



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

ANALISI DELL'INTERAZIONE TRA UN FLUIDO
E UN FILAMENTO ELASTICO ALL'INTERNO DI
UN CANALE

RELATORE:

CHIAR.MO PROF. ALESSANDRO BOTTARO

CORRELATORE:

DOTT. JAN PRALITS

ALLIEVO:

ANDREA TRIPODI

Tesi per il conseguimento della Laurea Triennale

in

INGEGNERIA MECCANICA

Anno Accademico 2010/2011

Dicembre 2011

Ringraziamenti

Innanzitutto vorrei ringraziare il Prof. Bottaro per l'opportunità datami e per l'aiuto fornito durante questi mesi di lavoro, ma soprattutto un grazie per avermi fatto scoprire e fatto appassionare al mondo della ricerca.

Un sentito ringraziamento va anche all'Ing. Pralits per la gentilezza e la pazienza mostrata nel guidarmi in questo progetto e la grande disponibilità a togliere ogni mio dubbio.

Volevo inoltre ringraziare i miei genitori perché hanno sempre creduto in me e nei miei sogni (anche quando forse non ci credevo io), perché mi hanno sempre sostenuto in ogni decisione e senza i quali oggi non sarei qui.

Un grazie enorme va alla mia ragazza Camilla, che mi ha sopportato durante tutto questo lavoro e mi ha dato la spinta necessaria per continuare e affrontare ogni difficoltà.

Come potrei poi non ringraziare il mio fratellone Carlo con il quale sono cresciuto ed è anche per merito suo se sono quello che sono... neanche i chilometri sono riusciti a dividerci e spero che niente e nessuno possa mai separarci.

Infine, ma non per importanza, voglio ringraziare tutte le persone che hanno condiviso con me questa avventura universitaria e tutti gli amici con i quali ho passato bellissimi momenti, e senza i quali quest'impresa sarebbe stata insostenibile.



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA

Abstract

ANALYSIS OF THE INTERACTION BETWEEN A FLUID AND AN ELASTIC FILAMENT IN A CHANNEL

Vortex induced vibrations constitutes a general problem regarding fluid-structure interaction and its study may be useful in many engineering applications. For instance, a flexible body such as a filament placed in a moving fluid obstructs the natural flow and the interaction produces interesting effects in the wake of the filament and in the filament structure itself.

The purpose of this thesis is to determine the critical values of two parameters for the onset of instability in the case of a single elastic filament placed on one of the walls inside a channel.

In the first part we have studied the theoretical problem in order to define the expected system response at different Reynolds number and filament stiffness. Then, we have solved the fluid-structure interaction problem using a numerical code based on the Immersed Boundary Method. Over a hundred simulations have been performed to define the overall system behavior over a wide range of Reynolds number and filament stiffness.

The results from the numerical simulations have allowed us to determine four different overall behavior. Further, the critical Reynolds number and critical stiffness that separate the stable zone from the unstable one have been determined.



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA

Sommario

ANALISI DELL'INTERAZIONE TRA UN FLUIDO E UN FILAMENTO ELASTICO ALL'INTERNO DI UN CANALE

Nel mondo naturale sono stati osservati molti fenomeni di vibrazioni indotte da un flusso, studio che ha riscontri utili in molte applicazioni di ingegneria. Se all'interno di un fluido in movimento poniamo un corpo flessibile in modo tale da ostruire il flusso naturale, questa interazione produce interessanti effetti che si manifestano nella scia vorticoso e nella vibrazione della struttura.

Lo scopo di questa tesi è quello di definire la varietà di movimenti della struttura e le diverse scie prodotte dall'interazione tra un filamento elastico e un fluido in moto all'interno di un canale.

Nella prima parte si è studiato il problema teorico per definire una previsione della risposta del sistema al variare del numero di Reynolds e della rigidità del filamento. Quindi, si è risolto l'interazione fluido-struttura con un codice numerico basato sul metodo dei contorni immersi. In questo lavoro sono state eseguite più di cento simulazioni per definire al meglio il comportamento globale del sistema in un ampio intervallo di numero di Reynolds e della rigidità del filamento.

Sotto le semplificazioni fatte e i vincoli imposti, i risultati numerici ci hanno permesso di stabilire quattro comportamenti generali diversi; inoltre è stato possibile trovare i valori critici del numero di Reynolds e della rigidità che separano la zona stabile da quella instabile.

Indice

Ringraziamenti	mi
1 Il problema nella meccanica del continuo	6
1.1 Descrizione del metodo dei contorni immersi	6
1.2 Descrizione della geometria del problema	8
1.3 Descrizione della struttura	9
1.4 Problema accoppiato fluido-struttura	12
2 Il problema discreto	14
2.1 Introduzione	14
2.2 Metodo alle differenze finite	15
2.2.1 Approssimazione alle differenze finite	15
2.3 La griglia sfalsata (Staggered grid)	18
2.3.1 Problemi con l'uso di griglie collocate	18
2.3.2 La soluzione: uso di griglie sfalsate (staggered)	21
2.4 La funzione delta di Dirac (δ)	22
2.5 Metodo a passi frazionari: cenni	23
3 Simulazioni numeriche	25
3.1 Acquisizione dati	25
3.2 L'analisi dei dati	26
3.2.1 La visualizzazione grafica	27
3.2.2 La trasformata di Fourier	28
3.3 Parametri e variabili in gioco	29
4 I risultati	35
4.1 La zona stabile	36
4.2 La zona caotica	37
4.3 La zona con filamento stabile e fluido periodico	38
4.4 L'analisi spettrale	39
5 Conclusioni	49

A	L'analisi spettrale	52
A.1	La trasformata veloce di Fourier (FFT)	52
A.2	Il periodogramma	53

Introduzione

Un archetipo dell'interazione fluido-struttura è lo sventolio di una bandiera sotto l'effetto di un vento costante; la mutua interazione tra vento e stoffa ha da tempo suscitato la curiosità di molti ricercatori e ancora molti fattori sono da scoprire. Lo sbandieramento di una bandiera è una piccola classe di problemi fluido-struttura che riguardano la mutua interazione tra un corpo flessibile e un fluido in movimento che la circonda. Classici esempi di problemi fluido-struttura sono il movimento di barche, sottomarini, aerei, mentre capire e conoscere il movimento di corpi flessibili potrebbe portare a grandi innovazioni tecnologiche quali robot biomimetici.

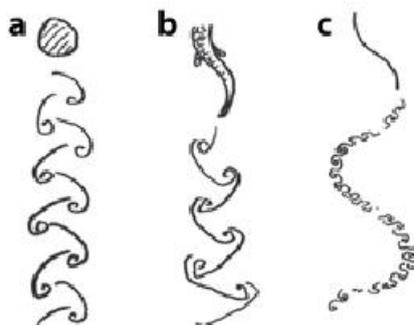


Figura 1: Scia di vortici lasciata dietro diversi corpi: (a) cilindro rigido, (b) nuoto di un pesce, (c) filamento elastico

Nella storia dell'uomo la natura ha sempre costituito un importante riferimento per concepire artefatti innovativi. Numerosi progressi e grandi soluzioni tecnologiche sono nate nell'ampio bacino dell'ispirazione biologica; oltretutto, quasi sempre, è nella natura stessa il segreto per fronteggiare problemi di natura logistica e meccanica, legati alla costruzione dei dispositivi e degli strumenti più svariati. Le tecnologie prese in prestito dalla natura sono numerosissime e davvero suggestive: schermi piatti ispirati alle ali delle farfalle, materiali idrorepellenti e idrofilo come il guscio degli scarafaggi, piccozze a forma di picchio.

Nell'ultimo decennio molte ricerche si sono indirizzate verso lo studio della dinamica delle strutture elastiche e la loro interazione con un flusso circostante, portando ad applicazioni ingegneristiche biomimetiche [1].

Nel mondo della natura, le strutture biologiche si trovano a essere incurvate, piegate, agitate e attorcigliate dalla forza del vento o delle onde marine; queste risposte

a ingenti forze ha permesso spesso anche a piccoli organismi di sopravvivere nel loro mondo. Particolari sono il nuoto dei pesci o il volo degli uccelli; comprendere appieno questi comportamenti potrebbe portare a significative innovazioni nei sistemi di propulsione marina o aerea.

Un sottoinsieme della più generale classe di problemi d'interazione fluido-struttura è lo studio dell'incurvamento di un corpo elastico che ostacola un flusso; questa situazione è parte della vita di molti organismi sessili, come fiori, foglie e alghe marine, la cui morfologia è strettamente legata alla corrente d'aria o acqua che devono affrontare per sopravvivere. Infatti, in natura la riconfigurazione di un corpo flessibile può produrre sostanziali e benefici effetti di riduzione della resistenza al fluido.

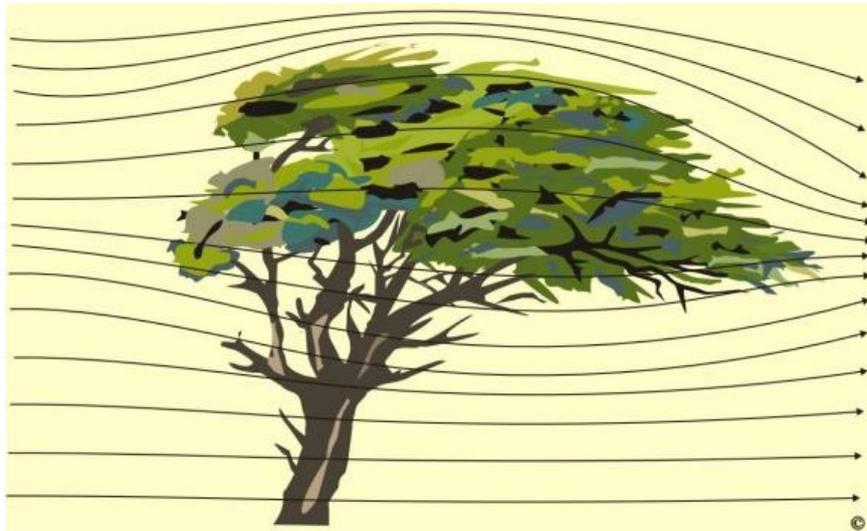


Figura 2: Riconfigurazione di un albero sotto l'azione del vento

Nel nostro studio si è voluto analizzare l'interazione originata da un filamento elastico che ostacola un fluido in moto all'interno di un canale; il filamento, fissata una sua estremità ad una delle pareti del canale, è lasciato libero di riconfigurarsi sotto l'azione del flusso che lo circonda. La nostra analisi ha riguardato la caratterizzazione del movimento del filamento e la variazione del moto del fluido in relazione ai parametri di rigidità del filamento e velocità del fluido.

Questo studio è lo schema semplificato di un meccanismo molto più complesso come può essere quello rappresentato in figura 2, poichè il problema reale presenta molte sfumature e una grande varietà di fenomeni che vanno dagli effetti di scia ai problemi di strato limite, mettendo in gioco forze viscosive, forze elastiche, forze d'attrito,

Capitolo 1

Il problema nella meccanica del continuo

1.1 Descrizione del metodo dei contorni immersi

Il metodo dei contorni immersi fu introdotto da Peskin nei primi del 1970 [2] al fine di studiare il flusso di sangue attorno alle valvole cardiache; il metodo si è poi evoluto in un utile risolutore di problemi d'interazione fluido-struttura per il calcolo del contorno flessibile di un corpo immerso in un fluido. Questo metodo è sia una formulazione matematica che uno schema numerico la cui caratteristica distintiva risiede nella scelta della griglia di calcolo; la formulazione matematica assume una miscela di variabili Euleriane e Lagrangiane legate da un'equazione d'interazione. Lo schema numerico, invece di generare una griglia che si adatti alla geometria interna ed esterna del problema, definisce un reticolato Cartesiano uniforme sull'intero dominio per le variabili Euleriane e discretizza il contorno immerso come una griglia curvilinea libera di muoversi all'interno del reticolo principale fisso. Si possono trattare allora separatamente il fluido e la struttura con i metodi risolutivi più appropriati e poi accoppiarli mediante due relazioni, una sulla velocità ed una sugli sforzi, sui punti dell'interfaccia fluido/solido.

