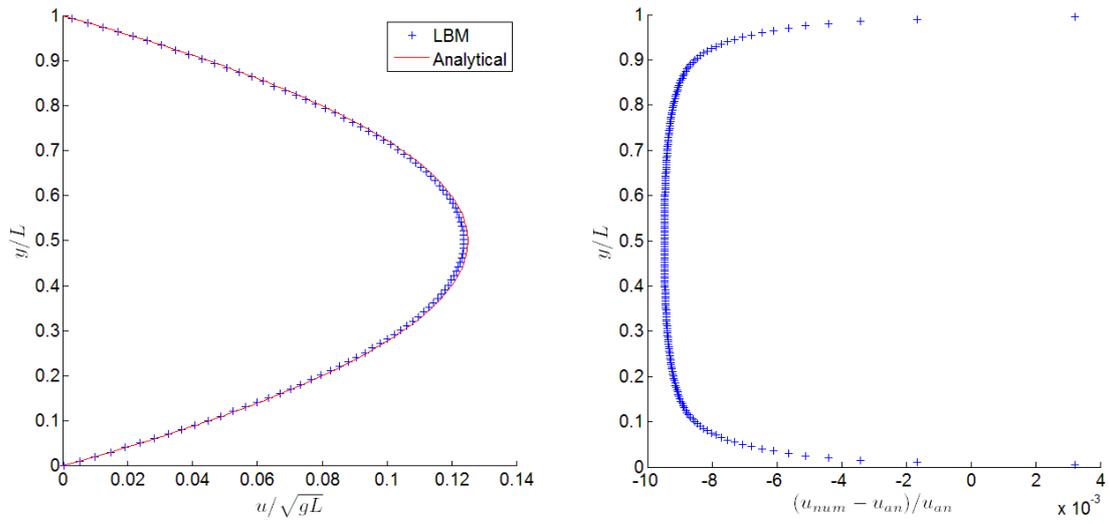


Figura 2.9: $Re = 1$; $N_y = 200$; $\omega = 0, 8$; $g_{LB} = 7, 8 \cdot 10^{-9}$.

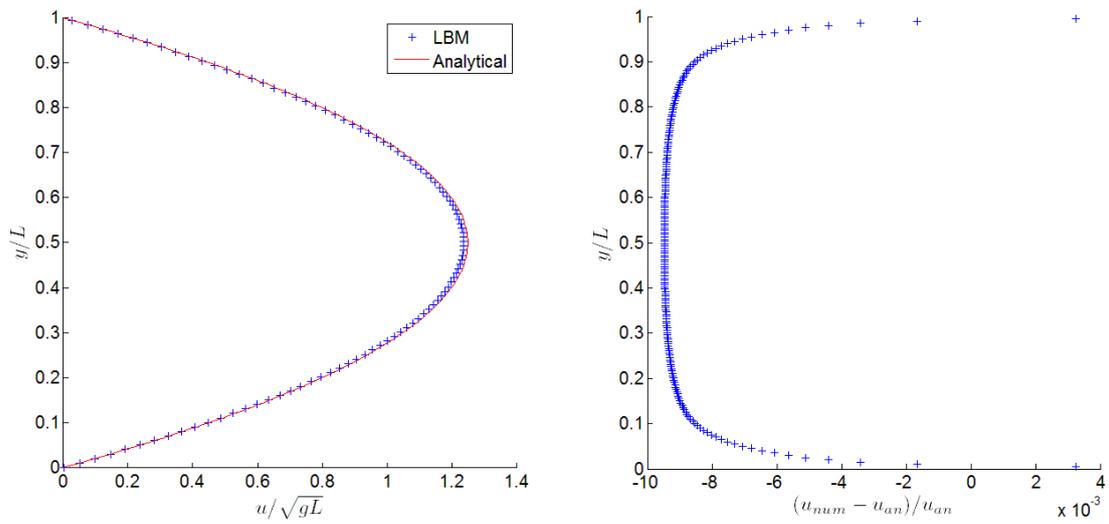


Figura 2.10: $Re = 10$; $N_y = 200$; $\omega = 0, 8$; $g_{LB} = 7, 8 \cdot 10^{-7}$.

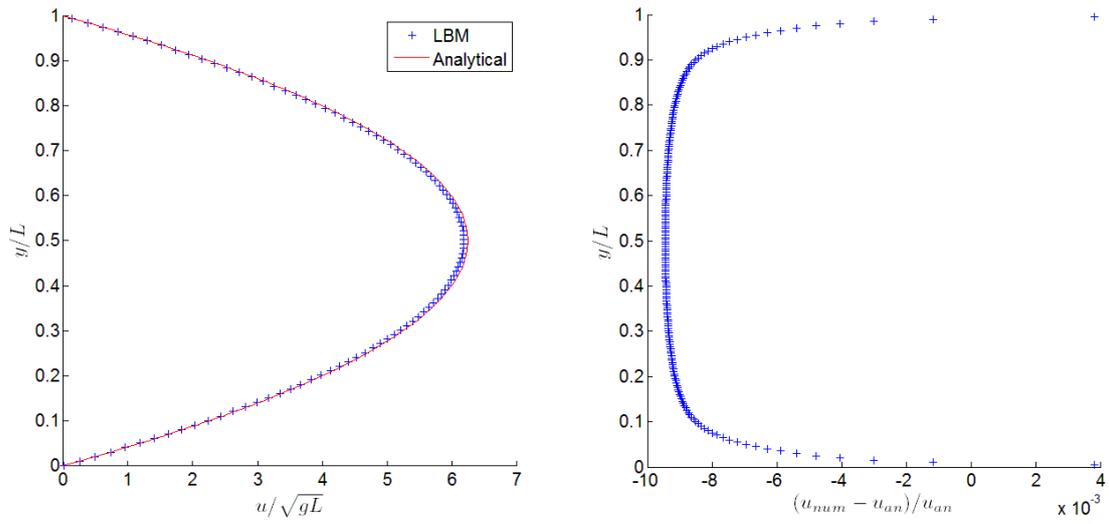


Figura 2.11: $Re = 50$; $N_y = 200$; $\omega = 0,8$; $g_{LB} = 1,95 \cdot 10^{-5}$.

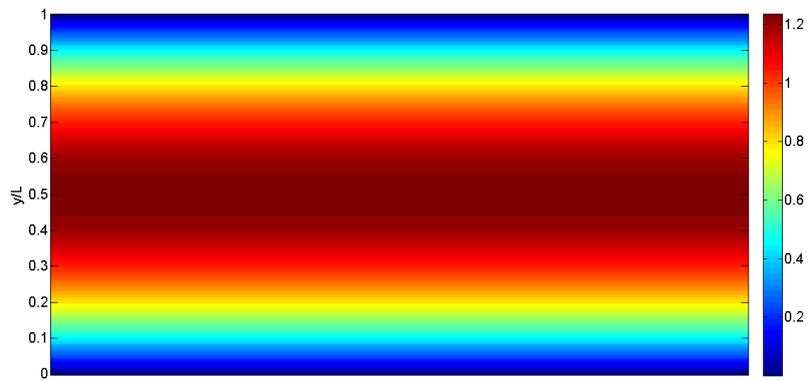


Figura 2.12: Isolinee della velocità orizzontale u/\sqrt{gL} .

Come si può notare dai grafici, il profilo di velocità adimensionale ottenuto tramite la simulazione risulta essere in accordo con la soluzione analitica, con un errore relativo minore dell'1% in tutti i casi esaminati.

2.9.2 Lid-driven cavity

La simulazione della *lid-driven cavity* è una delle più studiate nell'ambito della fluidodinamica computazionale, grazie alla relativa semplicità della geometria del problema e dell'imposizione delle corrispondenti condizioni al contorno. La presenza in letteratura di numerosi risultati consente inoltre di validare in modo adeguato il codice numerico sviluppato.

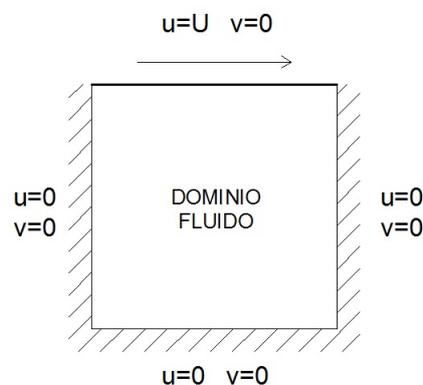


Figura 2.13: Lid-driven cavity.

Il problema da studiare consiste di una cavità di forma quadrata all'interno della quale è presente il dominio fluido (Fig. 2.13). La parete superiore è posta in movimento ad una determinata velocità tangenziale mentre le restanti tre pareti sono ferme.

I parametri noti che definiscono il problema fisico sono i seguenti:

- ν = viscosità cinematica del fluido,
- L = lunghezza del lato della cavità,
- U = velocità tangenziale della parete superiore.

Le corrispondenti grandezze in unità di reticolo sono:

- ν_{LB} = viscosità cinematica,
- N = numero di nodi con cui si discretizza il lato della cavità,
- U_{LB} = velocità tangenziale della parete superiore.

La corretta esecuzione della simulazione implica la similitudine dinamica dei due flussi. Per questo problema si dovrà quindi imporre l'uguaglianza dei numeri di Reynolds, ovvero

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{U_{LB}N}{\nu_{LB}}.$$

Come già visto, affinché la simulazione proceda in modo stabile, si deve scegliere una U_{LB} che sia all'interno del limite di flusso subsonico incomprimibile e che sia sufficientemente piccola in modo da avere passi temporali ragionevolmente brevi. I parametri su cui agire sono quindi la viscosità cinematica e la risoluzione spaziale, ovvero il numero di nodi con cui si discretizza il dominio. È interessante evidenziare una caratteristica tipica di questo metodo: il numero di Reynolds, il quale definisce le caratteristiche del problema da studiare, dipende anche dal numero di punti N utilizzato. A parità di altre grandezze, quindi, aumentare il numero di punti della discretizzazione equivale ad aumentare il numero di Reynolds. Per comprendere più adeguatamente il modo in cui le grandezze sono correlate tra loro è utile riportare tale legame su un grafico. In particolare si riporta in Fig. 2.14 il valore di ω (parametro legato alla viscosità cinematica ν_{LB}) in funzione del numero di Reynolds, avendo fissato $U_{LB} = 0,05$, al variare del numero N di nodi. La relazione analitica è semplicemente

$$\omega = \frac{2Re}{6U_{LB}N + Re}$$

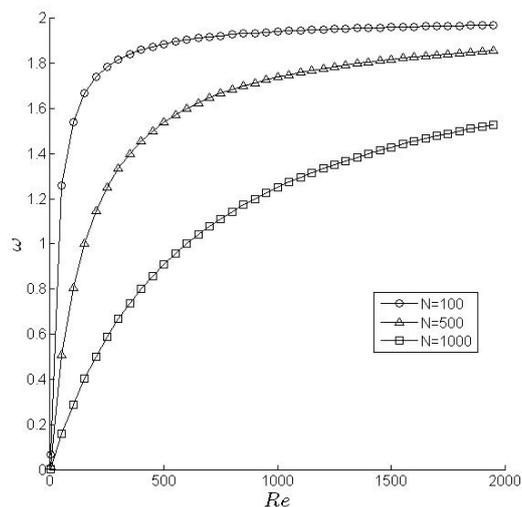


Figura 2.14: Grafico di $\omega = f(Re; N)$.

Si nota che a parità di Re , incrementando la risoluzione spaziale, ω diminuisce, ovvero la viscosità ν_{LB} aumenta. Le simulazioni svolte per questo problema sono state effettuate a $Re = 100$ e $Re = 400$. I risultati sono stati validati utilizzando dati presenti in letteratura [9]. Le condizioni al contorno implementate sono di *bounce back* per le pareti ferme e di velocità nota in corrispondenza dei nodi superiori, per i quali $\vec{u} = (U_{LB}, 0)$.

Si riporta di seguito il codice utilizzato, scritto in linguaggio MATLAB, ed i risultati ottenuti (Figg. 2.15÷2.20).

```

clc
clear all
close all
% -----
% Parametri del problema
% -----
Re=400;
u_N=0.04;
NX=251; NY=251;
omega=1/(3*u_N*NX/Re+0.5);
viscosity=1/3*(1/omega-0.5);
rho_0=1; rho=rho_0*ones(NX,NY); u=zeros(NX,NY); v=zeros(NX,NY);
% -----
% Calcolo popolazioni di equilibrio
% -----
FEQ=zeros(NX,NY,9);
FEQ(:,:,1)=1/9*rho.*(1+3*u+9/2*u.^2-3/2*(u.^2+v.^2));
FEQ(:,:,2)=1/9*rho.*(1+3*v+9/2*v.^2-3/2*(u.^2+v.^2));
FEQ(:,:,3)=1/9*rho.*(1-3*u+9/2*u.^2-3/2*(u.^2+v.^2));
FEQ(:,:,4)=1/9*rho.*(1-3*v+9/2*v.^2-3/2*(u.^2+v.^2));
FEQ(:,:,5)=1/36*rho.*(1+3*(u+v)+9/2*(u+v).^2-3/2*(u.^2+v.^2));
FEQ(:,:,6)=1/36*rho.*(1+3*(-u+v)+9/2*(-u+v).^2-3/2*(u.^2+v.^2));
FEQ(:,:,7)=1/36*rho.*(1+3*(-u-v)+9/2*(u+v).^2-3/2*(u.^2+v.^2));
FEQ(:,:,8)=1/36*rho.*(1+3*(u-v)+9/2*(u-v).^2-3/2*(u.^2+v.^2));
FEQ(:,:,9)=4/9*rho.*(1-3/2*(u.^2+v.^2));
F=FEQ;

