

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA

SCUOLA POLITECNICA

DIME

Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Energetica,
Gestionale e dei Trasporti



TESI DI LAUREA TRIENNALE IN
INGEGNERIA MECCANICA

Flussi in Mezzi Porosi

Autore

Alessio Carpi

Supervisore

Ch.mo Prof. Alessandro Bottaro

Febbraio 2020

Alla mia famiglia.
A.C.

Prefazione

I mezzi porosi sono materiali aventi una struttura interna caratterizzata dalla presenza di vuoti chiamati pori. Questi materiali possono essere attraversati da fluidi. In natura sono presenti molti esempi di strutture porose ad esempio le rocce, il terreno, i tessuti e così via. Lo studio su questi tipi di materiali è fondamentale per diverse branche della scienza tra cui la meccanica dei solidi per la resistenza meccanica e la meccanica dei fluidi per analizzare l'interazione tra fluido e solido. Particolare è il caso dell'estrazione petrolifera dove si cerca di ottimizzare il processo di estrazione dalle rocce porose.

Oggetto di questa trattazione è di fornire un'analisi di base sulla permeabilità dei mezzi porosi al variare della geometria e della dimensione dei grani, nonché dalla direzione del gradiente di pressione imposto al fluido.

Abstract

Porous media are solid materials having an internal structure characterized by the presence of voids called pores. These materials can be traversed by fluids in motion. In nature there are many examples of such structures, e.g. rocks, several kinds of terrains, fabrics, and so on. The study of these types of materials is important in different sectors of science, including the study of the consolidation of soils and the analysis of the interaction between fluids and solids. The case of oil extraction is of special interest, when the optimization of the extraction process from porous rocks is aimed for. The object of this thesis work is to provide a basic analysis of the permeability of porous media varying the geometry and the pore size, as well as the direction of the pressure gradient imposed on the fluid.

Ringraziamenti

Non smetterò mai di ringraziare i miei genitori ed è difficile riuscire a dimostrare la mia gratitudine nei loro confronti. Papà ha saputo incentivare tramite le sue passioni la mia volontà di apprendere e approfondire nuove conoscenze. Mamma è stata fondamentale per risollevarmi nei momenti di sconforto e per molti altri motivi. Un ringraziamento speciale va anche a mio fratello Alex e alla sua compagna Fiorella che mi sono stati vicino e sempre desiderosi di conoscere i miei progressi. Un grazie a Marco, che ha saputo chiarire certi argomenti. A tutti gli amici che ho conosciuto in questi anni e con cui ho condiviso interessi. Alla mia "materia grigia" che è riuscita ad elaborare una vasta quantità di nozioni. Infine ringrazio molto il Prof. Bottaro che è stato disponibilissimo e sempre presente per consultazioni e correzioni.

Alessio Carpi

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Flusso in mezzi porosi	4
2	Scale multiple e omogeneizzazione	6
3	Il metodo agli elementi finiti e FreeFEM++	13
3.1	Richiami sugli spazi lineari reali	13
3.2	Metodo variazionale	15
3.2.1	Metodo di Galerkin	15
3.3	Formulazione debole	16
3.3.1	Formulazione debole del problema microscopico	16
3.4	Metodo agli elementi finiti FEM	19
3.4.1	Elementi finiti mono-dimensionali	19
3.4.2	Elementi finiti triangolari	21
3.5	FreeFEM++	23
4	Le configurazioni geometriche e i risultati microscopici	25
4.1	Configurazioni geometriche	25
4.1.1	Grano circolare	25
4.1.2	Grano quadrato	25
4.1.3	Grano ellittico	25
4.1.4	Grano triangolare	25
4.2	Risultati microscopici	25
4.2.1	Grano circolare, $\theta = 0.969$, $f_i^{(1)} = (1, 0)$	26
4.2.2	Grano circolare, $\theta = 0.497$, $f_i^{(1)} = (1, 0)$	27
4.2.3	Grano quadrato, $\theta = 0.99$, $f_i^{(1)} = (1, 0)$	28
4.2.4	Grano quadrato, $\theta = 0.51$, $f_i^{(1)} = (1, 0)$	29
4.2.5	Grano ellittico, $\theta = 0.984$, $f_i^{(1)} = (1, 0)$	30
4.2.6	Grano ellittico, $\theta = 0.984$, $f_i^{(2)} = (0, 1)$	31
4.2.7	Grano ellittico, $\theta = 0.749$, $f_i^{(1)} = (1, 0)$	32
4.2.8	Grano ellittico, $\theta = 0.749$, $f_i^{(2)} = (0, 1)$	33
4.2.9	Grano triangolare, $\theta = 0.983$, $f_i^{(1)} = (1, 0)$	34
4.2.10	Grano triangolare, $\theta = 0.983$, $f_i^{(2)} = (0, 1)$	35
4.2.11	Grano triangolare, $\theta = 0.723$, $f_i^{(1)} = (1, 0)$	36
4.2.12	Grano triangolare, $\theta = 0.723$, $f_i^{(2)} = (0, 1)$	37
5	Il tensore di permeabilità	38
5.1	Confronto delle permeabilità	39
5.1.1	Cerchio, quadrato, K-C	39
5.1.2	Cerchio, ellisse, K-C	39
5.1.3	Cerchio, triangolo, K-C	40
5.1.4	Confronto generale	41

6 Conclusioni	42
Simbologia	44

1 Introduzione



Figura 1.1: Materiale ceramico ad elevata porosità.

La porosità è un parametro fondamentale per la caratterizzazione dei materiali porosi (Fig. 1.1) ed è definita come il rapporto tra il volume di vuoto e il volume totale del materiale considerato. Da questo parametro dipendono la resistenza meccanica, ad esempio per gli acciai in fase di solidificazione la presenza di ossigeno nel metallo liquido determina la formazione di porosità (*acciai effervescenti*) che portano ad una riduzione della resistenza meccanica. Lo stesso effetto si ha nelle strutture a base di calcestruzzo. Un tipico esempio utile per comprendere l'importanza della porosità sono le ossa dell'apparato scheletrico. La loro sezione non si presenta come un materiale continuo (tranne il rivestimento esterno dove è compatto) ma è composto da tante piccole cavità (*osso spugnoso*). Tuttavia questa porosità non risulta costante in tutte le zone ma dipende da quale tipo di funzione deve compiere quella determinata zona, ad esempio le trabecole ossee presentano una bassissima porosità al fine di aumentare la resistenza alle sollecitazioni in direzione delle tensioni principali indotte dai carichi esterni, mentre allontanandosi dalle trabecole la conformazione diventa più porosa in modo da avere un grado di elasticità maggiore per assorbire eventuali urti (Fig. 1.2). Altre proprietà dipendenti dalla porosità sono il grado di coibentazione (termica e acustica) e la durabilità dell'oggetto. Inoltre viene modificata la velocità di propagazione delle vibrazioni nei materiali a causa della variazione di densità.

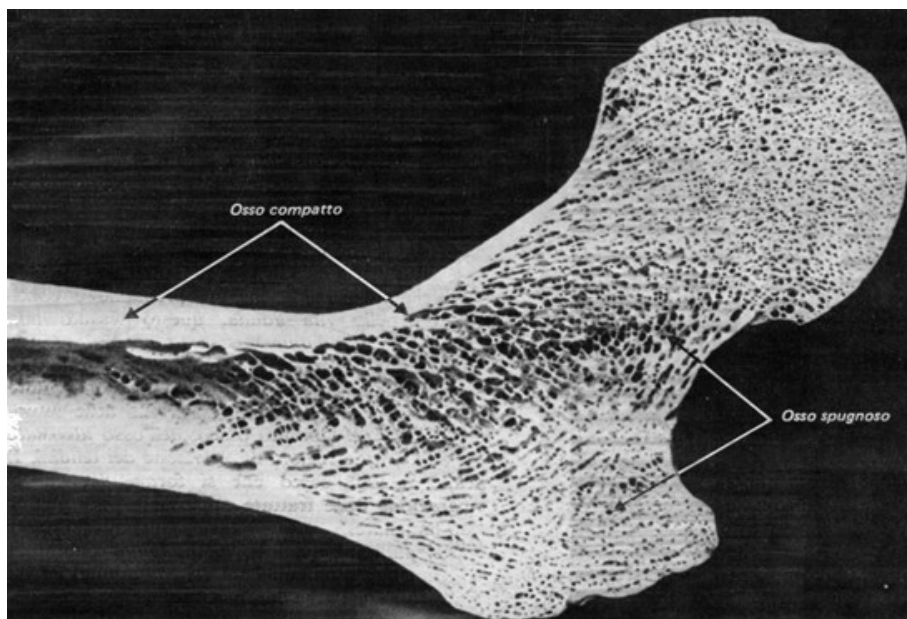


Figura 1.2: Sezione di una trabecola di un osso lungo.

Nella geologia lo studio della porosità del terreno permette di definire quanto lo stesso sia permeabile ossia quanto si lasci attraversare da un fluido, oppure definisce il grado di ritenzione ad esempio delle rocce. Quest'ultimo parametro è molto utile nel campo della geologia degli idrocarburi che si occupa di ricerca e produzione di idrocarburi dal sottosuolo. Il petrolio, ad esempio, viene estratto dal sottosuolo dove risulta intrappolato in una roccia porosa chiamata *roccia serbatoio* (Fig. 1.3). La zona in cui vi è la roccia serbatoio viene chiamata *bacino sedimentario* o *giacimento*.

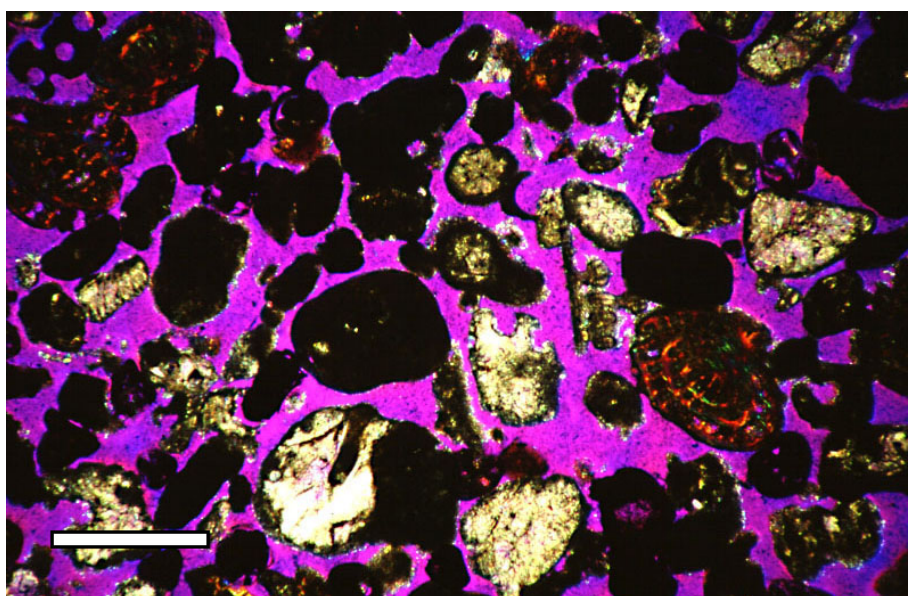


Figura 1.3: Sezione di una roccia serbatoio di tipo clastica, ossia formata dall'accumulo di detriti come sabbia, ghiaia e così via. Si noti la parte colorata di viola che rappresenta lo spazio dei pori.

Il petrolio presente in queste rocce porose è ad elevate pressioni e di conseguenza la sua fuoriuscita avviene naturalmente attraverso i condotti di perforazione; circa il 30% viene estratto in questo modo. La restante parte di petrolio è intrappolato e la sua estrazione è difficile. Si può procedere tramite l'iniezione di emulsioni che spingono il greggio fuori dalla roccia. Si ha quindi la necessità di studiare l'interazione tra fluido e porosità al fine di ottimizzare questo processo. Un altro metodo di estrazione, chiamato *fratturazione idraulica* o *fracking* (Fig. 1.4), permette di facilitare l'estrazione in determinati giacimenti dove la roccia, risultando poco porosa e quindi poco permeabile, non consentirebbe l'estrazione in quantità convenienti. Questo processo avviene tramite l'iniezione di un fluido (alle volte contenente particolato) che spacca la roccia rendendola più porosa e quindi maggiormente permeabile. Ad oggi il fracking è oggetto di molte critiche riguardanti il rischio ambientale dovuto all'inquinamento delle acque sotterranee e alla generazione di micro-sismicità locali rendendo instabile il terreno. In alcuni paesi questa tecnica è stata vietata.

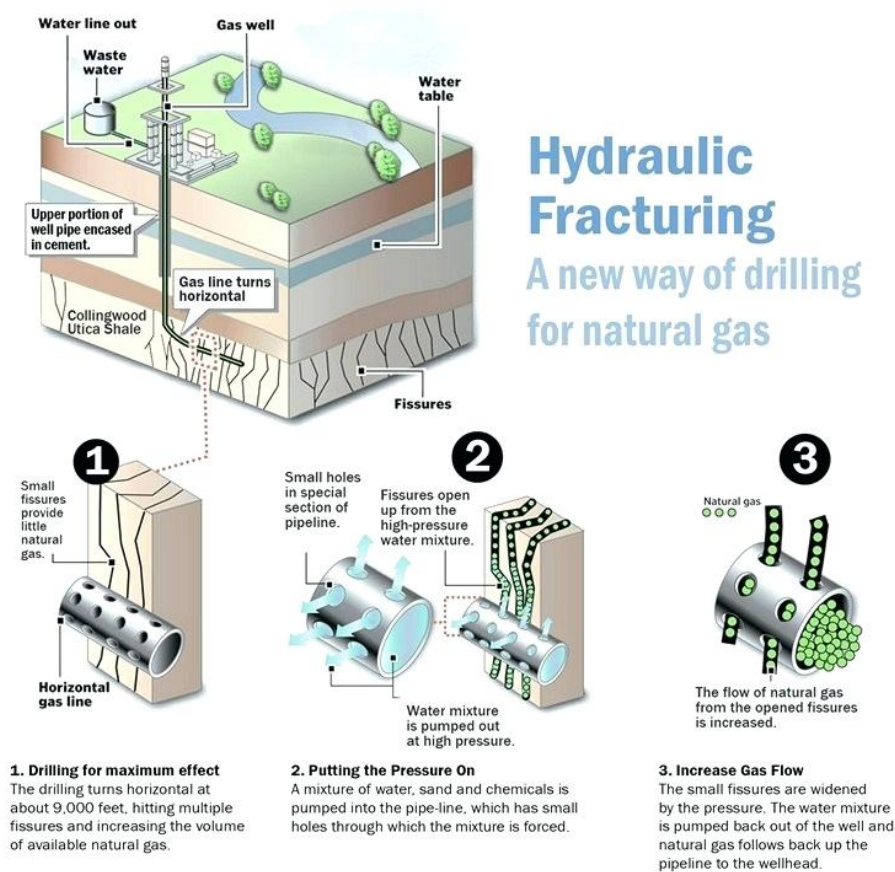


Figura 1.4: Tecnica del fracking.

1.1 Flusso in mezzi porosi

Il flusso in mezzi porosi è generalmente studiato tramite l'equazione di Darcy, ricavata sperimentalmente dall'ingegnere francese Henry Darcy [1]. Successivamente questa equazione è stata ricavata dall'equazione di Navier-Stokes tramite omogenizzazione:

$$\langle u_i \rangle = -\frac{K_{ij}}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x_j}, \quad (1.1)$$

dove:

- $\langle u_i \rangle$: velocità media di fase calcolata come se il fluido fosse l'unica fase presente nel mezzo poroso $[\frac{m}{s}]$;
- K_{ij} : tensore di permeabilità del mezzo. Se il mezzo è isotropo $K_{ij} = K\delta_{ij}$, con δ_{ij} il tensore di Kronecker. L'unità di misura è il $[m^2]$ oppure il *darcy* $[d]$, dove $1d \approx 10^{-12}m^2$;
- μ : viscosità dinamica del fluido $[Pa \cdot s]$;
- $\frac{\partial P}{\partial x_j}$: il gradiente macroscopico di pressione $[\frac{Pa}{m}]$.

Il segno negativo impone che il fluido si sposti sotto l'effetto di un gradiente di pressione dalla zona a maggior pressione verso una zona di minor pressione. La legge di Darcy è valida per flussi a basse velocità attraverso piccoli pori, ossia per numeri di Reynolds $Re < 1$. Per $Re > 1$ le forze inerziali diventano non più trascurabili rispetto alle forze viscosi. In questa situazione, l'ingegnere austriaco Forchheimer [2] ha corretto l'equazione di Darcy aggiungendo un termine inerziale (noto anche come *termine di Forchheimer*) che spiega la non linearità tra il gradiente di pressione e la velocità del flusso (Fig. 1.5).

