UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI GENOVA

SCUOLA POLITECNICA

Dipartimento di Ingegneria Meccanica,
Energetica, Gestionale e dei Trasporti

TESI DI LAUREA IN
INGEGNERIA MECCANICA

MOTI FLUIDI SU PARETI CON MICRO-SCABREZZE

Relatore:
Chiar.^{mo} Prof. Alessandro Bottaro
Correlatore:
Ing.^{ssa} Sahrish B. Naqvi

Allievo:
Steve Tchoua Djuimo

18 febbraio 2021

Moti fluidi su pareti con micro-scabrezze

Sommario

Per moti fluidi su parete scabra con micro-indentazioni di forma conica o cilindrica sistemati regolarmente sulla parete stessa, forniamo un modello macroscopico omogeneizzato del flusso tridimensionale. Le condizioni al contorno effettive che devono essere applicate su una parete fittizia, corrette al secondo ordine in termine di un piccolo parametro ϵ, sono derivate dalla teoria dell'omogeneizzazione multiscala. Il problema trattato presenta due scale di lunghezza distinte: la microscala (l) che è una dimensione caratteristica delle micro-indentazioni di parete, e la macroscala (L) che caratterizza il problema macroscopico (L è molto più grande della lunghezza microscopica, cioè $\epsilon = l/L \ll 1$). I modelli macroscopici in questo caso comportano la sostituzione della parete scabra originale con una superficie liscia equivalente, tangente al bordo superiore degli elementi di rugosità. Il dominio sotto il muro fittizio è tagliato fuori; l'effetto delle perturbazioni geometriche è convertito in condizioni al contorno sulla parete liscia. Tali condizioni al contorno efficaci rappresentano con precisione l'effetto medio della rugosità sul flusso macroscopico. L'applicazione delle condizioni effettive a un problema macroscopico viene eseguito per il flusso di punto di ristagno (strato limite di Hiemenz) su un muro scabro tridimensionale, per numeri di Reynolds (Re) bassi e moderati, evidenziando le differenze tra i risultati esatti e quelli ottenuti utilizzando condizioni di ordini asintotici differenti. L'accuratezza della formulazione proposta viene studiata confrontando il modello macroscopico proposto e simulazioni microscopiche completamente risolte per dimostrare l'accuratezza del presente modello per pareti ruvide periodiche tridimensionali.

Tutti i coefficienti introdotti nella formulazione sono calcolati risolvendo problemi ausiliari lineari (nella forma di Stokes). Poiché il dominio per risolvere le equazioni ausiliarie è solo una piccola frazione del dominio computazionale totale, il processo risolutivo è molto efficiente, e quindi non aggiunge un sovraccarico computazionale significativo alla soluzione delle equazioni del moto.

La formulazione presentata rappresenta un modo pratico ed efficace per modellare i dettagli microstrutturali di superfici scabre complesse sui fenomeni

di trasporto associati, senza la necessità di effettuare simulazioni che risolvono tutti i dettagli microscopici del moto in prossimità della parete, né costosi esperimenti in laboratorio.

Fluid motion over walls with micro-roughness

Abstract

Per flussi fluidi su pareti ruvide con microindentazioni coniche e cilindriche disposte periodicamente, forniamo un modello macroscopico accurato del flusso tridimensionale. Le effettive condizioni al contorno che devono essere applicate al muro fittizio, corrette al secondo ordine in un piccolo parametro *epsilon*, sono derivate dalla teoria dell'omogeneizzazione multiscala. La con fi gurazione ha due scale di lunghezza distinte: la microscala (l) che è una lunghezza caratteristica delle microindentazioni, e la macroscala (L), che caratterizza la scala di lunghezza rilevante del problema macroscopico (quest'ultima è molto più grande rispetto alla lunghezza microscopica, cioè $\epsilon = l/L \ll 1$). I modelli macroscopici in questo caso prevedono la sostituzione del muro grezzo originale con una superficie liscia equivalente che è tangente al bordo degli elementi di rugosità. Il dominio sotto il muro fittizio è tagliato; l'effetto delle perturbazioni geometriche viene convertito in condizioni al contorno effettive sulla parete liscia, in modo tale che queste condizioni al contorno modificate rappresentino con precisione l'effetto medio della rugosità sul flusso macroscala. L'applicazione delle condizioni efficaci a un problema macroscopico viene eseguita per il flusso del punto di ristagno di Hiemenz su una parete ruvida tridimensionale, per numeri di Reynolds (Re) bassi e moderati che evidenziano le differenze tra i risultati esatti e quelli ottenuti utilizzando condizioni di di ff erenti ordini asintotici. L'accuratezza della formulazione proposta viene studiata confrontando il modello macroscopico proposto con simulazioni completamente risolte che catturano i dettagli del flusso vicino alla parete, per dimostrare l'accuratezza del presente modello per la parete ruvida periodica tridimensionale.

The proposed model is non-empirical and it is thus free of empirical parameters. All the coefficients introduced in the formulation are computed by solving auxiliary inexpensive Stokes-like problems. Since the domain where the auxiliary equations need to be solved is only a tiny fraction of the total computational domain, the solution process is very efficient, and hence it does not add noticeable computational overhead to the solution of the equations.

The aspects mentioned above are crucial and render the present formulation a viable tool to map the microstructural details of complex rough

surfaces, to capture the associated transport phenomena without the need of expensive feature-resolving simulations, nor the need for expensive laboratory experiments.

Ringraziamenti

Ringrazio tutti colore che mi hanno spinto ad andare avanti con il mio obietivo

Simbologia

Simboli

l	Scala di lunghezza microscopica
L	Scala di lunghezza macroscopica
p	Pressione nella regione interna (di parete)
P	Pressione nella regione esterna
ϵ	Coefficiente multiscala
μ	Viscosità dinamica $[\frac{kg}{ms}]$
ρ	Densità del fluido $[\frac{kg}{m^3}]$
R	Numero di Reynolds microscopico
Re	Numero di Reynolds macroscopico
u, v, w	Velocità nella regione interna
U, V, W	Velocità nella regione esterna
x, y, z	Variabili spaziali microscopiche
X, Y, Z	Variabili spaziali macroscopiche
H	Altezza della rugosità

D	Diametro base della rugosità
y_∞	Altezza del dominio microscopico
a_i	Termine noto
$\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j$	Coefficienti della soluzione debole
Ω	Dominio del fluido
m_{12}	Coefficiente di permeabilità superficiale
η_i, ξ_i	Funzioni base
s	Coordinata curvilinea
ν	Viscosità cinematica $[\frac{m^2}{s}]$
p_0	Pressione di ristagno per il moto di Hiemenz

Abbreviazioni ed acronimi

FEM	Finite Element Method
RVE	Representative Volume Element

Contents

1 Introduzione **9**

2 Analisi asintotica **15**
2.1 Espansione in ϵ 18
2.2 Equazione dell'ordine di lettura ($\mathcal{O}(\epsilon^0)$) 18
2.3 Equazioni di ordine $O(\epsilon)$ 21
2.4 Le condizioni effettive 31

3 Analisi numerica **36**
3.1 Metodo di elementi finiti (FEM) 36
3.2 Elementi finiti triangolari 38
3.3 Formulazione debole del problema microscopico 39

4 Risultati macroscopici **42**
4.1 Il moto di punto di ristagno (Hiemenz) su parete scabra tridimensionale 42
4.2 Approssimazione numerica: 43

5 Conclusione **51**

Chapter 1

Introduzione

I metodi multiscala sono inevitabili quando si considera un fenomeno fisico che si verifica in un mezzo eterogeneo. Infatti, mentre nelle applicazioni siamo spesso interessati a una quantità macroscopica, la struttura microscopica di un mezzo influenza il processo fisico e deve essere incorporata nel modello. Negli ultimi anni, sono stati sviluppati diversi metodi multiscala per l'approssimazione di problemi di ingegneria poiché affrontare questioni scientifiche e ingegneristiche utilizzando transizioni di scala è uno dei percorsi più impegnativi e gratificanti nella risoluzione di problemi fondamentali in ingegneria per il prossimo secolo.

La grande sfida nella meccanica multiscala consiste nell'identificare le relazioni che collegano le varie scale di lunghezza, comprese quelle che forniscono proprietà efficaci / macroscopiche (emergenti). I metodi multiscala in genere mirano a estrarre proprietà macroscopiche predittive dei materiali risolvendo i dettagli geometrici e fisici della microstruttura sottostante. Alla microscala, sono quindi necessarie descrizioni appropriate delle singole fasi e interfacce. Al fine di colmare le scale, in letteratura sono stati proposti numerosi metodi.

L'omogeneizzazione di materiali eterogenei è stato uno dei primi approcci multiscala in meccanica, è stato originariamente sviluppato per problemi ingegneristici come problemi elastici, mezzi porosi e flusso su strutture ruvide su piccola scala, per cui la piccola scala può spesso essere eliminata nel processo computazionale. Il termine "omogeneizzazione" è stato originariamente coniato da Ivo Babuška [2]. A rigor di termini, la grana grossa e l'omogeneizzazione non sono identiche. L'omogeneizzazione si basa essenzialmente sulla media dei teoremi, mentre la grana grossa in fisica si basa sulla meccanica statistica o sulla termodinamica al fine di identificare il comportamento emergente su tutte le scale. Lo scopo del presente studio è quello di modellare una condizione efficace non empirica accurata su una parete ru-

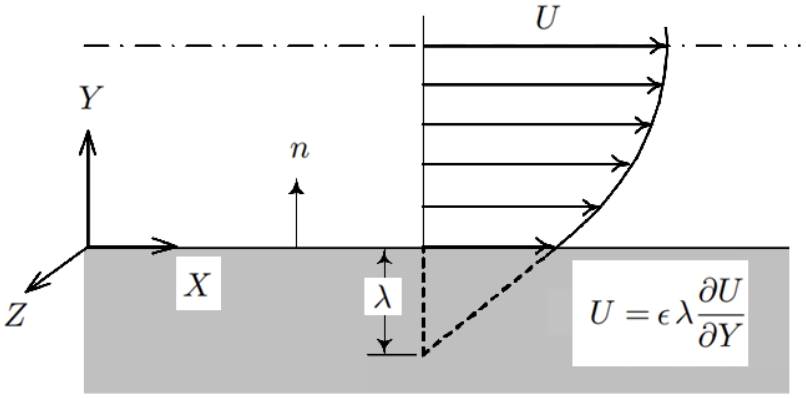

Figure 1.1:

vida impermeabile utilizzando l'omogeneizzazione multiscala. Dal punto di vista matematico, le condizioni al contorno effettive (note anche come slip) forniscono una corretta soluzione per i problemi su domini con angoli acuti (vedere alcuni esempi di superfici ruvide con creste affilate nella Fig. 1.2), dove *no-slip* fornisce soluzioni spurie (vedi Dussan [9], Moffatt [21]).Sono inoltre rilevanti su pareti scabre, dove la presenza di asperità microscopiche riduce notevolmente lo sforzo di taglio determinando un perfetto slip sul contorno (vedi Janson [13]). Data questa prospettiva, ci sono stati diversi tentativi per giustificare il comportamento al contorno antiscivolo (1.2) come una conseguenza inevitabile dell'intrappolamento del fluido da parte della rugosità superficiale. Richardson [24] ha mostrato che il no-slip emerge come la condizione al contorno effettiva per un flusso di Stokes su domini con confine periodicamente ondulato (per risultati più generali vedere anche Janson [13]). D'altra parte, per evitare la complicata descrizione del comportamento del fluido in uno strato limite adiacente ad una parete ruvida su cui è imposta la condizione di no-slip, si prescrive sulla media (flat) superficie per facilitare i calcoli numerici (vedi Jaeger e Mikelic [12] and Mohammadi et al. [22])

Navier Slip: In 1823, il francese Henri Navier [23])è stata la prima persona a ricavare una condizione di scivolamento per muri impermeabili, che si legge come

$$U = \epsilon\lambda\frac{\partial U}{\partial Y}, \tag{1.1}$$

dove U è la velocità del fluido e Y corrisponde alla direzione normale alla parete. Il coefficiente λ è la lunghezza di slip che è uguale alla distanza nel muro dove le componenti estrapolate linearmente svaniscono effettivamente,

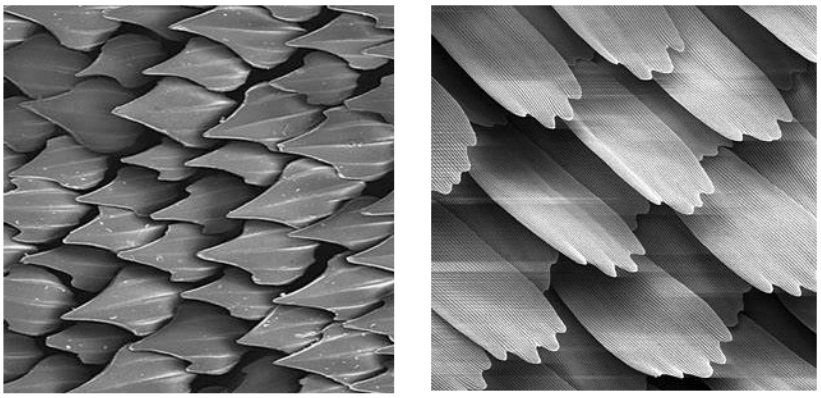

Figure 1.2: Biomimetica: microstruttura delle scaglie sulla pelle di uno squalo (immagine di sinistra, fonte: www.biomimicrybe.org) e di quelle sulle ali di una farfalla (immagine di destra, fonte: www.entopia.com). Entrambe le immagini sono state prodotte con il microscopio elettronico.

e ϵ è un piccolo parametro uguale al rapporto tra scala di lunghezza micro e macroscopica, cioè l/L.

È difficile progettare una struttura superficiale e di solito la procedura si basa su processi di tentativi ed errori, che possono richiedere un enorme sforzo, tempo e costose apparecchiature per la produzione di superfici. Inoltre, la natura multiscala del problema, l'indagine numerica completamente risolta sia della superficie complessa che del flusso libero al di sopra di essa, sono praticamente impossibili da eseguire nelle impostazioni applicate. Un approccio efficace viene perseguito attivamente per aggirare questa difficoltà. In questo modo si può catturare l'effetto medio della caratteristica di microscala sui processi macroscopici, e quindi evitare di risolvere dettagli geometrici microscopici. Alcuni esempi recenti di modellazione efficace applicata all'essiccazione, alla crescita cellulare e allo scambio di calore possono essere trovati nel lavoro di [17, 28]

Uno degli approcci efficaci come l'omogeneizzazione multiscala può essere definito come una regione senza distinzione di fasi in cui possono essere applicate condizioni macroscopiche. Per un approccio di omogeneizzazione ipotizziamo che la parete ruvida sia sostituita da una superficie liscia e fittizia sulla quale può scorrere il flusso e attraverso la quale è possibile la traspirazione, producendo nella maggior parte del dominio lo stesso risultato di quello reale.