```

```

for i=1:1:1000
% -----
% Collisione
% -----
F=(1-omega)*F+omega*FEQ;
% -----
% Streaming
% -----
F(2:NX, :, 1)=F(1:NX-1, :, 1);
F(:, 2:NY, 2)=F(:, 1:NY-1, 2);
F(1:NX-1, :, 3)=F(2:NX, :, 3);
F(:, 1:NY-1, 4)=F(:, 2:NY, 4);
F(2:NX, 2:NY, 5)=F(1:NX-1, 1:NY-1, 5);
F(1:NX-1, 2:NY, 6)=F(2:NX, 1:NY-1, 6);
F(1:NX-1, 1:NY-1, 7)=F(2:NX, 2:NY, 7);
F(2:NX, 1:NY-1, 8)=F(1:NX-1, 2:NY, 8);
% -----
% Condizioni al contorno
% -----
F(1, :, 5)=F(1, :, 7);
F(1, :, 1)=F(1, :, 3);
F(1, :, 8)=F(1, :, 6);
F(NX, :, 6)=F(NX, :, 8);
F(NX, :, 3)=F(NX, :, 1);
F(NX, :, 7)=F(NX, :, 5);
F(2:NX-1, 1, 6)=F(2:NX-1, 1, 8);
F(2:NX-1, 1, 2)=F(2:NX-1, 1, 4);
F(2:NX-1, 1, 5)=F(2:NX-1, 1, 7);
rho_N=F(2:NX-1, NY, 9)+F(2:NX-1, NY, 1)+F(2:NX-1, NY, 3)+...
2*F(2:NX-1, NY, 6)+2*F(2:NX-1, NY, 6)+2*F(2:NX-1, NY, 5);
F(2:NX-1, NY, 4)=F(2:NX-1, NY, 2);
F(2:NX-1, NY, 7)=F(2:NX-1, NY, 5)+1/2*(F(2:NX-1, NY, 1)-...
F(2:NX-1, NY, 3))-1/2*rho_N*u_N;
F(2:NX-1, NY, 8)=F(2:NX-1, NY, 6)+1/2*(F(2:NX-1, NY, 3)-...
F(2:NX-1, NY, 1))+1/2*rho_N*u_N;
% -----

```

```

% Calcolo grandezze macroscopiche
% -----
rho=sum(F,3);
u=(sum(F(:, :, [1 5 8]),3)-sum(F(:, :, [3 6 7]),3))./rho;
v=(sum(F(:, :, [2 5 6]),3)-sum(F(:, :, [4 7 8]),3))./rho;
% -----
% Calcolo popolazioni di equilibrio
% -----
FEQ(:, :, 1)=1/9*rho.*(1+3*u+9/2*u.^2-3/2*(u.^2+v.^2));
FEQ(:, :, 2)=1/9*rho.*(1+3*v+9/2*v.^2-3/2*(u.^2+v.^2));
FEQ(:, :, 3)=1/9*rho.*(1-3*u+9/2*u.^2-3/2*(u.^2+v.^2));
FEQ(:, :, 4)=1/9*rho.*(1-3*v+9/2*v.^2-3/2*(u.^2+v.^2));
FEQ(:, :, 5)=1/36*rho.*(1+3*(u+v)+9/2*(u+v).^2-3/2*(u.^2+v.^2));
FEQ(:, :, 6)=1/36*rho.*(1+3*(-u+v)+9/2*(-u+v).^2-3/2*(u.^2+v.^2));
FEQ(:, :, 7)=1/36*rho.*(1+3*(-u-v)+9/2*(u+v).^2-3/2*(u.^2+v.^2));
FEQ(:, :, 8)=1/36*rho.*(1+3*(u-v)+9/2*(u-v).^2-3/2*(u.^2+v.^2));
FEQ(:, :, 9)=4/9*rho.*(1-3/2*(u.^2+v.^2));
% -----
% Plot isolinee velocità relativa
% -----
Z=sqrt(u.^2+v.^2)/u_N;
figure(1); hFig = figure(1);
set(hFig, 'Position', [250 45 660 630]);
Z=fliplr(rot90(rot90(rot90(Z))));
imagesc(0:1/(NX-1):1,0:1/(NY-1):1,Z);
axis equal tight;
set(gca, 'YDir', 'default');
xlabel('x/L', 'FontSize', 15);
ylabel('y/L', 'FontSize', 15);
set(gca, 'FontSize', 15);
drawnow;
end

```

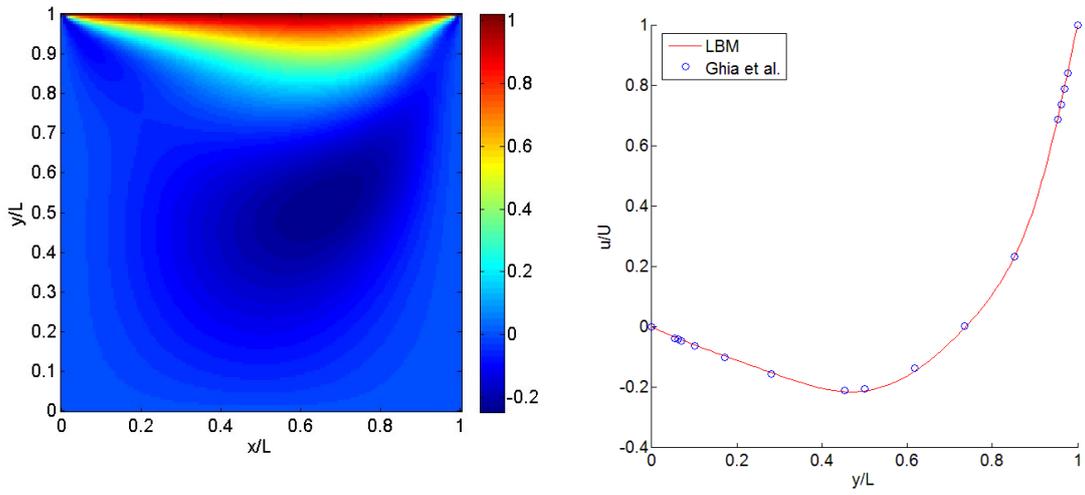


Figura 2.15: sinistra) isolinee della velocità orizzontale u/U ; $Re = 100$; $N = 159$; destra) profilo di velocità in $x/L = 0, 5$.

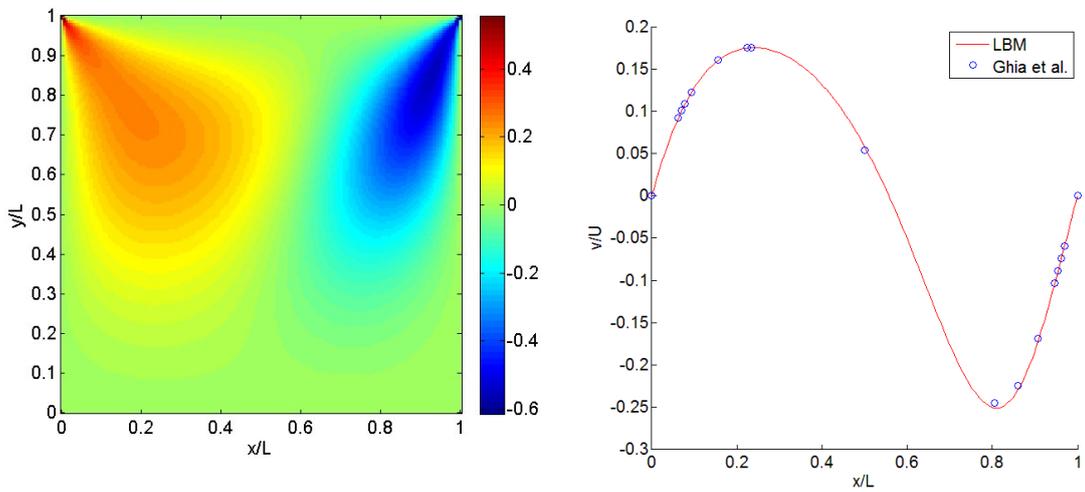


Figura 2.16: sinistra) isolinee della velocità verticale v/U ; $Re = 100$; $N = 159$; destra) profilo di velocità in $y/L = 0, 5$.

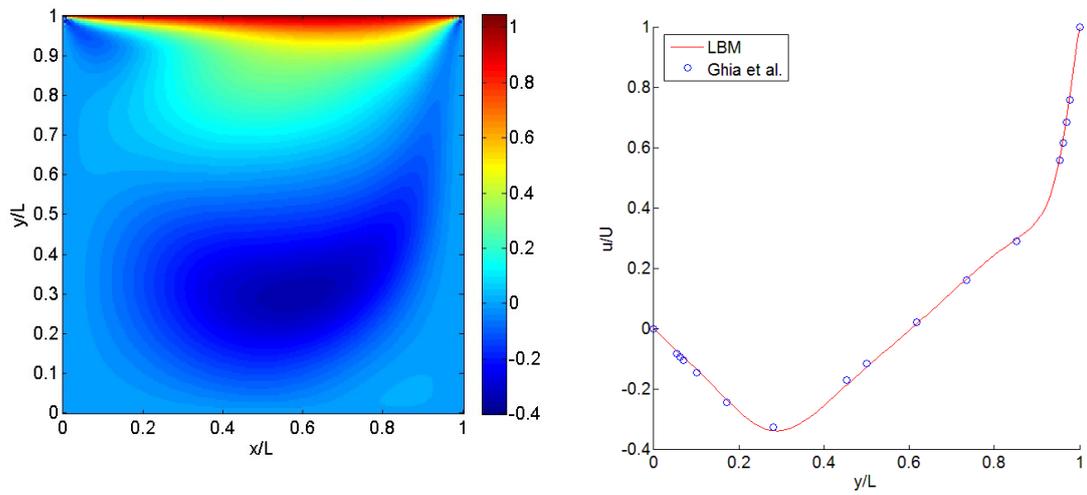


Figura 2.17: sinistra) isolinee della velocità orizzontale u/U ; $Re = 400$; $N = 251$; destra) profilo di velocità in $x/L = 0, 5$.

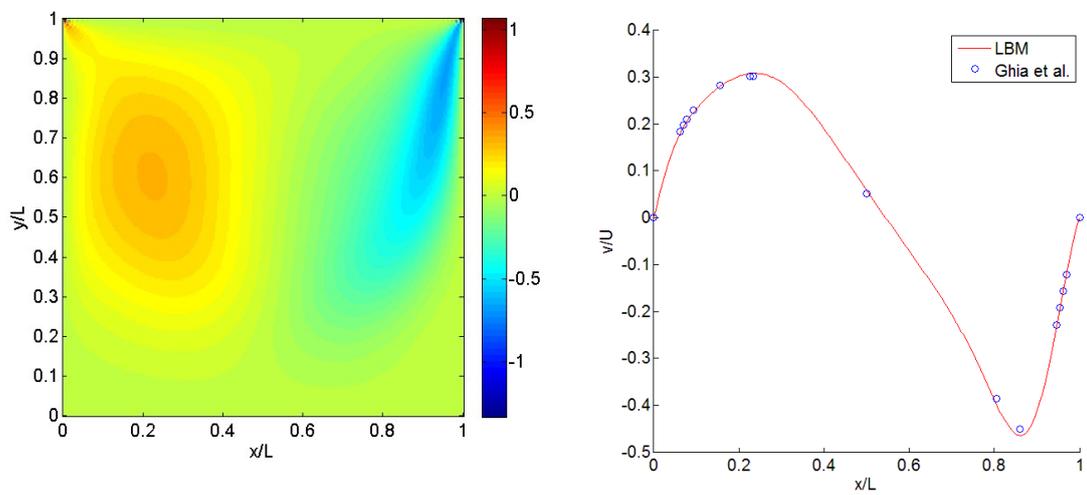


Figura 2.18: sinistra) isolinee della velocità verticale v/U ; $Re = 400$; $N = 251$; destra) profilo di velocità in $y/L = 0, 5$.

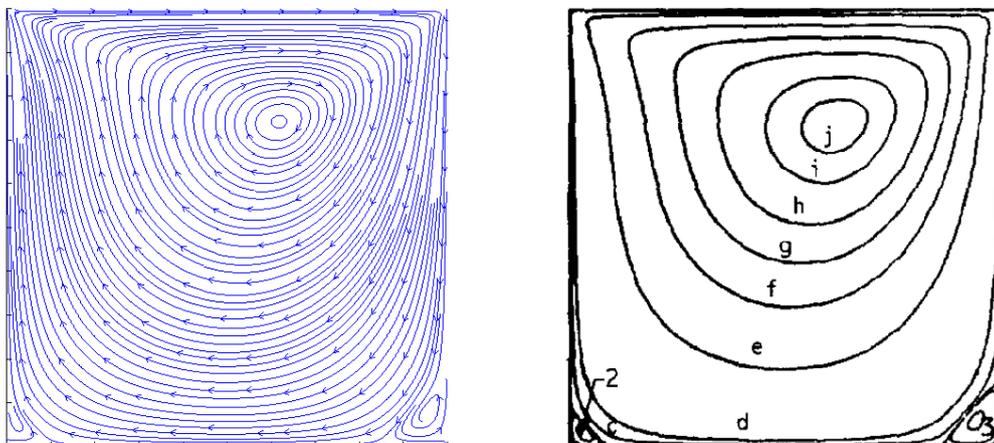


Figura 2.19: Linee di flusso, $Re = 100$, confronto con [9] (a destra).

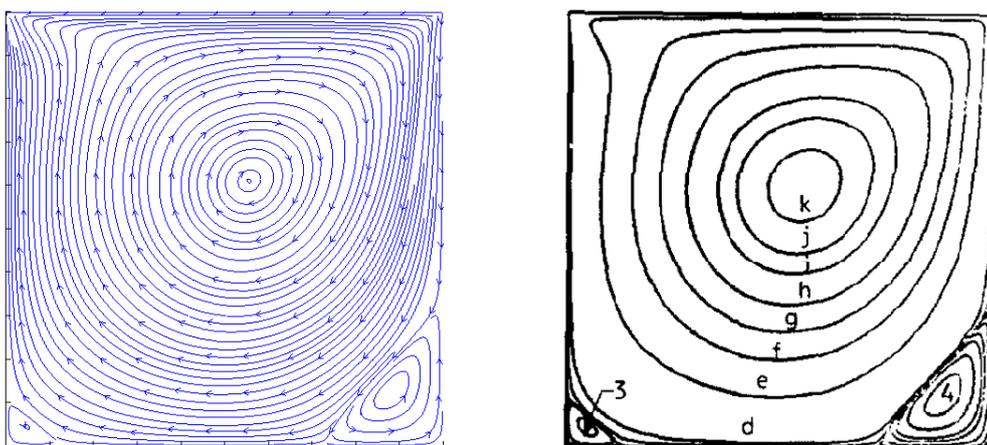


Figura 2.20: Linee di flusso, $Re = 400$, confronto con [9] (a destra).

Come si può notare, i profili di velocità ottenuti sono in perfetto accordo con i dati presenti in letteratura.