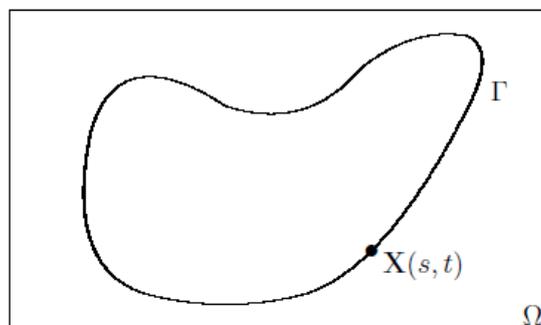


Figura 1.1: Esempio di un contorno immerso Γ , descritto dalla funzione \vec{X} , in un dominio fluido Ω

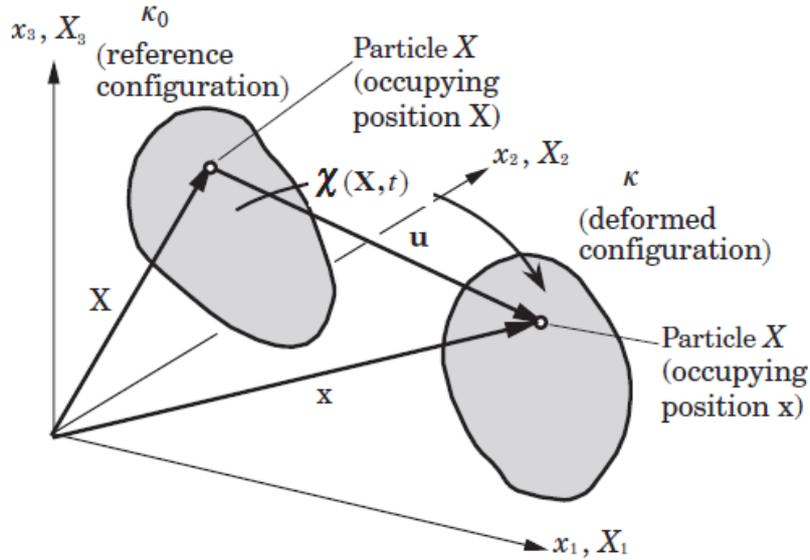


Figura 1.2: Configurazione di riferimento e deformata

Prima di immergersi nella trattazione del problema, definiamo alcuni concetti fondamentali che torneranno utili nella descrizione del problema. Innanzitutto si definisce coordinata materiale il valore $X = (X_1, X_2, X_3)$, riferito a una terna cartesiana ortogonale $OX_1X_2X_3$, che identifica la posizione dei punti del sistema all'istante di riferimento t_0 . Questa terna viene introdotta al solo scopo di denominare i punti del sistema e non è in generale la terna alla quale sono riferiti i moti del sistema continuo.

Supponiamo ora per esempio che il nostro continuo \mathcal{B} occupi inizialmente una configurazione Ω_0 , all'interno della quale una particella ξ sia nella posizione \vec{X}_0 , coordinata materiale del punto ξ . Dopo l'applicazione di un carico, il continuo cambierà la sua geometria assumendo una configurazione Ω' , dove la particella ξ si sarà spostata in una posizione \vec{X}' . Se indichiamo ora con χ la funzione che fornisce l'evoluzione del continuo tra le configurazioni Ω_0 e Ω'

$$\chi : \mathcal{B}_{\Omega_0} \rightarrow \mathcal{B}_{\Omega'}$$

l'applicazione χ prende il vettore posizione \vec{X}_0 dalla configurazione di riferimento e colloca lo stesso punto ξ nella conformazione deformata. E' questa la descrizione materiale o Lagrangiana, cioè quella che riferisce il moto di un corpo ad una sua configurazione di riferimento Ω_R .

Quindi, nella descrizione Lagrangiana la posizione corrente ($\vec{X} \in \Omega$) è espressa in termini del riferimento ($\vec{X}_R \in \Omega_R$)

$$\vec{X}' = \chi(\vec{X}_0, t), \quad \chi(\vec{X}_0, 0) = \vec{X}_0.$$

Anche la variazione di una proprietà fisica ϕ all'interno del corpo viene descritta

in termini di \vec{X}_0 e t

$$\phi = \phi(\vec{X}_0, t)$$

e risulta che, fissato il valore di $\vec{X}_0 \in \Omega_0$, $\phi(\vec{X}_0, t)$ dia il valore di ϕ al variare del tempo t per un fissato punto materiale ξ la cui posizione nella configurazione di riferimento è \vec{X}_0 ; quindi, il cambiamento del tempo t implica la stessa particella ξ e un valore diverso di ϕ .

Si può notare che l'attenzione è focalizzata sulla particella materiale e viene descritta dal punto di vista di un osservatore che segue il moto di ogni singolo punto materiale del sistema, prendendo nota delle variazioni subite nel tempo delle grandezze fisiche del punto.

Nelle sezioni che seguono, verrà presentato il problema in forma continua: dapprima verrà descritta la geometria del problema, analizzando semplificazioni e condizioni imposte; successivamente si analizzerà separatamente la parte del dominio fluido e quella della struttura; infine i due problemi verranno accoppiati, studiandone la reciproca interazione.

1.2 Descrizione della geometria del problema

In questo studio si è voluto analizzare il comportamento di un sistema composto da un filamento elastico posto all'interno di un condotto percorso da un fluido. Allo scopo di ridurre la complessità dei calcoli e delle equazioni da risolvere, nonché il tempo totale di calcolo della soluzione, sono state utilizzate le seguenti semplificazioni:

1. flusso bidimensionale ($\partial(\dots)/\partial z = 0$);
2. fluido incomprimibile ($D\rho/Dt = 0$, con D/Dt derivata materiale).

Lungo la trattazione indicheremo con (x, y) le coordinate cartesiane fisse all'interno del dominio Ω e con $\vec{x} = \vec{x}(x, y, t)$ il vettore posizione in Ω tale che, fissati i valori (x, y, t) venga individuato un certo punto nello spazio all'istante indicato. Si definisce inoltre il vettore velocità come $\vec{u} = (u, v)$, diviso nelle sue due componenti lungo le direzioni x e y e rispettivamente $u(x, y, t)$ e $v(x, y, t)$.

Tutte le variabili (dipendenti e indipendenti) del problema sono normalizzate rispetto alla semi-altezza del canale (h), alla velocità massima (u_{max}), sulla linea mediana ($y = 0$) del caso indisturbato, e alla pressione dinamica (ρu_0^2).

Vengono imposte le seguenti condizioni al contorno lungo i 4 bordi del dominio:

1. sulle due pareti del canale, rispettivamente a $y = -1$ e $y = 1$, viene imposta la condizione di aderenza e risulta quindi che $u(x, \pm 1, t) = 0$ e $v(x, \pm 1, t) = 0$;
2. nel bordo d'ingresso viene imposto il moto completamente sviluppato di Poiseuille, i.e. $u_0(0, y, t) = 1 - y^2$ e $v(0, y, t) = 0$;

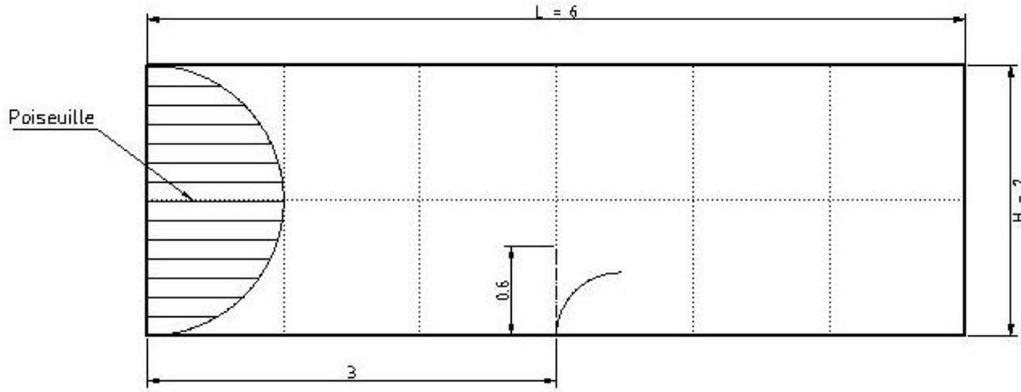


Figura 1.3: Disegno della geometria del problema

3. nel bordo d'uscita viene imposta una condizione convettiva $\partial \vec{u} / \partial t + \vec{u}(\partial \vec{u} / \partial x) = 0$.

Viene anche imposta una condizione iniziale $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, 0) = u_0$, che attribuisce all'istante iniziale una velocità uniforme in ogni sezione del dominio e pari alla velocità del bordo d'ingresso.

Le equazioni di Navier-Stokes per un fluido incomprimibile sono:

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = \frac{1}{Re} \mu \nabla^2 \vec{u} - \nabla p \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (1.2)$$

con $Re = \rho u_{max} L / \mu$, μ viscosità dinamica.

1.3 Descrizione della struttura

Definiamo ora la coordinata curvilinea $\vec{s} = \vec{s}(q, r, s)$ tale che fissati i valori di (q, r, s) si individui un punto materiale. Considerando la natura bidimensionale del problema e lo spessore limitato e trascurabile del filamento rispetto alla sua lunghezza, la coordinata curvilinea diventa funzione di un unico parametro $\vec{s} = \vec{s}(s)$ lungo la lunghezza del filamento stesso. Indichiamo quindi con $\vec{X} = \vec{X}(r, t)$ il vettore posizione del filamento all'istante t nella coordinata Lagrangiana dei punti materiali \vec{s} .

Sulla struttura, la forza esterna applicata può essere scomposta in due componenti distinte, una che provoca l'allungamento del filamento e una che ne provoca l'incurvamento.

La prima può essere individuata effettuando l'equilibrio tra la forza esterna e la tensione interna generata. Si consideri allora un tratto di filamento \bar{ab} , ne risulterà che

$$T\vec{\tau}|_a - T\vec{\tau}|_b = F_{ext} = \int_a^b f(s, t) ds$$

con T tensione interna delle fibre, $\vec{\tau}$ direzione tangente alle fibre stesse, F_{ext} somma delle forze esterne e $f(s, t)$ densità di forza. Si dimostra che la precedente formula è uguale a

$$\int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial s} (T\vec{\tau}) - f(s, t) \right] ds = 0$$

ed essendo il segmento \bar{ab} arbitrario, affinché l'integrale sia nullo, l'integrando deve essere nullo. Ne segue allora che l'espressione della (densità di) forza che causa l'allungamento risulta essere

$$\vec{f}_{elastic}(s, t) = \frac{\partial}{\partial s} (T\vec{\tau}) \quad (1.3)$$

Il filamento è considerato essere di materiale elastico; è quindi possibile ricavare la tensione interna con la legge di Hooke

$$T = K_{elas} \left(\left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right| - 1 \right)$$

poichè se si assume come posizione di riferimento quella non sollecitata, $\left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right| - 1$ rappresenta la deformazione del filamento.

La componente che provoca l'incurvamento, invece, può essere trovata considerando il filamento come una trave vincolata ad un estremo con un incastro e libera all'altro estremo, sottoposta a un carico distribuito, come schematizzato in figura 1.4.

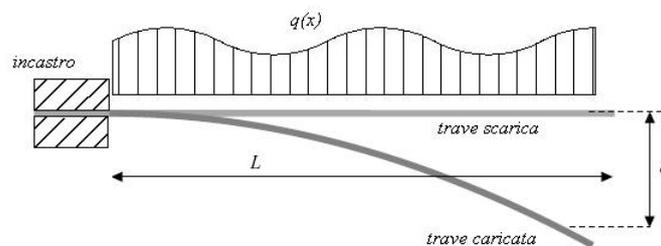


Figura 1.4: Trave incastrata

Con queste considerazioni e utilizzando un sistema di riferimento xy , con x diretta lungo la trave imperturbata e y in verticale verso il basso, è possibile trovare

la forza esterna con la formula di Eulero-Bernoulli

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ_n \frac{d^2\delta}{dx^2} \right] = q(x) \quad (1.4)$$

dove $q(x)$ è il carico esterno distribuito, δ lo spostamento dalla posizione iniziale in funzione della variabile x e diretto lungo l'asse y , E il modulo di Young e J_n il momento d'inerzia assiale.