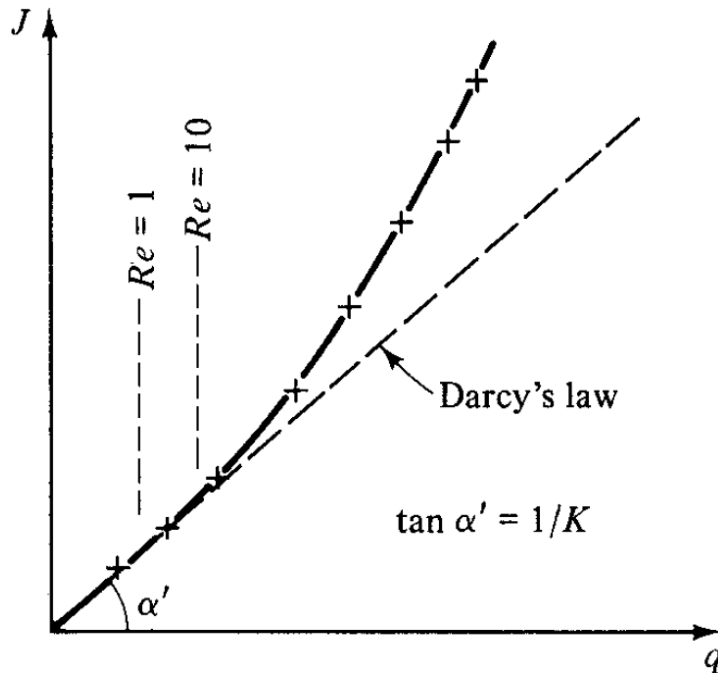


Figura 1.5: Gradiente di pressione J in funzione della portata volumetrica q [3].

La legge di Darcy corretta con il termine di Forchheimer risulta, per un mezzo isotropo:

$$-\nabla P = \frac{\mu}{K} \langle u \rangle + \beta \rho \langle u \rangle^2, \quad (1.2)$$

dove:

- β : fattore di resistenza inerziale (o coefficiente di Forchheimer) $[\frac{1}{m}]$;
- ρ : densità del fluido $[\frac{kg}{m^3}]$.

Il termine β è generalmente dedotto sperimentalmente. Si può anche definire una permeabilità apparente, K_{app} , riscrivendo la (1.2):

$$\frac{1}{K_{app}} = -\nabla P \frac{1}{\mu \langle u \rangle} = \frac{1}{K} + \beta \frac{\rho \langle u \rangle}{\mu}.$$

Introducendo K_{app} , si ritrova la legge di Darcy con K_{app} al posto di K . Nella letteratura si è concordato che l'equazione di Forchheimer è applicabile per qualsiasi numero di Reynolds.

Si è osservato che in presenza di mezzi porosi con porosità elevata (prossima all'unità), ossia volume di solido quasi assente, la legge di Darcy e di Forchheimer descrivono molto approssimativamente ciò che avviene internamente. Di conseguenza il matematico e fisico olandese Henri Coenraad Brinkman [4] ha nuovamente esteso la legge di Darcy introducendo un termine aggiuntivo (denominato anche *termine di Brinkman*) all'equazione (1.1) che tiene conto dell'effetto diffusivo:

$$-\nabla P = \frac{\mu}{K} \langle u \rangle - \tilde{\mu} \nabla^2 \langle u \rangle,$$

dove $-\tilde{\mu} \nabla^2 \langle u \rangle$ è il termine di Brinkman che tiene conto degli effetti diffusivi macroscopici. Il coefficiente $\tilde{\mu}$ rappresenta la *viscosità effettiva* che in generale è diversa dalla viscosità dinamica μ del fluido. Si dimostra che $\tilde{\mu}$ dipende dalla tortuosità del mezzo poroso e dalla porosità θ .

Il limite di validità della legge di Brinkman è ancora tutt'oggi ricercato.

2 Scale multiple e omogeneizzazione

Si considera una parte di solido poroso lontano dai bordi di un dominio di lunghezza caratteristica L in cui viene fatto scorrere un fluido newtoniano incomprimibile. Nell'attraversare il solido, il fluido subisce una caduta di pressione macroscopica pari a ΔP . Per analizzare l'interazione del fluido con le occlusioni interne del solido viene considerata una cella microscopica unitaria di dimensioni l al cui interno è racchiuso un ostacolo.

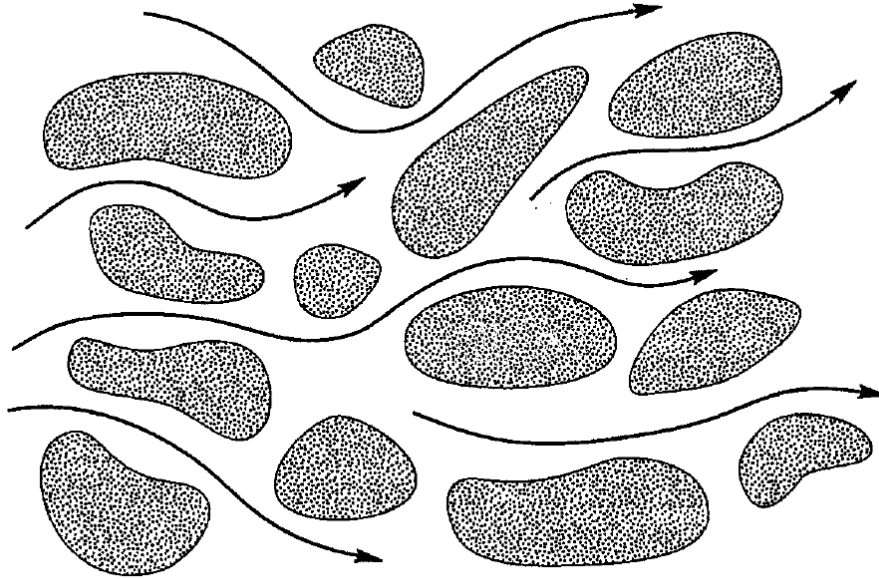


Figura 2.1: Flusso attraverso un mezzo poroso.

Data la presenza di molteplici ostacoli all'interno del solido poroso, ognuno con forma diversa e quindi criticità differenti (Fig. 2.1), vi è la necessità di porre un primo approccio semplificativo considerando un dominio macroscopico formato da una molteplicità di celle unitarie, sul bordo delle quali si applicano condizioni di periodicità (Fig. 2.2). In questo modo l'analisi della singola cella vale anche per ogni parte del solido poroso. Essendoci due scale di lunghezza differenti, L e l , dove $l \ll L$ esiste un coefficiente che lega le due scale macroscopica L e microscopica l :

$$\epsilon = \frac{l}{L} \ll 1.$$

In seguito tale coefficiente ϵ è utilizzato per due sviluppi asintotici in potenze di ϵ per i termini di velocità u_i e di pressione p , in un'analisi che viene detta *analisi multiscale*.

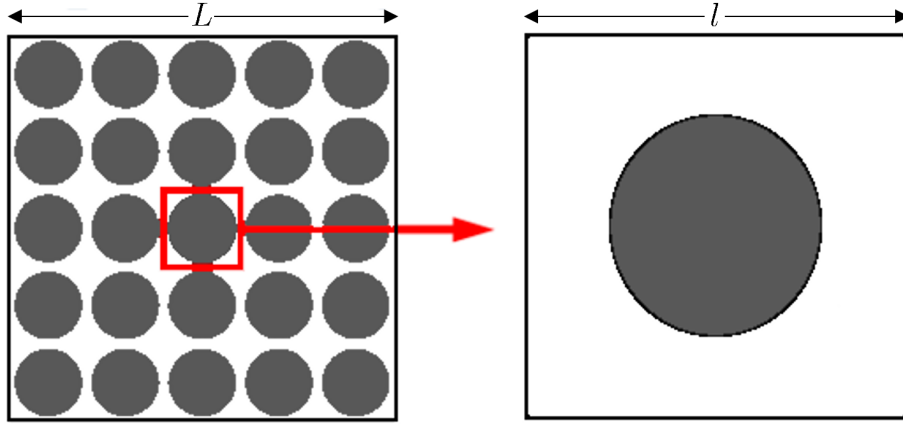


Figura 2.2: Dominio macroscopico e cella unitaria.

Per analizzare il comportamento del fluido si sfruttano le equazioni del moto:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_i} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{D \hat{u}_i}{D \hat{t}} = - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_i} + \mu \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j^2}. \quad (2.2)$$

Dove la (2.1) è l'equazione di continuità mentre la (2.2) è l'equazione di Navier Stokes. I termini segnati vengono considerati come variabili dimensionali.

Successivamente si suppone di studiare il problema come problema di Stokes (*creeping flow*), ossia caratterizzato da bassi numeri di Reynolds ($\ll 1$). Questo comporta che il termine di sinistra della (2.2) risulti trascurabile (con l'adimensionalizzazione dell'equazione questo aspetto sarà più chiaro). A questo punto si ipotizza che il gradiente di pressione macroscopico sia bilanciato dalla diffusione viscosa a livello di ogni singolo poro, cioè:

$$\frac{\Delta P}{L} \simeq \mu \frac{\mathcal{U}}{l^2},$$

dove \mathcal{U} è una velocità caratteristica del fluido nel mezzo poroso e viene considerata come scala di velocità.

A questo punto si adimensionalizzano tutti i parametri del problema in questo modo:

$$x_i = \frac{\hat{x}_i}{l}, \quad (2.3)$$

$$X_i = \frac{\hat{x}_i}{L}, \quad (2.4)$$

$$t = \frac{\hat{t} \mathcal{U}}{l}, \quad (2.5)$$

$$u_i = \frac{\hat{u}_i}{\mathcal{U}}, \quad (2.6)$$

$$p = \frac{\hat{p}}{\Delta P} = \frac{\hat{p}l^2}{\mu \mathcal{M} L}. \quad (2.7)$$

Le variabili x_i , X_i sono rispettivamente variabili spaziali microscopiche e macroscopiche, t il tempo, u_i la velocità e infine p la pressione.

Tramite il metodo delle scale multiple si esprimono i termini di velocità u_i e di pressione p come funzioni dipendenti dalle variabili spaziali microscopiche, macroscopiche e dal tempo:

$$(u_i, p) = f(x_i, X_i, t).$$

Di conseguenza le derivate di queste funzioni devono essere calcolate secondo la *regola della catena* essendo funzioni composte:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \hat{x}_i} + \frac{\partial}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial \hat{x}_i},$$

e considerando la (2.3) e la (2.4) allora:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial X_i}. \quad (2.8)$$

Ora si esprime la (2.1) utilizzando la (2.8) e tenendo conto che $\hat{u}_i = \mathcal{U} u_i$:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_i} = \frac{\mathcal{U}}{l} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\mathcal{U}}{L} \frac{\partial u_i}{\partial X_i} = 0,$$

raccogliendo si ha:

$$\frac{\mathcal{U}}{l} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \epsilon \frac{\partial u_i}{\partial X_i} \right] = 0,$$

e quindi l'equazione di continuità in forma adimensionale é:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \epsilon \frac{\partial u_i}{\partial X_i} = 0. \quad (2.9)$$

Successivamente si esprime la velocità u_i come sviluppo asintotico in potenze di ϵ , ossia:

$$u_i = u_i^{(0)} + \epsilon u_i^{(1)} + \epsilon^2 u_i^{(2)} + \dots, \quad (2.10)$$

che sostituita nella (2.9) si ha:

$$\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_i} + \epsilon \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_i} + \dots + \epsilon \left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial X_i} + \epsilon \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial X_i} + \dots \right) = 0,$$

raccogliendo i termini dello stesso ordine si ottengono una serie di equazioni di continuità adimensionali di ordine ϵ^n , $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$\epsilon^0 \implies \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_i} = 0, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}\epsilon^1 &\implies \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial X_i} = 0, \\ \epsilon^2 &\implies \dots\end{aligned}$$

In ugual modo si procede per adimensionalizzare l'equazione di Navier Stokes, sostituendo alle variabili dimensionali \hat{t} , \hat{u}_i , \hat{p} rispettivamente $\frac{t}{\mathcal{U}}$, $\mathcal{U}u_i$, $p\frac{\mu\mathcal{U}L}{l^2}$ ricavate dalle (2.5), (2.6) e (2.7).

Nell'equazione, inoltre, il termine laplaciano viene sostituito da:

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_j^2} = \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \dots,$$

ossia l'estensione al secondo ordine della regola della catena.

Successivamente si esprime u_i con la (2.10) e p con:

$$p = p^{(0)} + \epsilon p^{(1)} + \epsilon^2 p^{(2)} + \dots, \quad (2.12)$$

di conseguenza si ha:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\mathcal{U}^2}{l} \frac{D(u_i^{(0)} + \dots)}{Dt} &= -\frac{\mu\mathcal{U}L}{l^3} \left[\frac{\partial(p^{(0)} + \epsilon p^{(1)} + \dots)}{\partial x_i} + \epsilon \frac{\partial(p^{(0)} + \epsilon p^{(1)} + \dots)}{\partial X_i} \right] + \\ &\quad + \mu \frac{\mathcal{U}}{l^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (u_i^{(0)} + \epsilon u_i^{(1)} + \dots).\end{aligned}$$

Infine si moltiplica per il reciproco di $\mu\frac{\mathcal{U}}{l^2}$:

$$\begin{aligned}\frac{\rho\mathcal{U}l}{\mu} \left[\frac{D(u_i^{(0)} + \dots)}{Dt} \right] &= -\frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\partial(p^{(0)} + \epsilon p^{(1)} + \dots)}{\partial x_i} + \epsilon \frac{\partial(p^{(0)} + \epsilon p^{(1)} + \dots)}{\partial X_i} \right] + \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (u_i^{(0)} + \epsilon u_i^{(1)} + \dots),\end{aligned}$$

dove $\frac{\rho\mathcal{U}l}{\mu}$ è il numero di Reynolds.

Come affermato in precedenza, assumendo flussi lenti e pori di piccola taglia, il numero di Reynolds risulta essere pari o minore di ϵ e quindi il termine di derivata totale è di ordine ϵ .

Nuovamente si raccolgono i termini di ordine ϵ^n , $n = -1, 0, 1, \dots$:

$$\epsilon^{-1} \implies \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} = 0, \quad (2.13)$$

$$\epsilon^0 \implies -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} - \frac{\partial p^{(0)}}{\partial X_i} + \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial x_j^2} = 0, \quad (2.14)$$

$$\epsilon^1 \implies \dots$$

Si nota dalla (2.13) che la pressione interstiziale $p^{(0)}$ non dipende dalla scala microscopica ma solo dalla scala macroscopica e dal tempo:

$$p^{(0)} = p^{(0)}(X_i, t).$$

Nella (2.14) il termine $\frac{\partial p^{(0)}}{\partial X_i}$ rappresenta la componente forzante del problema diretto, ossia il gradiente di pressione imposto al fluido.

A questo punto la (2.11) e la (2.14) vengono risolte nella cella unitaria (microscopica).

Si considerano adesso due funzioni test p^\dagger e u_i^\dagger , chiamate *funzioni duali*, che vengono moltiplicate rispettivamente per la (2.11) e la (2.14). Le funzioni test vengono considerate periodiche nella cella e $u_i^\dagger = 0$ sull'interfaccia fluido/solido (frontiera). Si ha quindi:

$$p^\dagger \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_i} = 0, \quad (2.15)$$

$$u_i^\dagger \left(-\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} - \frac{\partial p^{(0)}}{\partial X_i} + \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial x_j^2} \right) = 0. \quad (2.16)$$

Successivamente la (2.15) e la (2.16) vengono sommate e integrate su tutto il volume di fluido V_f della cella unitaria:

$$\int_{V_f} p^\dagger \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_i} - u_i^\dagger \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} - u_i^\dagger \frac{\partial p^{(0)}}{\partial X_i} + u_i^\dagger \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial x_j^2} dV = 0.$$

Si applica l'identità di Lagrange-Green (l'equivalente multidimensionale dell'integrazione per parti) e si ottiene:

$$\int_{V_f} -\frac{\partial p^\dagger}{\partial x_i} u_i^{(0)} + \frac{\partial u_i^\dagger}{\partial x_i} p^{(1)} - u_i^\dagger \frac{\partial p^{(0)}}{\partial X_i} + \frac{\partial^2 u_i^\dagger}{\partial x_j^2} u_i^{(0)} dV = 0,$$

dove i termini di frontiera sono nulli per le condizioni al contorno.

Si deve notare che il termine $u_i^\dagger \frac{\partial p^{(0)}}{\partial X_i}$ dopo l'integrazione risulta immutato perchè la derivata parziale è eseguita sulla scala macroscopica mentre l'integrale è eseguito sul volume infinitesimo della cella unitaria.