2.10 Cenni sulla parallelizzazione

Una delle caratteristiche peculiari del metodo Lattice Boltzmann, che rende quest'ultimo particolarmente efficiente, è il fatto che un algoritmo basato su questa tecnica sia naturalmente predisposto al calcolo parallelo.

Questa particolare caratteristica dipende dalle operazioni effettuate nel risolvere le proprietà del fluido all'interno del dominio. Riscriviamo a titolo di esempio l'espressione della fase di collisione

$$f_i(\vec{x}, t + 1) = f_i(\vec{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_i(\vec{x}, t) - f_i^{eq}(\vec{x}, t)].$$

Dalla precedente relazione è possibile osservare che il calcolo delle popolazioni in ogni nodo della griglia, ad ogni iterazione, dipende soltanto dal valore delle popolazioni in quel punto nell'istante precedente. Si può quindi affermare che l'operazione di collisione sia un'operazione *locale*, ovvero i nodi adiacenti a quello preso in considerazione non hanno influenza sulle grandezze calcolate in quest'ultimo. Tale caratteristica consente di introdurre il concetto di parallelizzazione, ovvero l'esecuzione contemporanea di più operazioni, al contrario del calcolo seriale, in cui ogni singola elaborazione avviene in modo sequenziale. L'utilizzo delle GPU (*Graphics Processing Unit*) si sta sempre più affermando nell'ambito del calcolo numerico. La principale differenza rispetto al calcolo eseguito con le CPU (*Central Processing Unit*) è il fatto che le prime siano costituite da migliaia di *cores*, ognuno dei quali può essere specializzato per eseguire una particolare operazione. Con riferimento alla fase di collisione, quindi, si può pensare al caso limite per cui ad ogni nodo della discretizzazione del dominio fluido venga assegnato un core, che proceda nel calcolo delle popolazioni indipendentemente dagli altri nodi.

Il vantaggio di questa tecnica risulta più comprensibile definendo, per un generico algoritmo, il cosiddetto *speed-up*, che indica quanto un algoritmo parallelo sia efficiente rispetto al corrispondente seriale. Considerando il caso in cui una serie di istruzioni venga suddivisa in una parte sequenziale e in una parte parallela, lo speed-up è definito come

$$S(N) = \frac{T_s + T_p}{T_s + T_p/N},$$

dove T_s è il tempo necessario ad elaborare la parte sequenziale, T_p il tempo necessario ad eseguire la parte parallelizzabile ed N il numero di processori utilizzato. Si può osservare quindi come l'aumento del numero di processori, utilizzati per l'esecuzione della parte parallelizzabile dell'algoritmo, comporti un aumento dello speed-up, ovvero una riduzione del tempo di calcolo rispetto all'esecuzione delle istruzioni su un singolo processore, in modo sequenziale.

Capitolo 3

Descrizione del codice utilizzato

In questo capitolo vengono descritte le caratteristiche principali del codice utilizzato per le simulazioni numeriche. Tale codice, scritto in linguaggio C++, consente di simulare l'interazione tra filamenti flessibili e fluido ed è stato sviluppato contestualmente tra le Università di Manchester, Genova, Marsiglia e Madrid.

L'influenza reciproca tra le azioni del fluido e quelle della struttura elastica avviene tramite l'abbinamento del metodo Lattice Boltzmann, descritto nei capitoli precedenti, al metodo dei contorni immersi, una tecnica numerica particolarmente adatta per essere utilizzata nei problemi di interazione fluido-struttura. Nel seguito si farà un accenno alle caratteristiche principali di questo metodo e del modello matematico del filamento elastico, maggiori dettagli possono essere trovati in [16].

3.1 Metodo dei contorni immersi

Il cosiddetto metodo dei contorni immersi (IBM, *Immersed Boundary Method*) fa riferimento ad una tecnica che si sta affermando specialmente nei problemi di interazione fluido-struttura.

Come noto, per permettere la risoluzione numerica delle equazioni differenziali che governano il moto del fluido, il dominio di interesse deve essere discretizzato, ovvero si deve generare una griglia sulla quale vengono successivamente calcolate le grandezze incognite del flusso. L'eventuale presenza di contorni solidi, sui quali si devono imporre opportune condizioni al contorno, deve naturalmente essere tenuta in considerazione e la griglia dovrà di conseguenza conformarsi alla forma dell'oggetto stesso. Tuttavia, nel caso di geometrie molto complesse, questa operazione può risultare molto dispendiosa e complicata, soprattutto nel caso in cui si abbiano superfici in movimento per le quali la

griglia deve essere ricreata ad ogni iterazione. Il metodo dei contorni immersi è nato e si sta sviluppando tuttora per ovviare a tali problematiche.

L'idea di base di questo metodo è ridurre la complessità del problema discretizzando il dominio senza tenere conto però della presenza delle superfici solide del corpo immerso nel fluido. Sulla griglia cartesiana così creata viene quindi sovrapposto l'oggetto solido, il cui contorno in generale non coinciderà con i nodi della griglia sottostante (Fig. 3.1).

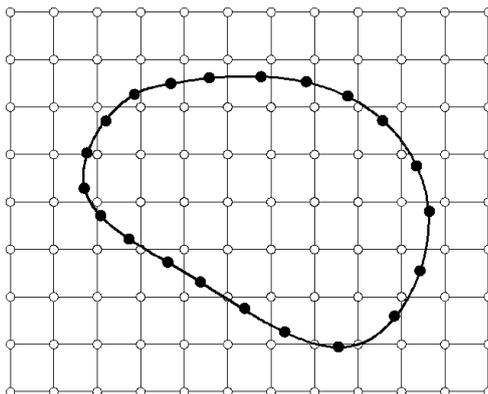


Figura 3.1: Contorno immerso - (○) nodi euleriani, (●) nodi lagrangiani.

I nodi della griglia vengono anche detti nodi *euleriani*. Il contorno immerso viene discretizzato con un insieme di punti, detti *lagrangiani*, la cui velocità per la condizione di aderenza è uguale a quella del fluido in quel punto.

L'influenza delle pareti sul campo di moto viene introdotta tramite l'aggiunta di un opportuno termine sorgente nell'equazione della quantità di moto. In questo modo si riesce ad imporre la velocità desiderata sulle pareti del corpo (ad esempio nulla nel caso si imponga la condizione di *no-slip*). Si riportano nel seguito gli aspetti principali di questo metodo in riferimento alle equazioni di Navier-Stokes e si descriverà successivamente come gli stessi concetti si possano implementare nel metodo Lattice Boltzmann.

Si considerino, in un dominio bidimensionale, le equazioni di conservazione della quantità di moto e della massa valide per un fluido incomprimibile

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{f},$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0,$$

dove \vec{u} è il vettore velocità, p la pressione, ρ la densità e ν la viscosità cinematica del fluido. Il termine $\vec{f} = \vec{f}(\vec{x}, t)$, in assenza di forze di volume, rappresenta esattamente la

forza da applicare per imporre la condizione al contorno sulla superficie solida del corpo.

Si consideri l'equazione della quantità di moto, senza il termine sorgente. Discretizziamo nel tempo con il metodo delle differenze finite

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} \approx \frac{\vec{u}^* - \vec{u}}{\Delta t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u},$$

dove $\vec{u}^* = \vec{u}(\vec{x}, t + \Delta t)$ e $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$. Indicando con \vec{u}^d la velocità da imporre sul contorno solido dell'oggetto si può scrivere, considerando anche il termine sorgente

$$\frac{\vec{u}^d - \vec{u}}{\Delta t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{f}.$$

Sottraendo ora la prima uguaglianza dalla seconda si ottiene l'espressione per determinare il valore della forzante

$$\vec{f}(\vec{x}, t) = \frac{\vec{u}^d - \vec{u}^*}{\Delta t}.$$

Nel caso di corpo rigido fisso $\vec{u}^d = 0$, altrimenti \vec{u}^d viene determinata dalle equazioni del moto della struttura solida simulata. Si è trovata in questo modo un'espressione per il valore incognito della forza.

Il passaggio tra variabili euleriane e variabili lagrangiane viene realizzato tramite l'utilizzo della funzione δ di Dirac. Nel caso continuo la velocità \vec{U} sul contorno si potrà scrivere come

$$\vec{U}(s, t) = \int_{\Omega} \vec{u}(\vec{x}, t) \delta(\vec{X}(s, t) - \vec{x}) d\vec{x},$$

dove s è l'ascissa curvilinea, $\vec{X}(s, t)$ la posizione del contorno e Ω il dominio fluido.

La funzione δ è non nulla solo in corrispondenza del contorno, il quale possiede quindi la stessa velocità del fluido. Consideriamo ora il caso in cui il contorno dell'oggetto solido sia discretizzato con una serie di punti lagrangiani, aventi ognuno una generica posizione \vec{X}_k . In generale i punti lagrangiani non corrisponderanno ai nodi della griglia, per questo motivo la velocità su di essi dovrà essere in qualche modo interpolata. Il calcolo della velocità sul generico punto lagrangiano \vec{X}_k avviene in maniera analoga al caso continuo, ovvero tramite l'espressione

$$\vec{U}(\vec{X}_k) = \sum \vec{u}(\vec{x}_{i,j}) \tilde{\delta}(\vec{X}_k - \vec{x}_{i,j}),$$

dove la funzione $\tilde{\delta}$ è una funzione, analoga alla δ di Dirac del caso continuo, introdotta per considerare l'influenza dei nodi della griglia nell'intorno del punto lagrangiano \vec{X}_k . Per l'espressione analitica di questa funzione vi sono in letteratura diverse proposte [8].

La forza agente sul generico punto lagrangiano si può scrivere quindi come

$$\vec{F}(\vec{X}_k) = \frac{1}{\Delta t} [\vec{U}^d(\vec{X}_k) - \vec{u}^*(\vec{X}_k)],$$

dove $\vec{U}^d(\vec{X}_k)$ e $\vec{u}^*(\vec{X}_k)$ sono le velocità interpolate sul punto. Una volta calcolata, la forza $\vec{F}(\vec{X}_k)$ viene distribuita sui nodi euleriani circostanti (Fig. 3.2) tramite la relazione

$$\vec{f}(\vec{x}_{i,j}) = \sum \vec{F}(\vec{X}_k) \tilde{\delta}(\vec{x}_{i,j} - \vec{X}_k).$$

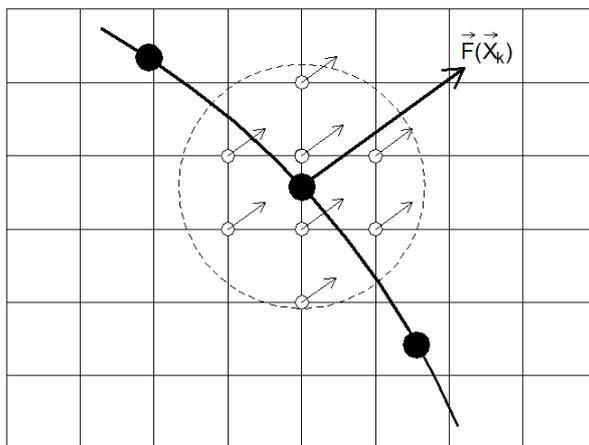


Figura 3.2: La forza sul nodo lagrangiano (●) viene trasmessa ai nodi euleriani circostanti (○).

3.2 Implementazione con il metodo Lattice Boltzmann

Il metodo Lattice Boltzmann risulta essere particolarmente adatto per essere utilizzato in abbinamento al metodo dei contorni immersi. L'implementazione avviene in maniera analoga a quella descritta per le equazioni di Navier-Stokes.

L'intrinseca discretizzazione cartesiana propria del metodo LB rende problematica la definizione di geometrie complesse e la conseguente imposizione delle condizioni al contorno su di esse. I contorni, infatti, hanno generalmente una risoluzione ridotta, assumendo una tipica configurazione "a gradini" che non riproduce fedelmente la curvatura delle superfici solide; inoltre risulta essere di accuratezza ridotta l'imposizione delle condizioni di *bounce back* per simulare la condizione di non scorrimento. Per questi motivi il metodo dei contorni immersi si dimostra essere il più appropriato per definire geometrie solide.

Come si è visto in precedenza, la presenza del contorno solido viene riprodotta tramite l'aggiunta di un'opportuna forzante, in modo tale da imporre la velocità voluta sul contorno stesso. La determinazione dell'intensità della forza avviene tramite una risoluzione intermedia delle equazioni, ovvero senza considerare la presenza dell'oggetto solido, e fornisce una stima a priori della velocità. L'estensione al metodo Lattice Boltzmann di questo modo di procedere risulta abbastanza intuitiva. In particolare, risolvere le equazioni di Navier-Stokes senza il termine sorgente, per calcolare il valore di \vec{u}^* , corrisponde ad effettuare una fase di *collisione* e *streaming* delle popolazioni con il metodo Lattice Boltzmann.

L'implementazione del metodo dei contorni immersi avviene quindi tramite i seguenti passaggi:

1. partendo da condizioni iniziali note si calcola il campo di velocità, ovvero si effettuano la fase di *collisione* e di *streaming* applicando le appropriate condizioni al contorno, senza il contributo delle forze di volume, che si considerano inizialmente nulle. Si ottiene in questo modo il valore della velocità $\vec{u}^*(\vec{x}_{i,j})$ sui nodi euleriani della griglia,
2. si interpolano sui nodi lagrangiani del contorno immerso, tramite una opportuna funzione $\tilde{\delta}$, i valori della velocità così calcolata. Si ricava quindi la velocità $\vec{U}^*(\vec{X}_k)$ sul nodo del profilo,
3. nota la velocità $\vec{U}^d(\vec{X}_k)$ che deve avere il generico punto \vec{X}_k del contorno solido, si calcola la forza $\vec{F}(\vec{X}_k)$ necessaria ad imporre tale velocità,
4. si ridistribuisce la forza $\vec{F}(\vec{X}_k)$ sui nodi euleriani circostanti, ottenendo così la forza $\vec{f}(\vec{x}_{i,j})$ che agisce sul fluido affinché siano imposte le corrette condizioni sul contorno solido,
5. si ricalcolano le grandezze macroscopiche, ovvero campo di velocità e di densità, tenendo in considerazione l'effetto della forza $\vec{f}(\vec{x}_{i,j})$. Il ciclo si ripete quindi dal punto 1.

3.3 Modello del filamento elastico

Il codice utilizzato consente di simulare l'interazione tra il fluido ed un filamento elastico. Si riporta nel seguito una breve descrizione del modello matematico utilizzato.