Questa equazione può essere facilmente dimostrata ricordando la teoria delle travi inflesse: consideriamo un tratto di una trave inflessa sottoposto al carico distribuito q , dalle equazioni indefinite di equilibrio si ricava che

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -q$$

dove M è la risultante dei momenti flettenti agenti sul tratto di trave, equilibrata dalla somma di momenti interni dati dalle tensioni σ presenti nella trave; risulta quindi $M = \int_A y\sigma dA$ e l'equazione precedente diventa

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{d}{dx} \int_A y\sigma dA \right] = q \quad (1.5)$$

Richiamando le equazioni di legame costitutivo e quelle di congruenza

$$\sigma = E\varepsilon \quad \varepsilon = z \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2}$$

e sostituendole nell'equazione 1.5 ritroviamo l'equazione 1.4.

Se si considera il modulo di rigidezza flessionale EJ_n costante, questo può essere portato fuori dal simbolo di derivata ottenendo così la formula

$$q = EJ_n \frac{\partial^4 \delta}{\partial x^4}$$

La dimensione del momento d'inerzia assiale J_n è $[L^4]$, è quindi possibile dividere tutto per l'area della sezione in modo tale da ottenere a primo membro una densità di forza $[FL^{-3}]$ essendo ora q una forza per unità di lunghezza $[FL^{-1}]$.

Chiamando K_{bend} il prodotto delle costanti E e J_n/A (con A sezione del filamento) e scrivendo la forza in funzione della coordinata materiale, l'equazione precedentemente scritta diventa

$$\vec{f}_{bending}(s, t) = K_{bend} \frac{\partial^4 \vec{X}}{\partial x^4} \quad (1.6)$$

La forza esterna agente sul filamento sarà quindi la somma delle due componenti date dall'equazione 1.3 e 1.6

$$\vec{f}(s, t) = \vec{f}_{elastic} + \vec{f}_{bending}$$

1.4 Problema accoppiato fluido-struttura

Nelle precedenti sezioni si è trattato il fluido e il filamento elastico separatamente, in questa sezione considereremo invece l'interazione tra i due domini/componenti (fluido e struttura) nella situazione in cui il filamento venga posto all'interno del canale. Questa interazione consiste in uno scambio di forze lungo le superfici di contatto tra il dominio fluido e la struttura, provocando una variazione delle velocità e della quantità di moto di entrambi i "componenti". Con il metodo dei contorni immersi, le equazioni di risoluzione del fluido vengono riferite a un sistema di coordinate Cartesiane fisse mentre quelle della struttura a un sistema materiale Lagrangiano; è necessario quindi introdurre una funzione il cui compito sarà quello di passare le componenti di forza e velocità dalle coordinate fisse a quelle materiali e viceversa.

Questo compito è svolto dalla funzione delta di Dirac (δ),

$$\delta = \delta(\vec{x} - \vec{X})$$

che risulta essere nulla in tutti i punti del dominio ad esclusione di quelli in cui i due sistemi di riferimento (Euleriano e Lagrangiano) si sovrappongono. Grazie all'uso di questa funzione è possibile collegare la velocità del dominio fluido e quella del filamento

$$\vec{u}(\vec{s}, t) = \int \vec{u}(\vec{x}, t) \delta(\vec{x} - \vec{X}) d\vec{x}.$$

Ricordando la definizione di coordinata materiale è possibile risalire alla posizione di ogni punto del filamento poiché

$$\vec{u}(\vec{s}, t) = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$$

Grazie alla funzione δ possiamo trasmettere la tensione interna del filamento al fluido circostante con il passaggio dalle coordinate Lagrangiane a quelle Euleriane

$$\vec{F}(\vec{x}, t) = \int \vec{f}(\vec{s}, t) \delta(\vec{x} - \vec{X}) d\vec{s}$$

e introducendo un termine di forza localizzato $\vec{F}(\vec{x}, t)$, che è la densità di forza applicata al fluido da parte del contorno immerso, nell'equazione della conservazione del momento 1.1, che diventa quindi:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \mu \nabla^2 \vec{u} + F(\vec{x}, t).$$

Vengono qui di seguito ricapitolate le formule discusse nelle precedenti sezioni, utili alla risoluzione di un problema d'interazione tra un fluido e una struttura elastica

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \mu \nabla^2 \vec{u} + \vec{F}(\vec{x}, t) \\
 \nabla \cdot \vec{u} = 0 \\
 \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \vec{u}(\vec{s}, t) = \int \vec{u}(\vec{x}, t) \delta(\vec{x} - \vec{X}) d\vec{x} \\
 \vec{f}(s, t) = \vec{f}_{elastic} + \vec{f}_{bending} \\
 \vec{f}_{bending}(s, t) = K_{bend} \frac{\partial^4 \vec{X}}{\partial x^4} \\
 \vec{f}_{elastic}(s, t) = K_{elas} \frac{\partial}{\partial s} \left(\left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right| - 1 \right) \vec{\tau} \\
 \vec{F}(\vec{x}, t) = \int \vec{f}(\vec{s}, t) \delta(\vec{x} - \vec{X}) d\vec{s} \\
 + \text{condizioni al contorno} \\
 + \text{condizioni iniziali}
 \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Capitolo 2

Il problema discreto

In questo capitolo verranno introdotti alcuni cenni sulle teorie utilizzate per discretizzare il problema: si farà quindi una breve panoramica sul tipo di griglia utilizzata e sui metodi di discretizzazione spaziale e temporale usati in questo studio.

I metodi qui descritti sono stati implementati in un codice di calcolo alle differenze finite nella piattaforma MATLAB[®].

2.1 Introduzione

La risoluzione delle equazioni del moto dei fluidi non è conseguibile analiticamente se non in casi in cui siano ammesse drastiche semplificazioni. Nei casi generali si deve quindi ricorrere alla risoluzione per via numerica.

Il concetto di discretizzazione è alla base di ogni metodo numerico, e consiste nel definire all'interno del dominio di calcolo dei punti, *nodi*, in cui valutare le grandezze incognite. In alcuni casi è comodo pensare ogni nodo come centro della rispettiva zona di influenza, o *cella* (in sostanza si pensa di suddividere il dominio in tanti volumetti, all'interno di ognuno dei quali è posizionato un nodo). Si suppone inoltre un andamento per dette grandezze tra nodo e nodo, ad esempio lineare, quadratico, etc.

La trasformazione delle equazioni differenziali dalla forma continua a quella discreta avviene con modalità differenti a seconda del metodo numerico adottato, ma ha come risultato finale l'ottenimento di un sistema di equazioni algebriche aventi per incognite i valori delle grandezze di interesse nei nodi, valori approssimati in virtù delle semplificazioni insite nell'operazione di discretizzazione.

L'insieme dei nodi e delle celle costituisce la cosiddetta *griglia* di calcolo, e può essere caratterizzata in vario modo. Si possono avere griglie Cartesiane, ossia caratterizzate da celle a forma di parallelepipedo; ortogonali, in cui gli spigoli delle celle, pur non necessariamente rettilinei, si incontrano ortogonalmente; si distinguono inoltre griglie strutturate, caratterizzate da una struttura topologicamente analoga a quella delle griglie Cartesiane, e griglie non strutturate, con una distri-

buzione delle celle di tipo più generale. Inoltre, qualora le componenti di velocità vengano definite in corrispondenza ai centri delle facce delle celle, mentre le altre grandezze siano definite nei centri delle celle, si parla di *griglie sfalsate*, in quanto si può pensare che le celle relative alle componenti di velocità siano traslate (*staggered*) rispetto alle celle fondamentali. Qualora tutte le grandezze siano definite nei centri delle celle di calcolo, si parla allora di *griglia collocata*.

2.2 Metodo alle differenze finite

Il metodo alle differenze finite è stato il primo ad affermarsi grazie soprattutto alla sua semplicità concettuale. Questo permette di trovare la soluzione numerica di un'equazione o di un sistema di equazioni differenziali, i cui valori approssimati sono calcolati per un numero discreto di valori della variabile indipendente; ne deriva che l'equazione differenziale è trasformata in una equazione in cui compaiono le differenze finite tra valori consecutivi della variabile indipendente e dei corrispondenti valori delle funzioni cercate. Ciò permette di scrivere equazioni algebriche nelle quali un valore della funzione dipende dall'incremento scelto per la variabile indipendente e dai valori immediatamente precedenti della funzione stessa, oltre che dai coefficienti costanti che compaiono nell'equazione differenziale che sono i parametri del sistema.

I valori della variabile indipendente costituiranno un vettore di N elementi distanziati tra loro di un valore costante $dx = L/N$, se L è l'ampiezza dell'intervallo della variabile indipendente. La soluzione approssimata è, a sua volta, un vettore di N elementi distanziati tra loro di un incremento variabile dy che dipende dalla struttura dell'equazione differenziale e dai suoi parametri. Si può in genere riconoscere che l' n -esimo termine è funzione di alcuni valori immediatamente precedenti, è cioè definito in maniera ricorsiva. La differenza tra l'indice dell'elemento calcolato ed il più piccolo degli indici degli elementi precedenti da cui esso dipende, definisce l'ordine dell'equazione. Se l'ordine è k , i primi k elementi del vettore sono costanti da definire, al variare dei quali si ottengono soluzioni diverse; pertanto esse andranno scelte in base alle condizioni iniziali che, insieme all'equazione differenziale, definiscono l'oggetto di studio.

2.2.1 Approssimazione alle differenze finite

Il metodo delle differenze finite si basa sull'approssimazione delle derivate parziali prime e seconde che compaiono nelle equazioni differenziali mediante differenze dei valori finiti che la funzione da differenziare assume in alcuni punti del dominio in cui è definito il problema; in particolare, si sovrappone al dominio una griglia che per semplicità supporremo equi-spaziati (con h indicheremo la distanza tra due nodi vicini).

In una dimensione, ad esempio, la funzione f (di una sola variabile) può essere sviluppata nell'intorno del generico punto x come:

$$f(x+h) = f(x) + hf^I(x) + \frac{h^2}{2}f^{II}(x) + \frac{h^3}{3!}f^{III}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{IV}(x) + \dots$$

oppure come:

$$f(x-h) = f(x) - hf^I(x) + \frac{h^2}{2}f^{II}(x) - \frac{h^3}{3!}f^{III}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{IV}(x) - \dots$$

Sommando le due si trova:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2f^{II}(x) + \frac{h^4}{12}f^{IV}(x) + \dots$$

e quindi, se si tronca la serie alla derivata seconda:

$$f^{II}(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \quad (2.1)$$

Se h è abbastanza piccolo, l'espressione 2.1 fornisce il valore della derivata seconda calcolata alle *differenze finite centrate*. L'errore commesso sarà quindi:

$$\frac{(h^4/12)f^{IV}(x)}{h^2}$$

proporzionale ad h^2 che, al tendere di h a zero, tende rapidamente ad annullarsi. L'approssimazione delle derivate prime, eventualmente presenti nell'equazione differenziale, si ottiene dalla sottrazione dei due sviluppi in serie:

$$f^I(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} \quad (2.2)$$

e l'errore è ancora proporzionale ad h^2 . Se h è abbastanza piccolo, l'espressione 2.2 fornisce il valore della derivata prima calcolata alle differenze finite centrate. In totale si possono utilizzare tre schemi alle differenze finite:

- *Forward* con $Du_i = u_{i+1} - u_i$;
- *Backward* con $Du_i = u_i - u_{i-1}$;
- *Long centered* se $Du_i = u_{i+1} - u_{i-1}$ o *Short centered* se $Du_i = u_{i+1/2} - u_{i-1/2}$.

Gli schemi alle differenze discussi in precedenza valutano le derivate con un errore proporzionale ad h^2 e per questo sono accurate al secondo ordine; attraverso procedure analoghe è comunque possibile ottenere formule alle differenze di ordine superiore per la valutazione delle quali viene coinvolto un maggior numero di punti a monte e a valle.