La sfida principale per modelli efficaci che descrivono l'interazione fluido-superficie è la specifica di una condizione al contorno in un'interfaccia creata

artificialmente tra la regione del fluido libero e la superficie complessa. E c'è stato un ampio sviluppo della condizione al contorno dello scivolamento per le superfici strutturate. A seguito dell'importanza delle condizioni al contorno per le pareti strutturate, il presente studio è dedicato a descrivere un approccio di upscaling per derivare condizioni al contorno efficaci vicino a un muro grezzo, in modo che in un'applicazione pratica il muro grezzo possa essere sostituito da una superficie liscia e fittizia su cui il flusso può scivolare e attraverso il quale è possibile la traspirazione, dando nella maggior parte del dominio lo stesso risultato del muro reale e ruvido. Questa strategia come menzionato sopra permette di catturare effetti su micro scala evitando la risoluzione numerica proibitivamente costosa di strutture di flusso microscopiche. Come nella maggior parte degli studi precedenti, si presume che lo schema approssimativo si ripeta periodicamente su una scala molto più breve di una dimensione caratteristica del flusso macroscopico; ciò rende il problema suscettibile di una descrizione su più scale [20]. Contrariamente alla letteratura esaminata di seguito, le condizioni efficaci qui ottenute sono corrette al secondo ordine in termini di un piccolo parametro "ϵ". Pertanto, il presente modello descrive in modo più accurato per configurazioni tridimensionali come coni e cilindro rispetto alle condizioni precedenti disponibili in letteratura l'effetto delle piccole scale asintotiche sul flusso su larga scala. Come risultato significativo, verrà mostrato che tutti i parametri che entrano nelle condizioni al contorno al secondo ordine derivano dalla risoluzione numerica di un unico problema microscopico di Stokes; al terzo ordine alcuni sistemi ausiliari aggiuntivi devono essere risolti.

La necessità di disporre di modelli accurati del flusso vicino a pareti modellate è particolarmente sentita quando il movimento è turbolento, poiché si verifica in più applicazioni. Quindi, è noto che la resistenza all'attrito della pelle di solito aumenta, se confrontata con l'involucro a parete liscia in condizioni identiche, ad eccezione dei modelli di parete progettati in modo intelligente. Esempi di questi ultimi includono le riblets [27, 5, 19, 14] e altre rientranze del muro ispirate alla natura [4, 25, 6, 8].A condizione che la rugosità sia incorporata all'interno del sottostrato viscoso, le effettive condizioni di parete ruvida che si sviluppano qui permetteranno di eseguire, in una frazione del tempo, ricerche parametriche di modelli di superficie regolari atti, per esempio, a minimizzare l'attrito della pelle.

La prima pubblicazione più importante che descrive l'applicazione di un espansione a due scale per dedurre condizioni efficaci su un muro grezzo è dovuta ad Achdou et al.[1]. Questi autori si sono concentrati sul caso bidimensionale incomprimibile e hanno derivato le condizioni al secondo ordine in termini del piccolo parametro ϵ, una misura della dimensione della rugosità relativa. Per un confronto successivo, presentiamo anche le condizioni (non

lineari) derivate da Achdou e colleghi [1]:

$$U = \epsilon\lambda\frac{\partial U}{\partial Y} - \epsilon^2\left[\xi\frac{\partial P}{\partial X} + \chi U^2\right], \tag{1.2}$$

$$V = 0, \tag{1.3}$$

con P la pressione. Le costanti λ, ξ e χ derivano dalla soluzione di problemi tipo Stokes in una cella unitaria periodica costruita attorno a un singolo elemento di rugosità. Per le configurazioni macroscopiche del flusso laminare testate nel loro articolo, Achdou e colleghi hanno ottenuto buoni risultati confrontandoli con simulazioni complete, portandoli ad affermare che "la condizione di primo ordine è già molto accurata" e concludere che "non è sicuro,e non vale la pena usare la condizione del secondo ordine. "Sosterremo di seguito che la condizione (3) non è accurata del secondo ordine.

Gli sviluppi successivi non seguirono il percorso iniziato da Achdou e dai suoi collaboratori e si limitarono per lo più all'esame di vari aspetti delle condizioni di Navier. Ad esempio, J äger e Mikelić [12] hanno fornito una giustificazione rigorosa dello scorrimento di Navier per il flusso in un canale piano e hanno condotto stime asintotiche della forza di trascinamento tangenziale e della portata massica effettiva. Basson e Gérard-Varet [3] hanno utilizzato l'omogeneizzazione stocastica per estendere l'analisi precedente al caso di un flusso di canale con rugosità modellato da un campo casuale spazialmente omogeneo. Kamrin et al.[16],utilizzando variabili di scala diverse da quelle qui impiegate, è stata recuperata una forma tensoriale di scorrimento di Navier per il flusso su superfici periodiche come approssimazione del secondo ordine. Hanno introdotto un *tensore di mobilità* $\mathbf{\Lambda}$ (o tensore di scorrimento di Navier) e, dopo aver scomposto il muro nella serie di Fouries, hanno fornito una formula per $\mathbf{\Lambda}$, dimostrando la sua simmetria. Luchini [18] ha esteso l'analisi considerando due configurazioni. Nel primo, denominato limite *shallow-rugosità*, la superficie considerata era $Y = \epsilon H$ $(X,\, Z)$, ovvero la rugosità diventa più liscia quando $\epsilon \to 0$. Il secondo limite, denominato limite *small-roughness*, riguardava una famiglia di superfici definita da $Y = \epsilon H$ $(X/\epsilon,\, Z/\epsilon)$ cioè un motivo che rimane geometricamente simile a se stesso con ϵ variabile.[11] and Guo et al.[19] da un'analisi di alto livello basata sulla teoria della media del volume. Anche in questo caso è stata ripristinata al primo ordine della condizione di slip Navier. Analisi più recenti basate sull'omogeneizzazione multiscala sono state condotte da Jim énez-Bolaños e Vernescu [15], Zampogna et al.[29] and Lācis et al. [26] and [7]. Quest'ultimo studio è stato l'unico a spingere lo sviluppo al secondo ordine, anche se solo per V, derivando una condizione di traspirazione in corrispondenza di un muro fittizio. La condizione è stata testata con successo

per il caso di un flusso di canale turbolento delimitato da una parete ruvida, dimostrando l'importanza di tenere conto delle fluttuazioni di velocità normale della parete in un modello di parete ruvida. Il presente contributo parte da queste premesse.

Prima di evidenziare gli ingredienti principali del nostro modello, rendiamo brevemente conto dell'attuale stato dell'arte delle effettive condizioni al contorno delle superfici tessili. A questo scopo viene utilizzata una configurazione tridimensionale. Le coordinate in streaming, le normali pareti e spanwise sono indicate con (X, Y, Z) per il modello macroscopico e (x, y, z) per quelle microscopiche. L'elemento volume rappresentativo è periodico lungo x e z, e si estende lungo la direzione del y partendo dalla parete ruvida inferiore dove si ha presa fino y_{infty}. Da un punto di vista macroscopico, i bordi sono limitati da componenti di velocità (U, V, W). La condizione effettiva deve essere utilizzata in $Y = \epsilon\mathcal{Y} = \epsilon\bar{y}$.

Chapter 2

Analisi asintotica

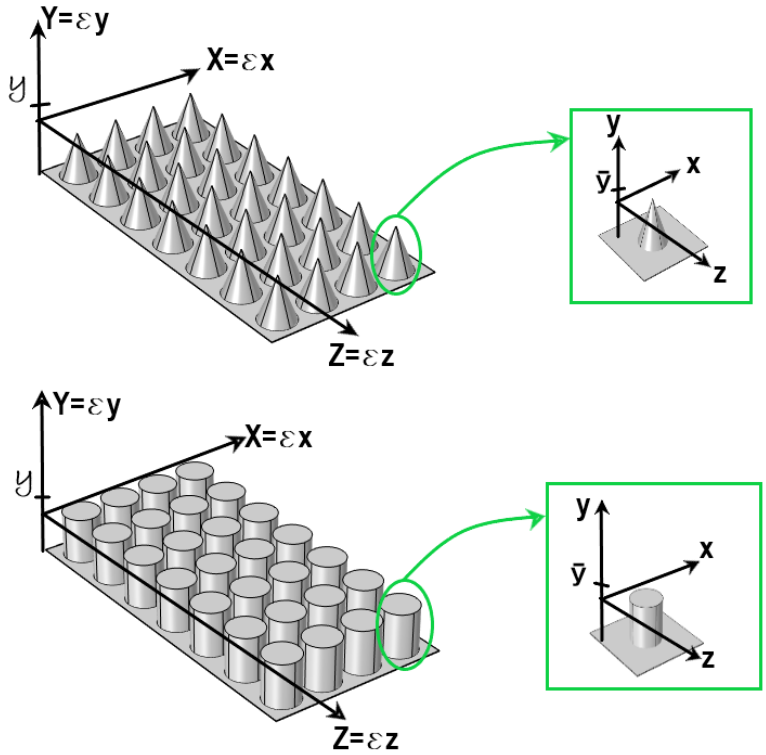

Figure 2.1: Superiore:: Sketch di elementi scabri di forma conica (immagine di sinistra) con cella unitaria (destra). Parte inferiore: Sketch di elementi scabri di forma cilindrica (immagine di sinistra) con cella unitaria (destra).

Si considera un muro grezzo (bruto) tridimensionale regolarmente strutturato, con coordinate cartesiane adimensionali macroscala (X, Y, Z) ,Y ortogonale al piano della superficie. Queste variabili indipendenti sono state scalate da L ,una lunghezza macroscopica caratteristica. La superficie Y = 0 ,tangente agli elementi di rugosità ,definisce un muro fittizio su cui devono essere imposte condizioni al contorno efficaci , in alternativa alla costosa alternativa di calcolare tutti i dettagli del campo di flusso all'interno del modello approssimativo (grezzo).

Una cella unitaria è definita in una casella che si estende verticalmente da $y = Y_{wall}(x, y)$ a $y \to \infty$;lungo le direzioni parallele del muro si ipotizza che l'elemento rappresentativo di rugosità sia contenuto in una scatola rettangolare , con condizioni periodiche che si applicano lungo x e z .Tutte le coordinate di microscala (x, y, z) sono state normalizzate con una piccola sacala di lunghezza l e sono qindi prive di dimensione. Le variabili dipendenti sono espresse come serie di potenze del parametro piccole $\epsilon = l/L$.

In generale , per le variabili macroscopiche si utilizzeranno lettere maiuscule e lettere minuscole saranno impiegate per le variabili microscopiche.

L'intero dominio fisico è diviso in due regioni : una regione interna che va dal muro a $y \to \infty$ e la regione esterna che si trova sopra ,cioè va da $Y = 0^+$ a $Y = Y_{max}$, con Y_{max} una funzione del problema considerato . Nella regione interna le equazioni sono:

Equazioni di Navier Stokes non dimensionali per la regione microscopica (interna)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{2.1}$$

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{2.2}$$

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \tag{2.3}$$

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \tag{2.4}$$

Equazioni di Navier Stokes non dimensionali per la regione macroscopica (esterna)

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}+\frac{\partial W}{\partial Z}=0, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}+W\frac{\partial U}{\partial Z}=-\frac{\partial P}{\partial X}+Re^{-1}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}\right), \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+U\frac{\partial V}{\partial X}+V\frac{\partial V}{\partial Y}+W\frac{\partial V}{\partial Z}=-\frac{\partial P}{\partial Y}+Re^{-1}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}\right), \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}+U\frac{\partial W}{\partial X}+V\frac{\partial W}{\partial Y}+W\frac{\partial W}{\partial Z}=-\frac{\partial P}{\partial Z}+Re^{-1}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial Z^2}\right), \tag{2.8}$$

Nelle equaioni precedenti , $\mathcal{R}e= \mathcal{U}\mathrm{l}/\nu$, è il numero di Reynolds microscopico , $Re = UL/\nu$ è il numero di Reynolds macroscopico ; dove $\mathcal{U}$ e U sono la scala di velocità rispettivamente nel dominio interno ed esterno, la pressione nella regione interna vicina alla parete è normalmente con la pressione viscosa , $\mu\mathcal{U}/l$, , e nella regione esterna la scala della pressione è la pressione dinamica , ρU^2. Le scale di velocità interna ($\mathcal{U}$) e esterna (U) sono correlate da $\mathcal{U} = \epsilon U$, e anche $(X, Y, Z) = \epsilon(x, y, z)$. I due sistemi sono accoppiati su un piano dell'interfaccia (posizionato per scopi numerici ad una distanza finita dalla superficie solida , in $y = y_\infty$) sufficientemente lontano dal muro in modo che (u, v, w) e p diventino indipendenti dalle coordinate della microscala) ,e lì viene imposta che la velocità e le componenti di trazione sono continue

$$U = \epsilon u \tag{2.9}$$

$$V = \epsilon v \tag{2.10}$$

$$W = \epsilon w \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial Y}+\frac{\partial V}{\partial X} \tag{2.12}$$

$$-p+2\frac{\partial v}{\partial y}=-ReP+2\frac{\partial V}{\partial Y} \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial z}=+\frac{\partial W}{\partial Y}+\frac{\partial V}{\partial Y} \tag{2.14}$$

Per semplificare le notazioni , i termini di forzatura esterni saranno indicate come segue:

$$S^{T_X} = \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \tag{2.15}$$

$$S^{T_Z} = \frac{\partial W}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial Z} \tag{2.16}$$

$$S^{N} = -ReP + 2\frac{\partial V}{\partial Y} \tag{2.17}$$

2.1 Espansione in ϵ

Come accennato in precedenza, si suggerisce di esprimere le variabili nella regione vicino al muro come una serie di potenze di ϵ i.e.

$$\begin{aligned} u &= u^{(0)} + \epsilon u^{(1)} + \epsilon^2 u^{(2)} + ... \\ v &= v^{(0)} + \epsilon v^{(1)} + \epsilon^2 v^{(2)} + ... \\ w &= w^{(0)} + \epsilon w^{(1)} + \epsilon^2 w^{(2)} + ... \\ p &= p^{(0)} + \epsilon p^{(1)} + \epsilon^2 p^{(2)} + ... \end{aligned} \tag{2.18}$$

e usando la regola della catena, l'operatore $\frac{\partial}{\partial x}$ può anche essere scritto come

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial}{\partial X} \tag{2.19}$$

Dove Se inseriamo le espressioni di sopra nell'equazione della regione interna, otteniamo le seguenti equazioni in un ordine diverso di ϵ.