L'equazione che governa il comportamento del filamento è quella del modello di trave di Eulero-Bernoulli, valida per il caso non stazionario, ovvero

$$\Delta\rho \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(K_B \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial s^2} \right) + \Delta\rho \vec{g} - \vec{F},$$

dove s è l'ascissa curvilinea, $\vec{X} = (X(s,t), Y(s,t))$ è la posizione del generico punto del filamento, T è la tensione, K_B è la rigidezza flessionale ed \vec{F} la forza agente sul filamento dovuta al fluido. A questa equazione si aggiunge la condizione di non-estensibilità, che impone che la lunghezza del filamento rimanga costante

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = 1.$$

Le incognite del problema sono la posizione $\vec{X}(s,t)$ dei punti del filamento e la tensione T . Per essere risolte numericamente le equazioni vengono prima adimensionalizzate e poi discretizzate nel tempo e nello spazio. In particolare il filamento viene discretizzato con una griglia sfalsata (Fig. 3.3), in cui i nodi della tensione sono posti a metà dei nodi della posizione. La forma discretizzata assume la forma

$$\frac{\vec{X}_i^{n+1} - 2\vec{X}_i^n + \vec{X}_i^{n-1}}{\Delta t} = \left[D_s \left(T^{n+1} D_s \vec{X}^{n+1} \right) \right] - K_B D_{ssss} \vec{X}^n + Ri \frac{\vec{g}}{g} - \vec{F}^n,$$

$$D_s \vec{X}^{n+1} \cdot D_s \vec{X}^{n+1} = 1,$$

dove le grandezze si intendono adimensionali, $Ri = \frac{gL}{U_\infty^2}$ è il numero di Richardson, D_s indica la differenza centrata del secondo ordine rispetto alla coordinata curvilinea s . Il sistema di equazioni implicito viene in questo modo risolto ad ogni iterazione utilizzando il metodo di Newton.

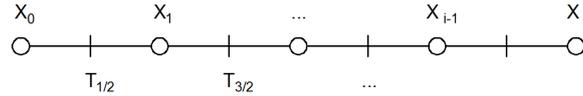


Figura 3.3: Discretizzazione del filamento.

3.4 Schema a blocchi del codice

Descritti i metodi fondamentali utilizzati, è utile riportare uno schema a blocchi semplificato del codice (Fig. 3.4), in modo tale da avere una panoramica diretta del modo in cui tutti i diversi aspetti vengano implementati.

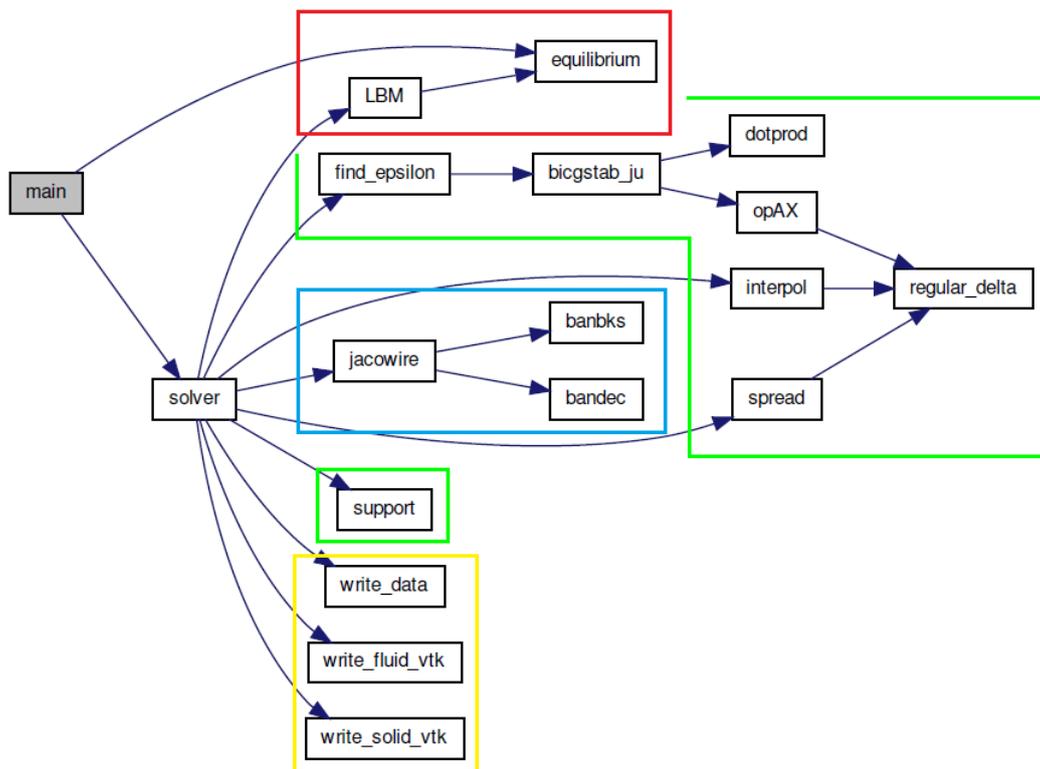


Figura 3.4: Schema a blocchi del codice utilizzato.

La funzione `main` è la funzione principale. In rosso sono evidenziate le funzioni che risolvono le grandezze del fluido, tramite il metodo Lattice Boltzmann. In particolare, all'interno della funzione `LBM` vengono eseguite le operazioni di streaming e collisione, calcolo del campo di densità e velocità, applicazione delle condizioni al contorno, ecc. La funzione `equilibrium` calcola invece le popolazioni di equilibrio.

In verde sono evidenziate le funzioni del metodo dei contorni immersi. Tra le altre, la funzione `interpol` calcola la velocità del fluido sul generico nodo lagrangiano del filamento elastico e la funzione `spread` distribuisce la forza sui nodi euleriani della griglia, così come descritto nei capitoli precedenti.

In blu sono invece evidenziate le funzioni che risolvono il sistema di equazioni del filamento elastico, tramite il metodo di Newton.

Infine, sono evidenziate in giallo le funzioni dedicate al *post-processing*, che salvano all'interno di file, nel formato `.vtk`, tutte le grandezze di interesse calcolate, utili per essere elaborate con un opportuno software di visualizzazione.

3.5 Validazione

Con lo scopo di verificare la validità del codice utilizzato sono state eseguite alcune semplici simulazioni del flusso attorno ad un cilindro. Tali simulazioni sono state svolte variando il numero di Reynolds e valutando il numero di Strouhal, parametro adimensionale legato alla frequenza di distacco dei vortici, nel caso di flusso instazionario. I risultati sono stati successivamente confrontati con quelli presenti in letteratura.

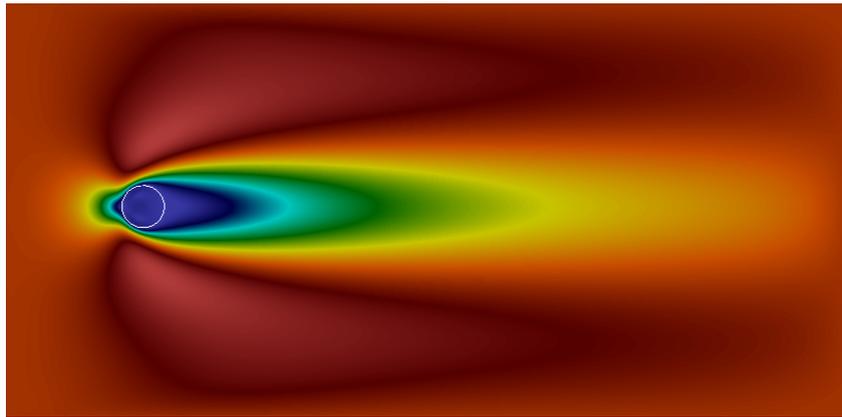


Figura 3.5: Isolinee di velocità, $Re = 10$.

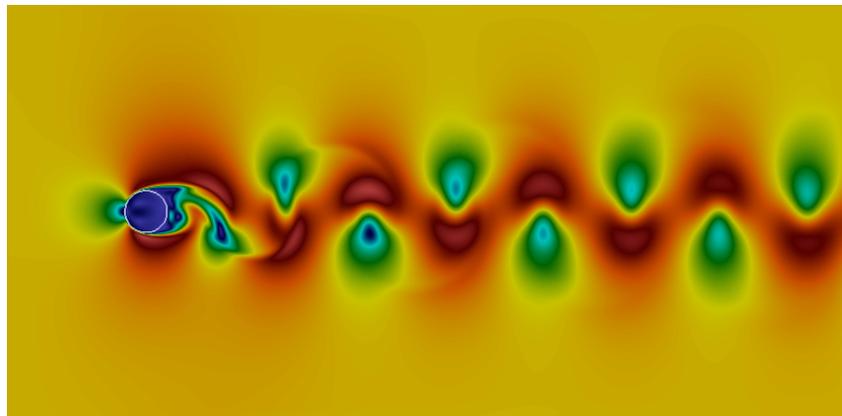


Figura 3.6: Isolinee di velocità, $Re = 400$.

Nelle Figg. 3.5-3.6 sono riportate due immagini rappresentative dei risultati delle simulazioni, per un caso stazionario ed uno instazionario.

Re	St	St [17]
100	0,1816	0,167
400	0,2343	0,2207
1000	0,2540	0,2392

I numeri di Strouhal calcolati risultano essere di poco superiori a quelli scelti come riferimento. Questo è dato dal fatto che le dimensioni del dominio utilizzate hanno un'influenza non trascurabile sulla soluzione. In particolare, l'effetto delle pareti superiore ed inferiore è proprio quello di sovrastimare il numero di Strouhal, come dimostrato in [18]. Questo comportamento è stato osservato anche effettuando diverse simulazioni a $Re = 100$, variando le dimensioni del dominio e constatando una effettiva diminuzione del numero di Strouhal all'aumentare delle dimensioni del dominio. Si può quindi riconoscere la bontà dei risultati ottenuti utilizzando il presente codice, nonostante le limitazioni sulla grandezza del dominio che, in caso contrario, avrebbe richiesto un costo computazionale troppo oneroso a numeri di Reynolds più elevati.

Capitolo 4

Descrizione dell'esperimento e modello teorico

4.1 Introduzione

Lo studio a cui si farà riferimento è il problema descritto in [5]. Nell'esperimento realizzato si è analizzato il comportamento di un nastro flessibile sotto l'azione di un flusso uniforme, con lo scopo di verificare sotto quali condizioni sia possibile avere una struttura deformabile la cui resistenza aerodinamica sia indipendente dalla velocità stessa del flusso. L'analisi di un problema del genere è interessante sia dal punto di vista teorico che dal punto di vista applicativo, ad esempio nello studio di dispositivi collegati a cavi flessibili o nella progettazione di strutture deformabili in grado di ridurre la propria resistenza se investite da un fluido.

Un corpo immerso in un fluido in movimento è soggetto a forze dovute all'interazione con il fluido stesso. Le azioni di tali forze possono essere decomposte nella direzione normale, dovute principalmente alla pressione, e tangenziale, dovute alla viscosità del fluido. L'intensità delle forze subite è legata alle proprietà fisiche del fluido ed alle caratteristiche geometriche del corpo immerso in esso. In particolare, si definisce la resistenza aerodinamica come la componente della forza parallela alla direzione del flusso. È spesso utile ricorrere all'utilizzo del coefficiente di resistenza, parametro adimensionale tradizionalmente definito nel modo seguente

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A},$$

dove D è la forza di resistenza, ρ la densità del fluido, U la velocità del flusso e A l'area

frontale del corpo.

Per un corpo rigido, quindi, si può affermare che la resistenza aumenta con il quadrato della velocità. Vi sono tuttavia numerosi casi, osservati in particolare in natura, per i quali questa dipendenza non è verificata. Questo è vero ad esempio per le foglie degli alberi investite dal vento e per numerosi organismi marini, il cui comportamento ha dato inizio a numerosi studi riguardanti la deformazione dei corpi dovuta all'interazione con un fluido. In casi del genere, infatti, è la flessibilità del corpo che fa sì che quest'ultimo, sotto l'azione delle forze aerodinamiche del fluido, venga deformato. Questo modo di agire implica generalmente una diminuzione della forza resistente, per un duplice motivo: da un lato si ha una diminuzione della sezione frontale del corpo, dall'altro quest'ultimo assume una forma più aerodinamica. Si può quindi dire che avviene a tutti gli effetti una *riconfigurazione*, da parte dell'oggetto investito dal fluido, che modifica di fatto le proprietà geometriche dello stesso (Fig. 4.1). Questo giustifica il fatto che la resistenza non dipenda dal quadrato della velocità ma assuma una dipendenza meno marcata.

Per esprimere formalmente queste considerazioni si può scrivere

$$D \propto U^{2+\gamma},$$

dove γ è un esponente negativo, detto *esponente di Vogel*, che permette di ridurre la dipendenza della resistenza dalla velocità. Per un corpo rigido si ha di conseguenza $\gamma = 0$. Molte misurazioni su numerose specie vegetali sono presenti in letteratura; gli esponenti di Vogel misurati variano generalmente da $\gamma = -0,5$ a $\gamma = -1$. In certi casi, quindi, la dipendenza della resistenza dalla velocità è addirittura lineare.



Figura 4.1: Riconfigurazione di una foglia sotto l'azione del vento [6].

4.2 Descrizione dell'esperimento

Si riporta la descrizione dell'esperimento e del relativo apparato sperimentale utilizzato. Gli esperimenti sono stati realizzati con lo scopo di verificare se sia possibile, per un corpo deformabile, osservare una indipendenza della resistenza dalla velocità e sotto

quali condizioni. Le prove sono state svolte considerando solo il caso delle membrane ed in particolare di nastri molto sottili, aventi larghezza trascurabile rispetto alla loro lunghezza. Il caso delle membrane è particolare in quanto, dato lo spessore molto ridotto, la rigidità flessionale risulta essere trascurabile e l'unica forza trasmessa è la tensione lungo l'asse del nastro.