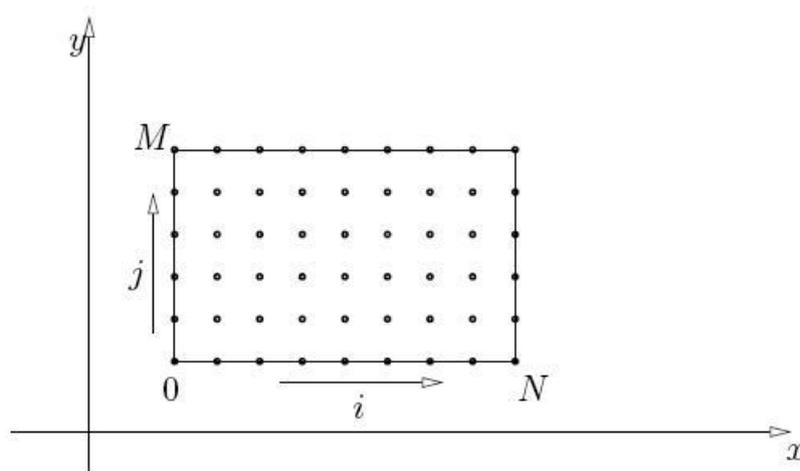


Figura 2.1: Esempio di mesh in 2D

Nel caso in cui la funzione dipende da due o più variabili, i concetti esposti precedentemente vanno estesi al caso di derivate parziali. Per rendere più semplice la comprensione del problema con la sua discretizzazione si faccia riferimento allo schema 2.1.

Nel piano, il generico punto è individuato da una coppia di indici (i, j) con $i = 0, \dots, N$ e $j = 0, \dots, M$. Inoltre come indicato in figura 2.1, nel caso di distribuzione uniforme dei nodi la coordinata x è la stessa per tutti i nodi che hanno lo stesso indice i , anche se hanno diverso indice j , e allo stesso modo tutti i nodi che hanno lo stesso indice j hanno la stessa coordinata y . Questo rende estremamente semplice la costruzione di schemi alle differenze finite per il calcolo di derivate parziali rispetto ad x o y .

In pratica si tratta di utilizzare le stesse formule riportate in precedenza per le funzioni di una sola variabile, utilizzandole per la funzione di due variabili $g(i, j)$, facendo variare solo l'indice relativo alla variabile rispetto alla quale si deve effettuare la derivata, mantenendo fisso l'altro. Il passo verrà poi sostituito da Δx o Δy , a seconda della direzione rispetto alla quale si effettua la derivata. Come esempio vengono riportate di seguito le espressioni delle derivate parziali prime e seconde rispetto a x e y , valutate con schemi alle differenze centrate riportati nella sezione precedente.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(i, j) = \frac{g(i+1, j) - g(i-1, j)}{2\Delta x}$$

che rappresenta il valore della derivata parziale rispetto alla x valutata nel nodo (i, j) . Analogamente:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(i, j) = \frac{g(i, j+1) - g(i, j-1)}{2\Delta y}$$

che rappresenta il valore della derivata parziale rispetto alla y valutata nel nodo (i, j) . Per le derivate seconde si avrà:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(i, j) = \frac{g(i+1, j) - 2g(i, j) + g(i-1, j)}{\Delta x^2};$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(i, j) = \frac{g(i, j+1) - 2g(i, j) + g(i, j-1)}{\Delta y^2}.$$

2.3 La griglia sfalsata (Staggered grid)

In questa sezione verrà presentata la griglia utilizzata nel nostro modello, motivando la decisione di adottare una griglia sfalsata nei confronti di una collocata.

2.3.1 Problemi con l'uso di griglie collocate

La scelta ovvia è quella di scegliere una griglia di punti sulla quale calcolare tutte le variabili in gioco: è questa una griglia *collocata* dove tutte le variabili condividono l'unica griglia in cui è diviso il dominio. Sebbene questa sistemazione comporti notevoli vantaggi computazionali, mostra anche problemi di disaccoppiamento "pari-dispari" tra pressione e velocità. Di seguito verrà proposta un'analisi semplificata che dimostra quanto detto.

Consideriamo quindi una griglia collocata monodimensionale del tipo rappresentato in fig. 2.2. Le superfici limite dei volumi di controllo sono equidistanti tra nodi successivi.

Come noto, una pratica consiste nel collocare i nodi al centro delle relative celle. In una griglia collocata, sia la pressione che la velocità sono definite nei nodi base $j-1, j, j+1$ (vd. figura 2.2).

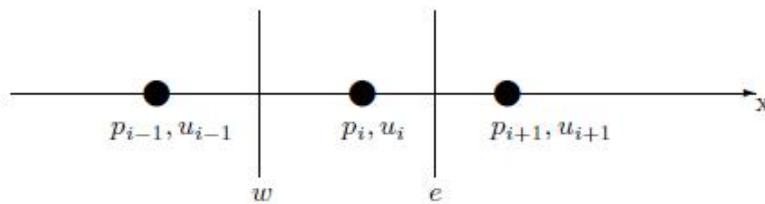


Figura 2.2: Griglia collocata monodimensionale

Integrando l'equazione di conservazione della quantità di moto relativa alla direzione x sul volume di controllo, bisogna esprimere in qualche modo il termine forzante dovuto al gradiente di pressione:

$$-\int_w^e \frac{dp}{dx} dx = p_w - p_e$$

Adottando delle funzioni interpolanti lineari tra nodo e nodo (schemi del secondo ordine) si ottiene facilmente:

$$p_w - p_e = \frac{p_{j-1} - p_{j+1}}{2}$$

La sostituzione del termine $p_w - p_e$ con il termine $p_{j-1} - p_{j+1}$ nella prima equazione di Navier-Stokes indica chiaramente che, con l'adozione di una griglia collocata, il termine forzante di pressione viene calcolato su una griglia più rarefatta di quella adottata in realtà: infatti la differenza di pressione non viene calcolata tra nodi adiacenti bensì tra nodi alternati.

Questo fatto comporta inevitabilmente una minor precisione per la discretizzazione delle equazioni di quantità di moto, ma sorgono anche problemi più gravi. Si pensi ad esempio di avere ottenuto un campo di pressione "a zig-zag" del tipo indicato in fig. 2.3:

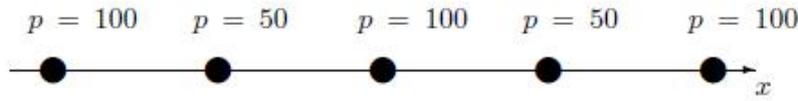


Figura 2.3: Campo di pressione a "zig-zag"

In questo caso il termine forzante introdotto nell'equazione di quantità di moto risulta nullo, pur non essendo affatto costante il campo di pressione. Ne segue che se p è una soluzione per il campo di pressione ed u è il campo di velocità ad esso legato tramite risoluzione dell'equazione di quantità di moto, anche il campo di pressione \hat{p} ottenuto sommando a p un campo a zig-zag porta alla stessa soluzione per u : non si avrebbe univocità di soluzione. Un metodo numerico che comporti problemi di questo tipo non sembra favorevole.

Vediamo ora un altro problema derivante dall'uso di griglie collocate. Consideriamo l'equazione di continuità per fluidi incomprimibili, per semplicità nel caso bidimensionale:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Integriamola sul generico volume di controllo, rappresentato in fig. 2.4:

$$(u_e - u_w)\Delta y_j + (v_n - v_s)\Delta x_i = 0$$

Di nuovo, interpolando linearmente tra nodo e nodo:

$$\left[\frac{u_{i+1,j} + u_{i,j}}{2} - \frac{u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2} \right] \Delta y_j + \left[\frac{v_{i,j+1} + v_{i,j}}{2} - \frac{v_{i,j} + v_{i,j-1}}{2} \right] \Delta x_i = 0$$

$$(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})\Delta y_j + (v_{i,j+1} - v_{i,j-1})\Delta x_i = 0$$

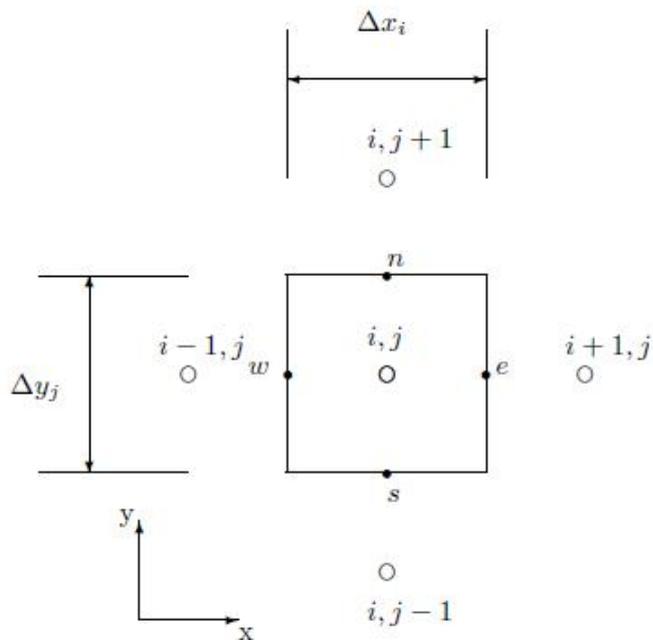


Figura 2.4: Volume di controllo in una griglia collocata

Nuovamente le differenze di velocità relative a posizioni distanti tra loro un passo di cella vengono sostituite con differenze di velocità relative a posizioni ben più distanti, con forte riduzione di precisione. Ancora, un campo di moto "a scacchiera" come quello rappresentato in fig. 2.5, in cui per semplicità si suppone $u = v$ in corrispondenza ad ogni nodo, soddisferebbe la forma discreta dell'equazione di continuità. Applicando tuttavia la forma integrale dell'equazione di continuità ad un generico volumetto delimitato da quattro nodi ci si rende facilmente conto che la conservazione della massa non è rispettata.

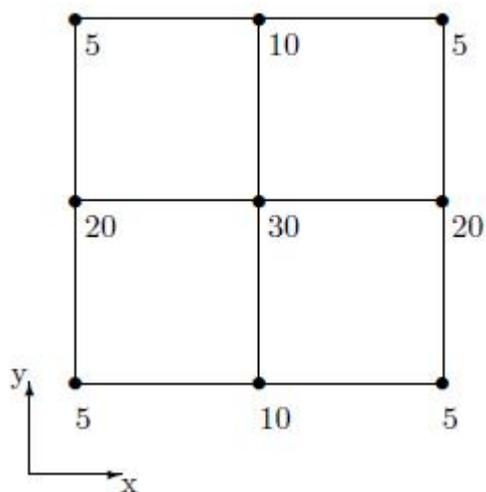


Figura 2.5: Campo bidimensionale a "zig-zag"

2.3.2 La soluzione: uso di griglie sfalsate (staggered)

Alcuni codici di simulazione evitano i problemi derivanti dall'uso di griglie collocate tramite trucchi di vario tipo: sovra-specificazione delle condizioni al contorno, sotto-rilassamento (per metodi iterativi), trattamenti speciali sul contorno. Più recentemente il problema è stato affrontato e risolto, tuttavia, facendo ricorso ad opportune tecniche di interpolazione.

Un modo elegante e decisamente risolutivo per affrontare il problema consiste nell'adottare *griglie sfalsate* (staggered grid): in una griglia sfalsata il campo di pressione e di velocità non condividono la stessa griglia; il primo viene calcolato al centro della cella mentre il secondo sulle facce. Un esempio di griglia sfalsata bidimensionale è presentata in figura 2.6.

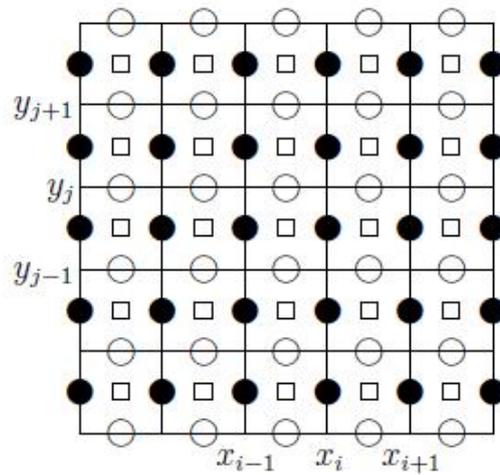


Figura 2.6: Schema di una sistemazione sfalsata: le componenti della velocità sono calcolate in \circ (u) e in \bullet (v) mentre la pressione è calcolata in \square

Un primo vantaggio derivante dall'uso di griglie staggered consiste nel poter esprimere i flussi di velocità attraverso le facce del generico volume di controllo della griglia base senza far ricorso ad interpolazioni. Questa possibilità risulta comoda nell'integrazione di equazioni di conservazione per scalari generici (ad esempio l'entalpia), ed agisce in favore di precisione.