2.2 Equazione dell'ordine di lettura ($\mathcal{O}(\epsilon^0)$)

Dopo aver fatto i passaggi, le equazioni di conservazione di massa e momento ad ordine zero rispetto a epsilon $O(\epsilon^0)$ sono:

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial w^{(0)}}{\partial z} = 0 \tag{2.20}$$

$$-\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial z^2} \right) = 0 \tag{2.21}$$

$$-\frac{\partial p^{(0)}}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial z^2} \right) = 0 \tag{2.22}$$

$$-\frac{\partial p^{(0)}}{\partial z}+\left(\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial z^2}\right)=0 \tag{2.23}$$

E riferite alle condizioni limite in y_∞ sono:

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial y}+\frac{\partial v^{(0)}}{\partial x}=S^{T_x} \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial w^{(0)}}{\partial y}+\frac{\partial v^{(0)}}{\partial z}=S^{T_z} \tag{2.25}$$

$$-p^{(0)}+2\frac{\partial v^{(0)}}{\partial y}=S^N \tag{2.26}$$

supponendo che la trazione esterna agisca sul campo in ordine di marcia.a causa della linearità possiamo quindi assumere che le incognite assumano la seguente forma:

$$u^{(0)}=u^\dagger S^{T_x}+u^\ddagger S^{T_z} \tag{2.27}$$

$$v^{(0)}=v^\dagger S^{T_x}+v^\ddagger S^{T_z} \tag{2.28}$$

$$w^{(0)}=w^\dagger S^{T_x}+w^\ddagger S^{T_z} \tag{2.29}$$

$$p^{(0)}=p^\dagger S^{T_x}+p^\ddagger S^{T_z}-S^N \tag{2.30}$$

I coefficienti $u_i^\dagger$,$u_i^\ddagger$, $p^\dagger$ e $p^\ddagger$ dipendono solo dalla variabile microscala.collegandosi alle equazioni di conservazione di massa e momento ad ordine zero rispetto a epsilon $0(\epsilon(0))$ ricavato sopra, è facile trovare i problemi ausiliari che valgono per le funzioni microscopiche.Che sono:

Sistema 1: dipendenza da S^{T_x}

$$\frac{\partial u^\dagger}{\partial x}+\frac{\partial v^\dagger}{\partial y}+\frac{\partial w^\dagger}{\partial z}=0 \tag{2.31}$$

$$-\frac{\partial p^\dagger}{\partial x}+\frac{\partial^2 u^\dagger}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u^\dagger}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u^\dagger}{\partial z^2}=0 \tag{2.32}$$

$$-\frac{\partial p^\dagger}{\partial y}+\frac{\partial^2 v^\dagger}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v^\dagger}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v^\dagger}{\partial z^2}=0 \tag{2.33}$$

$$-\frac{\partial p^\dagger}{\partial z}+\frac{\partial^2 w^\dagger}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w^\dagger}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w^\dagger}{\partial z^2}=0 \tag{2.34}$$

Ora riferito a $u_i^\dagger=0$,a $y=y_{wall}$, a y=y_∞le equazione diventano:

$$\frac{\partial u^\dagger}{\partial y} + \frac{\partial v^\dagger}{\partial x} = 1 \tag{2.35}$$

$$\frac{\partial w^\dagger}{\partial y} + \frac{\partial v^\dagger}{\partial z} = 0 \tag{2.36}$$

$$-p^\dagger + 2\frac{\partial v^\dagger}{\partial y} = 0 \tag{2.37}$$

Sistema 2: dipendenza da S^{T_z}

$$\frac{\partial u^\ddagger}{\partial x} + \frac{\partial v^\ddagger}{\partial y} + \frac{\partial w^\ddagger}{\partial z} = 0 \tag{2.38}$$

$$-\frac{\partial p^\ddagger}{\partial x} + \frac{\partial^2 u^\ddagger}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^\ddagger}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^\ddagger}{\partial z^2} = 0 \tag{2.39}$$

$$-\frac{\partial p^\ddagger}{\partial y} + \frac{\partial^2 v^\ddagger}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^\ddagger}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^\ddagger}{\partial z^2} = 0 \tag{2.40}$$

$$-\frac{\partial p^\ddagger}{\partial z} + \frac{\partial^2 w^\ddagger}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^\ddagger}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w^\ddagger}{\partial z^2} = 0 \tag{2.41}$$

Ora riferito a $u_i^\ddagger = o$,a $y = y_w all$, a y=y_∞le equazione diventano:

$$\frac{\partial u^\ddagger}{\partial y} + \frac{\partial v^\ddagger}{\partial x} = 0 \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial w^\ddagger}{\partial y} + \frac{\partial v^\ddagger}{\partial z} = 1 \tag{2.43}$$

$$-p^\ddagger + 2\frac{\partial v^\ddagger}{\partial y} = 0 \tag{2.44}$$

Per quanto riguarda la forzatura da stress normale S^N ,questo è già stato spiegato esprimendo $p^{(0)}$ come dato in (2.30)

2.3 Equazioni di ordine $O(\epsilon)$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial w^{(1)}}{\partial z} = -\left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial X} + \frac{\partial v^{(0)}}{\partial Y} + \frac{\partial w^{(0)}}{\partial Z}\right) \tag{2.45}$$

$$-\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial z^2}\right) = \tag{2.46}$$

$$= \frac{\partial p^{(0)}}{\partial X} - 2\left(\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial x \partial X} + \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial y \partial Y} + \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial z \partial Z}\right) \tag{2.47}$$

$$-\frac{\partial p^{(1)}}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial z^2}\right) = \tag{2.48}$$

$$= \frac{\partial p^{(0)}}{\partial Z} - 2\left(\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial x \partial X} + \frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial y \partial Y} + \frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial z \partial Z}\right) \tag{2.49}$$

$$-\frac{\partial p^{(1)}}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial z^2}\right) = \tag{2.50}$$

$$= \frac{\partial p^{(0)}}{\partial Z} - 2\left(\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial x \partial X} + \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial y \partial Y} + \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial z \partial Z}\right) \tag{2.51}$$

insieme a aderenza sulle pareti e alle condizioni che seguono in $y = y_\infty$:

$$\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} = -\frac{\partial v^{(0)}}{\partial X} - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial Y} \tag{2.52}$$

$$-p^{(1)} + 2\frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} = -2\frac{\partial v^{(0)}}{\partial Y} \tag{2.53}$$

$$\frac{\partial v^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(1)}}{\partial y} = -\frac{\partial v^{(0)}}{\partial Z} - \frac{\partial w^{(0)}}{\partial Y} \tag{2.54}$$

sostituiamo $u_i^{(0)}$ e $P^{(0)}$ nelle equazione del momento e continuita precedenti

$$u^{(0)} = u^\dagger S^{T_x} + u^\ddagger S^{T_z} \tag{2.55}$$

$$v^{(0)} = v^\dagger S^{T_x} + v^\ddagger S^{T_z} \tag{2.56}$$

$$w^{(0)} = w^\dagger S^{T_x} + w^\ddagger S^{T_z} \tag{2.57}$$

$$p^{(0)} = p^\dagger S^{T_x} + p^\ddagger S^{T_z} - S^N \tag{2.58}$$

e ricaviamo per la continuità

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial v^{(1)}}{\partial y}+\frac{\partial w^{(1)}}{\partial z}=-\left(u^{\dagger}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial X}+v^{\dagger}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial Y}+w^{\dagger}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial Z}\right)-\left(u^{\ddagger}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial X}+v^{\ddagger}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial Y}+w^{\ddagger}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial Z}\right) \tag{2.59}$$

e per il momento ricaviamo

$$-\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial z^2}\right)=p^{\dagger}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial X}+p^{\ddagger}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial X}-\frac{\partial S^{N}}{\partial X}- \tag{2.60}$$

$$-\left(2\frac{\partial u^{\dagger}}{\partial x}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial X}+2\frac{\partial u^{\dagger}}{\partial y}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial Y}+2\frac{\partial u^{\dagger}}{\partial z}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial Z}\right)-\left(2\frac{\partial u^{\ddagger}}{\partial x}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial X}+2\frac{\partial u^{\ddagger}}{\partial y}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial Y}+2\frac{\partial u^{\ddagger}}{\partial z}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial Z}\right) \tag{2.61}$$

$$-\frac{\partial p^{(1)}}{\partial y}+\left(\frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial z^2}\right)=p^{\dagger}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial Y}+p^{\ddagger}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial Y}-\frac{\partial S^{N}}{\partial Y}- \tag{2.62}$$

$$-\left(2\frac{\partial v^{\dagger}}{\partial x}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial X}+2\frac{\partial v^{\dagger}}{\partial y}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial Y}+2\frac{\partial v^{\dagger}}{\partial z}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial Z}\right)-\left(2\frac{\partial v^{\ddagger}}{\partial x}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial X}+2\frac{\partial v^{\ddagger}}{\partial y}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial Y}+2\frac{\partial v^{\ddagger}}{\partial z}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial Z}\right) \tag{2.63}$$

$$-\frac{\partial p^{(1)}}{\partial z}+\left(\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial z^2}\right)=p^{\dagger}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial Z}+p^{\ddagger}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial Z}-\frac{\partial S^{N}}{\partial Z}- \tag{2.64}$$

$$-\left(2\frac{\partial w^{\dagger}}{\partial x}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial X}+2\frac{\partial w^{\dagger}}{\partial y}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial Y}+2\frac{\partial w^{\dagger}}{\partial z}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial Z}\right)-\left(2\frac{\partial w^{\ddagger}}{\partial x}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial X}+2\frac{\partial w^{\ddagger}}{\partial y}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial Y}+2\frac{\partial w^{\ddagger}}{\partial z}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial Z}\right) \tag{2.65}$$

Insieme alla periodicità in x e z, aderenza sulle preti e la seguente condizione al contorno in y_∞:

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}+\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x}=-v^{\dagger}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial X}-v^{\ddagger}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial X}-u^{\dagger}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial Y}-u^{\ddagger}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial Y} \tag{2.66}$$

$$-p^{(1)}+2\frac{\partial v^{(1)}}{\partial y}=-2v^{\dagger}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial Y}-2v^{\ddagger}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial Y} \tag{2.67}$$

$$\frac{\partial v^{(1)}}{\partial z}+\frac{\partial w^{(1)}}{\partial y}=-v^{\dagger}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial Z}-v^{\ddagger}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial Z}-w^{\dagger}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial Y}-w^{\ddagger}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial Y} \tag{2.68}$$

allora implica che l'equazione della continuità e momento sopra ammettono soluzione sotto forma:

$$u_1^{(1)} = \left(\hat{u}_{11}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial X} + \hat{u}_{12}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial Y} + \hat{u}_{13}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial Z}\right) + \left(\tilde{u}_{11}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial X} + \tilde{u}_{12}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial Y} + \tilde{u}_{13}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial Z}\right) + \tag{2.69}$$

$$+ \left(\breve{u}_{11}\frac{\partial S^{N}}{\partial X} + \breve{u}_{12}\frac{\partial S^{N}}{\partial Y} + \breve{u}_{13}\frac{\partial S^{N}}{\partial Z}\right) \tag{2.70}$$

$$u_2^{(1)} = \left(\hat{u}_{21}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial X} + \hat{u}_{22}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial Y} + \hat{u}_{23}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial Z}\right) + \left(\tilde{u}_{21}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial X} + \tilde{u}_{22}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial Y} + \tilde{u}_{23}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial Z}\right) + \tag{2.71}$$

$$+ \left(\breve{u}_{11}\frac{\partial S^{N}}{\partial X} + \breve{u}_{12}\frac{\partial S^{N}}{\partial Y} + \breve{u}_{13}\frac{\partial S^{N}}{\partial Z}\right) \tag{2.72}$$

$$u_3^{(1)} = \left(\hat{u}_{31}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial X} + \hat{u}_{32}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial Y} + \hat{u}_{33}\frac{\partial S^{T_x}}{\partial Z}\right) + \left(\tilde{u}_{31}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial X} + \tilde{u}_{32}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial Y} + \tilde{u}_{33}\frac{\partial S^{T_z}}{\partial Z}\right) + \tag{2.73}$$

$$+ \left(\breve{u}_{31}\frac{\partial S^{N}}{\partial X} + \breve{u}_{32}\frac{\partial S^{N}}{\partial Y} + \breve{u}_{33}\frac{\partial S^{N}}{\partial Z}\right) \tag{2.74}$$

$$p^{(1)} = \left(\hat{p}_1\frac{\partial S^{T_x}}{\partial X} + \hat{p}_2\frac{\partial S^{T_x}}{\partial Y} + \hat{p}_3\frac{\partial S^{T_x}}{\partial Z}\right) + \left(\tilde{p}_1\frac{\partial S^{T_z}}{\partial X} + \tilde{p}_2\frac{\partial S^{T_z}}{\partial Y} + \tilde{p}_3\frac{\partial S^{T_z}}{\partial Z}\right) + \tag{2.75}$$

$$+ \left(\breve{p}_1\frac{\partial S^{N}}{\partial X} + \breve{p}_2\frac{\partial S^{N}}{\partial Y} + \breve{p}_3\frac{\partial S^{N}}{\partial Z}\right) \tag{2.76}$$

In modo che sorgano tre serie di problemi:

-Sistema 3-5: dipendenza dal gradiente di S^{T_x}

$$\frac{\partial \hat{u}_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{u}_{31}}{\partial z} = -u_1^{\dagger} \tag{2.77}$$

$$-\frac{\partial \hat{p}_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{11}}{\partial z^2}\right) = p^{\dagger} - 2\frac{\partial u^{\dagger}}{\partial x} \tag{2.78}$$

$$-\frac{\partial \hat{p}_1}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{21}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{21}}{\partial z^2}\right) = -2\frac{\partial v^{\dagger}}{\partial x} \tag{2.79}$$

$$-\frac{\partial \hat{p}_1}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{31}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{31}}{\partial z^2}\right) = -2\frac{\partial w^{\dagger}}{\partial x} \tag{2.80}$$

la condizione al contorno a y_∞ è:

$$\frac{\partial \hat{u}_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_{11}}{\partial y} = -v^\dagger \tag{2.81}$$

$$-\hat{p}_1 + 2\frac{\partial \hat{u}_{21}}{\partial y} = 0 \tag{2.82}$$

$$\frac{\partial \hat{u}_{21}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{u}_{31}}{\partial y} = 0 \tag{2.83}$$

$$\frac{\partial \hat{u}_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{u}_{32}}{\partial z} = -u_2^\dagger \tag{2.84}$$

$$-\frac{\partial \hat{p}_2}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{12}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{12}}{\partial z^2}\right) = -2\frac{\partial u^\dagger}{\partial y} \tag{2.85}$$

$$-\frac{\partial \hat{p}_2}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{22}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{22}}{\partial z^2}\right) = -2\frac{\partial v^\dagger}{\partial y} \tag{2.86}$$

$$-\frac{\partial \hat{p}_2}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_{32}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{32}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{32}}{\partial z^2}\right) = -2\frac{\partial w^\dagger}{\partial y} \tag{2.87}$$

la condizione al contorno a y_∞ è:

$$\frac{\partial \hat{u}_{22}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_{12}}{\partial y} = 0 \tag{2.88}$$

$$-\hat{p}_2 + 2\frac{\partial \hat{u}_{22}}{\partial y} = -v^\dagger \tag{2.89}$$

$$\frac{\partial \hat{u}_{22}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{u}_{32}}{\partial y} = 0 \tag{2.90}$$

$$\frac{\partial \hat{u}_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{u}_{33}}{\partial z} = -u_3^\dagger \tag{2.91}$$

$$-\frac{\partial \hat{p}_3}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{13}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{13}}{\partial z^2}\right) = -2\frac{\partial u^\dagger}{\partial z} \tag{2.92}$$

$$-\frac{\partial \hat{p}_3}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{23}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{23}}{\partial z^2}\right) = -2\frac{\partial v^\dagger}{\partial z} \tag{2.93}$$

$$-\frac{\partial \hat{p}_3}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_{32}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{32}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{32}}{\partial z^2}\right) = -2\frac{\partial w^\dagger}{\partial z} \tag{2.94}$$

la condizione al contorno a y_∞ è

$$\frac{\partial \hat{u}_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_{13}}{\partial y} = 0 \tag{2.95}$$

$$-\hat{p}_3 + 2\frac{\partial \hat{u}_{23}}{y} = 0 \tag{2.96}$$

$$\frac{\partial \hat{u}_{23}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{u}_{32}}{\partial y} = -v^{\dagger} \tag{2.97}$$