Gli esperimenti sono stati effettuati in una vasca contenente acqua (Fig. 4.2). Il nastro, avente lunghezza L e larghezza W , ha massa specifica pari a quella dell'acqua e di conseguenza non è soggetto ad alcuna forza di galleggiamento. L'estremità superiore è collegata ad un supporto, dotato di una cella di carico, che si muove orizzontalmente ad una velocità U ; all'estremità opposta è collegata invece un'asta cilindrica, avente massa m . Per ogni prova è stata variata la velocità di trascinamento e la corrispondente forza di resistenza agente sul nastro è stata misurata tramite l'utilizzo della cella di carico. Sono state prese in esame due membrane avente forma diversa, rettangolare e trapezoidale. Durante il movimento nel fluido la forma assunta dal nastro è approssimabile ad un arco di circonferenza.

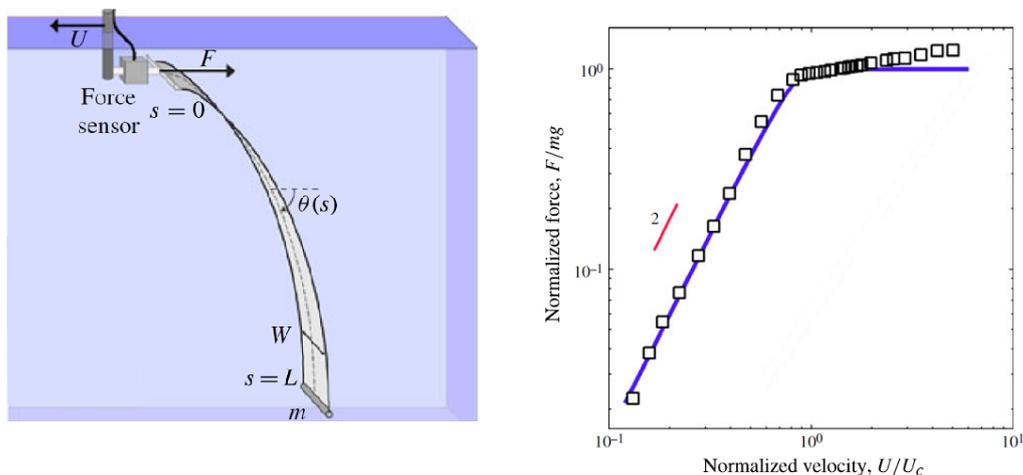


Figura 4.2: Apparato sperimentale e risultati ottenuti [5].

I risultati ottenuti sono molto interessanti. Si è dimostrato infatti che la resistenza, a velocità più basse, cresce con il quadrato della velocità, così come accade per un corpo rigido; con l'aumentare della velocità, al contrario, la resistenza assume una dipendenza molto meno marcata e si può notare l'origine di un tratto quasi orizzontale, che indica una quasi indipendenza dalla velocità. In questa condizione l'esponente di Vogel misurato risulta essere compreso tra $\gamma = -2$ e $\gamma = -1,8$. Si può quindi affermare che

per la configurazione del genere, a velocità più elevate, la resistenza sia praticamente indipendente dalla velocità.

Con riferimento a questi risultati, l'idea di eseguire delle simulazioni numeriche, essendo il codice bidimensionale, è utile per confrontare i risultati con quelli sperimentali, in modo tale da verificare se e in quale misura gli effetti tridimensionali contribuiscano al comportamento osservato.

4.3 Modello teorico

Per comprendere in modo migliore il problema in esame ed analizzare le relative grandezze che ne definiscono le caratteristiche, è stato sviluppato un modello teorico. I risultati di questo modello saranno utili per essere confrontati sia con i risultati sperimentali che con quelli ottenuti tramite le simulazioni numeriche.

Come prima ipotesi semplificativa, il ridotto spessore del nastro giustifica l'assunzione di rigidità flessionale nulla. Di conseguenza l'unica sollecitazione trasmessa all'interno della struttura è una forza di tensione, in ogni punto tangente all'asse del nastro stesso. In questa trattazione si farà riferimento ad un nastro avente larghezza costante, ovvero di forma rettangolare; si considera inoltre il caso stazionario, ovvero la configurazione assunta all'equilibrio. Si consideri, con riferimento alla Fig. 4.3, un elemento infinitesimo della struttura in esame, di lunghezza ds .

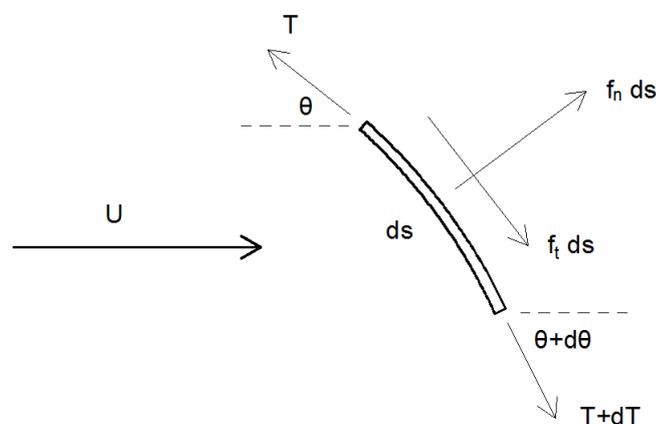


Figura 4.3: Forze agenti su un elemento infinitesimo.

In figura sono rappresentate le sollecitazioni agenti su di esso. In particolare, siano T la tensione agente nel generico punto avente ascissa curvilinea s , dT l'incremento infinitesimo di tale tensione lungo la coordinata curvilinea s , θ l'angolo di inclinazione

dell'asse del nastro rispetto all'orizzontale e $d\theta$ il relativo incremento infinitesimo. La forza complessiva agente sul nastro, dovuta all'interazione con il fluido, è rappresentata tramite i due contributi f_n e f_t , che ne indicano rispettivamente la componente normale e la componente tangenziale, per unità di lunghezza. In particolare, f_n è il contributo dovuto alla forza di pressione e f_t la sollecitazione tangenziale dovuta alla viscosità del fluido. Essendo il nastro in equilibrio si impone che la risultante di tutte le forze agenti sull'elemento si annulli, in questo modo si ricavano le equazioni che governano il problema. Considerando l'equilibrio in direzione tangenziale e in direzione normale si avrà

$$(T + dT) \cos(d\theta) - T + f_t ds = 0,$$

$$(T + dT) \sin(d\theta) - f_n ds = 0.$$

Siccome $\cos(d\theta) \approx 1$ e $\sin(d\theta) \approx d\theta$, le due equazioni diventano

$$\frac{dT}{ds} = -f_t,$$

$$T \frac{d\theta}{ds} = f_n.$$

Si è giunti quindi ad un sistema di due equazioni differenziali ordinarie le cui incognite sono la tensione $T(s)$, agente in ogni punto del nastro, e l'angolo di inclinazione $\theta(s)$ rispetto all'orizzontale. Si può constatare come la variazione di tensione lungo il nastro sia dovuta esclusivamente alle forze tangenziali; come conseguenza, se queste ultime fossero considerate trascurabili, la tensione all'interno del nastro sarebbe costante lungo tutta la lunghezza.

Per risolvere il sistema rimangono da definire i due contributi f_n e f_t ed imporre le opportune condizioni al contorno. Per quanto riguarda le due componenti si potrà scrivere, in maniera semplificata, che

$$f_t = \frac{1}{2} \rho U^2 \cos^2 \theta C_F W,$$

$$f_n = \frac{1}{2} \rho U^2 \sin^2 \theta C_D W,$$

dove $U \cos \theta$ è la componente della velocità del flusso parallela all'asse del nastro e $U \sin \theta$ è la componente perpendicolare; C_F e C_D sono i due coefficienti di resistenza, di forma e di attrito rispettivamente, il cui valore sarà specificato nel seguito. Le equazioni da risolvere diventano quindi

$$\frac{dT}{ds} = -\frac{1}{2}\rho U^2 \cos^2\theta C_F W,$$

$$T \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{2}\rho U^2 \sin^2\theta C_D W.$$

Essendo le due equazioni differenziali del primo ordine, le condizioni al contorno da imporre per chiudere il problema sono due, una sul valore della tensione T e una sul valore dell'angolo θ . Le condizioni vengono imposte all'estremità libera del nastro, sulla quale agisce la forza peso dovuta alla massa collegata. Si dovrà avere

$$T(L) = mg,$$

$$\theta(L) = \frac{\pi}{2}.$$

L'estremo libero risulta essere verticale in quanto il nastro possiede rigidità flessionale nulla.

È utile a questo punto adimensionalizzare le equazioni; per fare ciò si definiscono la tensione adimensionale $T^* = T/mg$ e l'ascissa curvilinea adimensionale $s^* = s/L$.

Sostituendo queste espressioni nelle equazioni precedenti, il sistema da risolvere diventa

$$\frac{dT^*}{ds^*} = -C_G C_F \cos^2\theta,$$

$$T^* \frac{d\theta}{ds^*} = C_G C_D \sin^2\theta,$$

con le relative condizioni al contorno

$$T^*(1) = 1,$$

$$\theta(1) = \frac{\pi}{2},$$

dove si è posto [5]

$$C_G = \frac{\rho L W U^2}{2mg}.$$

Questo gruppo adimensionale, così definito per il problema in esame, svolge un ruolo analogo al numero di Cauchy spesso usato nei problemi di interazione fluido-struttura, definito come il rapporto tra la pressione dinamica del fluido ed il modulo di elasticità del solido elastico. Tale numero, quindi, controlla l'entità della deformazione subita dal corpo sotto l'azione del flusso. Nella presente definizione, il modulo di elasticità è

sostituito dalla forza peso della massa collegata all'estremità libera del nastro.

Analizzando l'espressione di questo numero si deduce inoltre che elevati valori di C_G implicano una deformazione della struttura considerevole, al contrario ridotti valori indicano una deformazione minima, ovvero una elevata resistenza da parte del corpo alle sollecitazioni imposte dal fluido.

4.4 Risultati

Definito in questo modo il problema, il sistema di equazioni è stato risolto numericamente. Si riportano di seguito i valori delle grandezze fisiche, riferiti a quelli sperimentali, utilizzati per la risoluzione numerica del problema:

$$\begin{aligned}\rho &= 1000 \text{ kg}/\text{m}^3, \\ L &= 0,29 \text{ m}, \\ W &= 0,03 \text{ m}, \\ m &= 0,002 \text{ kg}, \\ g &= 9,81 \text{ m}/\text{s}^2, \\ U &= 0,01 \div 0,3 \text{ m}/\text{s}.\end{aligned}$$

Per quanto riguarda i coefficienti di resistenza che compaiono nelle equazioni si sono scelti i seguenti valori:

$$\begin{aligned}C_F &= 0,005, \\ C_D &= 2.\end{aligned}$$

In particolare, il coefficiente di resistenza C_D scelto è quello corrispondente ad una lastra piana avente l'asse perpendicolare al flusso. La giustificazione di tale scelta sta nel fatto che il nastro, essendo rettangolare ed avendo spessore trascurabile rispetto alla larghezza W , in ogni punto è assimilabile ad una lastra piana, investita da un flusso con velocità $U \sin\theta$.

Le grandezze incognite da calcolare, come si è visto, sono la tensione adimensionale $T^*(s^*)$ e l'angolo di inclinazione rispetto all'orizzontale $\theta(s^*)$. La forza resistente agente sulla membrana risulta essere pari alla componente orizzontale della tensione, misurata nell'estremo superiore. Nota quindi la tensione in ogni punto, la forza resistente F^* , adimensionalizzata rispetto alla forza peso della massa collegata all'estremità inferiore, è valutata come

$$F^* = T^* \cos\theta(0).$$

Tale forza è stata calcolata per diversi valori di velocità; si riportano di seguito i risultati ottenuti (Figg. 4.4-4.5).

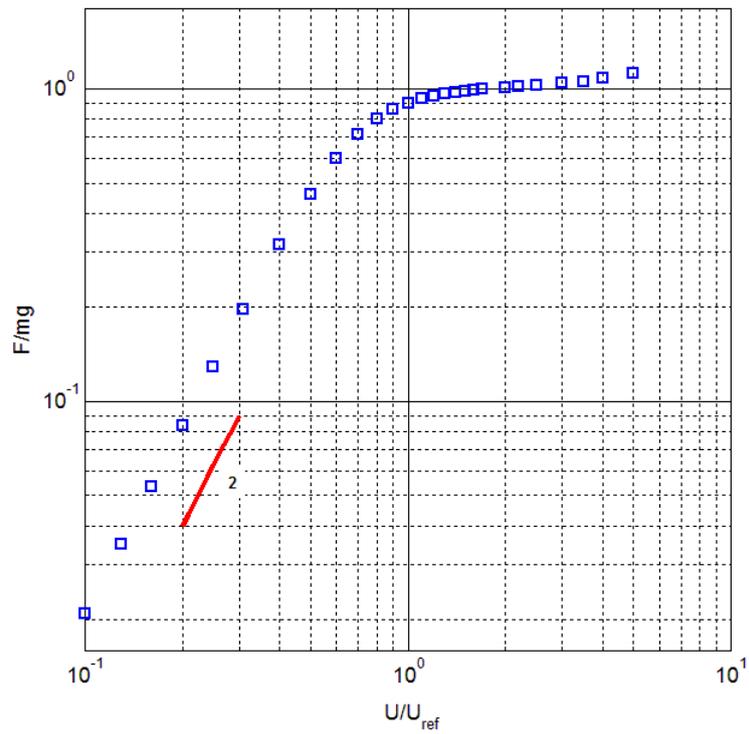


Figura 4.4: Grafico forza-velocità, $U_{ref} = \sqrt{\pi mg/c\rho WL}$, $c = 1, 5$.

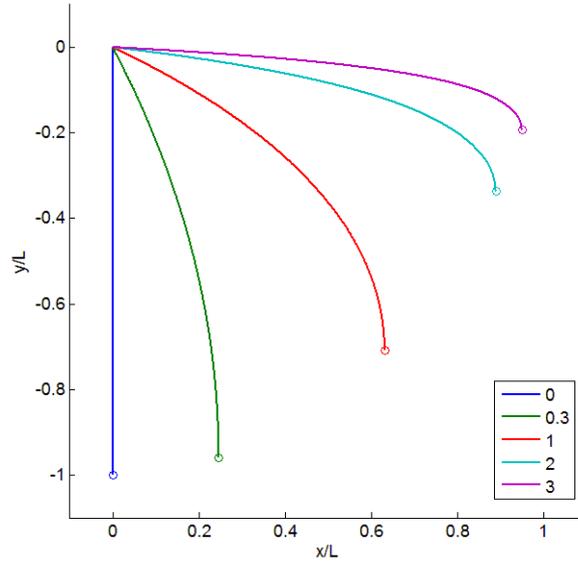


Figura 4.5: Profilo assunto dal nastro per diversi valori di U/U_{ref} .