Proviamo ora ad integrare l'equazione di continuità sul generico volumetto della griglia base; si ha facilmente:

$$(u_{i,j} - u_{i-1,j})\Delta y_j + (v_{i,j} - v_{i,j-1})\Delta x_i = 0$$

L'equazione risulta discretizzata in modo più preciso ed inoltre campi di velocità a scacchiera non risultano più soluzioni accettabili. Si noti ancora che, integrando la prima equazione di conservazione della quantità di moto sui volumetti della relativa griglia staggered, il termine forzante dovuto alla pressione risulta:

$$p_w - p_e = p_{i+1,j} - p_{i,j}$$

ottenuto quindi senza dover applicare interpolazioni. Ne segue ancora che campi di pressione a scacchiera non vengono trattati come campi di pressione costanti e che il termine forzante è espresso in maniera più accurata. Quanto mostrato giustifica ampiamente l'uso di griglie staggered con la tecnica dei volumi finiti.

2.4 La funzione delta di Dirac (δ)

Come già visto nel Capitolo 1 (Il problema nella meccanica del continuo), l'interazione tra la griglia Euleriana e quella Lagrangiana è governata dalla funzione delta di Dirac (δ).

La discretizzazione di questa funzione è tale che riesca a soddisfare la richiesta di alcune proprietà; tra le più importanti troviamo sicuramente che sia trasmessa tra fluido e struttura l'intera forza. Inoltre si vuole avere una distribuzione di densità di forza che sia una funzione continua delle posizioni dei punti del contorno immerso. Bisogna però considerare anche che la comunicazione tra la griglia Euleriana e quella Lagrangiana rimanga localizzata in una zona limitrofa al punto di contatto.

Nel nostro studio si è quindi deciso di usare la funzione delta presentata in [3] che assume:

$$\delta(r) = \begin{cases} \frac{1}{4h}(1 + \cos(\frac{\pi r}{2h})) & \text{se } |r| < 2h \\ 0 & \text{se } |r| \geq 2h \end{cases}$$

tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(r) dr = 1$, con $h = (h_x, h_y)$ spaziatura della griglia Euleriana nelle due direzioni (in generale $h_x \neq h_y$) e $r = (x, y)$ distanza dal punto di contatto.

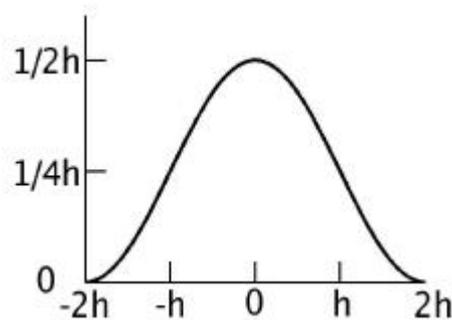


Figura 2.7: Grafico della funzione delta (δ) discretizzata

In figura 2.7 è mostrato l'andamento della funzione delta discretizzata; in figura 2.8, invece, è schematizzata la zona d'influenza della funzione δ (zona all'interno del quadrato tratteggiato); come si può notare si è scelto di utilizzare una funzione $\delta(r)$ in modo tale che la forza sia trasmessa ad una distanza massima di due volte la spaziatura in modo tale da localizzare il contatto in una zona limitrofa al punto di contatto come precedentemente detto. Inoltre si la funzione così regolarizzata

permette una trasmissione della forza senza picchi troppo elevate che, al limite, potrebbero portare a forze trasmesse $\rightarrow \infty$.

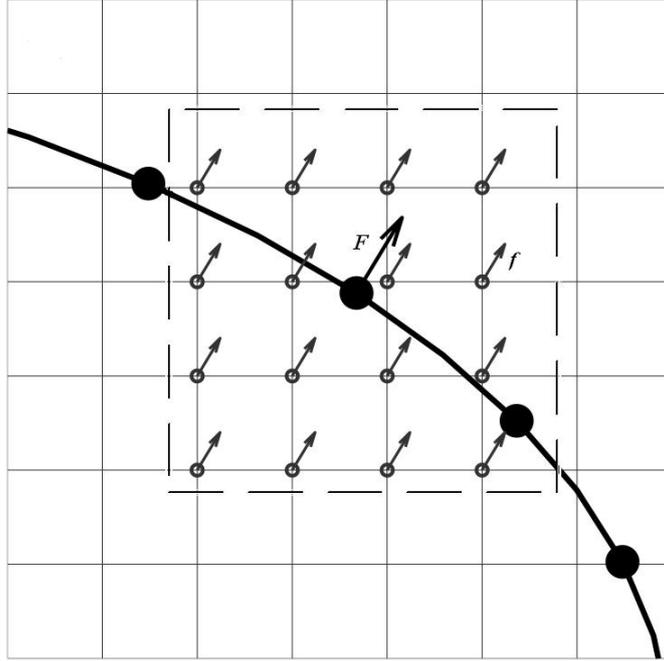


Figura 2.8: Schema del metodo dei contorni immersi, dove \circ sono i punti Euleriani mentre \bullet quelli Lagrangiani

2.5 Metodo a passi frazionari: cenni

La discretizzazione temporale è stata fatta con il metodo dei passi frazionati (fractional step), metodo numerico usato per la risoluzione della dipendenza dal tempo di problemi con flusso incomprimibile. Questo metodo fu originariamente introdotto da Alexandre Chorin e da Roger Temam indipendentemente nel 1967.

Il grande vantaggio di questo metodo risiede nel fatto di aver trovato il modo di disaccoppiare il problema di risolvere il campo di velocità da quello di pressione, risultando una grande efficienza computazionale.

Nel nostro studio, come presentato in [4], le equazioni del moto per il fluido incomprimibile (eq. 1.1 e 1.2) sono state discretizzate nel tempo usando il metodo di Eulero in avanti. Per semplicità abbiamo usato uno schema esplicito di Adams-Bashforth per i termini convettivi non lineari e uno implicito di Crank-Nicholson (trapezoidale) per i termini diffusivi. L'equazione del moto viene discretizzata dividendola nei due termini

$$\frac{(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n)}{\Delta t} + \left[\frac{3}{2} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \frac{1}{2} (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n-1} \right] = \frac{1}{2Re} \nabla^2 (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n) \quad (2.3)$$

$$\frac{(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*)}{\Delta t} = -\nabla p. \quad (2.4)$$

L'eq. 2.3 è il primo passo del metodo in cui viene valutata \mathbf{u}^* , campo delle velocità in cui non si tiene conto della continuità e del termine di pressione.

Il secondo passo del metodo calcola la pressione dalla 2.4, valutandone la divergenza

$$\nabla \cdot \frac{(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*)}{\Delta t} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1}}{\Delta t} \right) - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{u}^*}{\Delta t} \right) - \nabla \cdot \nabla p$$

ma la velocità \mathbf{u}^{n+1} deve rispettare la continuità e quindi $\nabla \cdot (\mathbf{u}^{n+1}/\Delta t) = 0$ da cui deriva che

$$\nabla^2 p = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{u}^*}{\Delta t} \right).$$

Infine, riutilizzando la 2.4, si esegue l'ultimo passo del metodo che ha come risultato il campo di velocità al passo successivo

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \nabla p \cdot \Delta t.$$

Capitolo 3

Simulazioni numeriche

Le simulazioni svolte durante questo studio sono state improntate a caratterizzare l'interazione tra il fluido e la struttura; per far ciò è stato necessario decidere quali fossero le variabili e quali i parametri e identificare gli strumenti opportuni per acquisire e analizzare i dati.

In questo capitolo verranno dapprima descritte le modalità seguite per raccogliere ed esaminare le informazioni rilevate ed infine verrà presentato lo studio sulle variabili ed i parametri in gioco.

3.1 Acquisizione dati

Per comparare le varie simulazioni sono stati scelti alcuni punti considerati significativi nei quali acquisire le informazioni necessarie allo svolgimento allo studio di questo problema. Per quanto riguarda la struttura si è scelto di seguire il punto finale del filamento come indice dell'oscillazione complessiva della struttura stessa; è stato infatti osservato come, a regime, fosse la parte terminale quella più sollecitata a movimenti. Inoltre si è tenuta traccia dell'energia potenziale del filamento stesso, utile per comprendere le energie in gioco e informazione aggiuntiva sull'oscillazione.

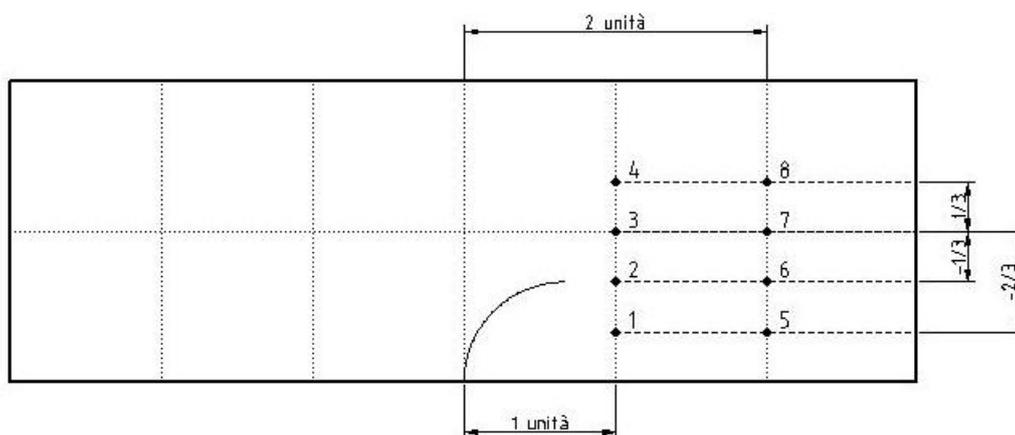


Figura 3.1: Posizionamento dei punti di acquisizione dei dati

Per quanto riguarda il fluido invece, sono stati individuati 8 punti a valle del filamento, divisi lungo due "frontiere" come mostrato in figura 3.1; questo sistema ha reso possibile lo studio dell'andamento del flusso in più punti del dominio, nonché è stato reso possibile tenere traccia della scia prodotta dall'incontro del fluido con il filamento.

Come si può notare, le due frontiere sono state scelte rispettivamente a una e due unità di lunghezza (l'unità è la semi-altezza del canale) dal filamento, ad altezze rispettivamente di $y = -2/3, -1/3, 0$ e $1/3$ rispetto all'asse centrale del canale, coincidente con la coordinata $y = 0$. Di questi 8 punti sono stati acquisiti dati relativi all'andamento della velocità u lungo x e v lungo y , nonché l'energia "di perturbazione" dell'intero flusso. Un esempio dei dati raccolti si può vedere in figura 3.2; si nota come i punti scelti siano molto significativi e diano una buona indicazione del flusso .

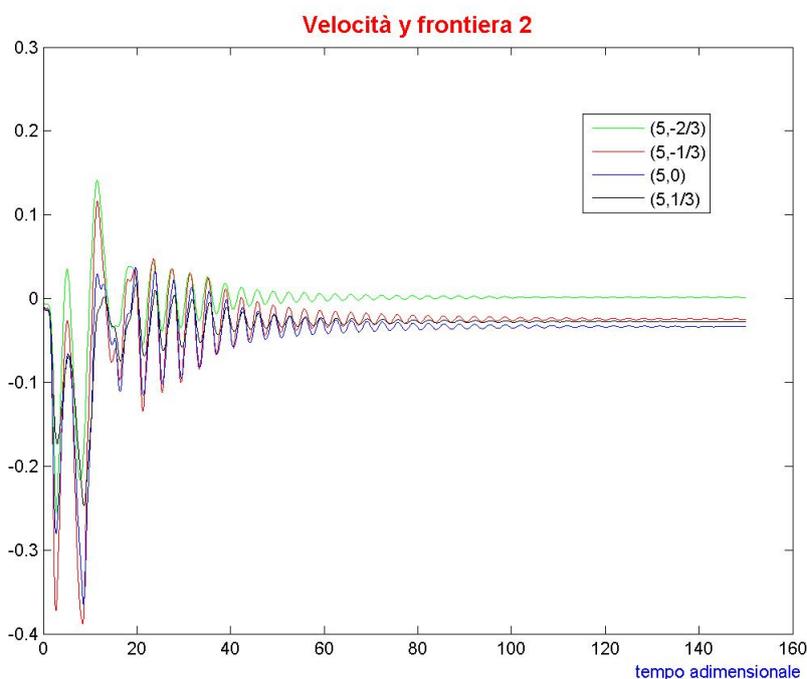


Figura 3.2: Grafico relativo al moto del fluido lungo y alla seconda frontiera

3.2 L'analisi dei dati

L'analisi dei dati raccolti è stata fatta in due modi, uno attraverso un'esame visivo degli andamenti dei dati acquisiti nei vari punti, e uno metodologico attraverso l'uso della trasformata veloce di Fourier (FFT) e l'analisi spettrale.