-Sistema 6-8: dipendenza dal gradiente di S^{T_z}

$$\frac{\partial \tilde{u}_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_{31}}{\partial z} = -u_1^{\ddagger} \tag{2.98}$$

$$-\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{11}}{\partial z^2}\right) = p^{\ddagger} - 2\frac{\partial u^{\ddagger}}{\partial x} \tag{2.99}$$

$$-\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{21}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{21}}{\partial z^2}\right) = -2\frac{\partial v^{\ddagger}}{\partial x} \tag{2.100}$$

$$-\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{31}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{31}}{\partial z^2}\right) = -2\frac{\partial w^{\ddagger}}{\partial x} \tag{2.101}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_{22}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{u}_{32}}{\partial y} = 0 \tag{2.102}$$

la condizione al contorno a y_∞ è

$$\frac{\partial \tilde{u}_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_{11}}{\partial y} = -v^{\ddagger} \tag{2.103}$$

$$-\tilde{p}_1 + 2\frac{\partial \tilde{u_{21}}}{\partial y} = 0 \tag{2.104}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_{21}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{u}_{31}}{\partial y} = 0 \tag{2.105}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_{32}}{\partial z} = -u_2^{\dagger} \tag{2.106}$$

$$-\frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{12}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{12}}{\partial z^2}\right) = -2\frac{\partial u^{\ddagger}}{\partial y} \tag{2.107}$$

$$-\frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{22}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{22}}{\partial z^2}\right) = -2\frac{\partial v^{\ddagger}}{\partial y} \tag{2.108}$$

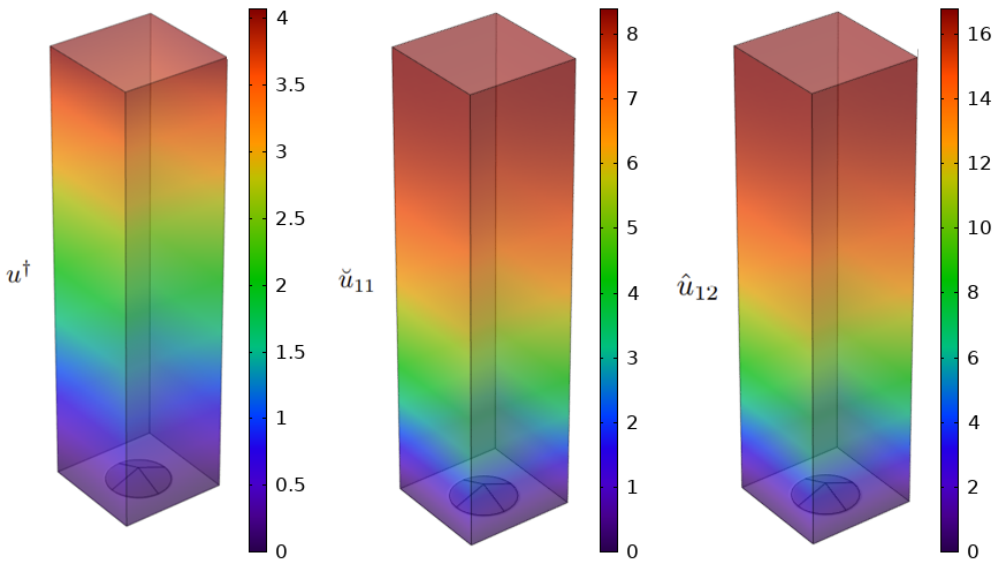

Figure 2.2: Campi di $u^\dagger$, $\breve{u}_{11}$ e $\hat{u}_{12}$ per rugosità conica *inline*.

$$-\frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_{32}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{32}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{32}}{\partial z^2} \right) = -2\frac{\partial w^\ddagger}{\partial y} \tag{2.109}$$

la condizione al contorno a y_∞ è

$$\frac{\partial \tilde{u}_{22}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_{12}}{\partial y} = 0 \tag{2.110}$$

$$-\tilde{p}_2 + 2\frac{\partial \tilde{u}_{22}}{\partial y} = -v^\ddagger \tag{2.111}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_{22}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{u}_{32}}{\partial y} = 0 \tag{2.112}$$

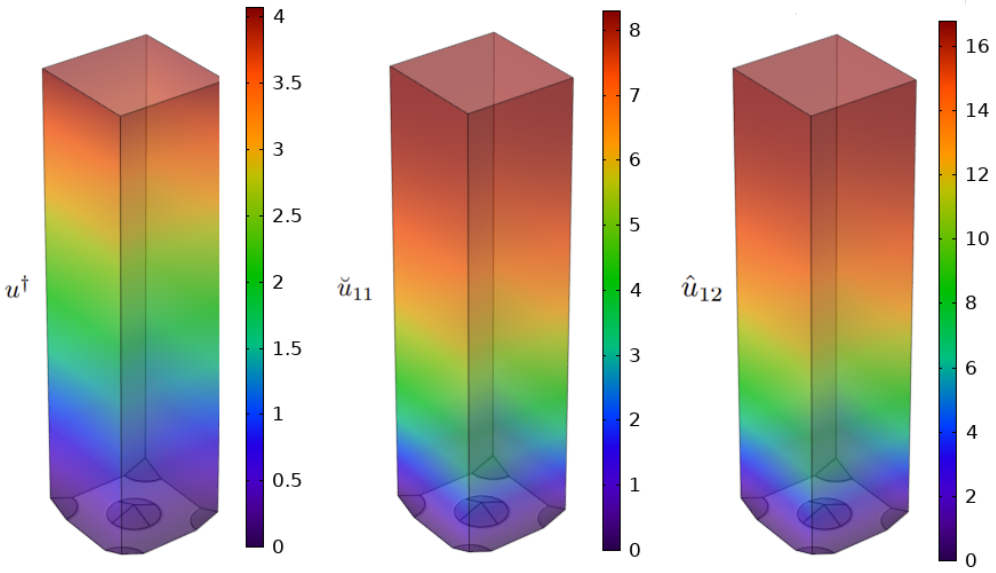

Figure 2.3: Campi di $u^\dagger$, $\breve{u}_{11}$ e $\hat{u}_{12}$ per rugosità conica*staggered*.

$$\frac{\partial \tilde{u}_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_{33}}{\partial z} = -u_3^\dagger \tag{2.113}$$

$$-\frac{\partial \tilde{p}_3}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{13}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{13}}{\partial z^2} \right) = -2\frac{\partial u^\ddagger}{\partial z} \tag{2.114}$$

$$-\frac{\partial \tilde{p}_3}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{23}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{23}}{\partial z^2} \right) = -2\frac{\partial v^\ddagger}{\partial z} \tag{2.115}$$

$$-\frac{\partial \tilde{p}_3}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_{32}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{32}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{32}}{\partial z^2} \right) = -2\frac{\partial w^\ddagger}{\partial z} \tag{2.116}$$

la condizione al contorno a y_∞ è

$$\frac{\partial \tilde{u}_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_{13}}{\partial y} = 0 \tag{2.117}$$

$$-\tilde{p}_3 + 2\frac{\partial \tilde{u}_{23}}{y} = 0 \tag{2.118}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_{23}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{u}_{32}}{\partial y} = -v^\ddagger \tag{2.119}$$

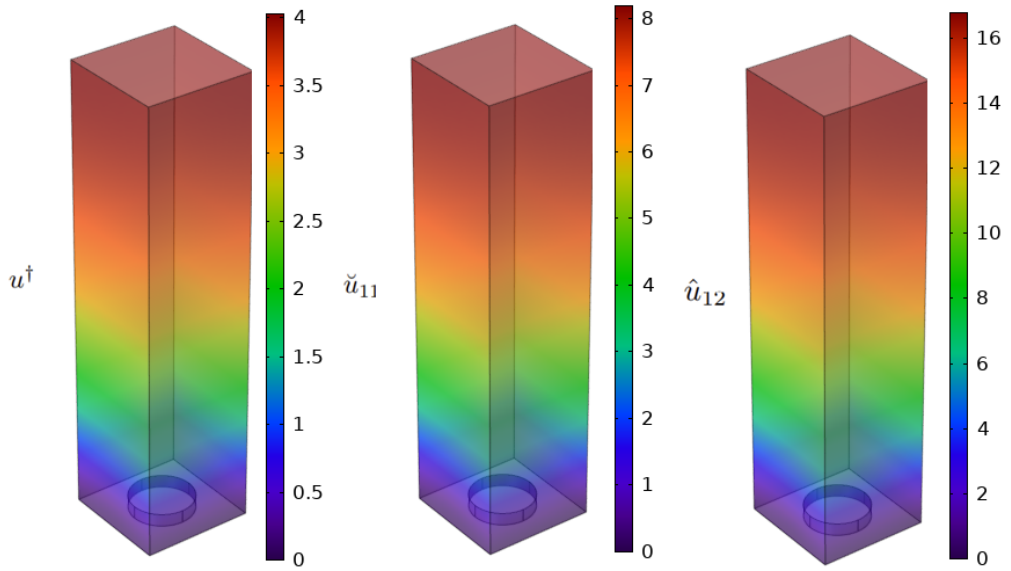

Figure 2.4: Campi di $u^\dagger$, $\breve{u}_{11}$ e $\hat{u}_{12}$ per rugosità cilindrica *inline*.

-Sistemi 10-12: dipendenza dal gradiente di S^N

$$\frac{\partial \breve{u}_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \breve{u}_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \breve{u}_{31}}{\partial z} = 0 \tag{2.120}$$

$$-\frac{\partial \breve{p}_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 \breve{u}_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \breve{u}_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \breve{u}_{11}}{\partial z^2} \right) = -1 \tag{2.121}$$

$$-\frac{\partial \breve{p}_1}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 \breve{u}_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \breve{u}_{21}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \breve{u}_{21}}{\partial z^2} \right) = 0 \tag{2.122}$$

$$-\frac{\partial \breve{p}_1}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 \breve{u}_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \breve{u}_{31}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \breve{u}_{31}}{\partial z^2} \right) = 0 \tag{2.123}$$

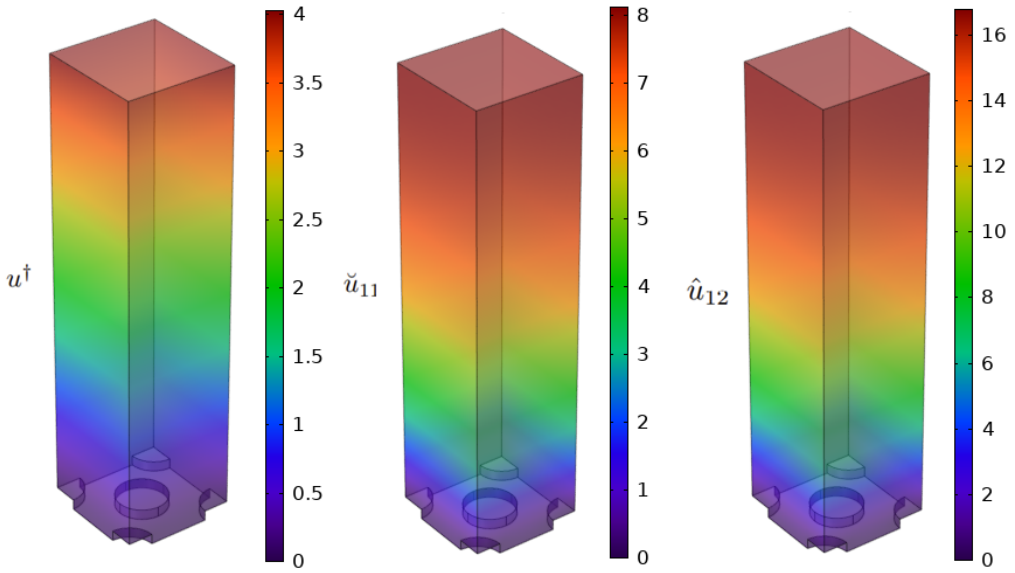

Figure 2.5: Campi di $u^\dagger$, $\breve{u}_{11}$ e $\hat{u}_{12}$ per rugosità conica *staggered*.

la condizione al contorno a y_∞ è:

Per $j = 1$

$$\frac{\partial \breve{u}_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \breve{u}_{11}}{\partial y} = 0 \tag{2.124}$$

$$-\breve{p}_1 + 2\frac{\partial \breve{u}_{21}}{\partial y} = 0 \tag{2.125}$$

$$\frac{\partial \breve{u}_{21}}{\partial z} + \frac{\partial \breve{u}_{31}}{\partial y} = 0 \tag{2.126}$$

$$\frac{\partial \breve{u}_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \breve{u}_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \breve{u}_{32}}{\partial z} = 0 \tag{2.127}$$

$$-\frac{\partial \breve{p}_2}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 \breve{u}_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \breve{u}_{12}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \breve{u}_{12}}{\partial z^2}\right) = 0 \tag{2.128}$$

$$-\frac{\partial \breve{p}_2}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 \breve{u}_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \breve{u}_{22}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \breve{u}_{22}}{\partial z^2}\right) = -1 \tag{2.129}$$

$$-\frac{\partial \breve{p}_2}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 \breve{u}_{32}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \breve{u}_{32}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \breve{u}_{32}}{\partial z^2}\right) = 0 \tag{2.130}$$