Dal grafico è possibile osservare come l'andamento della forza resistente, in funzione della velocità del flusso, sia sostanzialmente in accordo con i risultati sperimentali. Il modello teorico proposto, nonostante le ipotesi semplificative utilizzate, riesce infatti a cogliere diversi aspetti del problema. La forza resistente, come ci si aspetta, aumenta con il quadrato della velocità, nella condizione per la quale la struttura non risulta particolarmente deformata dall'azione del flusso, ovvero per velocità più basse; al contrario, l'effetto della riconfigurazione della membrana diventa importante aumentando la velocità. In queste condizioni, il nastro assume un profilo più aerodinamico, allineandosi alla direzione del flusso e diminuendo di conseguenza la propria area frontale. Questo comportamento giustifica l'andamento particolare della forza resistente, che sul grafico è rappresentato dalla formazione di un "pianerottolo" quasi orizzontale, indicando una più debole dipendenza dalla velocità. Questo risultato è osservato anche sperimentalmente. Il modello teorico ed i relativi risultati consentono inoltre di analizzare un altro aspetto del problema. Si è visto che le azioni agenti sulla membrana, così come per qualsiasi corpo immerso in un fluido, sono dovute sia alla forza di pressione che a quella d'attrito, data la viscosità non nulla del fluido. I due contributi hanno un'influenza diversa a seconda della forma assunta dalla struttura. Quando il nastro si trova in posizione verticale, la forza principale agente su di esso è quella dovuta alla pressione; al contrario, quando il nastro assume un profilo maggiormente orizzontale, il contributo della forza tangenziale d'attrito diventa non trascurabile e questo spiega il debole aumento di re-

sistenza osservato a velocità più elevate. Con riferimento alla Fig. 4.6, coerentemente con queste considerazioni, ponendo il coefficiente $C_F = 0$ si può osservare che la forza F^* ha come asintoto il valore unitario in quanto, essendo le forze tangenziali f_t nulle, la tensione lungo la membrana rimane costante. Studiando inoltre il comportamento della membrana a velocità ancora più elevate, si osserva come la forza resistente abbia correttamente una dipendenza quadratica dalla velocità; in queste condizioni, infatti, il nastro è assimilabile ad una lastra piana lambita tangenzialmente da una corrente.

È utile valutare il valore del coefficiente di resistenza C_D della membrana e confrontarlo con i dati misurati sperimentalmente, in funzione del numero di Reynolds. In Fig. 5.10 è riportata tale dipendenza e si può osservare come il modello teorico sia in buon accordo con i risultati sperimentali.

L'andamento del coefficiente di resistenza rispecchia le considerazioni fatte in precedenza. A velocità più basse assume un valore costante, essendo la membrana poco deformata e avendo come conseguenza un comportamento simile a quello di un corpo rigido; per velocità più elevate si ha al contrario una sensibile diminuzione, indice della riconfigurazione da parte della membrana e la conseguente riduzione della forza di resistenza. Inoltre, il valore assunto a velocità basse è esattamente quello scelto inizialmente per la risoluzione numerica ($C_D = 2$); variando tale parametro e scegliendone un valore inferiore (ad es. $C_D = 1,5$) è possibile di conseguenza calibrare il modello teorico ai dati sperimentali.

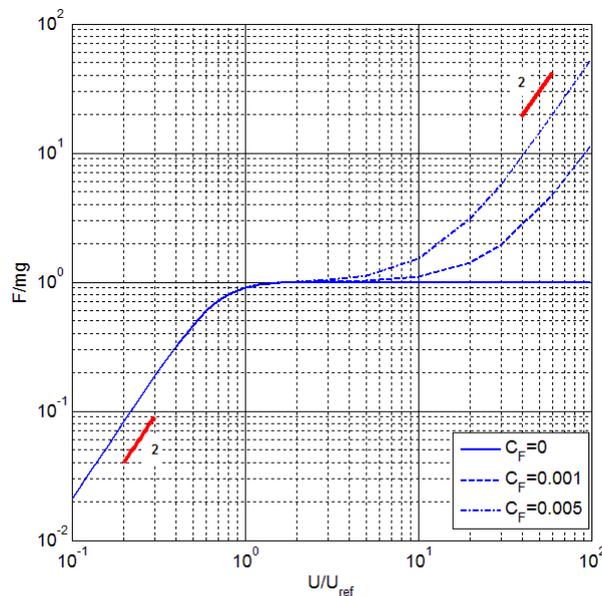


Figura 4.6: Confronto tra diversi valori del coefficiente d'attrito.

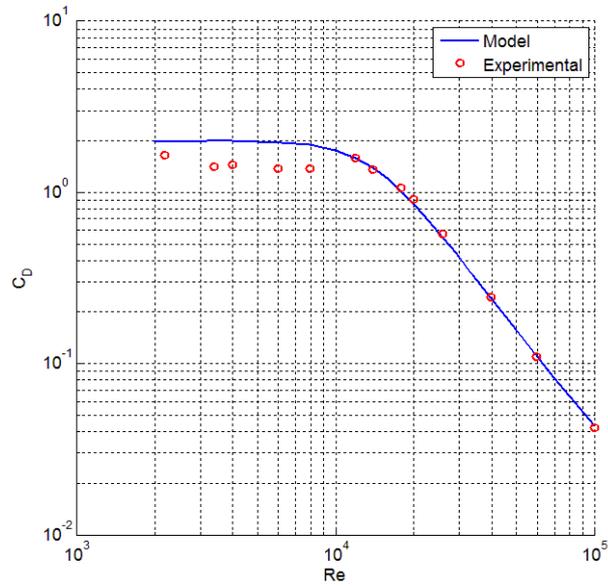


Figura 4.7: Grafico $C_D = f(Re)$, confronto con i dati sperimentali.

Come ultima considerazione, si è provato ad analizzare nastri aventi geometrie diverse da quella rettangolare. Per introdurre l'effetto della variazione di larghezza della membrana, all'interno delle equazioni di equilibrio si pone W in funzione dell'ascissa curvilinea adimensionale s^* . La variazione di larghezza lungo l'asse del nastro è stata posta lineare, secondo l'espressione

$$W(s^*) = W_{root}(1 - s^*) + W_{tip}s^*$$

dove W_{root} indica la larghezza dell'estremità superiore del nastro e W_{tip} quella dell'estremità inferiore. Sono state prese in considerazione una membrana trapezoidale ed una triangolare, scelte in modo tale che la larghezza media sia la stessa. Si riporta in Fig. 4.8 il profilo calcolato, per un caso rappresentativo.

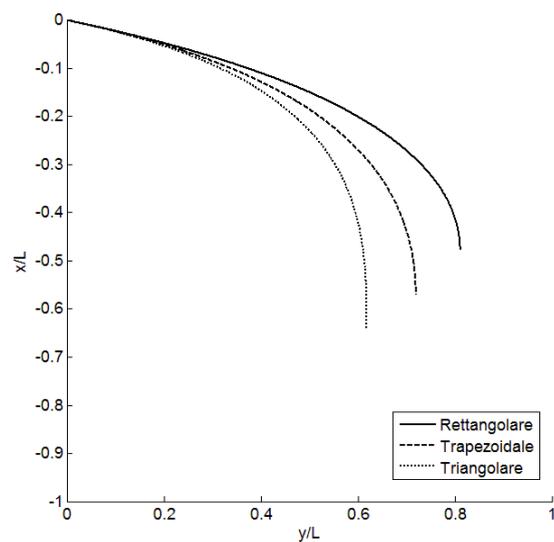


Figura 4.8: Confronto tra i profili di nastri aventi diversa larghezza, $U/U_{ref} = 1,5$.

Nonostante il profilo assunto dalle diverse membrane sia differente, si è osservato che la forza di resistenza calcolata non subisce sensibili variazioni; ulteriori investigazioni riguardo al risultato ottenuto saranno dovute per comprendere l'origine teorica e/o numerica del fenomeno.

Capitolo 5

Simulazioni numeriche

In questo capitolo vengono presentati i risultati ottenuti tramite la simulazione numerica di un filamento elastico immerso in un fluido. L'idea di effettuare delle simulazioni numeriche, con riferimento al problema introdotto nel capitolo precedente, ha lo scopo di verificare in quale misura il comportamento osservato sperimentalmente, dovuto alla riconfigurazione della struttura, avvenga e sotto quali condizioni. Essendo il codice bidimensionale, è possibile inoltre esaminare l'influenza degli effetti tridimensionali, valutando di quanto i risultati quantitativi ottenuti si discostino da quelli misurati.

L'applicazione del codice numerico, le cui caratteristiche sono state descritte nei capitoli precedenti, consentendo la visualizzazione dei campi di velocità e pressione nel dominio fluido, permette di svolgere un'analisi più approfondita del problema in oggetto.

5.1 Parametri della simulazione

In Fig. 5.1 è rappresentato il dominio scelto per effettuare le simulazioni, con le relative dimensioni rapportate alla lunghezza del filamento. Le prove totali effettuate sono sette. Nella risoluzione numerica del problema, coerentemente con le prove reali, la rigidità flessionale K_B del filamento è stata posta nulla e la grandezza $\Delta\rho = 0, 1$. Quest'ultimo parametro, utilizzato per la adimensionalizzazione dell'equazione del filamento, è definito come

$$\Delta\rho = \frac{\rho_f - \rho N}{\rho N},$$

dove ρ_f è la massa specifica del filamento, per unità di lunghezza, ρ la densità del fluido ed N il numero di punti con cui viene discretizzato il filamento. Nelle prove sperimentali effettuate gli effetti di galleggiamento non sono presenti, essendo le densità

della membrana e quella del fluido uguali. Per avvicinarsi a tale condizione, quindi, si è posto $\Delta\rho$ il più piccolo possibile, in quanto un valore nullo avrebbe causato problemi nella adimensionalizzazione delle forze nel codice, essendo la forza di riferimento pari a $\Delta\rho U_{LB}^2$.

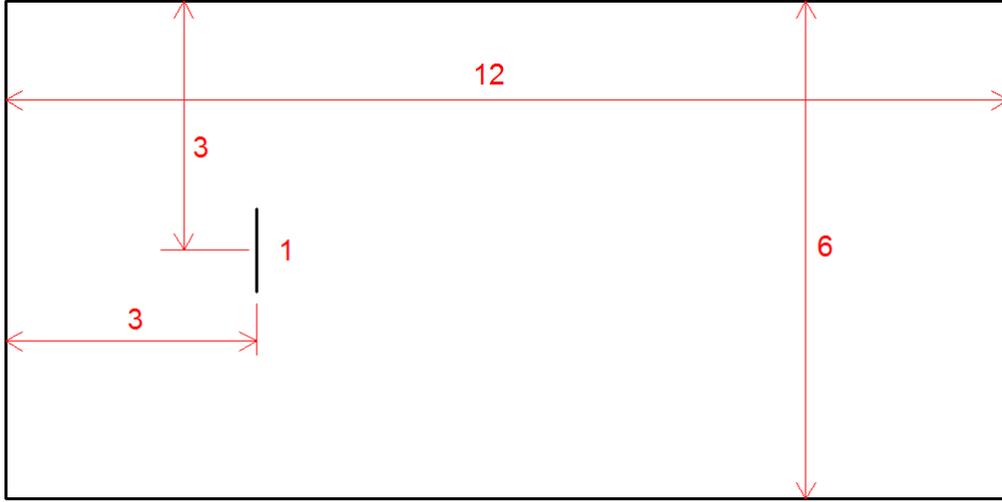


Figura 5.1: Dimensioni del dominio utilizzato per le simulazioni.

Per effettuare correttamente le simulazioni deve essere mantenuta la similitudine dinamica tra il flusso reale e quello simulato. Il numero di Reynolds, per questo problema, è definito come

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{U_{LB}N}{\nu_{LB}},$$

dove la lunghezza di riferimento L è la lunghezza reale della membrana ed N il numero di punti con cui il filamento viene discretizzato. Affinché la simulazione sia stabile, per le considerazioni già effettuate in precedenza, la velocità U_{LB} deve essere mantenuta all'interno del limite di flusso incomprimibile. Per tutte le prove il valore è stato fissato a $U_{LB} = 0,04$. L'unico parametro su cui agire è quindi il numero di punti N . Infine, come descritto nella sez. 2.9.2, il valore di ω è calcolato come

$$\omega = \frac{2Re}{6U_{LB}N + Re}.$$

Per scegliere correttamente questo parametro, in ogni condizione, si è fatto riferimento alla relazione $N \propto \sqrt{Re}$, in modo tale da essere ragionevolmente sicuri che la

simulazione procedesse in modo stabile anche nelle condizioni più critiche, ovvero a numeri di Reynolds elevati.

Nella tabella seguente si riportano i numeri di Reynolds delle sette prove effettuate ed il relativo numero di punti con cui è stato discretizzato il filamento.

Re	N
4640	230
7830	300
11890	400
15950	450
19720	480
23780	530
29000	600

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, si è imposta la condizione di velocità e densità note su ogni lato del dominio. Questo tipo di condizione al contorno semplificata impone allo stesso tempo u , v e ρ ; per fare ciò, ad ogni iterazione, è sufficiente non ricalcolare tali grandezze.

L'estremità superiore del filamento è stata posta semplicemente incernierata (dal momento che la rigidità flessionale è nulla, tale scelta è del tutto equivalente alla condizione incastrata). Per simulare l'effetto della forza peso sull'estremità inferiore, invece, si è imposta una forza concentrata sull'ultimo dei nodi della discretizzazione. A tal proposito un secondo parametro adimensionale deve essere considerato, ovvero il numero di Cauchy C_G introdotto nel capitolo precedente, del quale si ricorda la definizione

$$C_G = \frac{\rho L W U^2}{2mg}.$$

Essendo le simulazioni $2D$ e volendo confrontare i risultati ottenuti con quelli sperimentali, è necessaria una calibrazione preliminare di questa grandezza. Se si esclude la velocità del flusso, si può notare come C_G sia funzione di grandezze costanti per ogni prova effettuata. È quindi possibile scrivere che

$$C_G = cf(Re) = cU_{LB}^2$$

e calibrare il valore della costante c su un solo numero di Reynolds. A tale proposito, sono state impostate tre simulazioni con tre differenti valori di c e, tramite un'interpolazione, è stata definita una funzione quadratica dell'angolo θ in funzione della costante, a Reynolds

fissato, ovvero

$$\theta(c) = \xi_1 c^2 + \xi_2 c + \xi_3.$$

Imponendo $\theta(c) = 79^\circ$, come nel caso (3) in Fig. 5.2, si è ricavato $c = 2,378 \cdot 10^{-10}$.