Ora si impone che:

$$\frac{\partial u_i^\dagger}{\partial x_i} = 0, \quad (2.17)$$

$$-\frac{\partial p^\dagger}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i^\dagger}{\partial x_j^2} = -f_i, \quad (2.18)$$

dove f_i è il termine sorgente (forzante) del problema ausiliario. Di conseguenza si ha:

$$\int_{V_f} -f_i u_i^{(0)} - u_i^\dagger \frac{\partial p^{(0)}}{\partial X_i} dV = 0,$$

cioè:

$$\int_{V_f} f_i u_i^{(0)} dV = - \left[\int_{V_f} u_i^\dagger dV \right] \frac{\partial p^{(0)}}{\partial X_i}.$$

Successivamente si moltiplica ambo i membri per il reciproco del volume totale V , definito come la somma del volume di fluido V_f e del volume dell'inclusione V_s (volume dell'ostacolo): $V = V_f + V_s$

$$\frac{1}{V} \int_{V_f} f_i u_i^{(0)} dV = - \left[\frac{1}{V} \int_{V_f} u_i^\dagger dV \right] \frac{\partial p^{(0)}}{\partial X_i}.$$

Il vettore f_i può assumere due valori, e può quindi essere espresso come un indice di Kronecker, $f_i^{(j)} = \delta_{ij}$, e u_i^\dagger diventa un tensore di rango due che indicheremo con $u_i^{\dagger(j)}$. Quindi:

$$\frac{1}{V} \int_{V_f} \delta_{ij} u_i^{(0)} dV = -K_{ij} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial X_i}, \quad (2.19)$$

con $K_{ij} = \frac{1}{V} \int_{V_f} u_i^{\dagger(j)} dV$ il tensore di permeabilità. L'equazione finale è quindi:

$$\frac{1}{V} \int_{V_f} u_j^{(0)} dV = -K_{ij} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial X_i},$$

e, utilizzando la relazione di media di fase, si ha:

$$\langle u_j^{(0)} \rangle = -K_{ij} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial X_i}. \quad (2.20)$$

La (2.20) è l'equazione di Darcy che esprime la velocità media di fase in funzione del gradiente di pressione macroscopico. La permeabilità dipende solo dalle proprietà geometriche microscopiche.

A questo punto per ricavare la matrice del tensore di permeabilità, si studia la (2.20) in due singoli problemi. Nel primo problema si impone che il termine sorgente f_i agisca solamente in direzione x . In due dimensioni abbiamo quindi:

$$f_i^{(1)} = \delta_{i1} = (1, 0),$$

di conseguenza dall'equazione di Darcy si ricava la velocità media di fase in direzione x :

$$\langle u^{(0)} \rangle = -K_{xi} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial X_i}, \quad (2.21)$$

dove K_{xi} rappresenta la prima riga della matrice del tensore di permeabilità, che in forma estesa è:

$$\langle u^{(0)} \rangle = -K_{xx} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x} - K_{xy} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial y}.$$

Allo stesso modo si procede nel secondo problema, sempre assumendo problema bidimensionale, imponendo al termine sorgente f_i l'azione in direzione y :

$$f_i^{(2)} = \delta_{i2} = (0, 1),$$

e quindi dall'equazione di Darcy si ricava la velocità media di fase in direzione y :

$$\langle v^{(0)} \rangle = -K_{yi} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial X_i}, \quad (2.22)$$

dove K_{yi} è la seconda riga della matrice. In forma estesa:

$$\langle v^{(0)} \rangle = -K_{yx} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x} - K_{yy} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial y}.$$

Come scritto in precedenza la permeabilità dipende solo dalle proprietà geometriche microscopiche e quindi ogni termine della matrice K_{ij} può essere graficato in funzione di un parametro θ detto porosità, definito come:

$$\theta = \frac{V_f}{V}.$$

Per variare θ si agisce sul volume dell'inclusione V_s , tenendo fissato il volume totale. Si dimostra che il termine K_{ij} è simmetrico e definito positivo [5].

3 Il metodo agli elementi finiti e FreeFEM++

Nell'ambito del calcolo ingegneristico (e non solo) il più delle volte si ha bisogno di risolvere sistemi di equazioni differenziali. Spesso però la maggior parte di questi sistemi non ammettono soluzioni in forma chiusa. Di conseguenza si utilizza un ramo della matematica applicata chiamata *analisi numerica* che permette di risolverli approssimativamente, tramite l'uso di algoritmi caratterizzati da: *velocità di convergenza*, ossia la velocità con cui la successione converge alla soluzione; *stabilità numerica*, cioè accuratezza del risultato (l'algoritmo non deve discostarsi troppo dalla soluzione alla minima variazione dei dati); *computabilità*, ossia l'algoritmo deve essere risolvibile. Le equazioni differenziali (sia ordinarie -*ODE-Ordinary Differential Equations*- che alle derivate parziali -*PDE-Partial Differential Equations*-) vengono *discretizzate*, ossia esplicitate in un sottospazio a dimensione finita. Questo si può fare ad esempio tramite il *metodo agli elementi finiti*, il *metodo alle differenze finite* o il *metodo ai volumi finiti*. Questi metodi permettono di semplificare il problema con un numero finito, sebbene spesso molto grande, di incognite, ricavabili da semplici equazioni algebriche.

L'analisi numerica viene anche utilizzata nei più disparati campi, ad esempio nella medicina per la ricostruzione delle immagini di tomografia computerizzata e di risonanza magnetica, nella multimedialità per la compressione di immagini, musica, filmati e nel campionamento e filtraggio di segnali.

Più precisamente il metodo agli elementi finiti è stato sviluppato nel ramo aeronautico per studiare il campo tensionale nelle strutture degli aeromobili, è stato poi esteso all'intero campo della meccanica dei continui e ad altri campi di studio, tra cui la fisica, la bioingegneria e l'astronomia. Grazie alla sua flessibilità viene utilizzato anche nell'industria, in quanto permette di studiare sistemi complessi per i quali la sperimentazione in laboratorio è di difficile attuazione.

3.1 Richiami sugli spazi lineari reali

Dato l'insieme $\Psi = \{x, y, z, \dots\}$ può essere definito *spazio lineare reale* se:

1. è possibile effettuare la somma tra elementi dell'insieme Ψ e il risultato deve appartenere a Ψ ;
2. è possibile effettuare il prodotto tra uno scalare $\alpha \in \mathfrak{R}$ e ogni elemento dell'insieme Ψ e il risultato deve appartenere sempre a Ψ ;
3. le operazioni di somma e prodotto godono della proprietà commutativa, associativa e distributiva;
4. per ogni elemento dell'insieme Ψ è possibile effettuare un prodotto interno il cui risultato è uno scalare in \mathfrak{R} .

Se uno spazio lineare reale è costituito da n numeri reali il cui prodotto interno è il prodotto scalare allora si parla di *spazio vettoriale* \mathfrak{R}^n . Se invece gli elementi di uno spazio lineare reale sono funzioni, lo spazio risulta essere uno *spazio funzionale*

lineare con le stesse proprietà dello spazio vettoriale.

Ogni elemento di uno spazio lineare viene definito *linearmente indipendente* se e solo se una loro combinazione lineare:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \dots + \alpha_n x_n = 0,$$

per $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$. Se una combinazione lineare di $n + 1$ elementi risulta essere dipendente, allora la dimensione dello spazio è n ed ogni insieme di n elementi indipendenti ne costituisce una base (spazio vettoriale). Invece se per ogni $n > 0$ si trova sempre un insieme di n elementi indipendenti allora lo spazio ha dimensione infinita (spazio funzionale).

Il prodotto scalare tra due vettori u e v di uno spazio vettoriale \mathfrak{R}^n :

$$u^T v = \sum_{i=1}^n u_i v_i,$$

da cui è possibile estendere il calcolo al caso di elementi di un dominio Q in uno spazio funzionale lineare, dove si è in presenza di infinite componenti:

$$\langle u, v \rangle = \int_Q u(x)v(x) dx. \quad (3.1)$$

La norma euclidea viene definita come la misura della grandezza di una funzione. La norma per un vettore u in \mathfrak{R}^n è:

$$\| u \|_2 = (u^T u)^{1/2},$$

mentre in uno spazio funzionale si ha:

$$\| u \|_2 = \left[\int_Q u^2(x) dx \right]^{1/2}. \quad (3.2)$$

Se in uno spazio funzionale è possibile effettuare la norma euclidea ed il prodotto scalare è finito per ogni coppia di funzioni allora lo spazio viene definito *normato e misurabile*.

Se si considera una successione di funzioni $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_n$ linearmente indipendenti in uno spazio funzionale χ normato e misurabile, non è possibile trovare una base perché l'insieme χ ha dimensione infinita. In realtà si dimostra che è possibile trovare una base anche per gli spazi funzionali. La successione $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_n$ viene definita *completa* o *chiusa* se per ogni $u(x) \in \chi$ e per ogni scalare $\varepsilon > 0$ esiste un numero n e un insieme di reali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ tali che per la funzione:

$$\hat{u}_n = \alpha_1 \zeta_1 + \alpha_2 \zeta_2 + \alpha_3 \zeta_3 + \dots + \alpha_n \zeta_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j \zeta_j, \quad (3.3)$$

valga:

$$\| u - \hat{u}_n \| < \varepsilon. \quad (3.4)$$

Quindi si può affermare che la successione $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_n$ rappresenta un sottospazio χ_n di χ di dimensione finita. Inoltre χ_n si dice completa o chiusa se qualsiasi funzione di χ è sufficientemente approssimata in χ_n . Questo permette di considerare la successione $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_n$ come una base per χ ed ogni ζ_i viene chiamata *funzione base* o *funzione forma*. La (3.4) assicura la convergenza in media di \hat{u}_n ad u ma non la convergenza uniforme, ossia potrebbe esserci qualche punto in cui \hat{u}_n sia notevolmente differente da u . Il grado di approssimazione di u con \hat{u}_n migliora all'aumentare di n .

3.2 Metodo variazionale

Il metodo variazionale permette di trovare una soluzione approssimata \hat{u}_n , nel sottospazio χ_n , tramite combinazione lineare delle successioni $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_n$. Una volta che le funzioni di forma sono assegnate la ricerca della soluzione approssimata si riduce al calcolo dei coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ della (3.3) che riducono la distanza di \hat{u}_n da u .

3.2.1 Metodo di Galerkin

Si prenda come esempio il seguente problema differenziale lineare:

$$Au = g, \quad (3.5)$$

$$Gu = q, \quad (3.6)$$

definito su un dominio Q . I termini u ed g sono funzioni appartenenti al dominio Q , q è definita lungo la frontiera ∂Q , A e G sono operatori differenziali lineari.

Si consideri l'equazione (3.3) come una soluzione approssimata del problema differenziale. A questo punto è possibile definire una funzione residuo r_n pari a:

$$r_n = A\hat{u}_n - g, \quad (3.7)$$

che non è nulla in Q . Si devono trovare i coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ tali per cui la funzione r_n si riduca il più possibile. Per far avvenire ciò è utile imporre la condizione di ortogonalità della funzione r_n rispetto alla successione di funzioni $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_n$, con funzioni di forma ζ_i linearmente indipendenti:

$$\langle r_n, \zeta_i \rangle = 0,$$

con $i = 1, \dots, n$. Tenendo conto delle 3.1 e 3.7 si ottiene:

$$\int_Q (A\hat{u}_n - g)\zeta_i dQ, \quad (3.8)$$

con $i = 1, \dots, n$. Questi integrali prendono il nome di *integrali variazionali di Galerkin* e il metodo con cui si ricavano le 3.8 viene chiamato *metodo di Galerkin*.

3.3 Formulazione debole

Tenendo conto della 3.3 e della linearità di A , gli integrali di Galerkin vengono riscritti nel seguente modo:

$$\sum_{j=1}^n \left[\int_Q (A\zeta_j)\zeta_i dQ \right] \alpha_j = \int_Q g\zeta_i dQ, \quad (3.9)$$

con $i = 1, \dots, n$. Le equazioni 3.9 mostrano come le funzioni base devono essere derivabili un numero di volte pari all'ordine dell'operatore differenziale. Applicando però la formula di integrazione per parti è possibile ridurre l'ordine di derivabilità, in modo tale da poter utilizzare funzioni meno complesse. Quindi l'applicazione della formula di integrazione per parti agli integrali variazionali di Galerkin permette di ottenere una *formulazione debole* del problema differenziale, da cui è possibile ottenere una *soluzione debole* \hat{u}_n . La soluzione debole tenderà a convergere alla soluzione esatta all'aumentare della dimensione n del sottospazio contenente \hat{u}_n .

Nel caso in cui si abbia un problema definito in uno spazio bi-dimensionale o tri-dimensionale l'integrazione per parti corrisponde all'applicazione dell'identità di Lagrange-Green.

3.3.1 Formulazione debole del problema microscopico

Utilizzando le equazioni (2.17) e (2.18) si ricava la formulazione debole del problema microscopico che fornisce il tensore di permeabilità K_{ij} . In forma estesa la (2.17) e le (2.18) risultano:

$$\frac{\partial u^\dagger}{\partial x} + \frac{\partial v^\dagger}{\partial y} = 0, \quad (3.10)$$

$$-\frac{\partial p^\dagger}{\partial x} + \frac{\partial^2 u^\dagger}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^\dagger}{\partial y^2} + f_1 = 0, \quad (3.11)$$

$$-\frac{\partial p^\dagger}{\partial y} + \frac{\partial^2 v^\dagger}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^\dagger}{\partial y^2} + f_2 = 0. \quad (3.12)$$

Le (3.10), (3.11) e (3.12) devono essere risolte nella cella unitaria (Fig. 3.1).

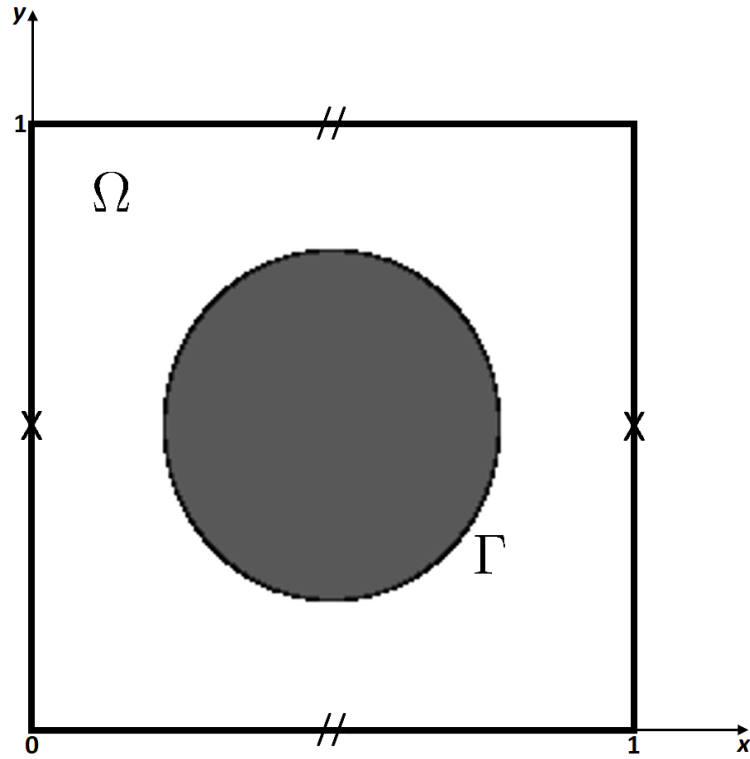


Figura 3.1: Cella unitaria con condizioni di periodicit  lungo i bordi.