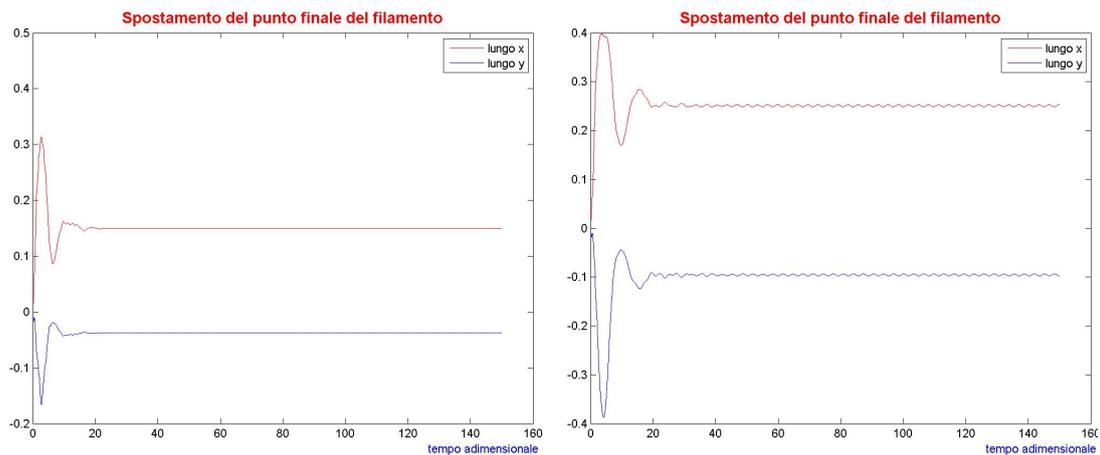


Figura 3.3: Grafici relativi al movimento del punto finale del filamento in due configurazioni differenti

3.2.1 La visualizzazione grafica

La prima analisi dei dati è stata eseguita attraverso la semplice rappresentazione grafica dei dati, che ha permesso di fare una prima valutazione qualitativa dei risultati.

Attraverso un codice di calcolo vengono visualizzati i grafici dei dati distinti per categoria, cioè vengono separati i grafici del movimento del filamento, dell'andamento dell'energia e del moto del fluido; per chiarire al meglio si fa riferimento alle figure 3.2, 3.3 e 3.4 dove vengono mostrati un grafico per ogni categoria.

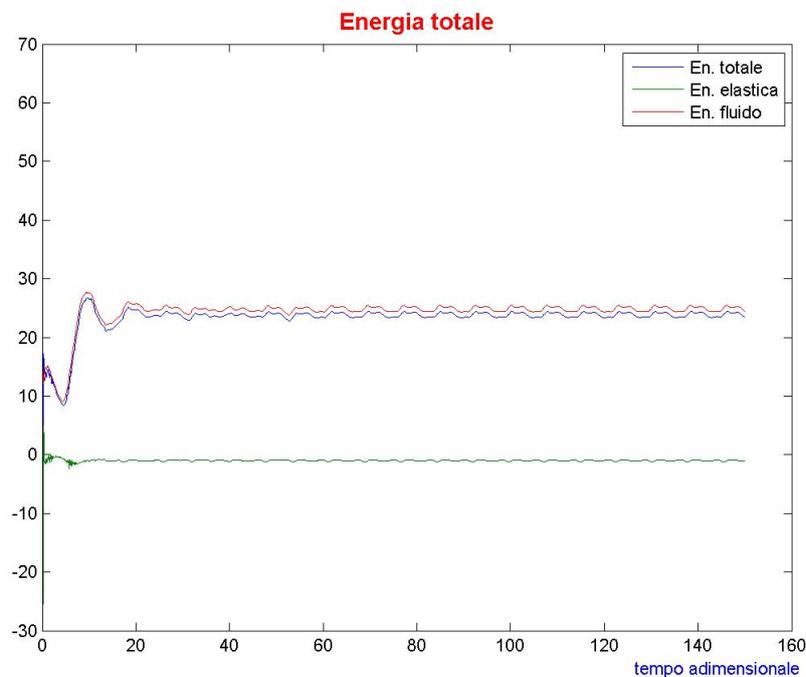


Figura 3.4: Grafico relativo all'andamento delle energie in gioco

Come si può notare dalle immagini 3.2, 3.3 e 3.4, è possibile fare una valutazione qualitativa dell'interazione, potendo distinguere in categorie ampie i vari moti del

filamento e della struttura; ad esempio se si guarda l'immagine 3.3 si può notare facilmente la differenza tra un moto stazionario e uno periodico ben definito.

Questo metodo, però, mostra una certa limitatezza; infatti dall'immagine 3.2 non si riesce a capire se il moto sia periodico, periodico decrescente o addirittura stabile e stazionario, mentre l'immagine 3.4 non chiarisce se l'interazione produca variazioni periodiche con più di una frequenza principale oppure se ci sono interazioni non-lineari tra modi diversi o auto-interazioni di un dato moto.

3.2.2 La trasformata di Fourier

E' stato quindi necessario trovare un modo più oggettivo per valutare le casistiche e poter delineare al meglio i moti che nascono dall'interazione tra fluido e filamento. Come già precedentemente detto, la tecnica da noi usata è stata quella dell'analisi spettrale facendo uso della trasformata di Fourier; questa tecnica permette di ottenere un grafico chiamato "periodogramma" che consente di ricavare lo spettro di potenza della serie in funzione della frequenza, mostrando dei picchi in corrispondenza di ciascuna delle frequenze caratteristiche della serie, come mostrato nelle figure 3.5 e 3.6.

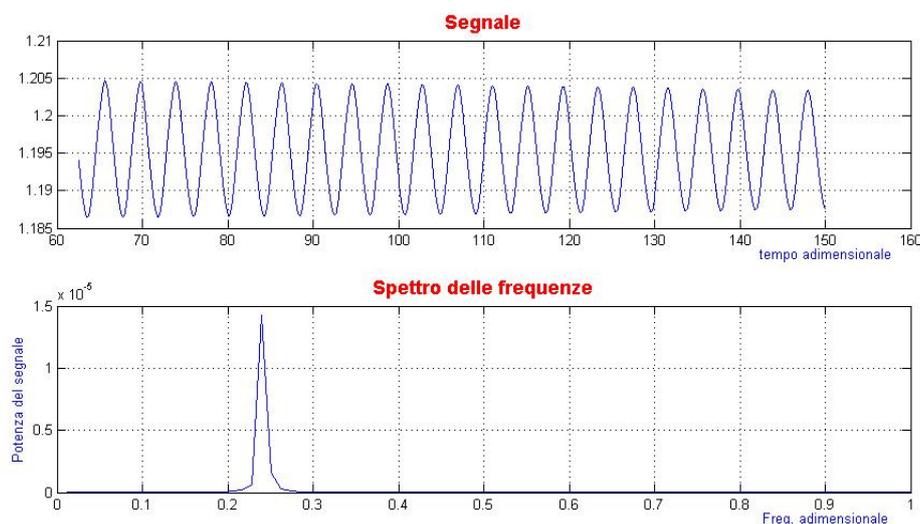


Figura 3.5: Analisi spettrale di un segnale periodico

Con questa tecnica siamo stati capaci di individuare le frequenze di oscillazione nelle varie configurazioni e di catalogare i modi di oscillazione del filamento e del fluido; analizzando i picchi di potenza si sono potute distinguere facilmente le simulazioni stabili da quelle oscillanti.

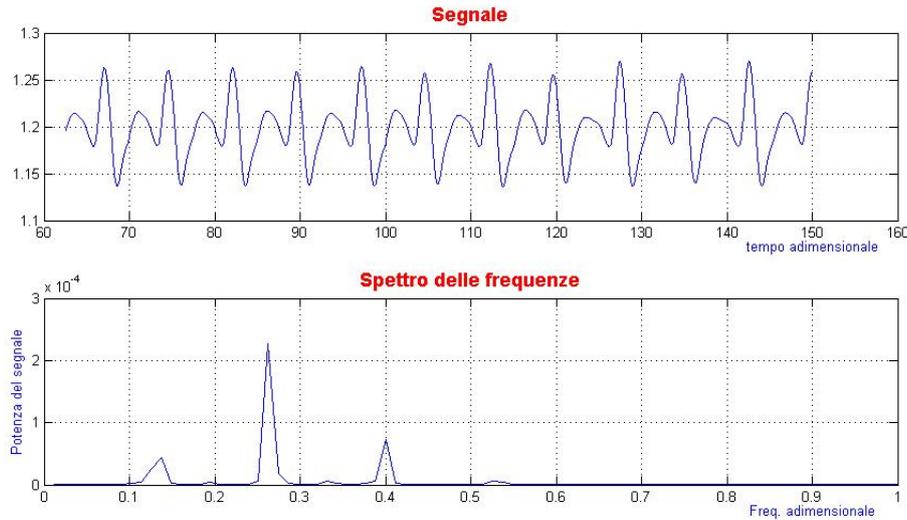


Figura 3.6: Analisi spettrale di un segnale periodico a più frequenze

3.3 Parametri e variabili in gioco

Nello studio di questo problema entrano in gioco molte variabili, alcune costruttive altre legate alle proprietà di fluido e struttura; risulta infatti che l'interazione tra i due componenti dipende dal numero di Reynolds (Re), dal coefficiente di incurvamento (K_{bend}) e di stiramento (K_{elas}) del filamento, dalla sua densità (ρ_{filam}) e lunghezza (L_{filam}), dalla lunghezza del canale (L) e da alcune condizioni imposte dai limiti del codice.

Alcuni di questi parametri sono stati scelti come dati del problema fissati a priori, mentre altri sono stati scelti solo dopo attente valutazioni dovute a vincoli progettuali oppure a ipotesi perseguite.

Tra i dati imposti a priori vi sono la lunghezza del filamento e la sua densità, fissati rispettivamente come $L_{filam} = 0,6 \cdot h$, con h la semi-altezza del canale, e $\rho_{filam} = 10$.

Per quanto riguarda la lunghezza del canale è stata scelta dopo alcune analisi su differenti configurazioni poiché era nostra idea rendere la soluzione indipendente dalle condizioni d'ingresso imposte. Si è deciso quindi di mantenere costante la distanza della struttura dall'uscita, e pari a 3 unità di lunghezza, variando solamente la sua distanza dall'ingresso, ricercando la condizione ottimale che garantisca l'indipendenza dalla posizione dell'ingresso, minimizzando la durata del calcolo.

Si sono messe a confronto tre lunghezze di canale differenti, 4, 6 e 8 unità, che chiameremo rispettivamente configurazione D4, D6 e D8; ogni modello è stato valutato e paragonato su due simulazioni distinte con i seguenti parametri:

1. $Re = 160$, $K_{bend} = 7,5 \cdot 10^{-3}$ (1^a simulazione);
2. $Re = 200$, $K_{bend} = 7,5 \cdot 10^{-3}$ (2^a simulazione).

Per confrontare i risultati ed avere un metro di giudizio obiettivo, si è fatto uso della trasformata di Fourier analizzando e paragonando le frequenze dominanti e la potenza dei segnali di ogni simulazione catturati nei punti descritti nella precedente sezione.

Nelle tabelle seguenti sono riportiamo i valori delle frequenze e dell'ampiezza al quadrato per entrambe le tipologie di simulazioni (tabelle 3.1 e 3.3 per la 1^a simulazione, 3.2 e 3.4 per la 2^a simulazione).