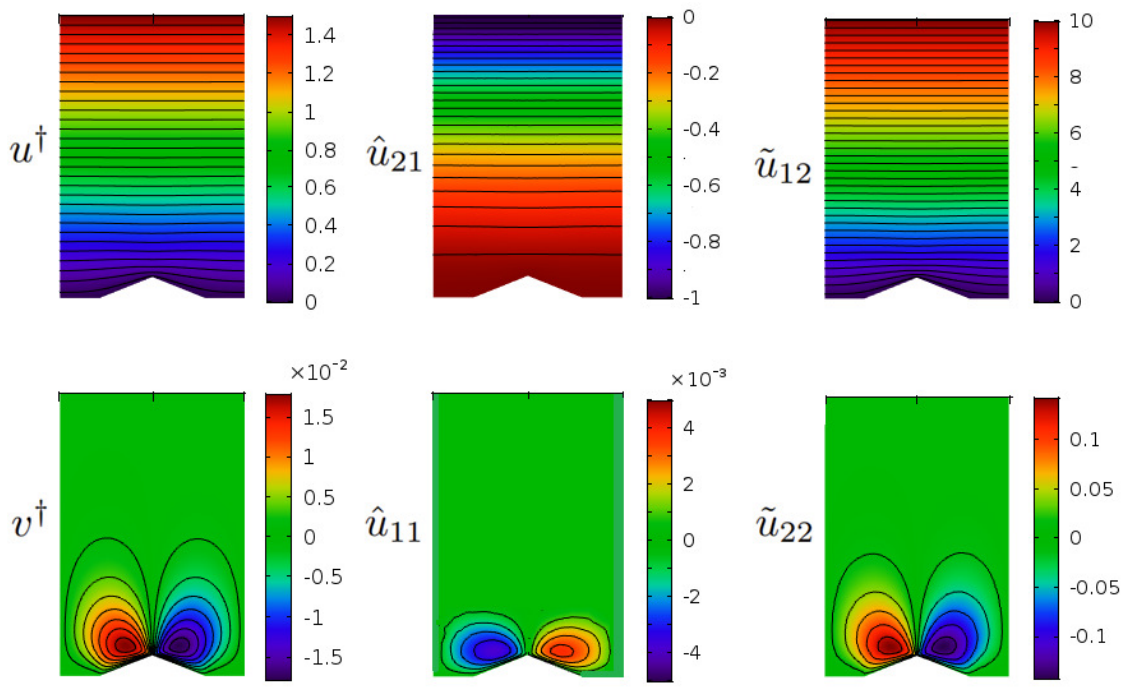

Figure 2.6: Isolinee di variabili diverse da zero (riga superiore) $u^\dagger$, $\breve{u}_{12}$ e $\hat{u}_{21}$ e quantità simmetriche $v^\dagger$, $\breve{u}_{22}$ e $\hat{u}_{11}$ su un piano di taglio per concentrarsi sul comportamento vicino alla rugosità conica. Soluzioni simili possono essere facilmente ottenute per rugosità cilindriche.

la condizione al contorno a y_∞ è:

$$\frac{\partial \breve{u}_{22}}{\partial x} + \frac{\partial \breve{u}_{12}}{\partial y} = 0 \tag{2.131}$$

$$-\breve{p}_2 + 2\frac{\partial \breve{u}_{22}}{\partial y} = 0 \tag{2.132}$$

$$\frac{\partial \breve{u}_{22}}{\partial z} + \frac{\partial \breve{u}_{32}}{\partial y} = 0 \tag{2.133}$$

$$\frac{\partial \breve{u}_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \breve{u}_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \breve{u}_{33}}{\partial z} = 0 \tag{2.134}$$

$$-\frac{\partial \breve{p}_3}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 \breve{u}_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \breve{u}_{13}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \breve{u}_{13}}{\partial z^2}\right) = 0 \tag{2.135}$$

$$-\frac{\partial \breve{p}_3}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 \breve{u}_{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \breve{u}_{23}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \breve{u}_{23}}{\partial z^2} \right) = 0 \tag{2.136}$$

$$-\frac{\partial \breve{p}_3}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 \breve{u}_{33}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \breve{u}_{33}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \breve{u}_{33}}{\partial z^2} \right) = -1 \tag{2.137}$$

la condizione al contorno a y_∞ è:

$$\frac{\partial \breve{u}_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \breve{u}_{13}}{\partial y} = 0 \tag{2.138}$$

$$-\breve{p}_3 + 2\frac{\partial \breve{u}_{23}}{y} = 0 \tag{2.139}$$

$$\frac{\partial \breve{u}_{23}}{\partial z} + \frac{\partial \breve{u}_{32}}{\partial y} = 0 \tag{2.140}$$

2.4 Le condizioni effettive

Introduciamo anche la pressione adimensionale, P, normalizzata da ρU^2, con ρ il fluido. Le condizioni per il flusso esterno possono essere imposte scegliendo un qualsiasi valore di y_∞ e possono essere applicate a $Y = 0$. in questo caso hanno:

$$U|_{Y=0} = \epsilon\lambda S^{T_X}|_{Y=0} - \epsilon^2 Re(m_{12})\frac{\partial S^{T_N}}{\partial X}|_{Y=0} + 0(\epsilon^3), \tag{2.141}$$

$$V|_{Y=0} = \epsilon^2(m_{12})\left[\frac{\partial S^{T_X}}{\partial X} + \frac{\partial S^{T_Z}}{\partial Z}\right]|_{Y=0} + 0(\epsilon^3), \tag{2.142}$$

$$W|_{Y=0} = \epsilon\lambda S^{T_Z}|_{Y=0} - \epsilon^2 Re(m_{12})\frac{\partial S^{T_N}}{\partial Z}|_{Y=0} + 0(\epsilon^3), \tag{2.143}$$

Va notato che, poiché la velocità di traspirazione V è $O(\epsilon^2)$, sostituendo $S^{T_X}, S^{T_Z}, S^{T_N}$ con le loro equazioni rispettivamente (2.15 2.16 2.17), le equazioni (2.141 2.142 2.143) possono essere scritte, con lo stesso ordine formale di accuratezza, come segue:

$$U|_{Y=0} = \epsilon\lambda\frac{\partial U}{\partial Y}|_{Y=0} - \epsilon^2 Re(m_{12})\frac{\partial P}{\partial X}|_{Y=0} + 0(\epsilon^3), \tag{2.144}$$

$$V|_{Y=0} = \epsilon^2(m_{12})\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}|_{Y=0} + 0(\epsilon^3), \tag{2.145}$$

$$W|_{Y=0} = \epsilon\lambda\frac{\partial W}{\partial Y}|_{Y=0} - \epsilon^2 Re(m_{12})\frac{\partial P}{\partial Z}|_{Y=0} + 0(\epsilon^3), \tag{2.146}$$

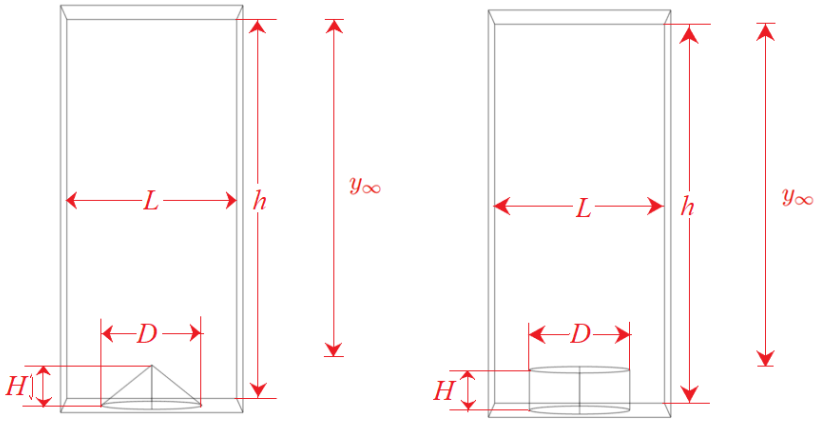

Figure 2.7: Vista dimensionale di un RVE (elemento volumetrico rappresentativo) per rugosità conica (sinistra) e cilindrica (destra).

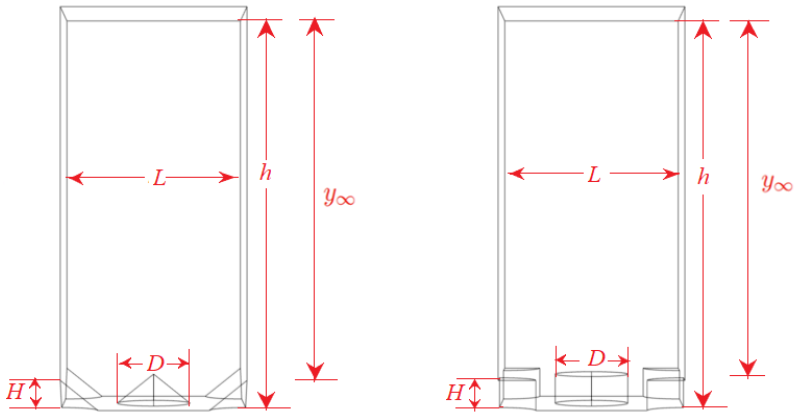

Figure 2.8: Vista dimensionale di un RVE (elemento volumetrico rappresentativo) per rugosità conica (sinistra) e cilindrica (destra).

con (m_{12}) ,il coefficiente di permeabilità superficiale, correlato al fatto che è consentita la traspirazione del fluido a parete fittizia (in Y = 0); **coefficienti di correlazione**

$$n_{12} = -n_{21} = \frac{\bar{y}^2}{2} + \lambda\bar{y} + m_{12} \tag{2.147}$$

$$\gamma = \frac{dn_{12}}{d\bar{y}} = \bar{y} + \lambda \tag{2.148}$$

Table 2.1: Variabili microscopiche valutate a y_∞ per differenti altezze H, scabrezza conica.

	inline			
H/D	y_∞	$u^\dagger = w^\ddagger$	$-\hat{u}_{21} = \breve{u}_{11} = -\tilde{u}_{23} = \breve{u}_{33}$	$\hat{u}_{12} = \tilde{u}_{32}$
0.1	2	2.05058	2.10186	4.20469
0.1	3	3.05058	4.65207	9.30574
0.1	4	4.05058	8.20205	16.40689
0.2	2	2.09694	2.19807	4.39659
0.2	3	3.09694	4.79443	9.59012
0.2	4	4.09694	8.39093	16.78376
0.4	2	2.17370	2.36403	4.72372
0.4	3	3.17370	5.03585	10.07083
0.4	4	4.17370	8.70918	17.41604
	staggered			
0.1	2	2.03878	2.07840	4.15634
0.1	3	3.03878	4.61713	9.23379
0.1	4	4.03878	8.15610	16.31124
0.2	2	2.07359	2.15023	4.29820
0.2	3	3.07359	4.72368	9.44536
0.2	4	4.07359	8.29722	16.59212
0.4	2	2.12872	2.26768	4.52829
0.4	3	3.12872	4.89659	9.78672
0.4	4	4.12872	8.52505	17.04245

Table 2.2: Caption

Table 2.3: Variazione dei coefficienti con H/D, scabrezza conica.

	inline		
H/D	0.1	0.2	0.4
λ	0.05058	0.09694	0.17370
$m_{12} = -m_{21}$	0.00115	0.00426	0.01400
	staggered		
H/D	0.1	0.2	0.4
λ	0.03878	0.07359	0.12857
$m_{12} = -m_{21}$	0.00056	0.00184	0.00675

Table 2.4: Variabili microscopiche valutate a y_∞ per differenti altezze H, scabrezza cilindrica.

	inline			
H/D	y_∞	$u^\dagger = w^\ddagger$	$-\hat{u}_{21} = \breve{u}_{11} = -\tilde{u}_{23} = \breve{u}_{33}$	$\hat{u}_{12} = \tilde{u}_{32}$
0.1	2	2.03107	2.06277	4.11909
0.1	3	3.03107	4.59404	9.17760
0.1	4	4.03107	8.12511	16.23582
0.2	2	2.04757	2.09759	4.17353
0.2	3	3.04757	4.64519	9.26938
0.2	4	4.04757	8.19263	16.37516
0.4	2	2.06093	2.12676	4.23289
0.4	3	3.06093	4.68801	9.35388
0.4	4	4.06093	8.2489	16.46717
	staggered			
0.1	2	2.02010	2.04061	4.07223
0.1	3	3.02010	4.56079	8.82418
0.1	4	4.02010	8.08082	16.14874
0.2	2	2.02857	2.05837	4.10770
0.2	3	3.02857	4.58696	9.15980
0.2	4	4.02857	8.11541	16.21338
0.4	2	2.03390	2.06999	4.12960
0.4	3	3.03390	4.60380	9.19232
0.4	4	4.03390	8.18111	16.25693

Table 2.5: Variazione dei coefficienti con H/D, scabrezza cilindrica.

	inline		
H/D	0.1	0.2	0.4
λ	0.03107	0.04757	0.06093
$m_{12} = -m_{21}$	-0.00446	-0.00637	-0.00713

	staggered		
H/D	0.1	0.2	0.4
λ	0.02010	0.02857	0.03395
$m_{12} = -m_{21}$	-0.00506	-0.00556	-0.00700

Chapter 3

Analisi numerica

Tutte le equazioni microscopiche e macroscopiche trovate nelle sezioni seguenti sono state risolte numericamente tramite il software COMSOL Multiphysics [**COMSOL**].

3.1 Metodo di elementi finiti (FEM)

Il FEM è un metodo numerico di approssimazione che permette la resoluzione di equazione differenziali alle derivate parziali.Pertanto , consiste nella dicrezionalità di un dominio assegnato di elementi collegati tra loro in un numero finito di punti , con vertici agli elementi chiamati nodi,e in corrispondenza vengono valutate la componenti della funzione sconosciuta.