Si pongono le condizioni al contorno che soddisfano la periodicit  della cella e di *no – slip* sul bordo della regione solida:

$$u_i(0, y) = u_i(1, y),$$

$$u_i(x, 0) = u_i(x, 1),$$

$$P(0, y) = P(1, y),$$

$$P(x, 0) = P(x, 1),$$

$$u_i|_{\Gamma} = 0.$$

Le equazioni variazionali di Galerkin impongono un' approssimazione della soluzione:

$$u^\dagger \simeq \hat{u}_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j(x, y), \quad (3.13)$$

$$v^\dagger \simeq \hat{v}_n = \sum_{j=1}^n \beta_j \xi_j(x, y), \quad (3.14)$$

$$P^\dagger \simeq \hat{P}_n = \sum_{j=1}^n \gamma_j \eta_j(x, y), \quad (3.15)$$

dove ξ_j e η_j , $j = 1, \dots, n$ sono opportune funzioni base e n è il numero di triangoli nel quale si decompone il dominio. Bisogna quindi risolvere:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \eta_i \left[\frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}_n}{\partial y} \right] + \xi_i \left[-\frac{\partial \hat{P}_n}{\partial x} + \frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial y^2} \right] + \xi_i \left[-\frac{\partial \hat{P}_n}{\partial y} + \frac{\partial^2 \hat{v}_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_n}{\partial y^2} \right] d\Omega = \\ = \int_{\Omega} -\xi_i f_1 - \xi_i f_2 d\Omega, \end{aligned}$$

con $i = 1, \dots, n$. Applicando l'identità di Lagrange-Green la formulazione debole diventa:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \eta_i \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial \hat{v}_n}{\partial y} - \xi_i \frac{\partial \hat{P}_n}{\partial x} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \hat{u}_n - \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial y} - \xi_i \frac{\partial \hat{P}_n}{\partial y} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{v}_n}{\partial x} - \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{v}_n}{\partial y} d\Omega = \\ = \int_{\Omega} -\xi_i f_1 - \xi_i f_2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} -\xi_i \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} n_x - \xi_i \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial y} n_y - \xi_i \frac{\partial \hat{v}_n}{\partial x} n_x - \xi_i \frac{\partial \hat{v}_n}{\partial y} n_y ds, \end{aligned}$$

dove ds è la coordinata curvilinea lungo la frontiera di Ω . Utilizzando le relazioni (3.13), (3.14) e (3.15) l'equazione qui sopra può essere riscritta nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \eta_i \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j + \eta_i \frac{\partial}{\partial y} \sum_{j=1}^n \beta_j \xi_j - \xi_i \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=1}^n \gamma_j \eta_j - \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j - \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j + \\ - \xi_i \frac{\partial}{\partial y} \sum_{j=1}^n \gamma_j \eta_j - \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=1}^n \beta_j \xi_j - \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{j=1}^n \beta_j \xi_j d\Omega = b_i, \end{aligned}$$

dove b_i è il termine noto (funzione del termine sorgente f_i delle equazioni e delle condizioni al contorno). Raccogliendo i coefficienti α_j , β_j e γ_j si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left[\int_{\Omega} \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \frac{\xi_j}{\partial x} - \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \frac{\partial \xi_j}{\partial y} d\Omega \right] \alpha_j + \sum_{j=1}^n \left[\int_{\Omega} \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial y} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \frac{\partial \xi_j}{\partial x} - \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \frac{\partial \xi_j}{\partial y} d\Omega \right] \beta_j + \\ + \sum_{j=1}^n \left[\int_{\Omega} -\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x} - \xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial y} d\Omega \right] \gamma_j = b_i, \end{aligned}$$

dove gli integrali tra parentesi rappresentano il termine $h_{ij}^{(l)}$ per $l = 1, 2, 3$ che può essere calcolato una volta scelte le funzioni base ξ_i e η_i . Riscrivendo in forma compatta la formulazione debole risulta:

$$\sum_{j=1}^n \left[h_{ij}^{(1)} \alpha_j + h_{ij}^{(2)} \beta_j + h_{ij}^{(3)} \gamma_j \right] = b_i. \quad (3.16)$$

Tramite programmi di calcolo numerico le equazioni (3.16) vengono risolte trovando i coefficienti α_j , β_j e γ_j che avvicinano il più possibile la soluzione approssimata alla soluzione esatta.

3.4 Metodo agli elementi finiti FEM

Il metodo agli elementi finiti è caratterizzato dalla definizione di ζ_i come un *polinomio di interpolazione a supporto locale continuo a tratti*. Questo comporta che i coefficienti α_j della (3.3) sono esattamente i valori della soluzione esatta sugli n nodi del dominio di calcolo. Inoltre le equazioni di Galerkin permettono di considerare un grande numero di nodi su cui calcolare la soluzione numerica senza richiedere troppe risorse.

3.4.1 Elementi finiti mono-dimensionali

Gli elementi finiti mono-dimensionali sono la base con cui vengono costruiti tutti gli altri casi più complessi come gli elementi finiti lagrangiani e triangolari.

Si consideri quindi una funzione generica $u(x)$, definita in un dominio $[a, b]$, che risolve uno specifico problema differenziale. Per approssimare la funzione $u(x)$ il dominio viene discretizzato in n punti, ossia viene suddiviso in intervalli. Successivamente tutti i punti vengono collegati da un segmento di retta che rappresenta il modo più semplice di approssimazione (Fig. 3.2).

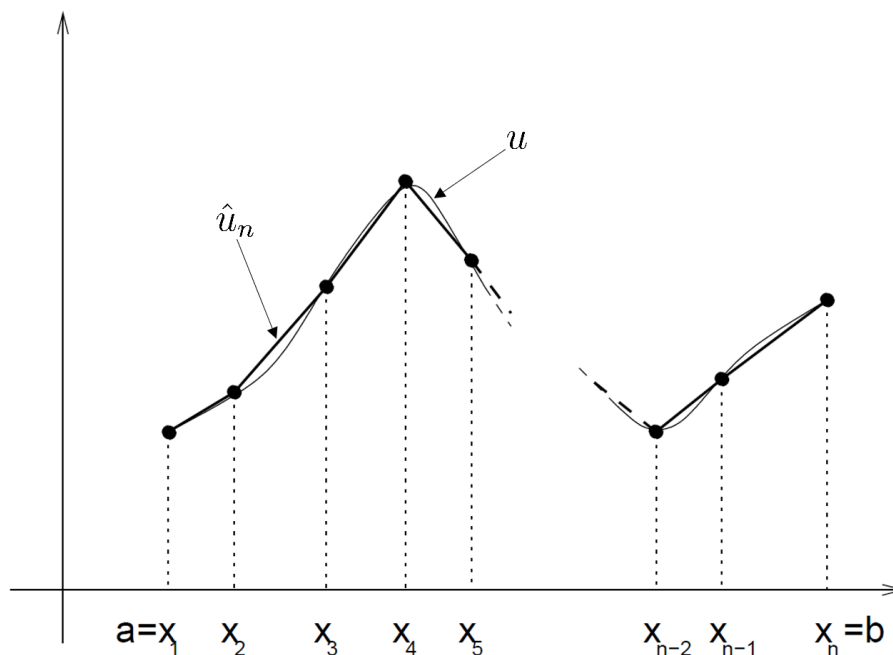


Figura 3.2: Esempio di discretizzazione e approssimazione di una funzione.

Chiaramente all'aumentare del numero di punti n , la funzione approssimante \hat{u}_n converge alla soluzione esatta $u(x)$. Ogni segmento di ciascun intervallo è rappresentato da un polinomio di primo grado così costituito:

$$P^{(j)}(x) = l_j(x)u_j + l_{j+1}(x)u_{j+1}, \quad (3.17)$$

dove l_j e l_{j+1} sono polinomi base lineari dell'interpolazione di Lagrange a due nodi:

$$l_j = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j},$$

$$l_{j+1} = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}.$$

Di conseguenza la funzione \hat{u}_n è ricavata dalla somma dei polinomi $P^{(j)}(x)$ della (3.17):

$$\hat{u}_n = \sum_{j=1}^n P^{(j)}(x). \quad (3.18)$$

Essendo ciascun polinomio $P^{(j)}(x)$ rappresentabile come combinazione lineare tra la soluzione esatta $u(x)$ e i polinomi di due intervalli adiacenti che dipendono dal valore del nodo, allora la (3.18) può essere espressa in questo modo:

$$\hat{u}_n = \sum_{j=1}^n \zeta_j^{(1)} u_j, \quad (3.19)$$

dove $\zeta_j^{(1)}$ rappresentano funzioni lineari continue a tratti (Fig. 3.3) (per non appesantire la trattazione queste funzioni vengono omesse). Vengono definite *a supporto locale* perché sono diverse da zero esclusivamente in un intorno del nodo. L'intervallo di discretizzazione viene chiamato *elemento finito lineare*.

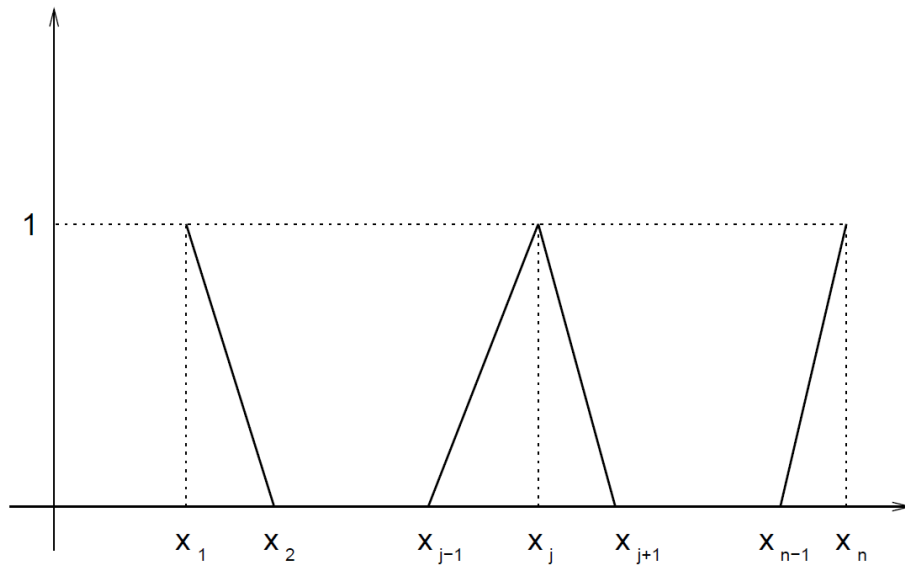


Figura 3.3: Funzioni base $\zeta_j^{(1)}$ (chiamate anche funzioni base piramidali).

3.4.2 Elementi finiti triangolari

Nello studio di problemi bi-dimensionali è utile passare a elementi finiti triangolari (Fig. 3.4).

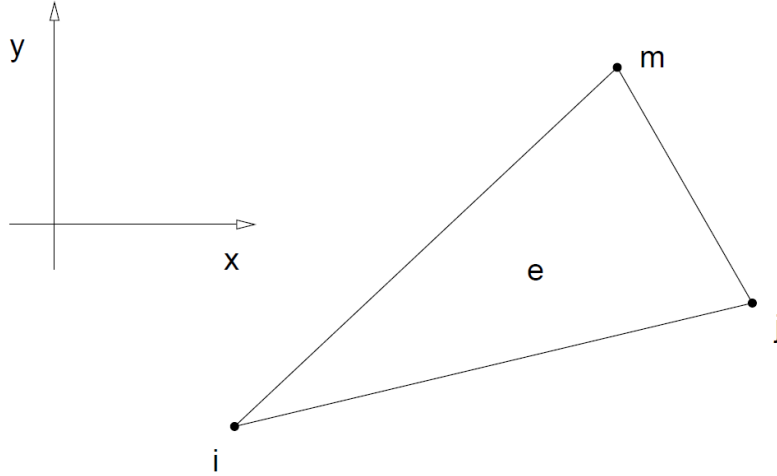


Figura 3.4: Elemento finito triangolare.

In questo caso la funzione base ζ_i^e è centrata nel nodo i con valore unitario, mentre negli altri due nodi è nulla. La funzione ζ_i^e è così costituita:

$$\zeta_i^e = c_0 + c_1x + c_2y. \quad (3.20)$$

Per determinare i coefficienti c_0, c_1, c_2 della (3.20) viene impostato un sistema di tre equazioni che rispettano le condizioni di validità della funzione ζ_i^e sui nodi:

$$\begin{cases} c_0 + c_1x_i + c_2y_i = 1 \\ c_0 + c_1x_j + c_2y_j = 0 \\ c_0 + c_1x_m + c_2y_m = 0 \end{cases}$$

che in forma compatta risulta:

$$Bc = e_1, \quad (3.21)$$

dove il vettore c rappresenta i coefficienti c_0, c_1, c_2 e e_1 il vettore dei termini noti. A questo punto si può ricavare c :

$$c = B^{-1}e_1, \quad (3.22)$$

dove B^{-1} è l'inversa della matrice B . Il vettore c della funzione ζ_i^e è pari alla prima colonna di B^{-1} , mentre cambiando il vettore dei termini noti con $e_2 = (0, 1, 0)^T$ e poi con $e_3 = (0, 0, 1)^T$ si ricavano i coefficienti del vettore c rispettivamente di ζ_j^e e di ζ_m^e .

Sapendo che:

$$\det(B) = 2A_e,$$

dove A_e corrisponde all'area dell'elemento considerato, è possibile esprimere ζ_i^e nella forma:

$$\zeta_i^e = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2A_e}. \quad (3.23)$$

Infine la funzione base globale ζ_i relativa al nodo i è data dall'unione delle funzioni base locali ζ_i^e definite su ciascun elemento triangolare aventi il nodo i condiviso (Fig. 3.5).

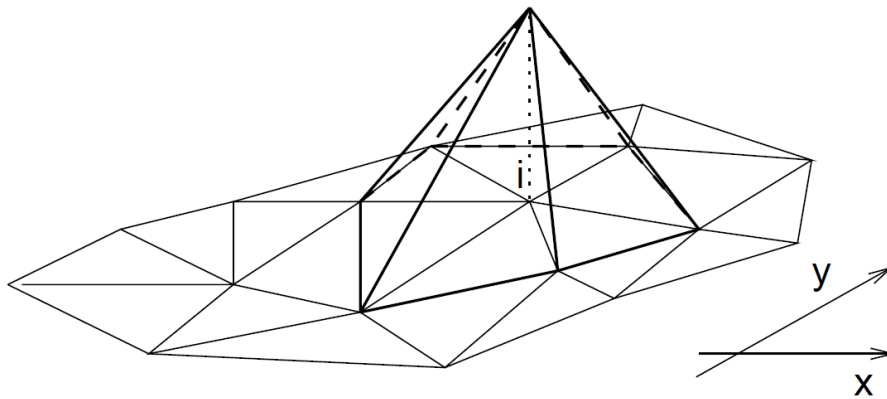


Figura 3.5: Funzione base globale relativa al nodo i .

3.5 FreeFEM++

Per la risoluzione numerica è stato utilizzato il programma open source FreeFEM [6]. FreeFEM è un solutore di equazioni differenziali alle derivate parziali per sistemi multifisici lineari o non lineari in 2D e 3D. Il software, sviluppato e gestito dall'Università Pierre et Marie Curie, è scritto in C++ e basato sul metodo degli elementi finiti. Permette di studiare una vasta varietà di problemi fisici; quali ad esempio:

- Navier-Stokes incomprimibile
- Equazioni di Lamé
- Elasticità non lineare
- Diffusione termica
- Convezione termica
- Radiazione termica
- Magnetostatica
- Elettrostatica
- Interazioni fluido-struttura

FreeFEM possiede un linguaggio di input molto intuitivo e pratico da utilizzare, ossia permette di fornire una semplice parametrizzazione a pezzi delle frontiere del dominio di studio e in seguito genera automaticamente, tramite l'algoritmo Delaunay-Voronoi, la griglia (*mesh*) degli elementi finiti triangolari. La densità della griglia è proporzionale alla densità di punti che discretizzano le frontiere del dominio. L'utente di conseguenza può modificare la densità del mesh variando esclusivamente il numero di punti delle frontiere.

FreeFEM possiede inoltre una grande varietà di elementi finiti triangolari: elementi Lagrangiani lineari, quadratici, elementi P1 e Raviart Thomas discontinui, elementi di tipo non scalare, il mini-elemento e così via. Tuttavia non tratta elementi quadrangolari.

Nella pagina successiva viene mostrato un esempio di codice di calcolo per una porosità di tipo circolare.

```

//risoluzione problema "aggiunto" nella cella unitaria

//gradiente di pressione macroscopico imposto
real sx=1; //se sx=0, sy=1 si ottiene K_yx e K_yy
real sy=0;

//frontiera della cella unitaria
border g1(t=-0.5, 0.5){x=t; y=-0.5;}
border g2(t=-0.5, 0.5){x=0.5; y=t;}
border g3(t=0.5, -0.5){x=t; y=0.5;}
border g4(t=0.5, -0.5){x=-0.5; y=t;}
border g5(t=0, 2*pi){x=0.25*cos(t); y=0.25*sin(t);}

//generatore del mesh
mesh Th=buildmesh(g1(60) + g2(60) + g3(60) + g4(60) + g5(-120));
//stampa a schermo la struttura del mesh
plot(Th, wait=true);

//spazio degli elementi finiti
fespace Uh(Th,[P2,P2,P2], periodic=[[2, y], [4, y], [1, x], [3, x]]);
Uh [u, v, p], [uu, vv, pp];

//formulazione debole del problema differenziale
solve stokes ([u, v, p], [uu, vv, pp])
= int2d(Th)(
dx(u)*dx(uu)
+ dy(u)*dy(uu)
+ dx(v)*dx(vv)
+ dy(v)*dy(vv)
+ dx(p)*uu
+ dy(p)*vv
+ pp*(dx(u) + dy(v))
- 1e-10*p*pp)
- int2d(Th)(sx*uu + sy*vv)
+ on(g5, u=0, v=0);

//stampa a schermo le isolinee delle velocità orizzontali e verticali
plot(u, wait=1, value=true, fill=true);
plot(v, wait=1, value=true, fill=true);
//calcola le componenti del tensore di permeabilità
real intu=int2d(Th)(u);
real intv=int2d(Th)(v);

//fornisce in output i valori delle componenti del tensore di permeabilità
cout << "K_xx " << intu << ", K_xy " << intv << endl;

```

4 Le configurazioni geometriche e i risultati microscopici

Si osserva che ogni singola porosità del materiale possiede una differente geometria come osservato nelle immagini (1.3) e (2.1), quindi è necessario ricondurre tutte le differenti forme ad una sola in grado di approssimarle al meglio. Di fatto vengono analizzate quattro configurazioni geometriche di tipo circolare, quadrangolare, ellittico e triangolare. Per ognuna di esse vengono mostrati i risultati microscopici del problema aggiunto ossia le componenti $u_i^{\dagger(j)}$ del campo di moto del fluido attorno al grano in funzione del vettore $f_i^{(j)}$. Per ciascuna geometria vengono mostrati i campi di moto per valori ad elevata e bassa porosità θ .