	L = 4		L = 6		L = 8	
spostamento su	x	y	x	y	x	y
max pwr (10^{-6})	1,76	2,87	30,3	13,2	26,5	11,6
freq	0,41	0,41	0,14	0,14	0,14	0,14
periodo	2,4	2,4	7,3	7,3	7,3	7,3

Tabella 3.1: Analisi del movimento della struttura nella 1^a simulazione ($Re = 160$, $K_{bend} = 7,5 \cdot 10^{-3}$)

	L = 4		L = 6		L = 8	
spostamento su	x	y	x	y	x	y
max pwr (10^{-6})	4,79 - 6,78	2,11 - 2,96	9,13	4,04	6,26	2,54
freq	0,10 - 0,15	0,10 - 0,15	0,24	0,24	0,23	0,23
periodo	9,7 - 6,7	9,7 - 6,7	4,2	4,2	4,4	4,4

Tabella 3.2: Analisi del movimento della struttura nella 2^a simulazione ($Re = 200$, $K_{bend} = 7,5 \cdot 10^{-3}$)

	L = 4	L = 6	L = 8	L = 4	L = 6	L = 8
frontiera	1			2		
max pwr (10^{-4})	0,19	2,50	2,40	0,33	2,48	2,40
freq	0,41	0,27	0,27	0,41	0,27	0,27
periodo	2,4	3,6	3,6	2,4	3,6	3,6

Tabella 3.3: Analisi del moto del fluido nella 1^a simulazione ($Re = 160$, $K_{bend} = 7,5 \cdot 10^{-3}$)

Riguardo al moto del filamento, si può notare che i risultati delle configurazioni D6 e D8 risultano essere simili mentre quelli della D2 divergono sensibilmente. Come si può infatti vedere dai risultati in tabella 3.1 nella 1^a simulazione il movimento del filamento all'interno dei canali lunghi 6 e 8 risulta essere periodico di frequenza $f = 0,27$ e le ampiezze sono dello stesso ordine di grandezza, mentre i risultati della configurazione D4 si discostano notevolmente dagli altri due con ampiezze di 1-2 ordini più piccole e una frequenza di oscillazione completamente diversa ($f = 0,41$). La 2^a simulazione (3.2) conferma come i risultati delle configurazioni D6 e D8 siano

	L = 4	L = 6	L = 8	L = 4	L = 6	L = 8
frontiera	1			2		
max pwr (10^{-4})	2,22	10,19	6,27	2,63	11,19	7,44
freq	0,31	0,24	0,23	0,31	0,24	0,23
periodo	3,2	4,2	4,4	3,2	4,2	4,4

Tabella 3.4: Analisi del moto del fluido nella 2^a simulazione ($Re = 200$, $K_{bend} = 7,5 \cdot 10^{-3}$)

convergenti, o comunque comparabili, mentre il modello D4 risulta essere ancora sensibilmente diverso con la comparsa di un moto a più frequenze.

Discorso analogo può esser fatto per il moto del fluido, la cui analisi è riassunta nelle tabelle 3.3 e 3.4, che conferma quanto precedentemente detto: le ampiezze nelle configurazioni D6 e D8 sono ancora comparabili e le frequenze, non più esattamente uguali, ma molto vicine.

Per chiarire meglio quanto detto si riportano nelle immagini i diagrammi dei segnali e dell'analisi spettrale, comparate tra loro.

A fronte di quanto notato nell'analisi fatta, si può affermare che i risultati ottenuti con le simulazioni con il canale lungo 6 e 8 sono indipendenti dalla condizione imposta all'ingresso poiché le soluzioni rimangono inalterate nonostante l'allontanamento dal varco d'entrata, a differenza di quanto notato con la configurazione D4, dove i risultati mutano a causa del flusso imposto all'ingresso. Si è quindi scelto di optare per un canale lungo 6.

Sono stati eseguiti alcuni studi preventivi anche sul movimento e la rigidità del filamento poiché il codice di calcolo non comprendeva l'interazione tra il fluido e la parete dovuto ad un urto tra le due strutture. Grazie a queste simulazioni si è deciso di configurare il filamento con una parte rigida (il primo 25% della sua lunghezza) alla base e una elastica in modo tale da permetterci una buona variazione degli altri parametri in gioco senza rischiare il contatto tra le due strutture.

Una limitazione è stata definita anche sul coefficiente di stiramento (K_{elas}) perché si voleva limitare la deformazione lineare del filamento in modo da poter osservare al meglio gli effetti del fluido sull'incurvamento della struttura; è stato quindi impostato un valore $K_{elas} = 10^2$ abbastanza elevato da racchiudere la deformazione sotto il 3%.

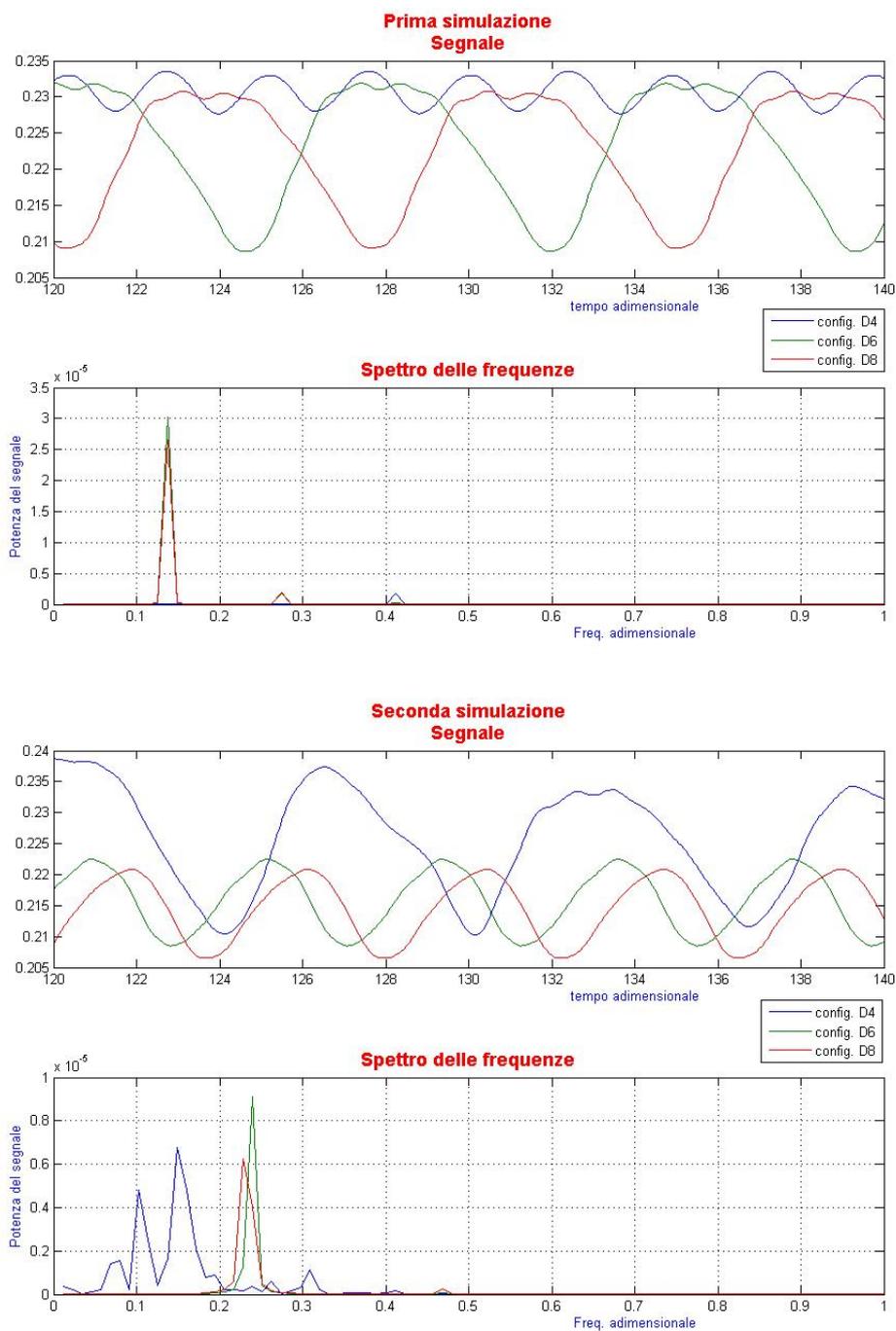
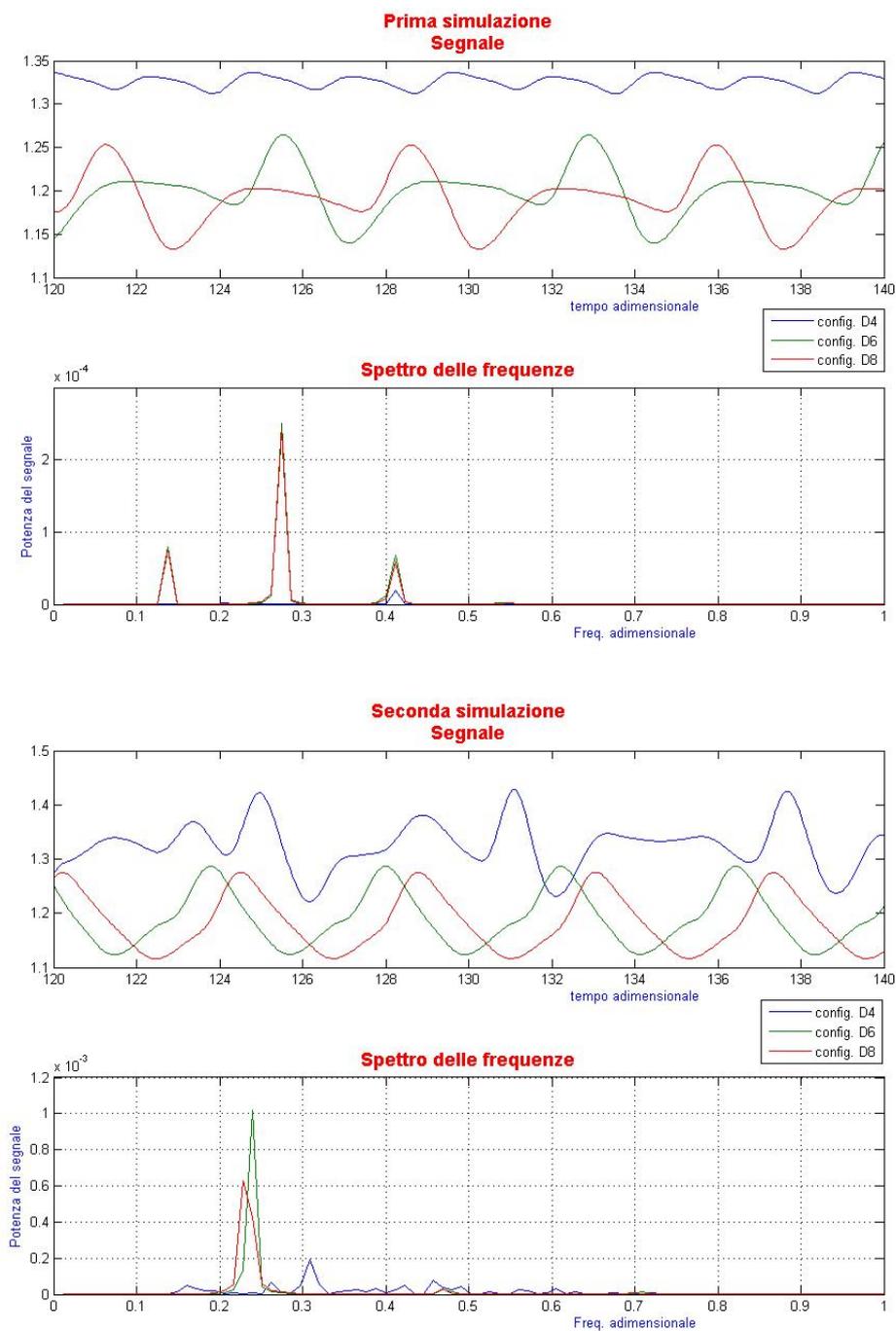


Figura 3.7: Analisi del movimento del filamento nella 1^a e 2^a simulazione

Figura 3.8: Analisi del moto del fluido alla prima frontiera nella 1^a e 2^a simulazione