A esempio una funzione generica u(x) ,queste tipologie di equazioni ci interessa risolverle in un certo dominio[a,b], che sia limitato nella variabile indipendente.Per la prima cosa dobbiamo approssimare la funzione u(x),quindi il dominio viene discretizzato in n punti,cioè dividere il nostro dominio [a,b] in intervallini sufficientementi piccoli.La funzione u(x) è rappresentata da una linea continua, noi cerchiamo una soluzione approssimata $\bar{u}(x)$ descritta da una poligonale che approssimi la funzione u(x).Per farlo basta determinare i valori approssimati $\bar{u}_h$ della funzione esatta $u(x)$ nei nodi (punti) in quanto i valori fra i punti si potranno interpolare linearmente.In questo caso otteniamo un insieme di discreto e finito di valori $\bar{u}_h$.Il numero di punti è n e il numero delle incognite è (n-1) .Il valore $\bar{u}_h$ non è in ogni caso i valori della funzione esatta in corrispondenza ai nodi ,quindi $\bar{u}_h$ diverso da $u(x_h)$,come in figura sotto:

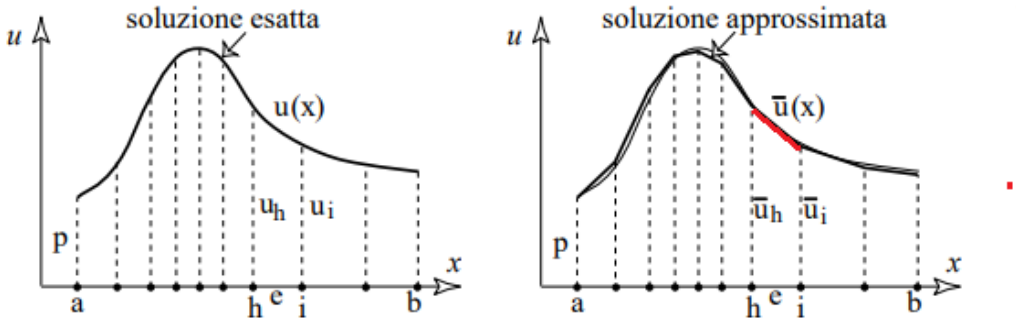

Figure 3.1: La funzione da determinare e la poligonale che la approssima

Ogni segmento di ciascun intervallo è rappresentato da un polinomio di primo grado (come il tratto della curva nell'intervallo [h,i] della figura sopra) seguente:

$$\bar{u}^e(x) = N_h^e(x)\bar{u}_h - N_{h+1}^e(x)\bar{u}_{h+1} \tag{3.1}$$

Dove $N_h^e(x)$ e $N_{h+1}^e(x)$ sono polinomi base lineari dell'interpolazione di Lagrange a due nodi:

$$N_h^e(x) = \frac{x_{h+1} - x}{x_{h+1} - x_h} \tag{3.2}$$

$$N_{h+1}^e(x) = \frac{x - x_h}{x_{h+1} - x_h} \tag{3.3}$$

La somma del polinomio $\bar{u}^e$ ci dà la funzione approssimata $\bar{u}$(x) seguente:

$$\bar{u}(x) = \sum_{h=1}^{n} \bar{u}^e(x) \tag{3.4}$$

La funzione di una o più variabili può anche essere espressa in modo approssimato come combinazione lineare di certe funzione $\jmath_j^e(x)$

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} \bar{u}_h \jmath_j^e(x) \tag{3.5}$$

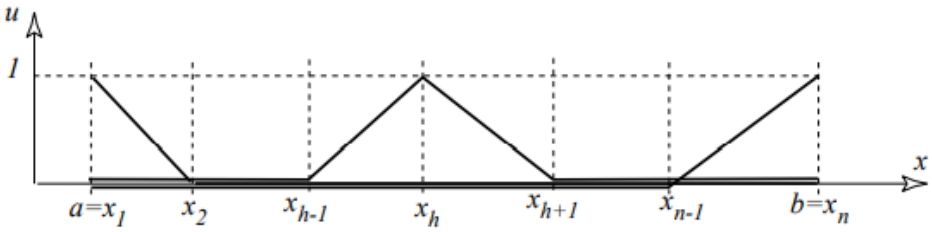

Figure 3.2: Funzione $\jmath_i^e$

3.2 Elementi finiti triangolari

Consideriamo elementi finiti triangolari di un problema bi-dimensionali

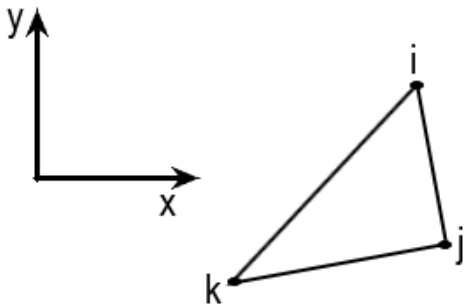

Figure 3.3: Elemento finito triangolare

Le più semplici funzioni base $\jmath_i^e$ che possono essere pensate sono di tipo lineare ,centrata nel modo i con valore unitario,mentre nulla nei due nodi:

$$\jmath^e - i = q_0 + q_1 x + q_2 y \tag{3.6}$$

con q_0, q_1, q_2 contanti dipendenti dalle coordinate nodali dell'elemento.
Le costanti possono essere calcolate imponendo che nella funzione $\jmath_i^e$ viene impostato un sistema di tre equazioni che rispettano le condizioni di validità

della funzione $\jmath_i^e$ sui nodi:

$$\begin{cases} q_0 + q_1 x_i + q_2 y_i = 1 \\ q_0 + q_1 x_j + q_2 y_j = 0 \\ q_0 + q_1 x_k + q_2 y_k = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

In modo sintetico si può scrivere

$$[D]\, q = b_1 \tag{3.8}$$

con $b_1$termini noti e $q(q_0, q_1, q_2)$,e la soluzione si ottiene invertendo la matrice:

$$q = [D]^{-1}\, b_1 \tag{3.9}$$

Il valore q della funzione $\jmath_i^e$ è pari alla prima colonna di D^{-1} , mentre cambiando il vettore dei termini noti con $b_2 = (0; 1; 0)^T$ e poi con $b_3 = (0; 0; 1)^T$,si ricavano i coefficienti del valore q rispettivamente di $\jmath_j^e$ e di $\jmath_k^e$.
Si può esprimere $\jmath_i^e$ nella forma

$$\jmath_i^e = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2A} \tag{3.10}$$

dove det(B) = 2A , e A è l'aria del triangolo i,j,k

3.3 Formulazione debole del problema microscopico

Le equazioni (2.31),(2.32) ,(2.33) e (2.34) devono essere risolte nella cella unitaria.Le condizioni a contorno devono essere tal a soddisfare la periodicità e di no-slip sul bordo della regione solida.L'approssimazione della soluzione deve essere datta dalle equazioni variazionali di Galerkin seguenti:

$$u^\dagger \simeq \ddot{u}_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \xi_j(x, y, z), \tag{3.11}$$

$$v^\dagger \simeq \ddot{v}_n = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \xi_j(x, y, z), \tag{3.12}$$

$$w^\dagger \simeq \ddot{w}_n = \sum_{j=1}^{n} \delta_j \xi_j(x, y, z), \tag{3.13}$$

$$p^\dagger \simeq \ddot{p}_n = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \eta_j(x, y, z), \tag{3.14}$$

dove n è il numero di triagoli nel quale si decompone il dominio e ξ_j e η_j, $j = 1, ..., n$ funzioni di base appropriate.Ci vuole risolvere:

$$\int_\Omega \eta_i \left[\frac{\partial \ddot{u}_n}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_n}{\partial y} + \frac{\partial \ddot{w}_n}{\partial z}\right] d\Omega + \int_\Omega \xi_i \left[-\frac{\partial \ddot{p}_n}{\partial x} + \frac{\partial^2 \ddot{u}_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{u}_n}{\partial y^2} + \frac{\partial \ddot{u}_n}{\partial^2 z^2}\right] d\Omega + \tag{3.15}$$

$$+ \int_\Omega \xi_i \left[-\frac{\partial \ddot{p}_n}{\partial y} + \frac{\partial^2 \ddot{v}_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{v}_n}{\partial y^2} + \frac{\partial \ddot{v}_n}{\partial^2 z^2}\right] d\Omega + \tag{3.16}$$

$$+ \int_\Omega \xi_i \left[-\frac{\partial \ddot{p}_n}{\partial z} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_n}{\partial y^2} + \frac{\partial \ddot{w}_n}{\partial^2 z^2}\right] d\Omega = 0 \tag{3.17}$$

con $i = 1, .., n$. Applichiamo l'identità di Lagrange-Green nell'equazione sopra e ricaviamo:

$$\int_\Omega \eta_i \frac{\partial \ddot{u}_n}{\partial x} d\Omega + \int_\Omega \eta_i \frac{\partial \ddot{v}_n}{\partial y} d\Omega + \int_\Omega \eta_i \frac{\partial \ddot{w}_n}{\partial z} d\Omega - \int_\Omega \xi_i \frac{\partial \ddot{p}_n}{\partial x} d\Omega - \tag{3.18}$$

$$- \int_\Omega \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \frac{\partial \ddot{u}_n}{\partial x} d\Omega - \int_\Omega \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \frac{\partial \ddot{u}_n}{\partial y} d\Omega - \int_\Omega \frac{\partial \xi_i}{\partial z} \frac{\partial \ddot{u}_n}{\partial z} d\Omega - \tag{3.19}$$

$$- \int_\Omega \xi_i \frac{\partial \ddot{p}_n}{\partial y} d\Omega - \int_\Omega \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \frac{\partial \ddot{v}_n}{\partial x} d\Omega - \int_\Omega \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \frac{\partial \ddot{v}_n}{\partial y} d\Omega - \tag{3.20}$$

$$- \int_\Omega \frac{\partial \xi_i}{\partial z} \frac{\partial \ddot{v}_n}{\partial z} d\Omega - \int_\Omega \xi_i \frac{\partial \ddot{p}_n}{\partial z} d\Omega - \int_\Omega \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \frac{\partial \ddot{w}_n}{\partial x} d\Omega - \tag{3.21}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \frac{\partial \ddot{w}_n}{\partial y} d\Omega - \int_\Omega \frac{\partial \xi_i}{\partial z} \frac{\partial \ddot{w}_n}{\partial z} d\Omega = - \int_{\partial\Omega} \xi_i \frac{\partial \ddot{u}_n}{\partial x} n_x ds - \tag{3.22}$$

$$- \int_{\partial\Omega} \xi_i \frac{\partial \ddot{u}_n}{\partial y} n_y ds - \int_{\partial\Omega} \xi_i \frac{\partial \ddot{u}_n}{\partial z} n_z ds - \int_{\partial\Omega} \xi_i \frac{\partial \ddot{v}_n}{\partial x} n_x ds - \tag{3.23}$$

$$- \int_{\partial\Omega} \xi_i \frac{\partial \ddot{v}_n}{\partial y} n_y ds - \int_{\partial\Omega} \xi_i \frac{\partial \ddot{v}_n}{\partial z} n_z ds - \int_{\partial\Omega} \xi_i \frac{\partial \ddot{w}_n}{\partial x} n_x ds - \tag{3.24}$$

$$- \int_{\partial\Omega} \xi_i \frac{\partial \ddot{w}_n}{\partial y} n_y ds - \int_{\partial\Omega} \xi_i \frac{\partial \ddot{w}_n}{\partial z} n_z ds. \tag{3.25}$$

con ds la coordinata curvilinea lungo la frontiera di Ω.Introduiamo la (3.11),(3.12),(3.13) e (3.14) dentro l'equazione sopra e ricaviamo :

$$\int_\Omega \eta_i \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j d\Omega + \int_\Omega \eta_i \frac{\partial}{\partial y} \sum_{j=1}^n \beta_j \xi_j d\Omega + \int_\Omega \eta_i \frac{\partial}{\partial z} \sum_{j=1}^n \delta_j \xi_j d\Omega - \int_\Omega \xi_i \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=1}^n \gamma_j \eta_j d\Omega - \tag{3.26}$$

$$- \int_\Omega \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j d\Omega - \int_\Omega \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j d\Omega - \int_\Omega \frac{\partial \xi_i}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j d\Omega - \tag{3.27}$$

$$-\int_\Omega \xi_i \frac{\partial}{\partial y}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\eta_j d\Omega - \int_\Omega \frac{\partial \xi_i}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\sum_{j=1}^{n}\beta_j\xi_j d\Omega - \int_\Omega \frac{\partial \xi_i}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\sum_{j=1}^{n}\beta_j\xi_j d\Omega - \tag{3.28}$$

$$-\int_\Omega \frac{\partial \xi_i}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\sum_{j=1}^{n}\beta_j\xi_j d\Omega - \int_\omega \xi_i \frac{\partial}{\partial z}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\eta_j d\Omega - \int_\Omega \frac{\partial \xi_i}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\sum_{j=1}^{n}\delta_j\xi_j d\Omega - \tag{3.29}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial \xi_i}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\sum_{j=1}^{n}\delta_j\xi_j d\Omega - \int_\Omega \frac{\partial \xi_i}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\sum_{j=1}^{n}\delta_j\xi_j d\Omega = a_i \tag{3.30}$$

Con a_i funzione noto,funzione delle equazioni e delle condizioni al contorno.raggruppiamo i coefficienti e l'equazione si scrivera:

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\int_\Omega \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x} d\omega - \frac{\partial \xi_i}{\partial x}\frac{\partial \xi_j}{\partial x} d\Omega - \frac{\partial \xi_i}{\partial y}\frac{\partial \xi_j}{\partial y} d\Omega - \frac{\partial \xi_i}{\partial z}\frac{\partial \xi_j}{\partial z} d\Omega\right]\alpha_j + \tag{3.31}$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left[\int_\Omega \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial y} d\omega - \frac{\partial \xi_i}{\partial x}\frac{\partial \xi_j}{\partial x} d\Omega - \frac{\partial \xi_i}{\partial y}\frac{\partial \xi_j}{\partial y} d\Omega - \frac{\partial \xi_i}{\partial z}\frac{\partial \xi_j}{\partial z} d\Omega\right]\beta_j + \tag{3.32}$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left[\int_\Omega \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial z} d\omega - \frac{\partial \xi_i}{\partial x}\frac{\partial \xi_j}{\partial x} d\Omega - \frac{\partial \xi_i}{\partial y}\frac{\partial \xi_j}{\partial y} d\Omega - \frac{\partial \xi_i}{\partial z}\frac{\partial \xi_j}{\partial z} d\Omega\right]\delta_j + \tag{3.33}$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left[\int_\Omega -\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x} d\Omega \int_\Omega -\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial y} d\Omega \int_\Omega -\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial z} d\Omega\right]\gamma_j = a_i \tag{3.34}$$

l'equazione sopra in forma compatto si scrive :

$$\sum_{j=1}^{n}\left[b_{ij}^{(1)}\alpha_j + [b_{ij}^{(2)}\beta_j + [b_{ij}^{(3)}\delta_j + [b_{ij}^{(4)}\gamma_j\right] = a_i \tag{3.35}$$

L'equazione sopra viene risolto attraverso programmi di calcolo numerico,trovando i quattro coefficienti che sono quasi la soluzione approssimata alla quella esatta

Chapter 4

Risultati macroscopici

4.1 Il moto di punto di ristagno (Hiemenz) su parete scabra tridimensionale

Per testare l'accuratezza della condizione effettiva, viene scelto il flusso dello strato limite su una parete scabra. A tale scopo, qui viene adottata la configurazione del flusso del punto di ristagno su un muro grezzo. Il flusso è considerato in coordinate cartesiane (X , Y, Z) con corrispondenti componenti di velocità macroscopiche (U, V, W). Si considera qui il flusso laminare, costante, incomprimibile sopra la piastra ruvida (con il tipo di rugosità di forma conica e cilindrica) in prossimità del punto di ristagno su una piastra piana situata nel piano $Y = -\epsilon H$. Un fluido esterno, lungo la direzione Y, con velocità di deformazione a, incide su questa piastra piana e produce un flusso lungo la direzione X. L'asse Z è impostato per essere periodico. Le equazioni di riferimento sono le equazioni di Navier-Stokes espresse nella forma incomprimibile.