4.1 Configurazioni geometriche

4.1.1 Grano circolare

Per la geometria circolare si considerano porosità pari a $\theta = 0.969$ e 0.497 . In questa configurazione non è necessario analizzare le componenti dei campi di moto per i due differenti gradienti di pressione, ossia per $f_i^{(1)} = (1, 0)$ e per $f_i^{(2)} = (0, 1)$, perché la circonferenza presenta al fluido la medesima sezione frontale.

4.1.2 Grano quadrato

Per questa geometria si considerano porosità pari a $\theta = 0.99$ e 0.51 . Come per la geometria circolare anche per il quadrato non è necessario studiare i campi di moto dei due gradienti di pressione in quanto presenta la stessa forma frontale nelle direzioni dei due gradienti.

4.1.3 Grano ellittico

L'ellisse considerato possiede il semiasse maggiore pari al doppio del semiasse minore. Si analizzano porosità pari a $\theta = 0.984$ e 0.749 . In questo caso l'ellisse presenta una sezione frontale differente a seconda della direzione del gradiente di pressione, di conseguenza si dovranno studiare le componenti di velocità sia per $f_i^{(1)} = (1, 0)$, sia per $f_i^{(2)} = (0, 1)$.

4.1.4 Grano triangolare

Il triangolo è di tipo equilatero. Le porosità analizzate sono pari a $\theta = 0.983$ e 0.723 . Come per l'ellisse, i campi di moto per il triangolo devono essere analizzati per tutti e due i gradienti di pressione.

4.2 Risultati microscopici

Di seguito vengono mostrati i campi di moto per le diverse configurazioni geometriche.

4.2.1 Grano circolare, $\theta = 0.969$, $f_i^{(1)} = (1, 0)$

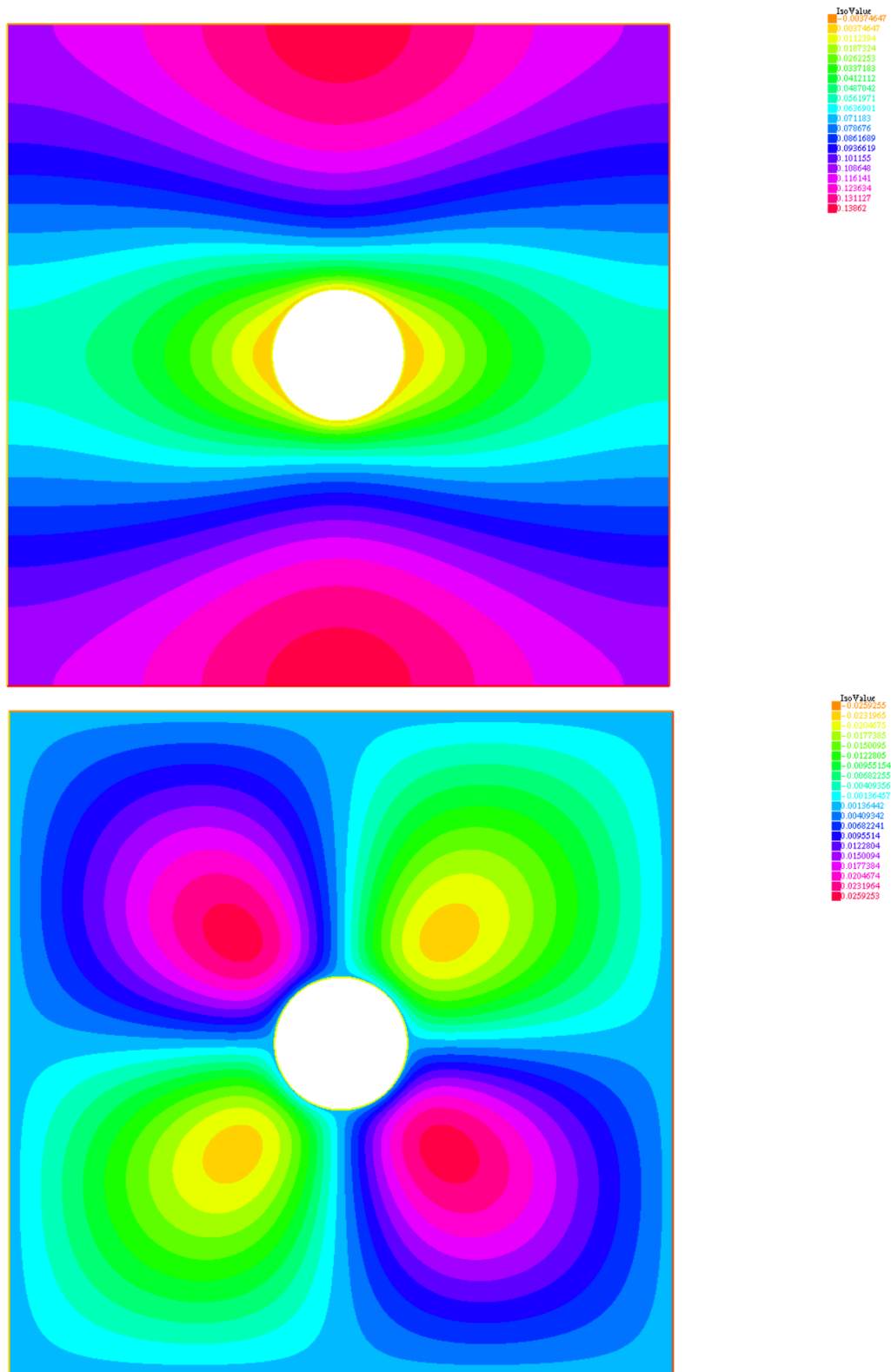


Figura 4.1: Velocità aggiunta rispettivamente orizzontale $u^{\dagger(1)}$ e verticale $v^{\dagger(1)}$.

4.2.2 Grano circolare, $\theta = 0.497$, $f_i^{(1)} = (1, 0)$

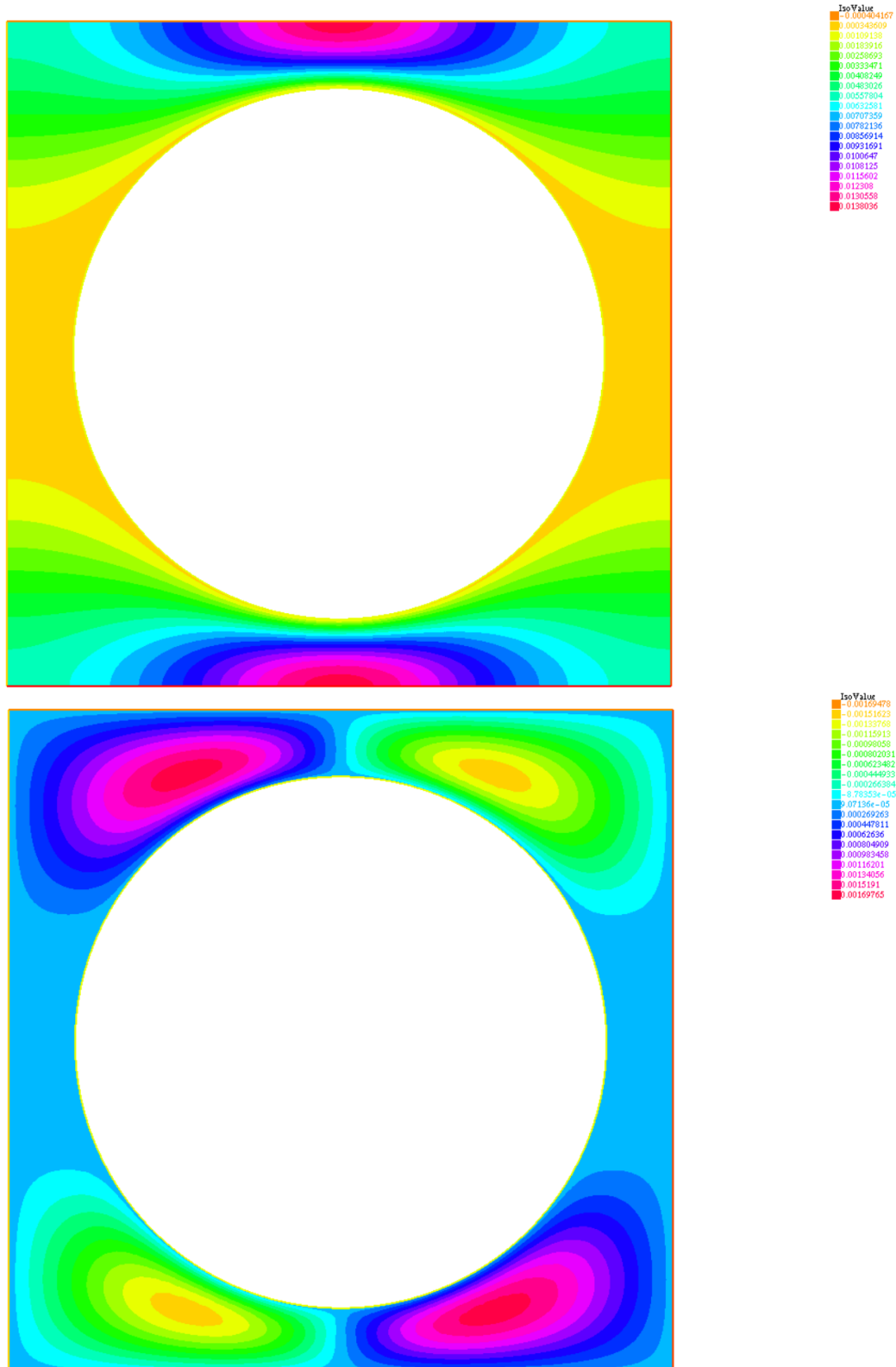


Figura 4.2: Velocità aggiunta rispettivamente orizzontale $u^{(1)}$ e verticale $v^{(1)}$.

4.2.3 Grano quadrato, $\theta = 0.99$, $f_i^{(1)} = (1, 0)$

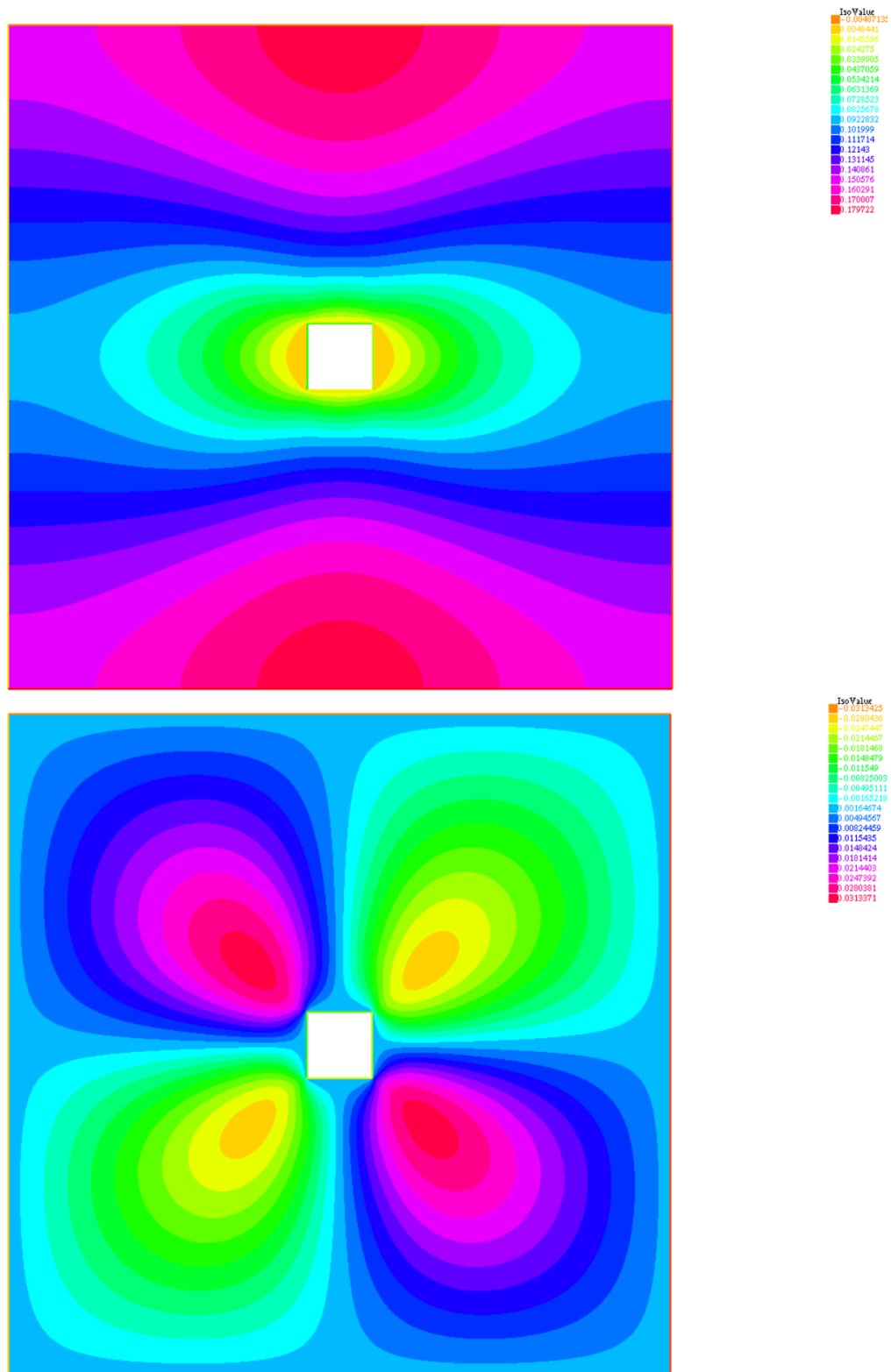


Figura 4.3: Velocità aggiunta rispettivamente orizzontale $u^{(1)}$ e verticale $v^{(1)}$.

4.2.4 Grano quadrato, $\theta = 0.51$, $f_i^{(1)} = (1, 0)$

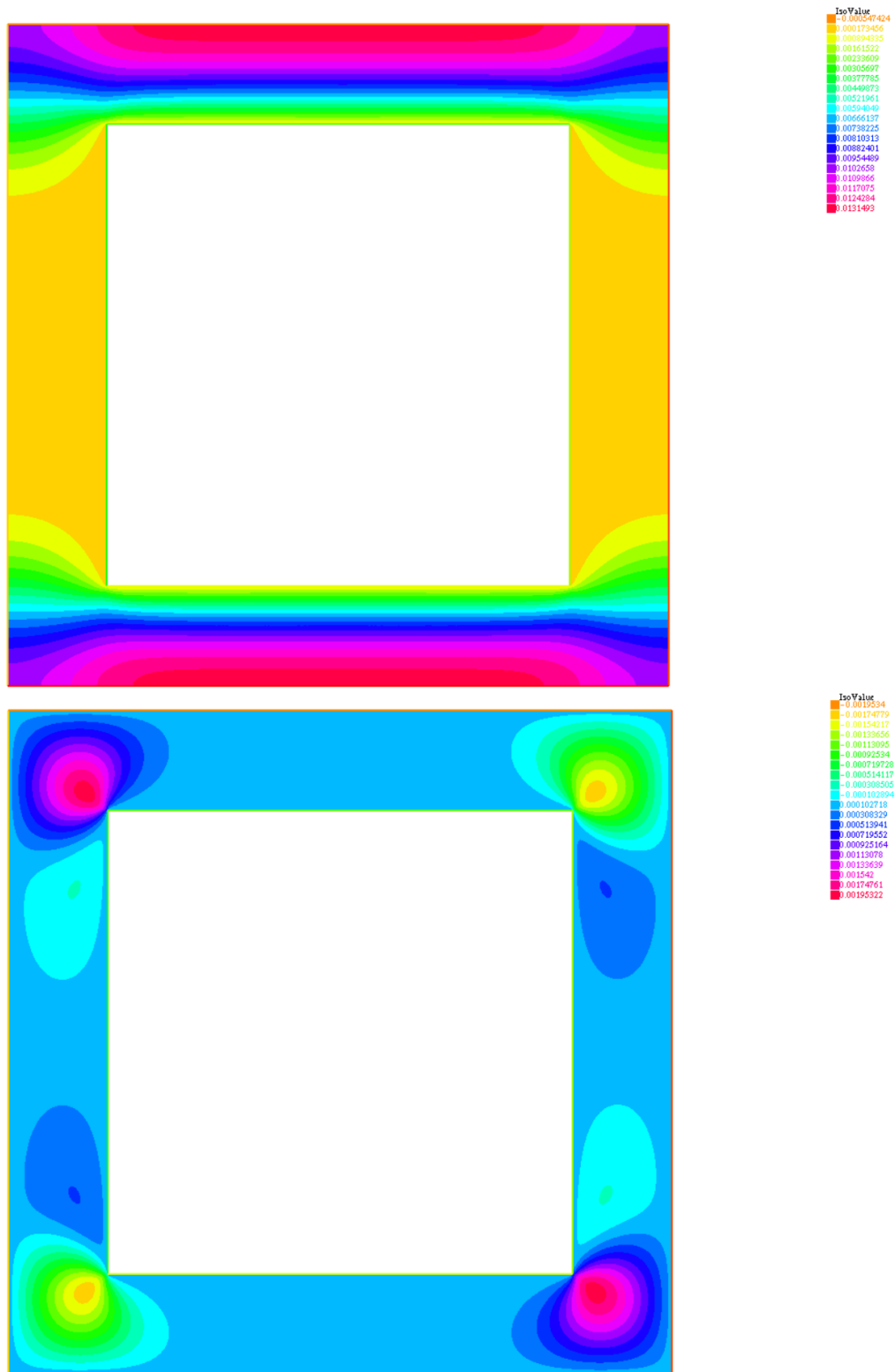


Figura 4.4: Velocità aggiunta rispettivamente orizzontale $u^{\dagger(1)}$ e verticale $v^{\dagger(1)}$.