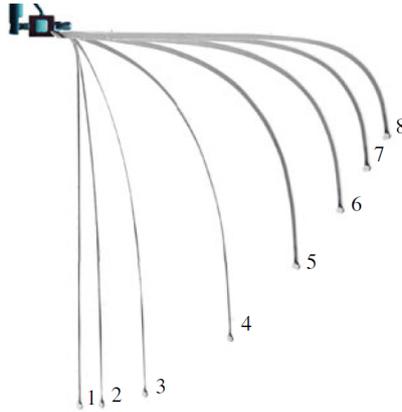


Figura 5.2: Profili assunti dal nastro, misurati sperimentalmente.

5.2 Risultati

Si riportano, nelle Figg. 5.4÷5.9, i grafici dei risultati ottenuti. L'angolo θ riportato è stato scelto come parametro rappresentativo della forma assunta dal filamento; esso è definito come l'angolo, rispetto all'orizzontale, del segmento congiungente l'estremità superiore e quella inferiore, come in Fig. 5.3.

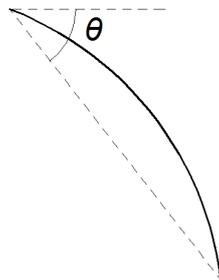


Figura 5.3: Definizione dell'angolo θ .

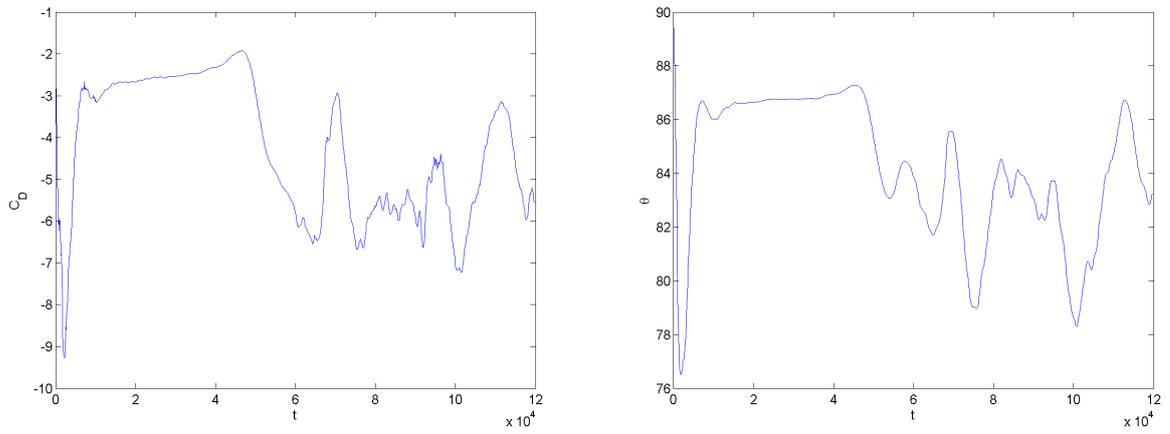


Figura 5.4: Andamento di C_D e θ nel tempo, $Re = 4640$.

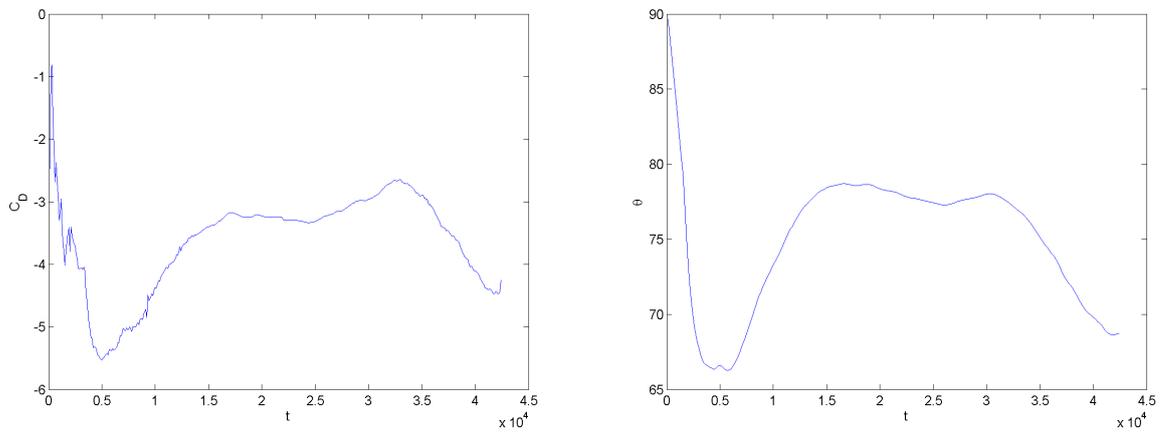


Figura 5.5: Andamento di C_D e θ nel tempo, $Re = 7830$.

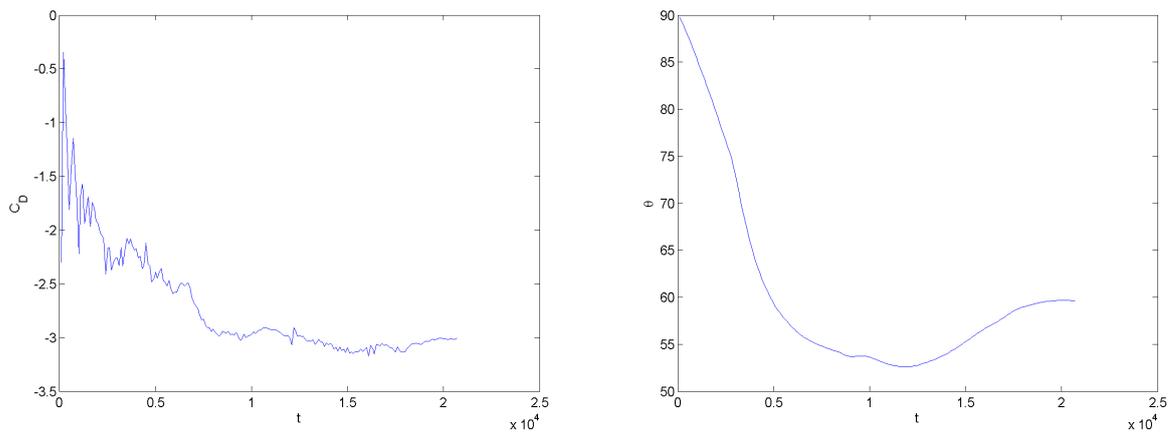


Figura 5.6: Andamento di C_D e θ nel tempo, $Re = 11890$.

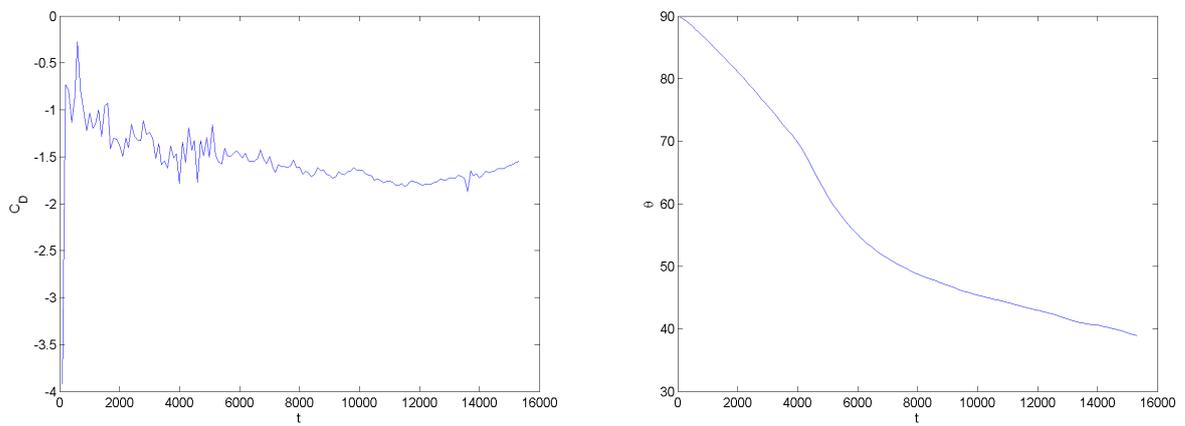


Figura 5.7: Andamento di C_D e θ nel tempo, $Re = 15950$.

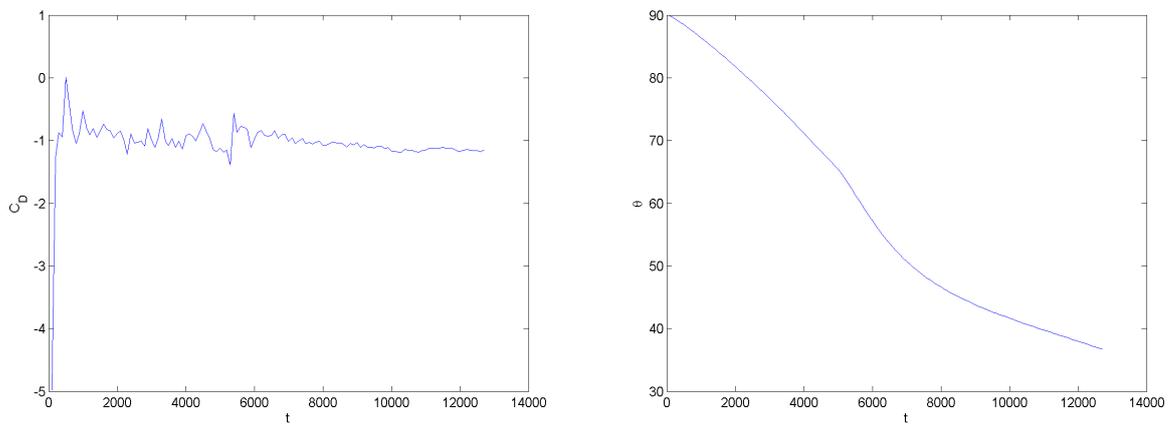


Figura 5.8: Andamento di C_D e θ nel tempo, $Re = 19720$.

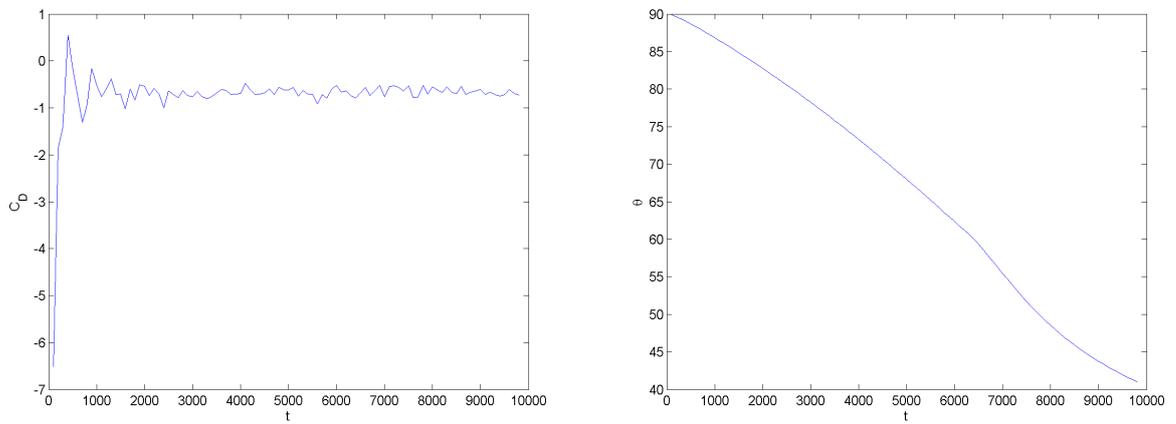


Figura 5.9: Andamento di C_D e θ nel tempo, $Re = 23780$.

La principale considerazione sui risultati ottenuti è il fatto che l'andamento delle grandezze a regime sia instazionario. Tuttavia l'andamento del coefficiente di resistenza, soprattutto a numeri di Reynolds più elevati, presenta un comportamento più stazionario. È utile calcolare il coefficiente di resistenza della membrana e confrontarlo con i dati misurati sperimentalmente e con quelli ottenuti tramite il modello teorico. In Fig. 5.10 sono riportati tali risultati, con una stima dell'errore commesso, dovuto al fatto che il coefficiente misurato è mediato su un intervallo di tempo, essendo il problema instazionario.

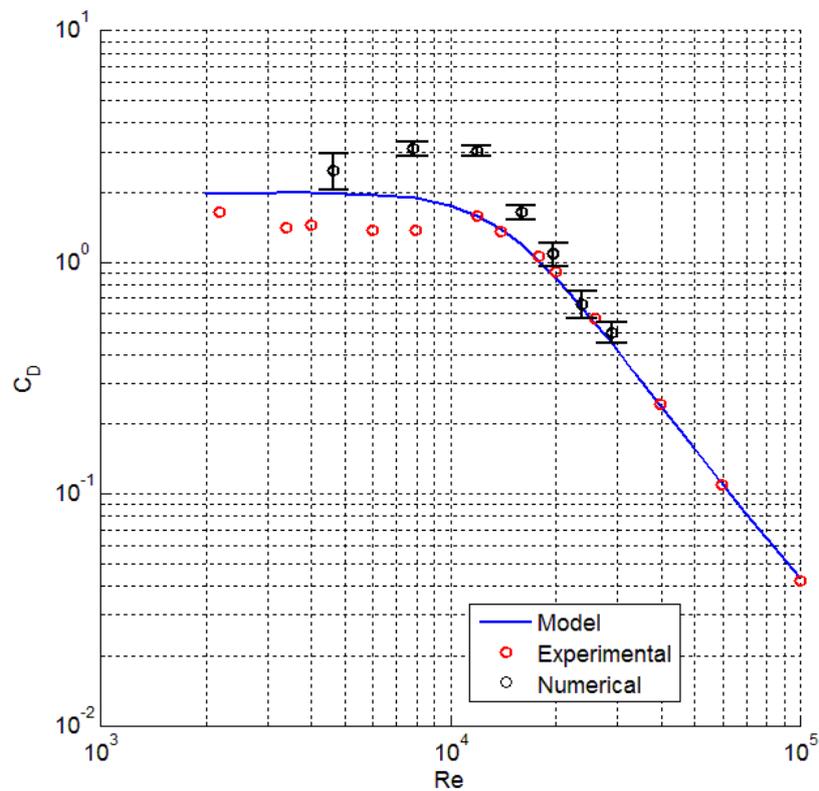


Figura 5.10: Grafico $C_D = f(Re)$, confronto con il modello teorico e i dati sperimentali.