Soluzione di similitudine

Una soluzione non viscosa delle equazioni di bilancio di massa e quantitá di moto, basata sulla forma di similitudine di Hiemenz, può essere scritta esprimendo la velocità come segue:

$$U = X\phi'(Y), \quad V = -\phi(Y), \quad W = 0, \tag{4.1}$$

e così l'equazione di continuità ($\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0$) è identicamente soddisfatto. La pressione è espressa come

$$P = P_\infty = P_o - \frac{1}{2}[X^2 + \xi(Y)], \tag{4.2}$$

dove P_o è la pressione di ristagno. Per applicare queste ipotesi di velocità e pressione al caso di muro grezzo considerato qui, l'equazione della quantità di moto si riduce a

$$\frac{1}{Re}\phi''' + \phi\phi'' - \phi'^2 + 1 = 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{Re}\phi'' + \phi\phi' - \frac{\xi'}{2} = 0, \tag{4.4}$$

dove la terza equazione della quantità di moto è identicamente soddisfatta.

Le equazioni differenziali ordinarie date sopra possono essere risolte per "ϕ" sconosciuto, una volta ottenuta la soluzione, l'equazione () che coinvolge ξ verrà risolta in seguito.

Di seguito sono riportate le condizioni al contorno fino alla $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ da utilizzare insieme alle equazioni differenziali ordinarie (-),

$$\epsilon\lambda\phi'' + \epsilon^2 m_{12} Re - \phi' = 0, \quad \phi + \epsilon^2 m_{21}\phi'' = 0 \qquad at \qquad Y = 0 \tag{4.5}$$

insieme alla condizione al contorno periodica lungo la direzione spanwise.

4.2 Approssimazione numerica:

Esiste la soluzione esatta del problema classico del flusso del punto di ristagno di Hiemenz su una piastra piana, quindi è possibile trovare la soluzione analitica del sistema (3.3-3.5) data sopra. Tuttavia, invece di risolvere queste equazioni in modo analitico, l'approccio scelto qui è l'anima numerica delle equazioni di Navier Stokes allo stato stazionario con le condizioni effettive su una piastra piana. A scopo di confronto, qui vengono riportate anche simulazioni di risoluzione delle caratteristiche su un muro grezzo per un numero di Reynolds basso e moderato.

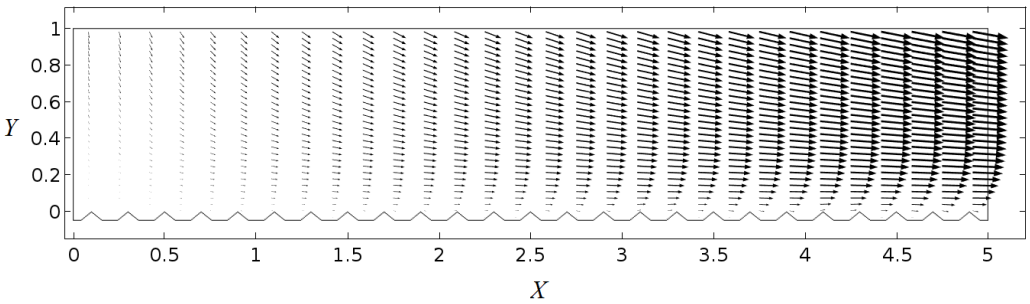

Figure 4.1: Écoulement du point de stagnation via le vecteur vitesse sur un plan de z=0.1.

La dimensione del dominio qui considerato è 5 * L e L (dove L è la scala di lunghezza macroscopica) lungo $\hat{X}-$ e $\hat{Y}-$ rispettivamente. La larghezza del dominio lungo l'asse Z è ϵL

Per una funzione che risolve la simulazione su un muro grezzo, il file *noslip* condizione è impiegata in basso e anche su elementi grezzi, le condizioni simmetriche rimangono a $\hat{X} = 0$, dove a $\hat{X} = 5 * L$ gradiente di pressione zero (/ condizione non fare nulla) è forzata. A $\hat{X} = 1$, flusso potenziale con $\hat{U} = a\hat{X}, \hat{V} = -a\hat{Y}, \hat{W} = 0$ è applicato. Infine, lungo la direzione Z, viene impiegata la periodicità. Per non dimensionare il moto irrazionale esterno, si sceglie aL come velocità caratteristica dove una costante "a" è l'inverso della scala temporale. E così il movimento esterno non dimensionale diventa $(U, V) = (X, -Y)$.

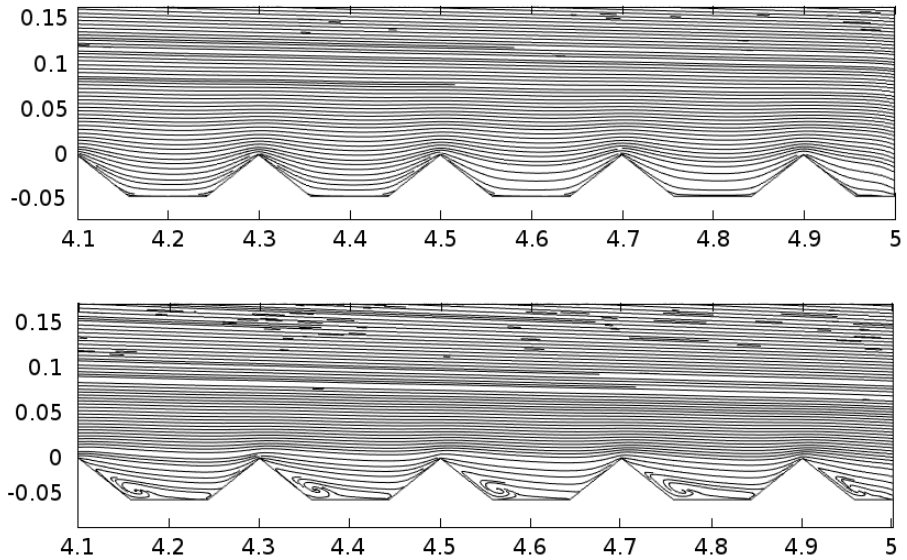

Figure 4.2: Campo di velocitá per Re = 25 (al centro), Re = 500 (in basso) sul piano di taglio situato a $Z = 0,1$ visualizzato tramitelinee di corrente. In alto si osserva il campo di moto visualizzato tramite i vettori velocitá in $z = 0,1$.

Numeri di Reynolds bassi e moderati ($Re = aL^2/\nu = 25$ e 500) sono scelti per il flusso viscoso vicino al muro. È vero che lo strato limite influenza il flusso potenziale e le linee di flusso del flusso potenziale appena sopra lo strato limite sono leggermente spostate dalla parete dallo strato limite e questa quantità spostata è uguale allo spessore di spostamento δ^*. Più precisamente a Y = 1 che è il bordo esterno del dominio, le condizioni di afflusso non dimensionale sono:

$$U = X, \quad V = -Y + \delta^*, \quad W = 0 \tag{4.6}$$

In caso di parete liscia, le soluzioni vengono calcolate e confrontate con la soluzione di somiglianza e si trova un buon accordo. Si è anche riscontrato che lo spessore dello strato limite $\delta^* = 0,064759Re^{-0,5}$. Le soluzioni sono notevolmente modificate con l'inclusione della rugosità conica incorporata nella parete inferiore (cfr. Fig. 4.1) e si riscontra una significativa diminuzione dello spessore della rete, ovvero $\delta^* = 0.55Re^{-0.5}$ per Re=25 e $\delta^* = 0.2Re^{-0.5}$ per Re = 500. Il piccolo parametro $\epsilon = 0.2$ non è molto piccolo e il numero di Reynolds microscopico $\mathcal{R}$ che è uguale a $\epsilon^2 Re$ restituisce

il valore del numero di Reynolds microscopico uguale a 1 e 20 per $Re = 25$ e $Re = 500$, e per questo motivo i termini intertiali potrebbero apparire nelle equazioni microscopiche. Pertanto, abbiamo eseguito un altro caso con $\epsilon = 0.1$ per giustificare la nostra considerazione

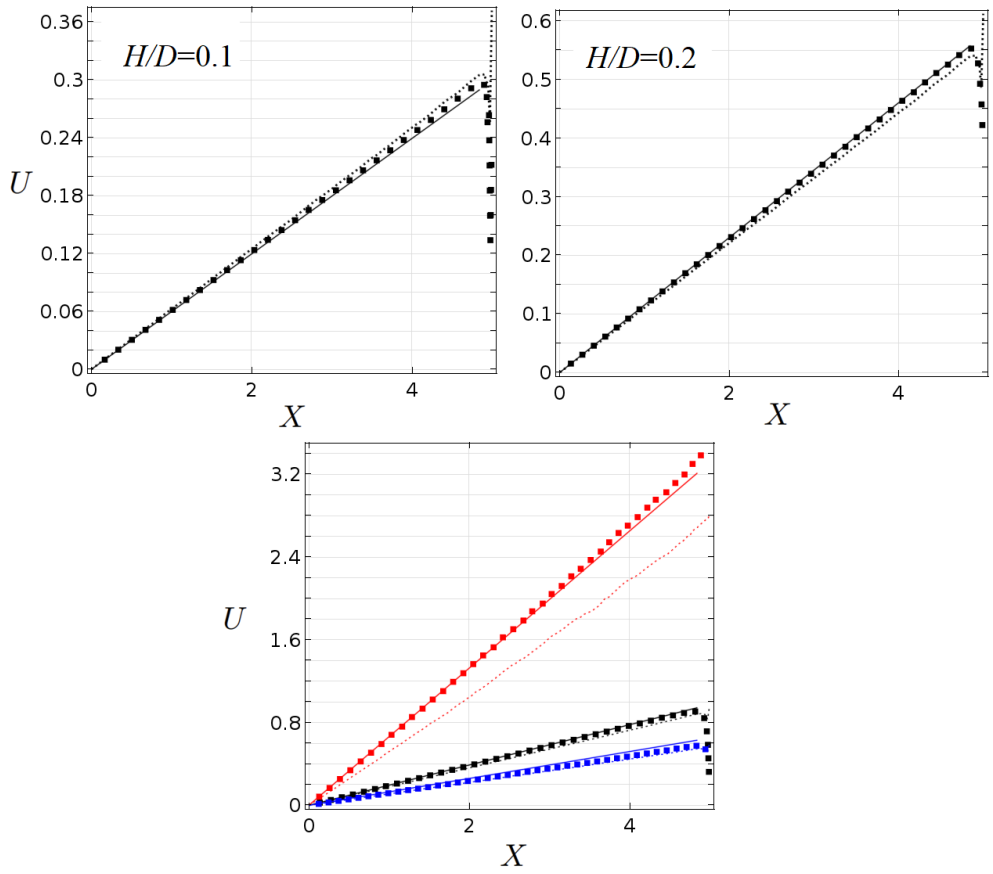

Figure 4.3: Confronto della velocità U (*running average*, linea continua, da una simulazione che risolve tutti i dettagli del moto) con il caso modellato utilizzando la condizione di *slip* di ordine uno (linee tratteggiate) e di ordine due (cerchietti solidi) a $Y = 0$ per $Re = 25$ per diversi H/D (il caso $H/D = 0.4$, $Re = 500$ è rappresentato nell'ultima immagine in colore rosso) for $\epsilon = 0.2$. Il confronto tra le soluzioni di risoluzione delle caratteristiche e il modello omogeneizzato viene effettuato anche per $\epsilon = 0,1$ e visualizzato in una cornice di $H/D = 0.4$ (in blu).

Il risultato della media corrente della velocità di scorrimento esatta U calcolata dalla soluzione di risoluzione delle caratteristiche viene confrontato

con la velocità media calcolata dal caso modello in cui è stata imposta una velocità effettiva su una parete liscia situata a $Y = 0$ e soluzioni campione sono visualizzati in Fig. 3.3. I risultati vengono visualizzati per $Re = 25$ (colore nero) e $Re = 500$ (colore rosso). Si osserva che anche per un valore più alto di $\epsilon = 0,2$, i risultati sono in buon accordo con le soluzioni di risoluzione delle funzionalità. Nella Fig. 3.4, la velocità parallela della parete V viene valutata in tre posizioni distinte di X su una parete ruvida e confrontata con il caso omogeneizzato. Nella Fig. 3.5, il piano di unione nella negatività del punto di ristagno è mostrato in diverse posizioni lungo la direzione normale alla parete e si osserva che lontano dal muro, il flusso diventa indipendente dalla rugosità

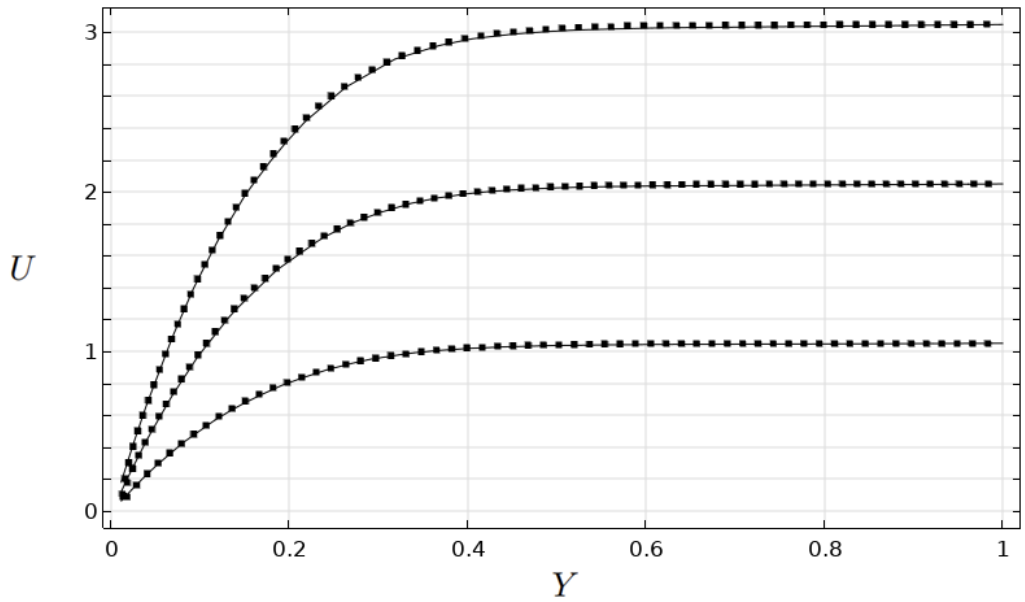

Figure 4.4: Confronto tra i profili di velocità paralleli al muro lungo Y valutati a X = 1,1, 2,1 e 3,1 nel caso di muro liscio (linee continue) e muro grezzo (punti) con $\epsilon = 0,2$, in corrispondenza ai picchi di rugosità. I risultati del muro grezzo visualizzati sono quelli calcolati con una simulazione di risoluzione delle caratteristiche; i risultati per una parete microstrutturata simulata impiegando condizioni efficaci all'ordine due sono sovrapposti ai risultati di risoluzione delle caratteristiche e non possono essere distinti per l'accuratezza grafica.