4.2.5 Grano ellittico, $\theta = 0.984$, $f_i^{(1)} = (1, 0)$

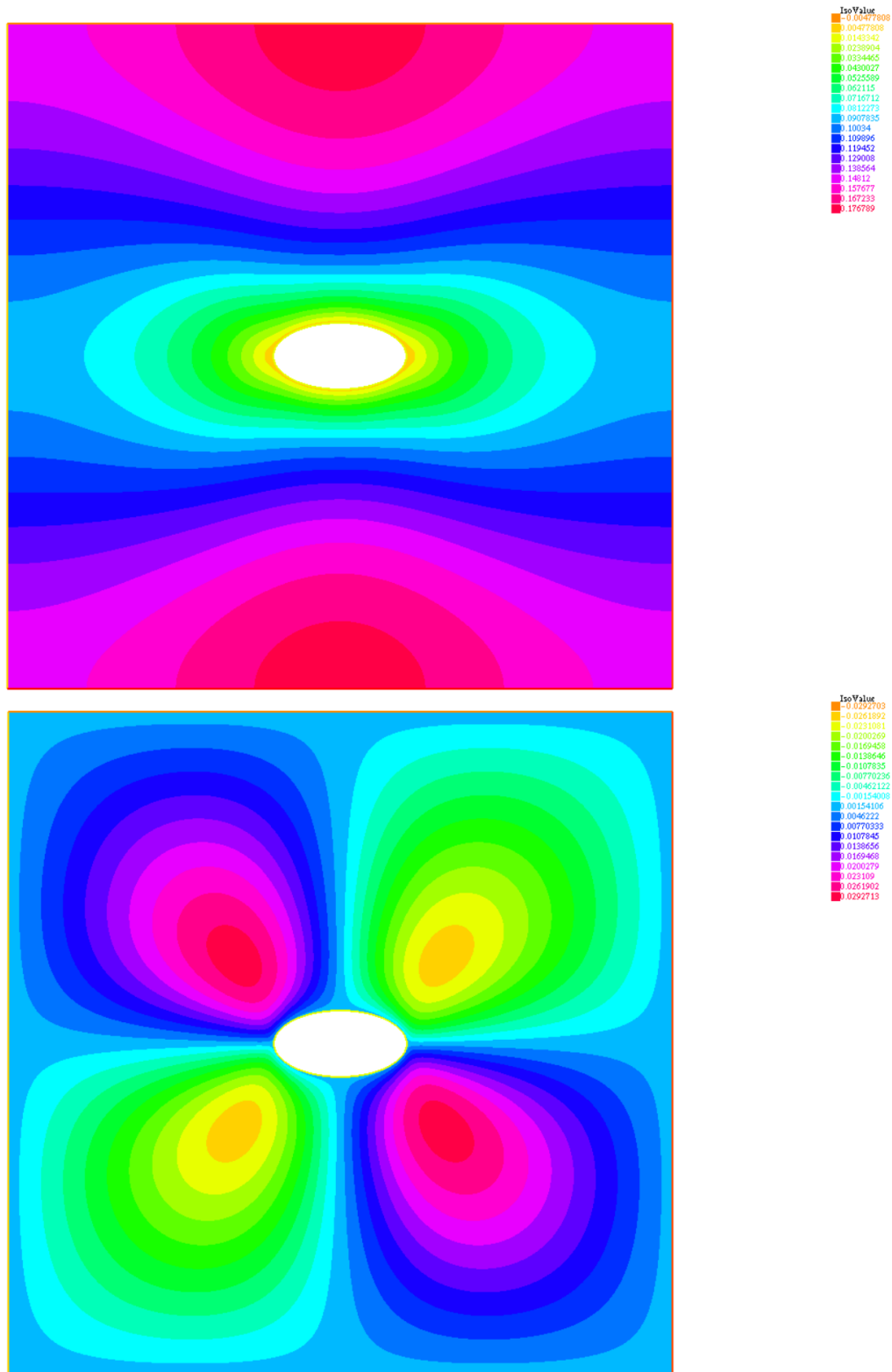


Figura 4.5: Velocità aggiunta rispettivamente orizzontale $u^{\dagger(1)}$ e verticale $v^{\dagger(1)}$.

4.2.6 Grano ellittico, $\theta = 0.984$, $f_i^{(2)} = (0, 1)$

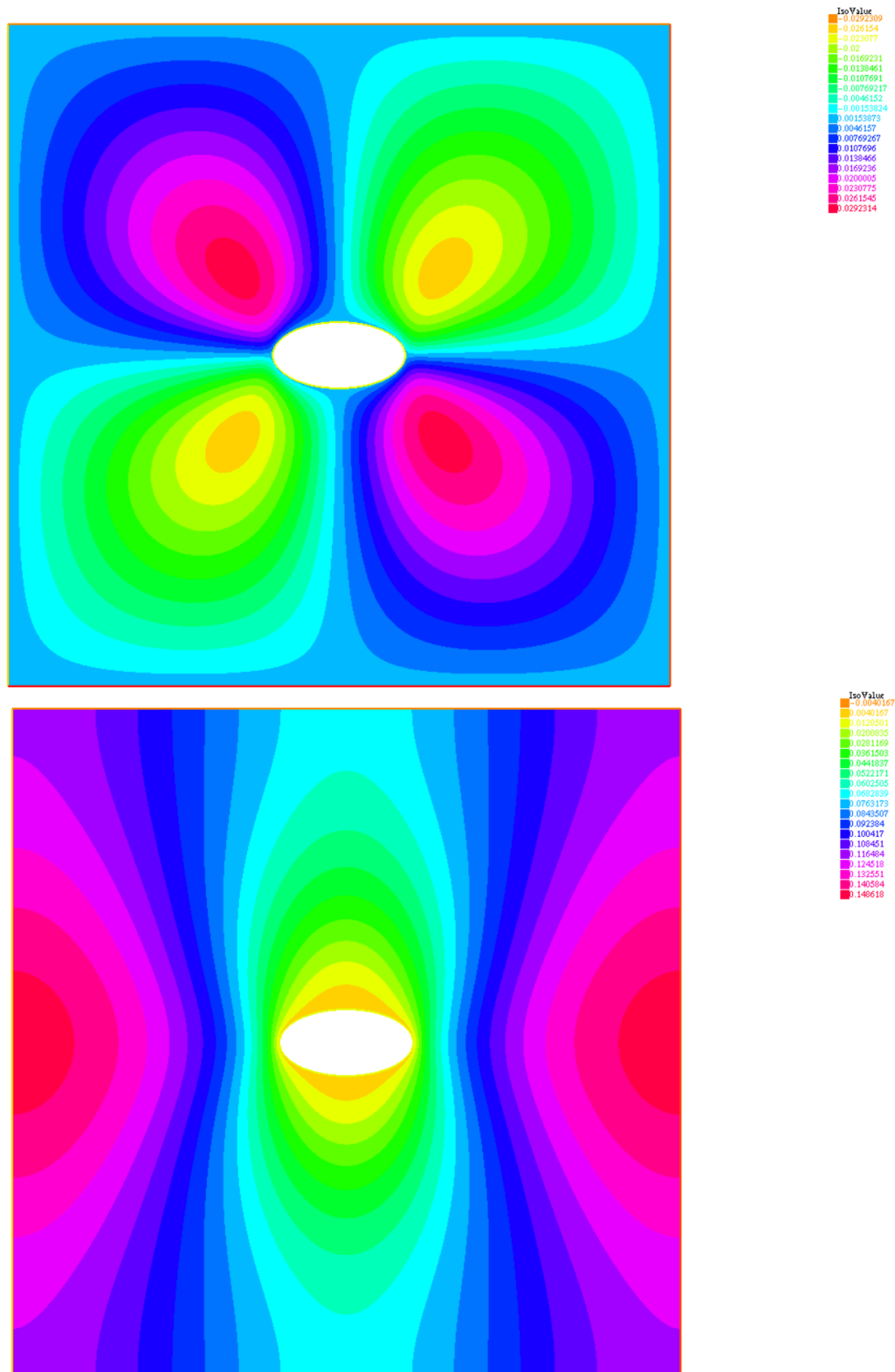


Figura 4.6: Velocità aggiunta rispettivamente orizzontale $u^{\dagger(2)}$ e verticale $v^{\dagger(2)}$.

4.2.7 Grano ellittico, $\theta = 0.749$, $f_i^{(1)} = (1, 0)$

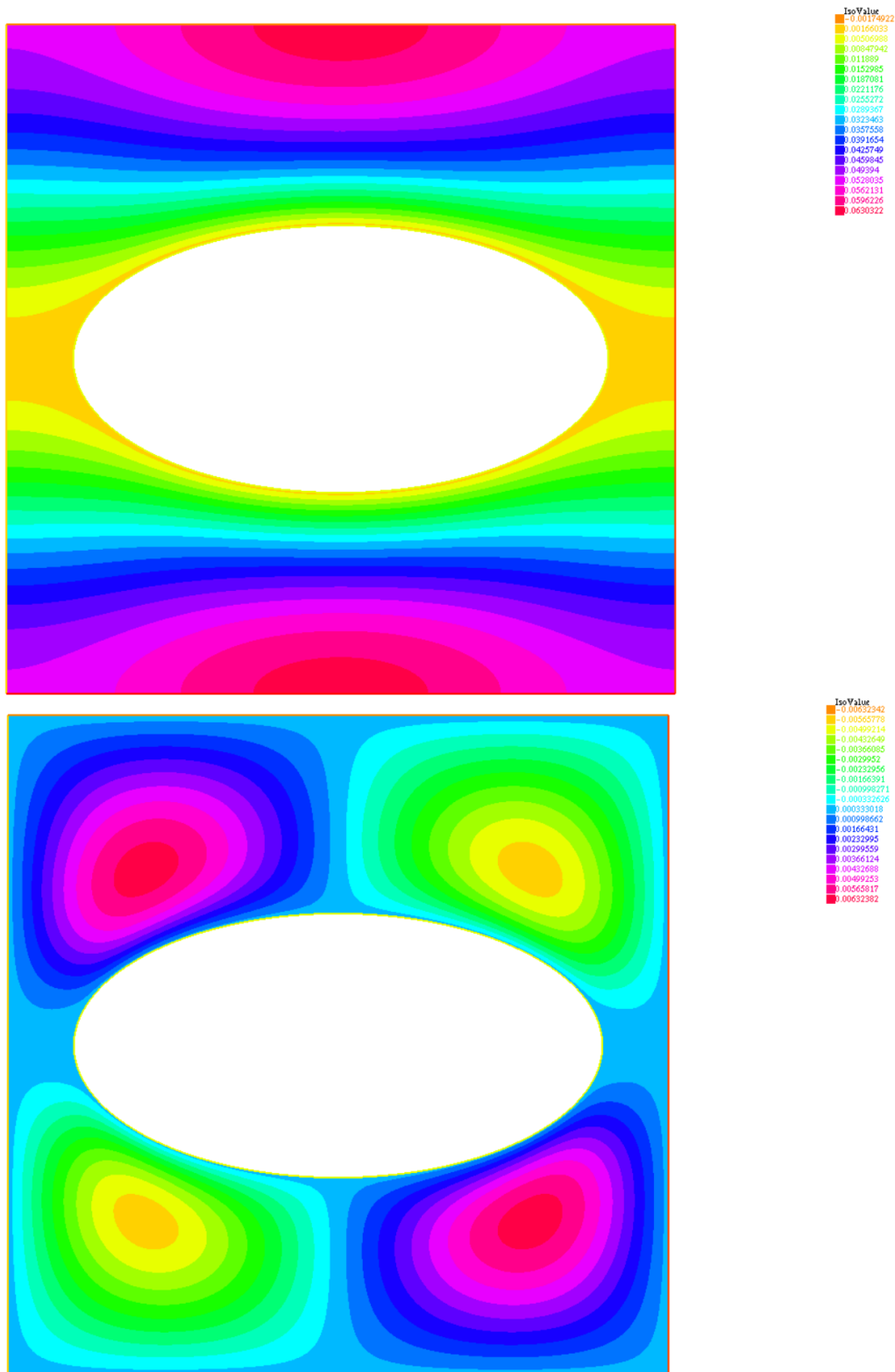


Figura 4.7: Velocità aggiunta rispettivamente orizzontale $u^{\dagger(1)}$ e verticale $v^{\dagger(1)}$.

4.2.8 Grano ellittico, $\theta = 0.749$, $f_i^{(2)} = (0, 1)$

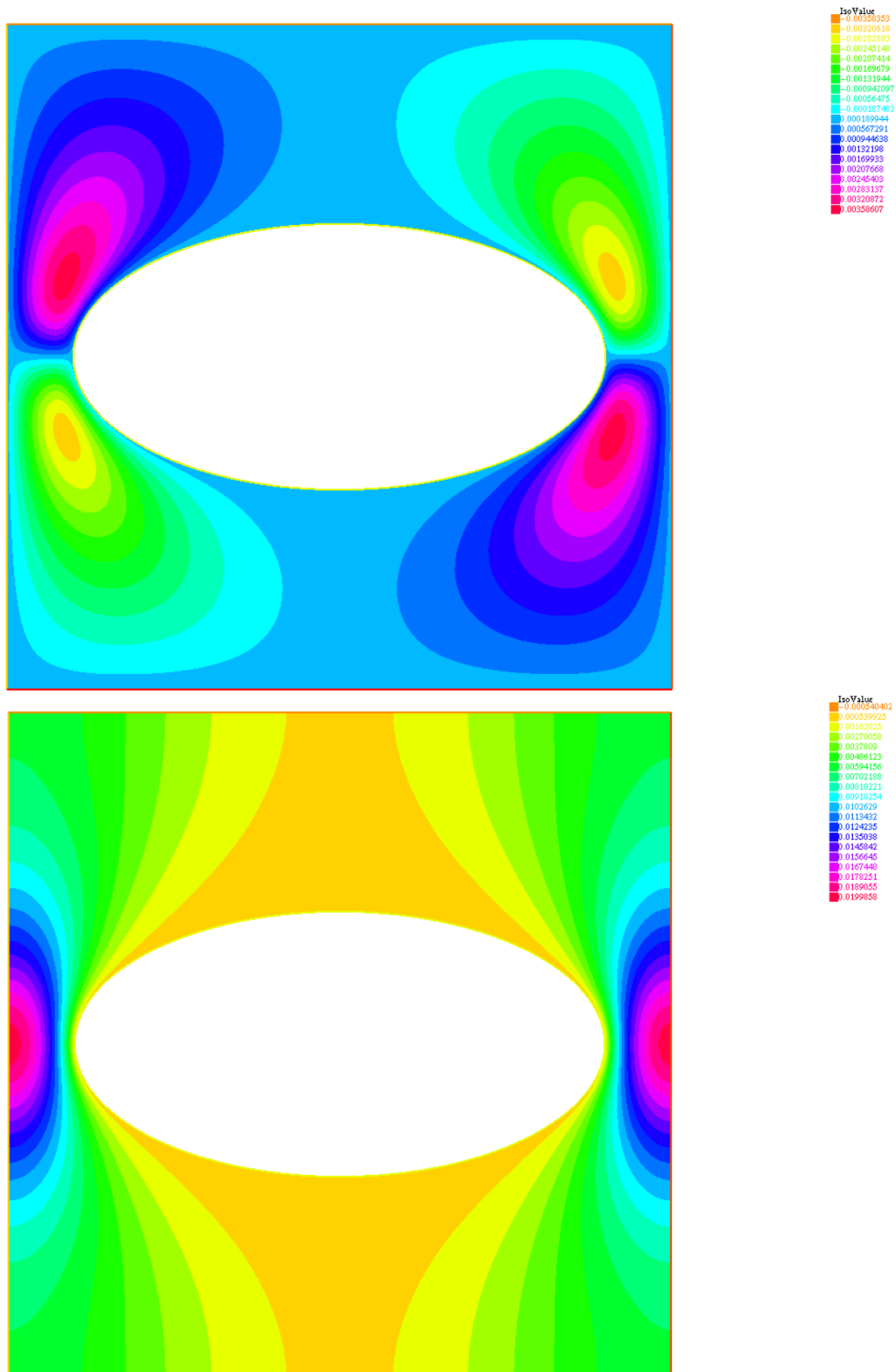


Figura 4.8: Velocità aggiunta rispettivamente orizzontale $u^{(2)}$ e verticale $v^{(2)}$.