Il C_D così calcolato presenta un andamento qualitativamente simile agli altri dati a disposizione. In particolare, è possibile osservare che l'effetto della riconfigurazione della membrana, che determina una sensibile diminuzione della forza di resistenza, avviene sia per il modello teorico che per i risultati numerici nell'intorno di $Re \sim 10^4$ dei dati sperimentali.

Si può constatare, inoltre, che il valore del coefficiente di resistenza, a numeri di Reynolds più bassi, risulta essere sovrastimato rispetto ai valori di riferimento. Questo comportamento è sicuramente dovuto alla concomitanza di diversi fattori. Più in dettaglio, è necessario ricordare che il codice è bidimensionale, di conseguenza non tiene conto degli effetti tridimensionali che inevitabilmente sussistono nelle prove sperimentali, data la larghezza finita del nastro. Un'altra considerazione, riguardante la metodologia seguita nell'effettuare le simulazioni, riguarda la grandezza del dominio utilizzato. In particolare l'effetto di bloccaggio, dovuto alla vicinanza del filamento alle pareti superiore ed inferiore, può essere non trascurabile; simulazioni al riguardo, utilizzando un dominio più grande, consistono sicuramente nei possibili sviluppi futuri. Sarebbe inoltre interessante valutare l'effetto della discretizzazione spaziale del dominio, per verificare in quale misura i risultati ottenuti siano influenzati da tale parametro. Infine è interessante investigare l'influenza della rigidità flessionale, grandezza posta nulla nelle simulazioni ma di valore finito (sebbene piccolo) negli esperimenti.

A titolo di esempio, si riportano nelle Figg. 5.11-5.13 due particolari istantanee, rappresentative delle simulazioni svolte.

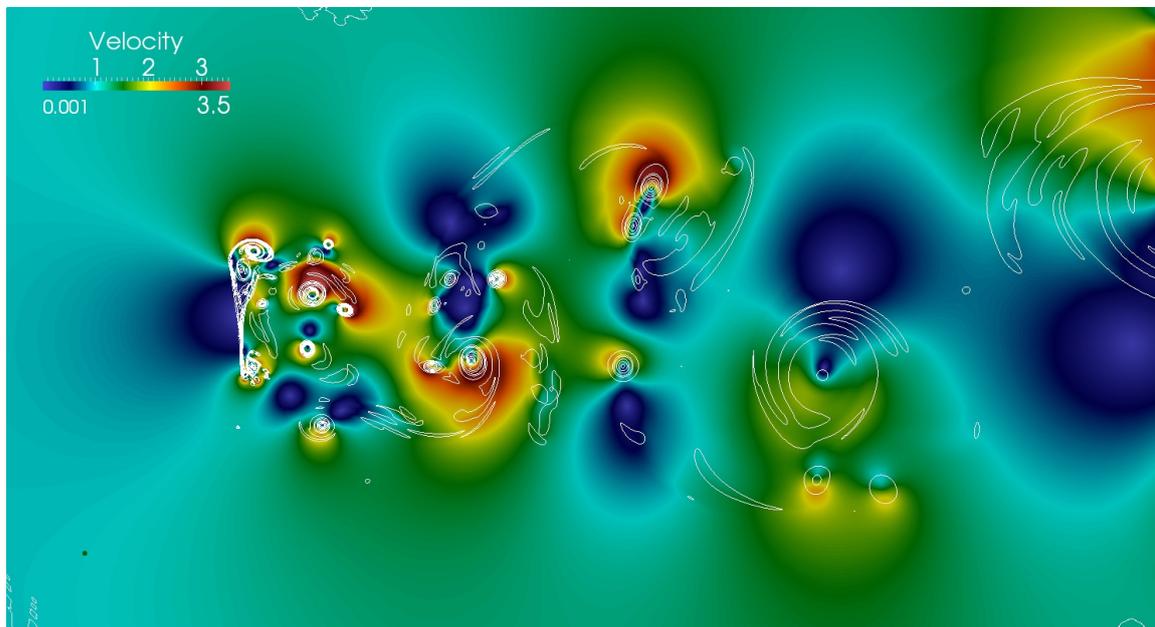


Figura 5.11: Isolinee di velocità, $Re = 4640$. Si osservano le strutture vorticosi a valle del filamento, evidenziate da linee di Q-criterion.

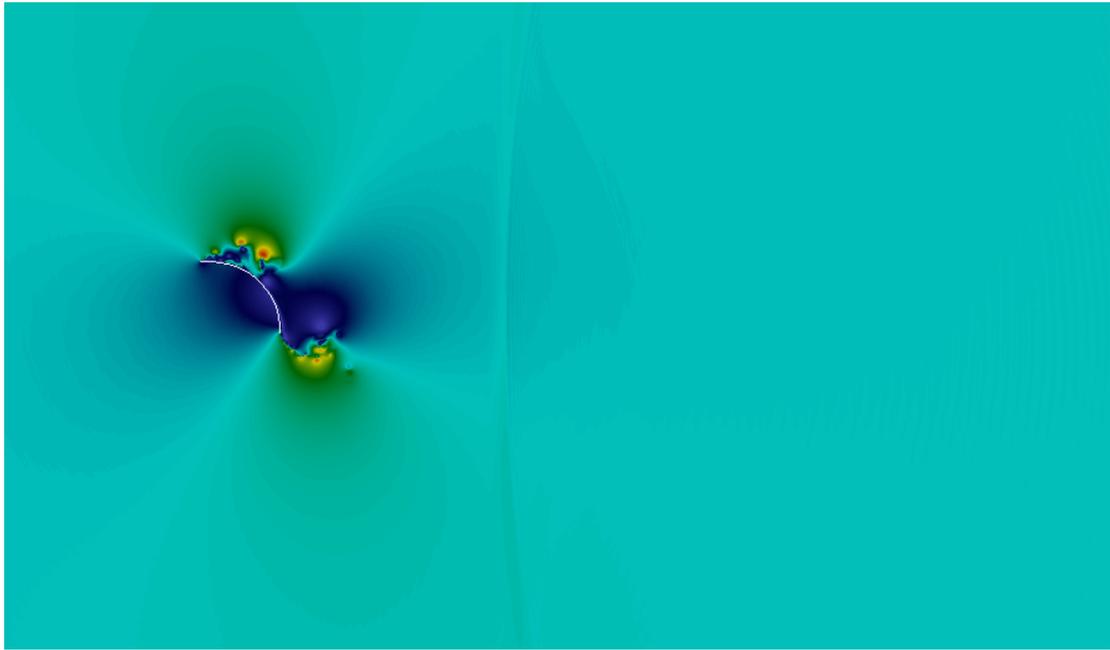


Figura 5.12: Isolinee di velocità, $Re = 15950$.

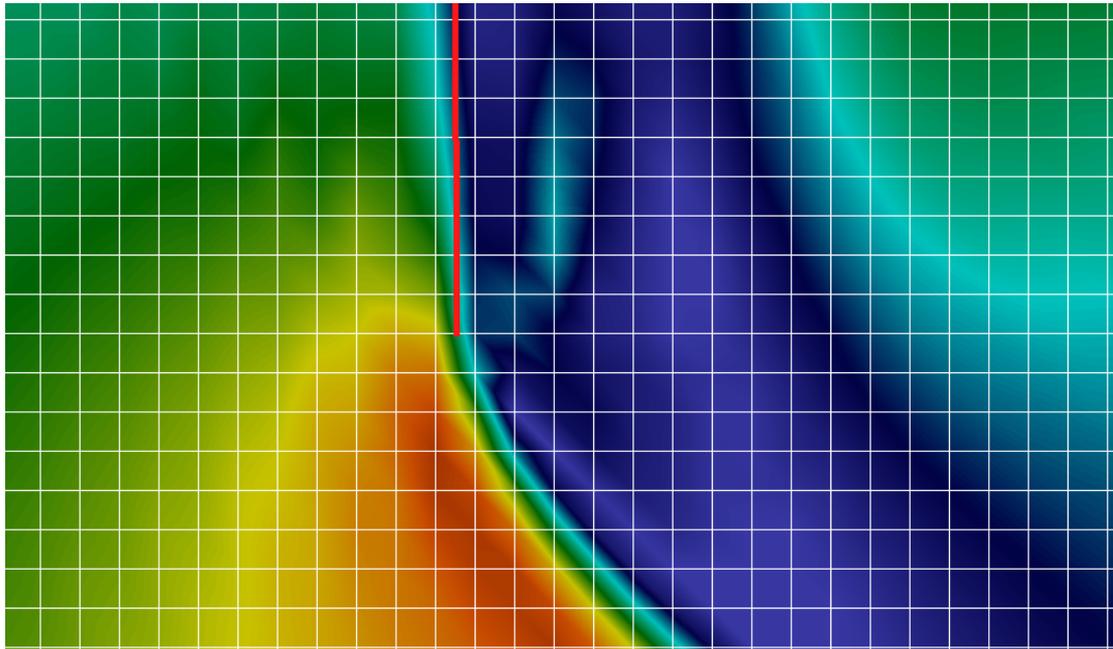


Figura 5.13: Particolare della griglia cartesiana, caratteristica del metodo Lattice Boltzmann, in corrispondenza dell'estremità inferiore del filamento (in rosso).

Capitolo 6

Conclusione e sviluppi futuri

Nel presente lavoro è stato utilizzato il metodo Lattice Boltzmann, descrivendone i principali aspetti e caratteristiche. Tale tecnica è stata inoltre implementata in un codice numerico, la cui bontà è stata validata tramite il confronto con risultati analitici e dati presenti in letteratura. La disponibilità di un codice in grado di simulare l'interazione tra un fluido ed un filamento elastico, accoppiando al metodo Lattice Boltzmann quello dei contorni immersi, ha permesso lo studio numerico del problema di riconfigurazione di una struttura flessibile, del quale sono noti i risultati sperimentali. Lo sviluppo di un modello teorico ha consentito inoltre una migliore comprensione del fenomeno studiato. I risultati ottenuti numericamente e teoricamente sono sostanzialmente in accordo con quelli sperimentali; in particolare, in tutti i casi si è osservata una forte variazione della resistenza aerodinamica con la velocità, dimostrando la capacità della struttura in esame di modificare le proprie caratteristiche geometriche se sottoposta all'azione dinamica del fluido in movimento.

Possibili sviluppi futuri sul tema in questione riguardano sia lo studio del problema della riconfigurazione che il miglioramento del codice utilizzato per lo svolgimento delle prove numeriche. Per quanto riguarda il primo aspetto, simulazioni più approfondite, riguardo l'influenza delle dimensioni del dominio sui risultati ottenuti, sono sicuramente auspicabili, così come uno studio sull'influenza della risoluzione della discretizzazione spaziale. Per quanto riguarda invece lo sviluppo del codice, le principali modifiche volte al miglioramento dell'efficienza sono sicuramente l'implementazione di librerie che consentano il calcolo parallelo (OpenMP, MPI, ecc.), l'implementazione di modelli di collisione *multi-relaxation-time* (MRT), l'estensione a reticoli tridimensionale (ad es. *D3Q19*), ecc.

Bibliografia

- [1] Sukop M.C., Thorne D.T., *Lattice Boltzmann Modeling. An Introduction for Geoscientists and Engineers*, Springer (2006)
- [2] Mohamad A. A., *Lattice Boltzmann Method. Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes*, Springer (2011)
- [3] Succi S., *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*, Oxford University Press (2001)
- [4] Rosati S., *Fisica Generale. Vol. 1*, CEA (1994)
- [5] Barois T., de Langre E., *Flexible body with drag independent of the flow velocity*, J. Fluid Mech. 735 (2013)
- [6] Vogel S., *Life in Moving Fluids: The Physical Biology of Flow*, Princeton University Press (1996)
- [7] Obligado M., Bourgoïn M., *An experimental investigation of the equilibrium and stability of long towed cable systems*, New J. Phys. 15 (2013)
- [8] Mittal R., Iaccarino G., *Immersed Boundary Methods*, Annu. Rev. Fluid Mech. (2005)
- [9] Huang W., Shin S.J., Hyuang, J. S., *Simulation of flexible filaments in a uniform flow by the immersed boundary method*, J. Comp. Phys. 226 (2007)

- [10] Ghia V., Ghia K.N. and Shin C. T., *High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multi-grid method*, J. Comp. Phys. 48 (1982)
- [11] Gosselin F., de Langre E., Machado-Almeida B., *Drag reduction of flexible plates by reconfiguration*, J. Fluid Mech. 650 (2010)
- [12] Dupuis A., Chatelain P., Koumoutsakos P., *An immersed boundary-lattice-Boltzmann method for the simulation of the flow past an impulsively started cylinder*, J. Comp. Phys. 227 (2008)
- [13] Luchini P., Tognaccini R., *The start-up vortex issuing from a semi-infinite flat plate*, J. Fluid Mech. 455 (2002)
- [14] Fadlun E. A., Vericco R., Orlandi P., Mohd-Yusofz J., *Combined Immersed-Boundary Finite-Difference Methods for Three-Dimensional Complex Flow Simulations*, J. Comp. Phys. 161 (2000)
- [15] Pinelli A., Naqavi I.Z., Piomelli U., Favier J., *Immersed-boundary methods for general finite-difference and finite-volume Navier-Stokes solvers*, J. Comp. Phys. 229 (2010)
- [16] Favier J., Revell A., Pinelli A., *A Lattice Boltzmann - Immersed Boundary method to simulate the fluid interaction with moving and slender flexible objects*, J. Comp. Phys. 261 (2014)
- [17] He J.W., *Active Control and Drag Optimization for Flow Past a Circular Cylinder*, J. Comp. Phys. 163 (2000)
- [18] Behr, M., *Incompressible flow past a circular cylinder: dependence of the computed flow field on the location of the lateral boundaries* (1994)