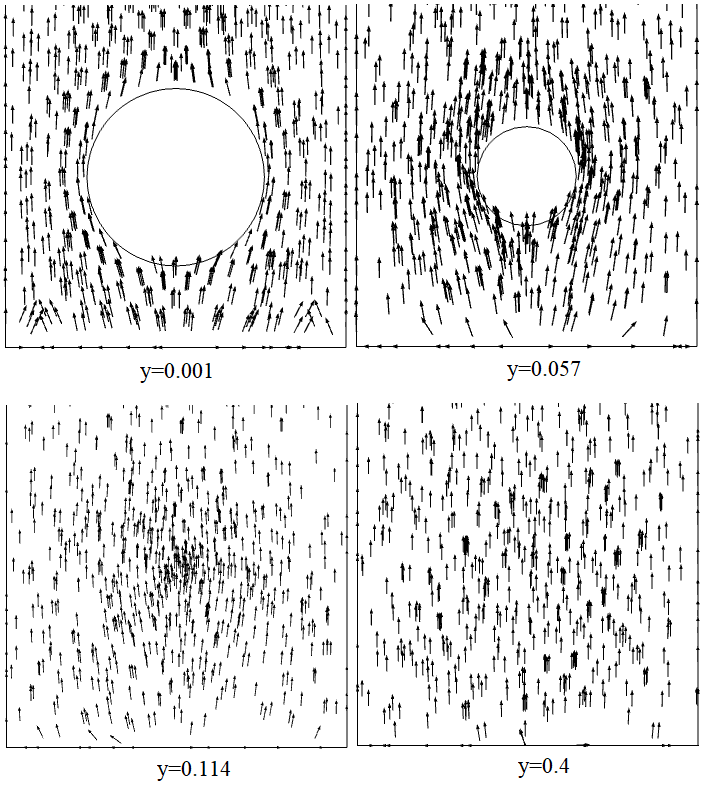

Figure 4.5: Campi di velocitá in una cella unitaria a diverse posizioni y.

Tutte le soluzioni macro e maroscopiche sono realizzate utilizzando la versione accademica degli elementi finiti Comsol Multiphysics® software [10].Qui viene scelto l'approccio basato su equazioni deboli e predefinite.

Risoluzione e test di indipendenza della mesh

La creazione di una Mesh su Comsol viene impostata sia da una mesh controllata dalla fisica,cioè una mesh che il programma intelligentemente genera in modo automatico in modo da adattarsi in maniera ottimale alle opzioni e condizioni impostate durante la creazione del modello e della sua fisica , sia da una mesh controllata direttamente dall'utente.Per quello che riguardano i nostri modelli (cono e cilindro) ,abbiamo utilizzato una mesh controllata dalla fisica come si vede nella figura sotto

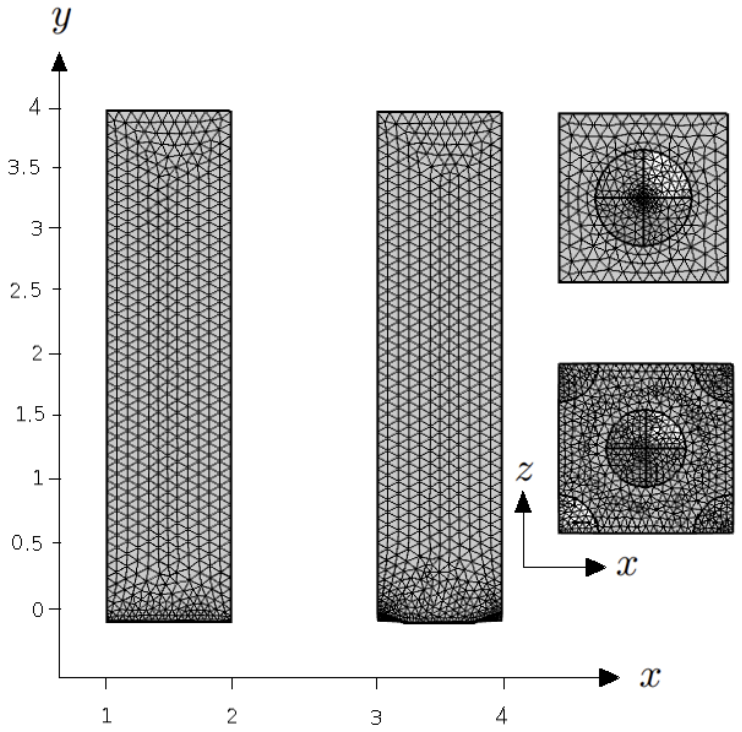

Figure 4.6: Griglie campione per problemi microscopici per rugosità conica e cilindrica in una cella unitaria con $H/D = 0.4$ e $y_\infty = 4$ rappresentati qui. Le risoluzioni della maglia mostrate qui per entrambe le rugosità sono più grossolane con elementi tetraedrici 13.952 (inline cone), 16,417 (staggered cone), 23,194 (inline cylinder) e 28,495 (staggered cylinder). Nel calcolo, viene utilizzata la risoluzione cosidetta *fine* della mesh con gli elementi 93,773 (inline cone), 155,611 (staggered cone), 133,193 (inline cylinder) e 155,611 (staggered cylinder).

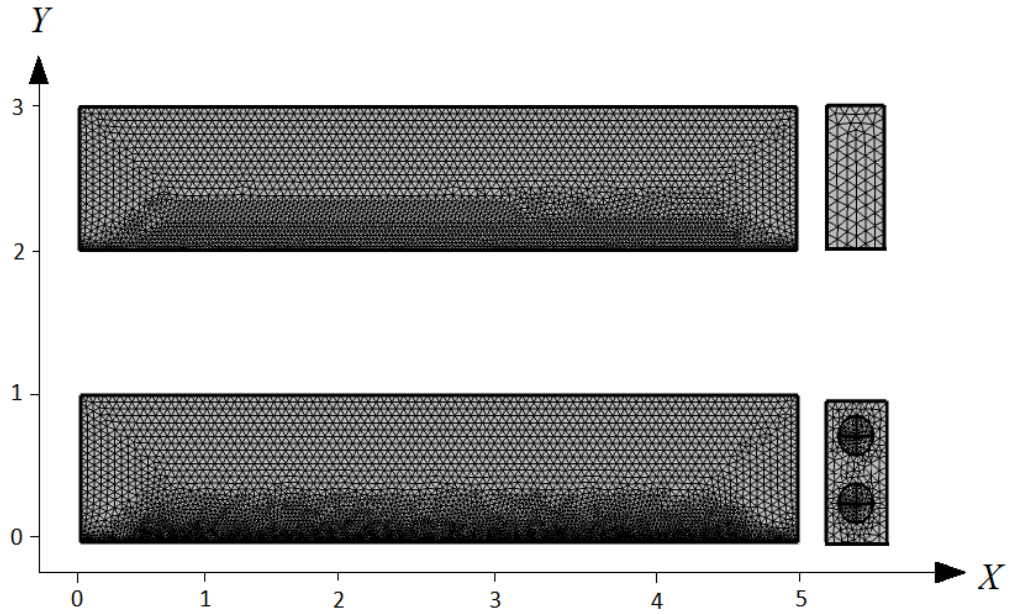

Figure 4.7: Nel problema macroscopico, la griglia campione utilizzata per soluzioni di risoluzione di caratteristiche e per un caso omogeneizzato viene visualizzata qui. Il numero delle griglie utilizzate nei calcoli effettivi è 719.112 (muro scabro) e 182858 (muro liscio) con forma tetraedrica. Mentre quelli visualizzati qui sono 254393 e 79172 rispettivamente per il muro scabro e liscio. Sul lato destro di ogni telaio, viene mostrato il piano di taglio campione della parete inferiore.

Ha convalidato che sia nelle soluzioni micro che macroscopiche, anche la risoluzione della mesh è indipendente. Per verificare la convergenza della soluzione relativa alla mesh, sono stati utilizzati quattro tipi di mesh; fitta, ii) normale, iii) fine e iv) più fine. Si è notato che la soluzione diventa indipendente dalla mesh dopo la risoluzione *fine*, quindi i calcoli effettivi vengono eseguiti sulla risoluzione *fine* piuttosto che su quella *finissima* (che sarebbe inutilmente costosa in tempo di calcolo).

Chapter 5

Conclusione

Lo studio presentato nella tesi ha riguardato i moti di fluidi su pareti con micro-scabrezze di forma conica e cilindrica, disposte in maniera regolare sulla parete. Durante lo svolgimento del lavoro ho acquisito nozioni di calcolo numerico, tramite il software Comsol Multiphysics per le simulazioni, di analisi multi-scala, e ho imparato l'impiego di un linguaggio di markup chiamato Latex, dedicato alla stesura di testi

Un modo pratico ed efficace per modellare i dettagli della microstruttura di una parete e' quello di impiegare una condizione effettiva su una parete fittizia. Tale metodo e' molto meno costoso di una simulazione che risolve tutti i dettagli del moto del fluido tra i singoli elementi di rugositá e dovrebbe produrre risultati altrettanto accurati.

L'obiettivo del mio lavoro è stato quello di fornire un modello macroscopiche omogeneizzato del flusso tridimensionale su parete scabra, confrontando i risultati con le simulazioni numeriche completamente risolte per dimostrare l'accuratezza del modello efficace di parete. Confrontando in profili di velocità (sia quelli che risolvono completamente il flusso attorno alle asperita' sia quelli che impiegano condizioni effettive) si puó concludere che i risultati al second'ordine sono molto buoni, anche per numeri di Reynolds relativamente alti.

Bibliography

[1] Yves Achdou, O Pironneau, and F Valentin. "Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries". In: *Journal of Computational Physics* 147.1 (1998), pp. 187–218.

[2] Ivo Babuška. "Homogenization and its application. Mathematical and computational problems". In: *Numerical solution of partial differential equations–III*. Elsevier, 1976, pp. 89–116.

[3] Arnaud Basson and David Gérard-Varet. "Wall laws for fluid flows at a boundary with random roughness". In: *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences* 61.7 (2008), pp. 941–987.

[4] D Bechert and W Reif. "On the drag reduction of the shark skin". In: *23rd Aerospace sciences meeting*. 1985, p. 546.

[5] DW Bechert and M Bartenwerfer. "The viscous flow on surfaces with longitudinal ribs". In: *Journal of fluid mechanics* 206 (1989), pp. 105–129.

[6] DW Bechert et al. "Fluid mechanics of biological surfaces and their technological application". In: *Naturwissenschaften* 87.4 (2000), pp. 157–171.

[7] Alessandro Bottaro and Sahrish B Naqvi. "Effective boundary conditions at a rough wall: a high-order homogenization approach". In: *Meccanica* 55.9 (2020), pp. 1781–1800.

[8] August G Domel et al. "Shark skin-inspired designs that improve aerodynamic performance". In: *Journal of the Royal Society Interface* 15.139 (2018), p. 20170828.

[9] EB Dussan. "On the spreading of liquids on solid surfaces: static and dynamic contact lines". In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 11.1 (1979), pp. 371–400.

[10] COMSOL Inc. *COMSOL Multiphysics® v.5.4*. 2019. URL: `https://www.comsol.com/release/5.5`.

[11] Clément Introıni, Michel Quintard, and Fabien Duval. "Effective surface modeling for momentum and heat transfer over rough surfaces: Application to a natural convection problem". In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 54.15-16 (2011), pp. 3622–3641.

[12] Willi Jäger and Andro Mikelić. "On the roughness-induced effective boundary conditions for an incompressible viscous flow". In: *Journal of Differential Equations* 170.1 (2001), pp. 96–122.

[13] Kalvis M Jansons. "Determination of the macroscopic (partial) slip boundary condition for a viscous flow over a randomly rough surface with a perfect slip microscopic boundary condition". In: *The Physics of fluids* 31.1 (1988), pp. 15–17.

[14] Javier Jiménez. "Turbulent flows over rough walls". In: *Annu. Rev. Fluid Mech.* 36 (2004), pp. 173–196.

[15] Silvia Jiménez Bolaños and Bogdan Vernescu. "Derivation of the Navier slip and slip length for viscous flows over a rough boundary". In: *Physics of Fluids* 29.5 (2017), p. 057103.

[16] Ken Kamrin, Martin Z Bazant, and Howard A Stone. "Effective slip boundary conditions for arbitrary periodic surfaces: the surface mobility tensor". In: *arXiv preprint arXiv:0911.1328* (2009).

[17] Lyesse Laloui, Mathieu Nuth, and Laurent Vulliet. "Experimental and numerical investigations of the behaviour of a heat exchanger pile". In: *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics* 30.8 (2006), pp. 763–781.

[18] Paolo Luchini. "Linearized no-slip boundary conditions at a rough surface". In: *Journal of fluid mechanics* 737 (2013), p. 349.

[19] Paolo Luchini, Fernando Manzo, and Amilcare Pozzi. "Resistance of a grooved surface to parallel flow and cross-flow". In: *Journal of fluid mechanics* 228 (1991), pp. 87–109.

[20] Chiang C Mei and Bogdan Vernescu. *Homogenization methods for multiscale mechanics*. World scientific, 2010.

[21] H Keith Moffatt. "Viscous and resistive eddies near a sharp corner". In: *Journal of Fluid Mechanics* 18.1 (1964), pp. 1–18.

[22] Bijan Mohammadi, Olivier Pironneau, and Frederic Valentin. "Rough boundaries and wall laws". In: *International journal for numerical methods in fluids* 27.1-4 (1998), pp. 169–177.

[23] CLMH Navier. “Mémoire sur les lois du mouvement des fluides”. In: *Mémoires de l’Académie Royale des Sciences de l’Institut de France* 6.1823 (1823), pp. 389–440.

[24] S Richardson. “On the no-slip boundary condition”. In: *Journal of Fluid Mechanics* 59.4 (1973), pp. 707–719.

[25] L Sirovich and S Karlsson. “Turbulent drag reduction by passive mechanisms”. In: *Nature* 388.6644 (1997), pp. 753–755.

[26] Y Sudhakar et al. “Higher order homogenized boundary conditions for flows over rough and porous surfaces”. In: *arXiv preprint arXiv:1909.07125* (2019).

[27] M Walsh and A Lindemann. “Optimization and application of riblets for turbulent drag reduction”. In: *22nd aerospace sciences meeting.* 1984, p. 347.

[28] Nairu Wang et al. “Transverse hyporheic flow in the cross-section of a compound river system”. In: *Advances in Water Resources* 122 (2018), pp. 263–277.

[29] Giuseppe A Zampogna, Jacques Magnaudet, and Alessandro Bottaro. “Generalized slip condition over rough surfaces”. In: *Journal of Fluid Mechanics* 858 (2019), pp. 407–436.