4.2.9 Grano triangolare, $\theta = 0.983$, $f_i^{(1)} = (1, 0)$

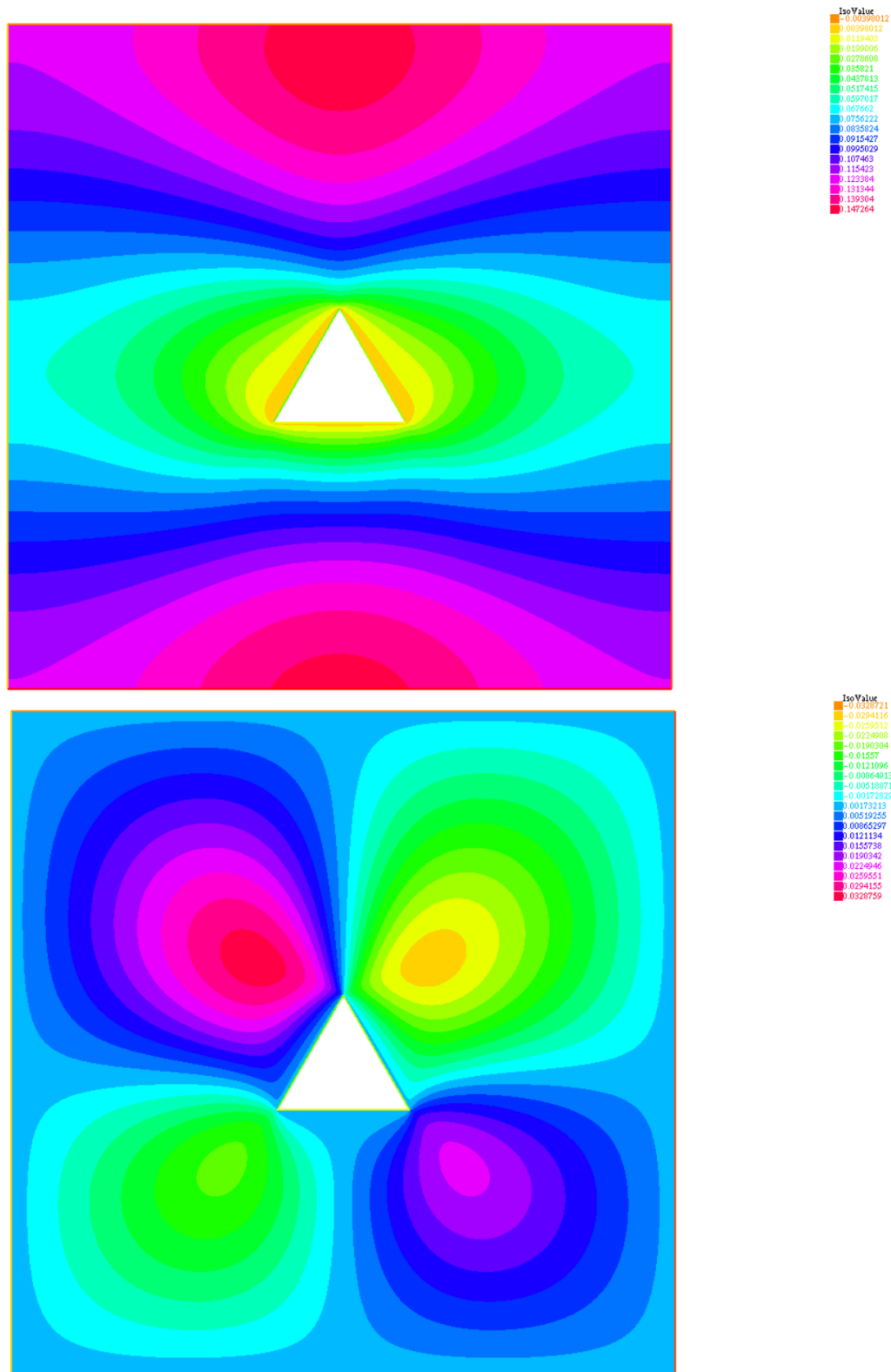


Figura 4.9: Velocità aggiunta rispettivamente orizzontale $u^{\dagger(1)}$ e verticale $v^{\dagger(1)}$.

4.2.10 Grano triangolare, $\theta = 0.983$, $f_i^{(2)} = (0, 1)$

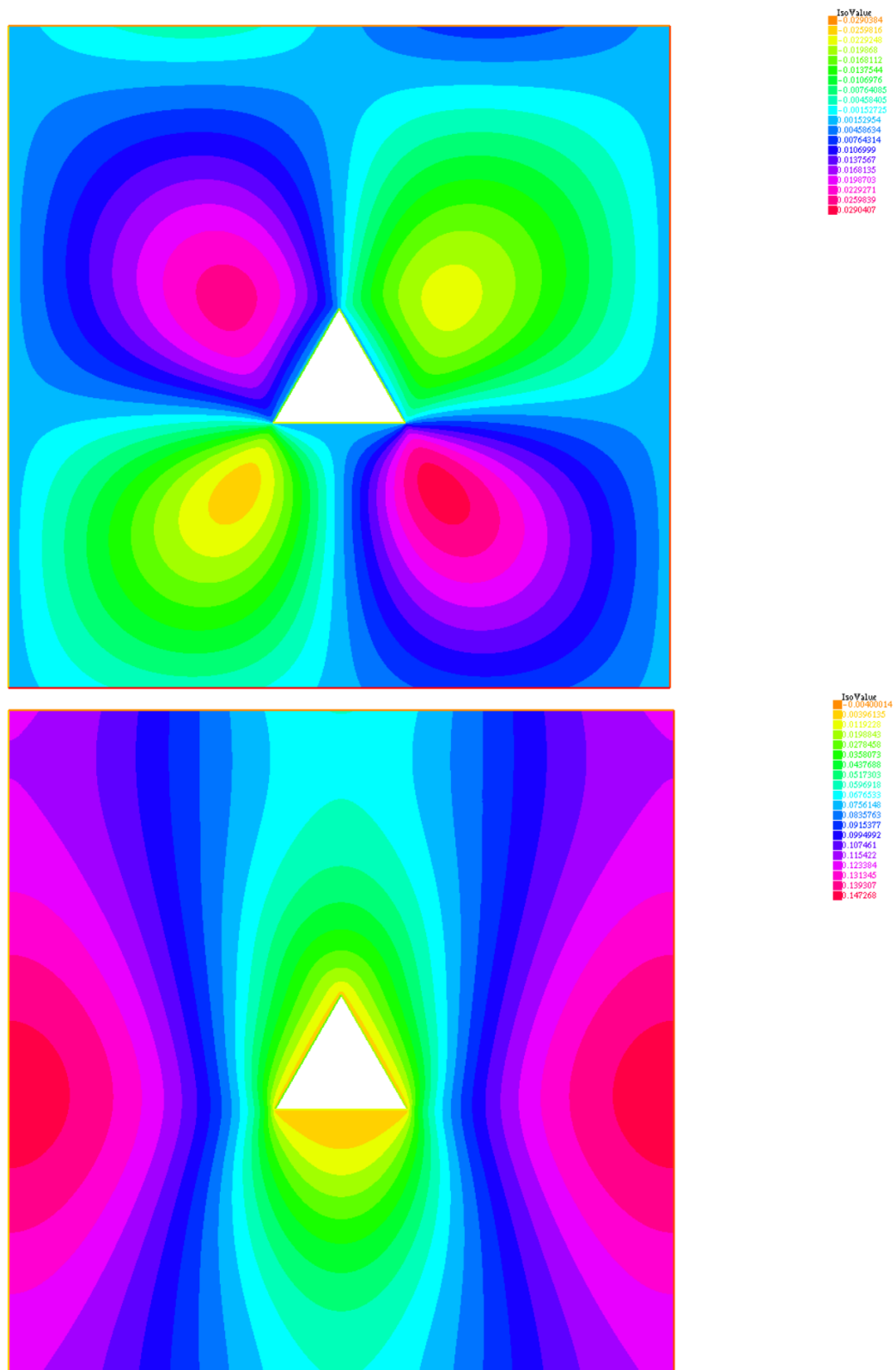


Figura 4.10: Velocità aggiunta rispettivamente orizzontale $u^{\dagger(2)}$ e verticale $v^{\dagger(2)}$.

4.2.11 Grano triangolare, $\theta = 0.723$, $f_i^{(1)} = (1, 0)$

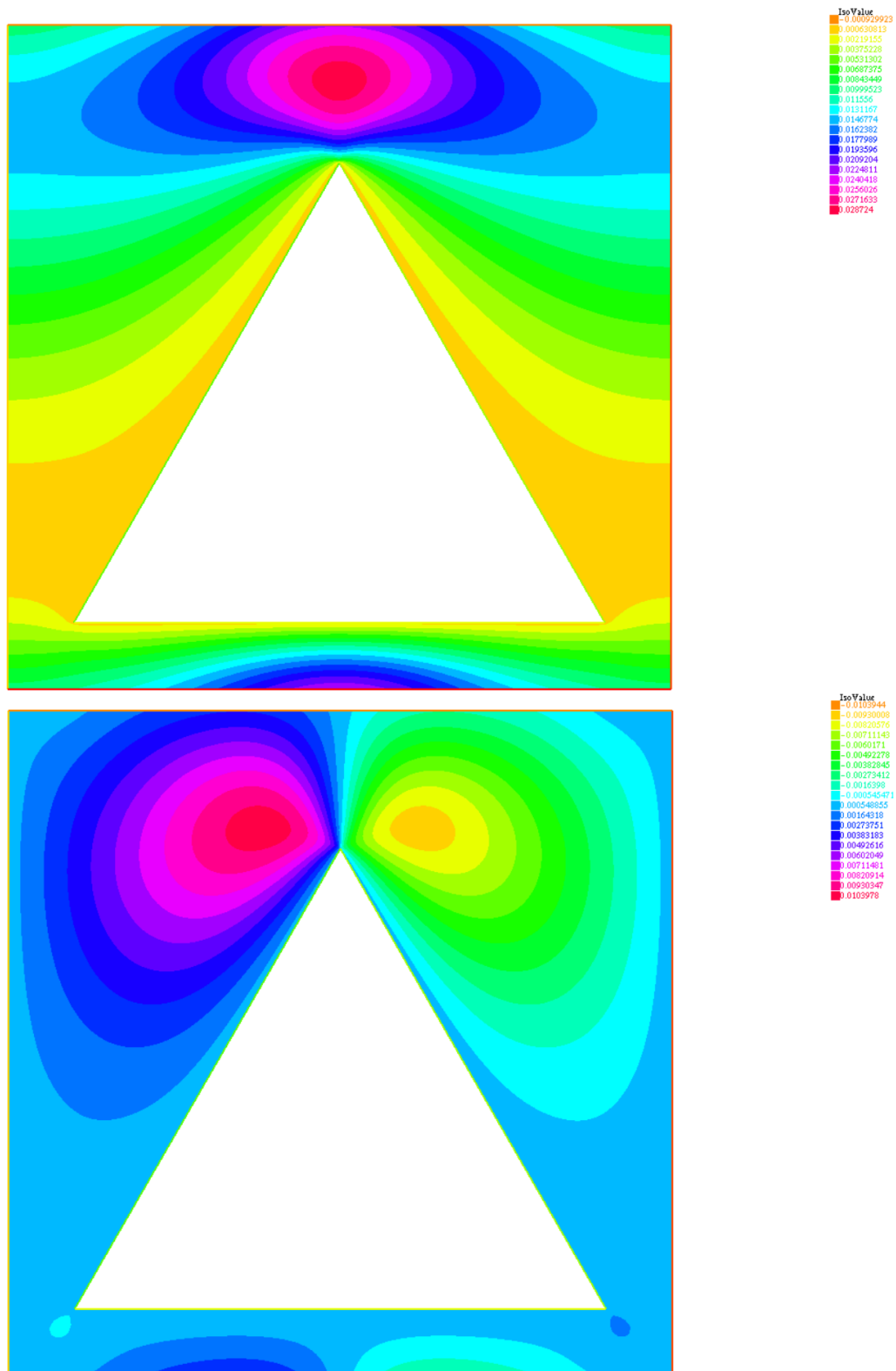


Figura 4.11: Velocità aggiunta rispettivamente orizzontale $u^{\dagger(1)}$ e verticale $v^{\dagger(1)}$.

4.2.12 Grano triangolare, $\theta = 0.723$, $f_i^{(2)} = (0, 1)$

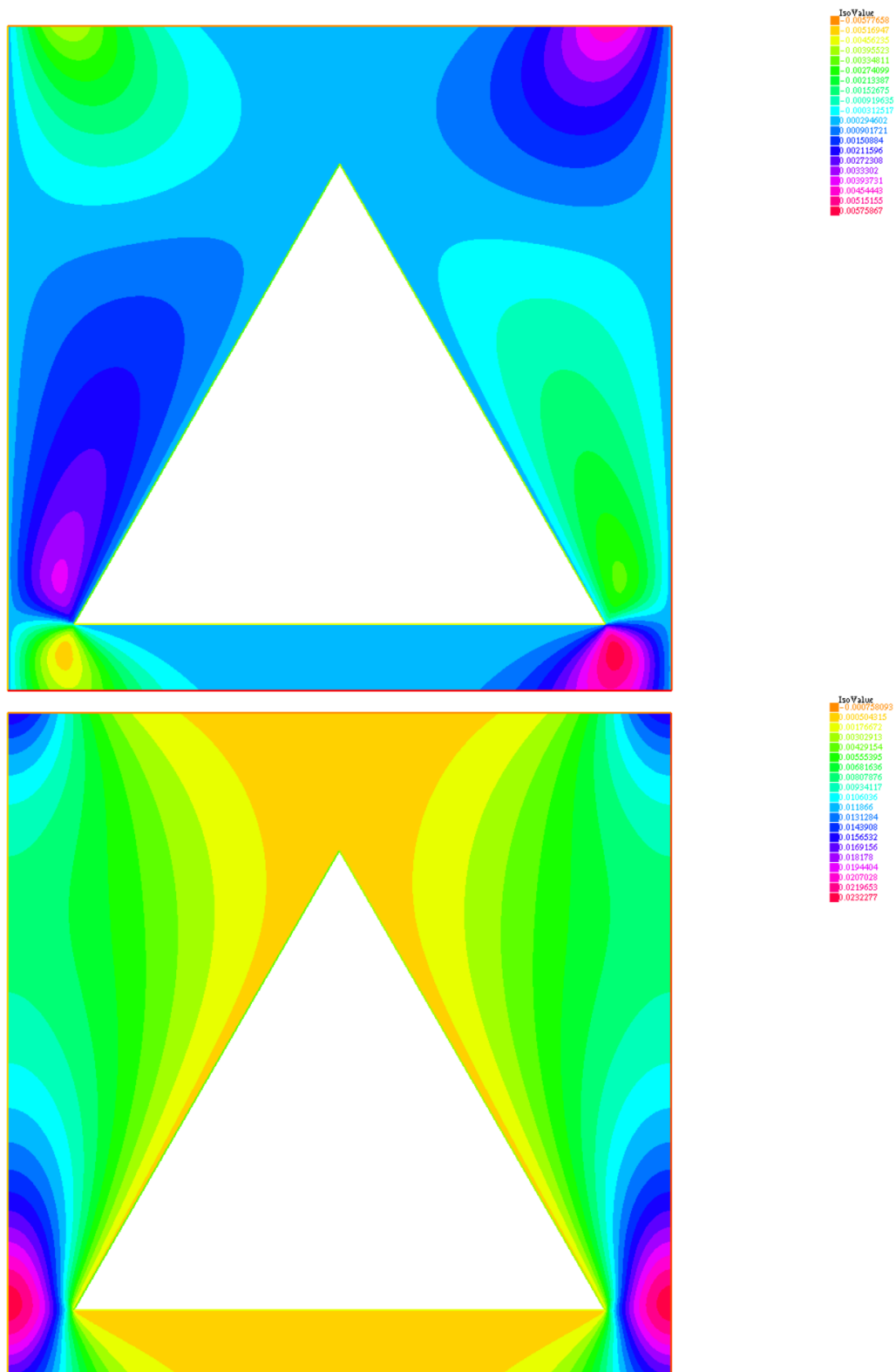


Figura 4.12: Velocità aggiunta rispettivamente orizzontale $u^{\dagger(2)}$ e verticale $v^{\dagger(2)}$.

5 Il tensore di permeabilità

Nel capitolo due si è osservato dalla (2.19) come il tensore di permeabilità risulti essere:

$$K_{ij} = \frac{1}{V} \int_{V_f} u_i^{\dagger(j)} dV, \quad (5.1)$$

dove V è il volume totale della cella unitaria, definito come la somma tra il volume di fluido V_f e il volume dell'inclusione V_s , mentre $u_i^{\dagger(j)}$ è un tensore di rango due che rappresenta le componenti della velocità aggiunta. Le equazioni (5.1) una volta implementate nel codice di calcolo permettono di ottenere le componenti del tensore di permeabilità:

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix}.$$

Nelle differenti geometrie dei grani si è riscontrato che i termini fuori diagonale del tensore assumono valori trascurabili. Quindi è stato possibile tracciare solo l'andamento dei termini diagonali K_{xx} e K_{yy} in funzione della porosità θ . In ogni grafico viene mostrato anche, per motivi puramente comparativi, l'andamento della permeabilità per un insieme regolare di sfere, calcolato tramite la relazione di Kozeny-Carman [7, 8, 9]. Questa relazione di natura semi-empirica, permette di stimare la conducibilità idraulica di un mezzo poroso. La relazione è scritta nel seguente modo:

$$\hat{K} = \frac{(\Phi_s D_p)^2}{180} \frac{\theta^3}{(1 - \theta)^2}, \quad (5.2)$$

dove Φ_s è la sfericità e indica quanto le inclusioni si avvicinano alla forma di una sfera perfetta ($\Phi_s = 1$ per sfera perfetta), D_p è il diametro dell'inclusione e θ è la porosità. Per semplicità, in questa trattazione si è considerato $\Phi_s = 1$. La porosità θ viene espressa così:

$$\theta = \frac{l^3 - V_s}{l^3} = 1 - \frac{\frac{1}{6}\pi D_p^3}{l^3}, \quad (5.3)$$

dove V_s è il volume di solido, a cui è stato sostituito il volume della sfera, mentre l è la dimensione della cella unitaria. Dalla (5.3) è possibile ricavare il diametro D_p :

$$D_p = l \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}(1 - \theta)},$$

che si sostituisce nella (5.2) ricavando la permeabilità K in forma adimensionale e in funzione della sola porosità θ :

$$K = \frac{\hat{K}}{l^2} = \left[\frac{6}{\pi}(1 - \theta) \right]^{\frac{2}{3}} \frac{1}{180} \frac{\theta^3}{(1 - \theta)^2}.$$

5.1 Confronto delle permeabilità

5.1.1 Cerchio, quadrato, K-C

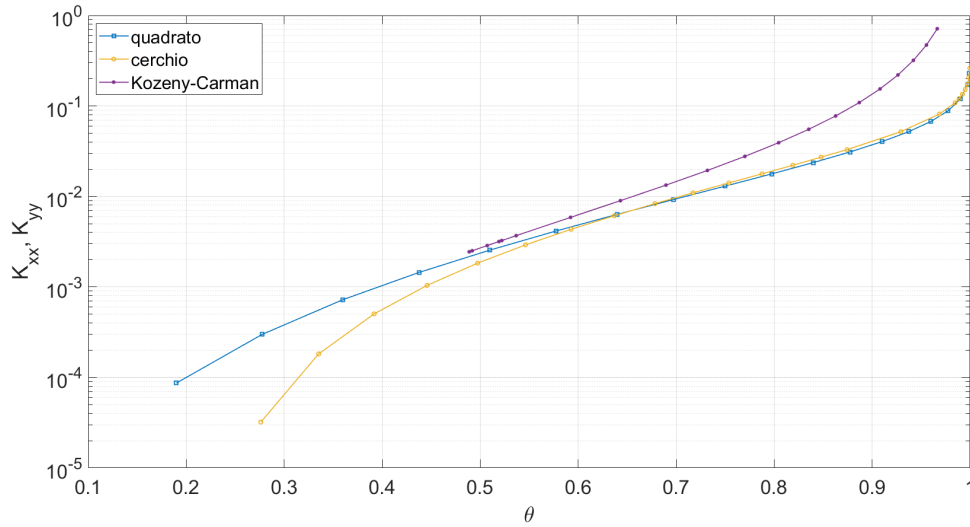


Figura 5.1: Confronto tra le permeabilità del cerchio e del quadrato con la relazione di Kozeny-Carman.

Il tensore di permeabilità K_{ij} , sia per il cerchio sia per il quadrato, risulta una matrice diagonale in cui $K_{xx} = K_{yy}$, perché queste geometrie presentano forma e sezione frontale uguali sia per $f_i^{(1)} = (1, 0)$, sia per $f_i^{(2)} = (0, 1)$.

5.1.2 Cerchio, ellisse, K-C

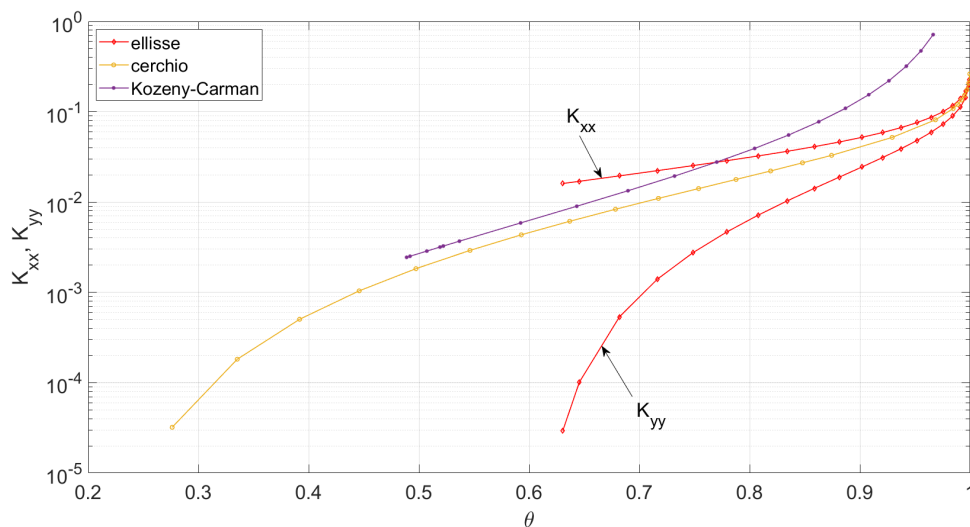


Figura 5.2: Confronto tra le permeabilità del cerchio e dell'ellisse con la relazione di Kozeny-Carman.

Il tensore K_{ij} per l'ellisse risulta una matrice diagonale in cui $K_{xx} \neq K_{yy}$ con $K_{xx} > K_{yy}$, perché impostando il gradiente di pressione in direzione x ($f_i^{(1)} = (1, 0)$) il flusso incontra l'ellisse nella sua forma affusolata e quindi molto più permeabile (maggiore anche del cerchio); il contrario avviene nel caso di gradiente di pressione in direzione y ($f_i^{(2)} = (0, 1)$). Si noti come l'ellisse non raggiunga porosità basse paragonabili al cerchio, a causa della sua forma.

5.1.3 Cerchio, triangolo, K-C

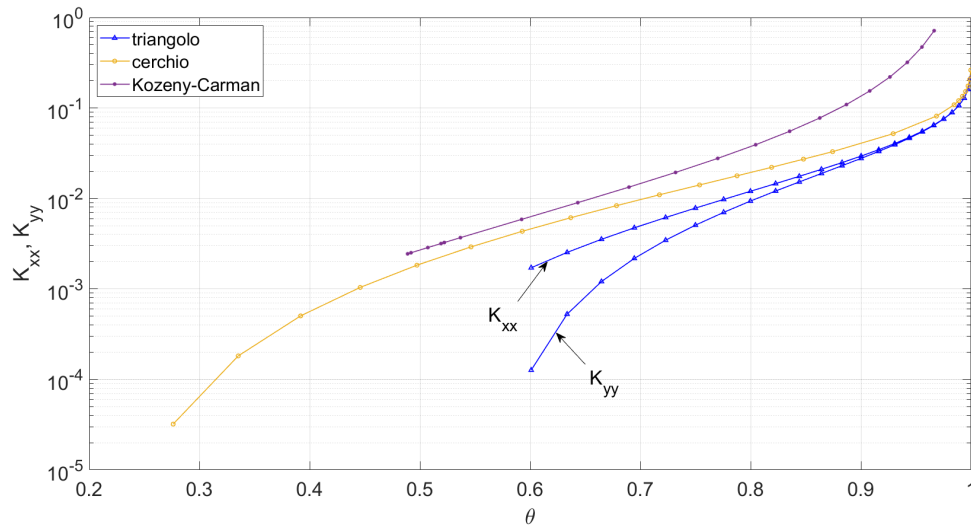


Figura 5.3: Confronto tra le permeabilità del cerchio e del triangolo con la relazione di Kozeny-Carman.

Il tensore K_{ij} per il triangolo risulta una matrice diagonale in cui $K_{xx} \neq K_{yy}$ con $K_{xx} > K_{yy}$ per motivi simili al caso dell'ellisse. Anche per il triangolo non si raggiungono basse porosità confrontabili con quelle del cerchio.

5.1.4 Confronto generale

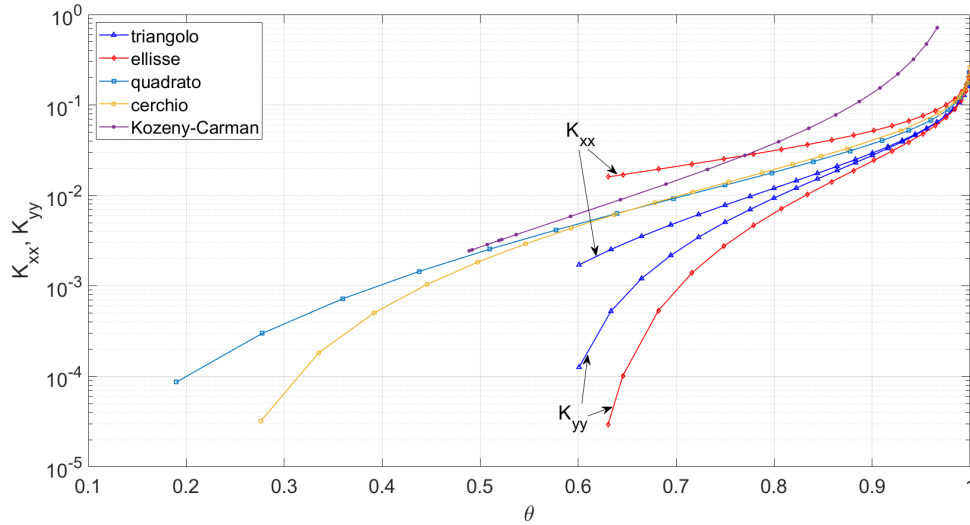


Figura 5.4: Confronto tra tutte le permeabilità calcolate, con la relazione di Kozeny-Carman.

In quest'ultimo grafico sono state inserite le permeabilità di tutte le geometrie analizzate in modo tale da effettuare un'analisi comparativa globale. Inizialmente si osserva che la permeabilità ad alti valori di porosità, calcolata con la relazione di Kozeny-Carman, risulta molto maggiore rispetto alle altre geometrie. Questo perché la relazione si applica al caso tridimensionale e quindi il fluido può "fuggire" nella terza dimensione aumentando di conseguenza la permeabilità.

Al caso bidimensionale, per quanto riguarda il cerchio e il quadrato si nota come alle basse porosità il quadrato ha valori di permeabilità più elevati perché, a parità di θ , il cerchio ha un'estensione maggiore verso i bordi della cella unitaria quindi ostacola maggiormente il flusso. Contrariamente, alle alte porosità il cerchio ha valori di permeabilità leggermente più elevati motivati dalla forma geometrica che agevola il flusso.

In due dimensioni quindi si osserva che per $\theta < 0.63$ il quadrato ha i più alti valori di permeabilità in quanto l'ellisse non raggiunge basse porosità, viceversa per $\theta > 0.63$ l'ellisse presenta alti valori di K nel caso di gradiente di pressione $f_i^{(1)} = (1, 0)$. Tuttavia impostando il gradiente di pressione $f_i^{(2)} = (0, 1)$ e considerando $\theta > 0.63$ il cerchio ha i più alti valori di K .

Per $\theta = 0.77$ la permeabilità della sfera uguaglia la permeabilità dell'ellisse nel caso di gradiente di pressione $f_i^{(1)} = (1, 0)$.

Per il triangolo alle alte porosità ($\theta > 0.9$) i termini in diagonale del tensore di permeabilità risultano uguali tra di loro perché il fluido non risente del cambio di forma e della sezione frontale della porosità. Al contrario per quanto concerne l'ellisse dove i termini K_{xx} e K_{yy} convergono molto lentamente data la sua forma e sezione frontale estremamente differenti per le direzioni x e y .

6 Conclusioni

L'obiettivo di questo compito è stato di apprendere conoscenze di base in merito al calcolo *CFD* con l'utilizzo del metodo di discretizzazione agli elementi finiti *FEM*. Un ulteriore conoscenza si è appresa con l'utilizzo di un linguaggio di markup chiamato *LaTeX*, ossia un linguaggio dedicato alla preparazione di testi.

Questo lavoro ha consentito di studiare l'interazione tra fluido e mezzo poroso e di come varia la permeabilità al variare della forma geometrica e della dimensione dell'inclusione. In questa trattazione si è analizzato il caso particolare in cui il fluido ha valori del numero di Reynolds molto bassi tali per cui gli effetti di accelerazione locale e dei termini convettivi risultino trascurabili. Di conseguenza la trattazione si può estendere al caso in cui il numero di Reynolds sia rilevante. In questo caso si applica l'equazione di Forchheimer. Un'ulteriore estensione è possibile confrontando le permeabilità ricavate con l'equazione di Brinkman con le permeabilità calcolate con l'equazione di Darcy verificando quanto le due leggi si discostano ad alti valori di porosità.

Riferimenti bibliografici

- [1] H. Darcy. *Les Fontaines publiques de la ville de Dijon*. V. Dalamont, 1856.
- [2] P. Forchheimer. Wasserbewegung durch boden. *Z. Ver. Deutsch, Ing.*, 45:1782–1788, 1901.
- [3] L. Lanza. *Gestione delle risorse idriche*. Università di Genova, Genova, 2003–2004.
- [4] H.C. Brinkman. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Flow, Turbulence and Combustion*, 1(1):27, 1947.
- [5] C.C. Mei and B. Vernescu. *Homogenization methods for multiscale mechanics*. World scientific, 2010.
- [6] F. Hecht. New development in freefem++. *J. Numer. Math.*, 20(3-4):251–265, 2012.
- [7] J. Kozeny. Uber kapillare leitung der wasser in boden. *Royal Academy of Science, Vienna, Proc. Class I*, 136:271–306, 1927.
- [8] P. C. Carman. Fluid flow through granular beds. *Trans. Inst. Chem. Eng.*, 15:150–166, 1937.
- [9] P. C. Carman. *Flow of gases through porous media*. Butterworths, London, 1956.

Simbologia

Simboli

L	Lunghezza dominio macroscopico
P	Pressione macroscopica
l	Dimensioni cella microscopica
ϵ	Coefficiente multiscala
ρ	Densità del fluido
Re	Numero di Reynolds
μ	Viscosità dinamica
$\tilde{\mu}$	Viscosità effettiva
β	Coefficiente di Forchheimer
U	Velocità caratteristica del fluido nel mezzo poroso
x	Variabile spaziale microscopica
X	Variabile spaziale macroscopica
t	Tempo
u	Velocità
p	Pressione microscopica
V	Volume
f_i	Forzante del problema ausiliario

δ_{ij}	Indice di Kronecker
$\langle \cdot \rangle$	Media
K_{ij}	Tensore di permeabilità
θ	Porosità
Φ_s	Sfericità
D_p	Diametro inclusione
Ψ	Insieme
Q	Dominio
∂Q	Frontiera dominio
χ	Spazio funzionale
ζ	Funzione
$\ \cdot \ $	Norma
r_n	Funzione residuo
A, G	Operatori differenziali lineari
$\langle \cdot \rangle$	Prodotto scalare
Γ	Frontiera dell'inclusione
Ω	Dominio del fluido
ξ, η	Funzioni base
ds	Coordinata curvilinea

b_i	Termine noto
$\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$	Coefficienti della soluzione debole
l_j, l_{j+1}	Polinomi base lineari
Apici e pedici	
$\hat{\cdot}$	Variabili dimensionali
\dagger	Funzioni duali
f	Fluido
s	Inclusione
T	Trasposta
Abbreviazioni ed acronimi	
FEM	Finite Element Method
ODE	Ordinary Differential Equations
PDE	Partial Differential Equations