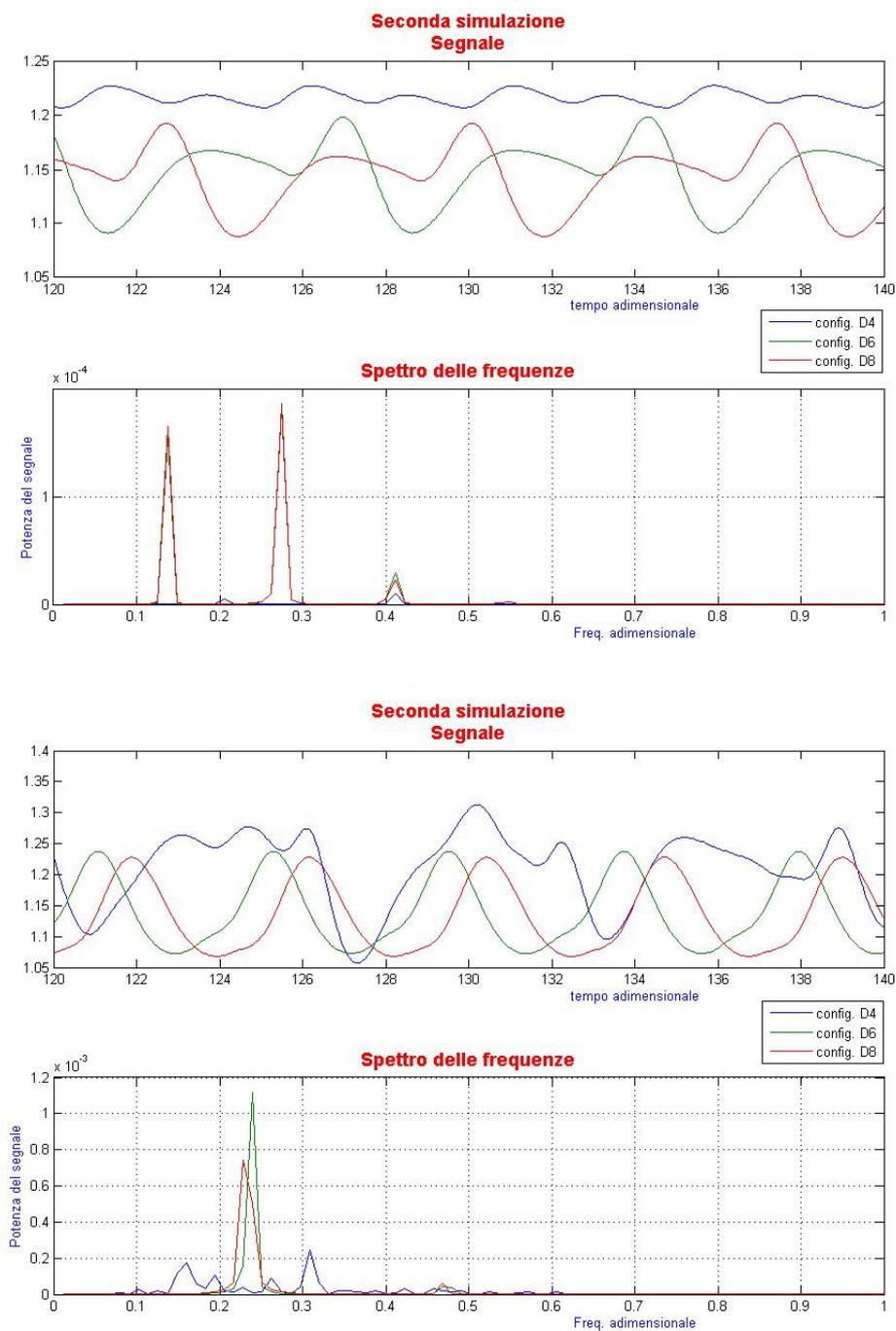


Figura 3.9: Analisi del moto del fluido alla seconda frontiera nella 1^a e 2^a simulazione

Capitolo 4

I risultati

Lo scopo di questo studio è quello di riuscire a classificare su un piano $Re - K_{bend}$ il tipo di movimento del filamento e il tipo di moto del fluido, riuscendo a distinguere le zone di stabilità da quelle di instabilità. A causa di limiti del codice, la ricerca è stata circoscritta a solo una parte del piano; infatti si è lavorato con rigidità superiori a 10^{-5} per Reynolds bassi, superiori a 10^{-3} per Reynolds più elevati, ma sempre rimanendo con Reynolds non oltre 200. Questo perché oltre tali valori la risoluzione risultava insufficiente, o perché, a basse rigidità del filamento, si potevano riscontrare urti tra questo e la parete del canale, condizione non implementata nel codice; questo limite dipende fortemente dalla percentuale del filamento impostata come rigida (si veda Capitolo 3.3 - Parametri e variabili in gioco).

Dalla teoria si può dedurre che si dovrebbero distinguere diverse zone al variare dei due parametri con comportamenti diversi di fluido e struttura.

Al tendere a zero del numero di Reynolds il fluido è fermo come si può vedere dalla definizione di Re , infatti:

$$se\ Re = \frac{u \cdot L}{\nu} \rightarrow 0 \implies u \rightarrow 0$$

poiché ν e L sono parametri assegnati non nulli.

E' chiaro che se il fluido è ferma risulterà stabile anche la struttura in quanto non ci sarà nessuna azione perturbatrice che possa farla incurvare.

Analogamente al crescere della rigidità del filamento, questa rimarrà stabile; infatti al limite per $K_{bend} \rightarrow +\infty$ avremo un corpo infinitamente rigido, a cui, ovviamente, il moto non è permesso.

Per alti valori di K_{bend} , il filamento risulterà un ostacolo per il fluido poiché l'alta rigidità della struttura non permette molti movimenti, quindi dopo essersi incurvato ostruirà il passaggio del flusso: per basse velocità del fluido stesso si avrà un dominio completamente stabile, mentre all'aumentare progressivamente del numero di Reynolds, si passerà da una zona di completa stabilità a una in cui il fluido comincerà a diventare instabile.

Al contrario per Re elevati e K_{bend} bassi avremo una zona di instabilità in cui sia il filamento che il flusso oscillano: in questa zona l'interazione tra fluido e struttura sono molto marcate.

Riassumendo, si può dividere il piano $K_{bend} - Re$ in tre zone distinte, una con numeri di Reynolds bassi o con rigidità elevata in cui abbiamo la stabilità del sistema, una per numeri di Reynolds elevati e rigidità anche modeste in cui la grande velocità provoca forti instabilità, infine una zona "intermedia" in cui la rigidità del filamento unita alle velocità moderate portano ad avere il filamento stabile ma oscillazione nel flusso.

Uno schema semplificato di quanto ci aspettiamo dalle simulazioni è presentato in figura 4.1.

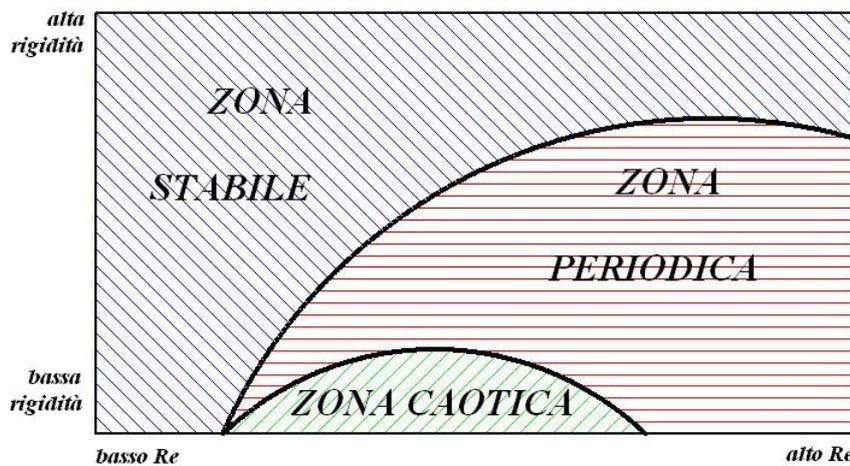


Figura 4.1: Schema dei risultati attesi all'interno della zona risolta numericamente

4.1 La zona stabile

Partendo da queste idee, abbiamo indirizzato le nostre ricerche al fine di individuare le linee di demarcazione tra le varie aree, anche se ovviamente non si potrebbe parlare di linee in senso stretto ma più di zone di transizione.

Grazie alle simulazioni siamo riusciti a individuare il numero di Reynolds critico, cioè il valore di Reynolds al di sotto del quale abbiamo la completa stabilità indipendentemente dal valore della rigidità. Questo valore è stato approssimativamente individuato attorno a $Re_{crit} \approx 50$.

Nelle figure 4.2 e 4.3 sono mostrati i segnali dello spostamento del filamento e dell'andamento della velocità u alla prima frontiera in due diverse configurazioni: entrambe condividono lo stesso numero di Reynolds ($Re = 50$) ma le rigidità sono molto diverse.

Come si può notare dai due diagrammi, nonostante in una delle due simulazioni il filamento sia molto più rigido, le caratteristiche di movimento non cambiano, a meno di una diversa posizione di equilibrio della struttura.

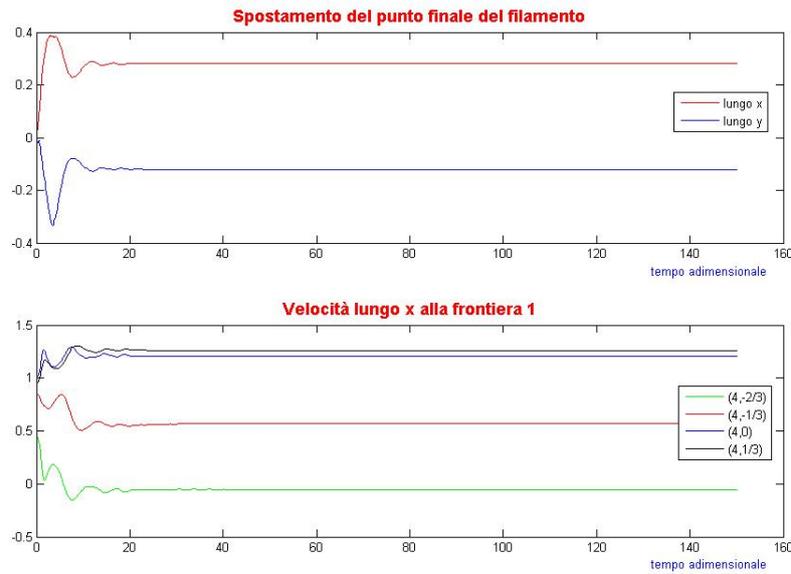


Figura 4.2: Grafico dello spostamento del filamento e dell'andamento della velocità a $Re = 50$ e $K_{bend} = 8 \cdot 10^{-3}$

In modo analogo si è individuato un valore della rigidità critico, al di sopra della quale a causa della poca flessibilità della struttura, questa diventasse un ostacolo fisso per il fluido producendo una scia stabile a valle. Questo valore è stato individuando intorno a valori $K_{bend,crit} \approx 20 \cdot 10^{-3}$.

A dimostrazione si fa riferimento ai diagrammi riportati nelle figure 4.3, 4.4 e 4.5: qui, analogamente a quanto fatto per Reynolds critico, le simulazioni condividono la stessa rigidità ($K_{bend} = 20 \cdot 10^{-3}$) con valori di Re progressivi. Come si può notare, anche in questo caso le diverse analisi mostrano le stesse caratteristiche, anche se con asintoti diversi.

Riassumendo, siamo quindi riusciti a individuare la zona di stabilità dell'intero sistema; qui le forze scambiate sono piccole a causa della grande rigidità della struttura e/o alla bassa velocità del fluido, portando a una limitata interazione tra filamento e flusso senza particolari manifestazioni con oscillazioni o scie caotiche.

4.2 La zona caotica

Rimanendo nei limiti imposti dal codice come visto a inizio capitolo, siamo riusciti a trovare una zona in cui il sistema ha una risposta caotica; questo avviene per rigidità piccole ($K_{bend} = 0,05 \div 1,2 \cdot 10^{-3}$) e con valori di Reynolds oltre il critico ma non troppo elevati ($Re_{crit} < Re < 140$). In quest'area la bassa rigidità del filamento gli permette una grande flessioni anche con basse forze; questo porta a una notevole quantità di energia scambiata tra fluido e filamento portando a forti instabilità sia sul movimento della struttura che sul moto del fluido.

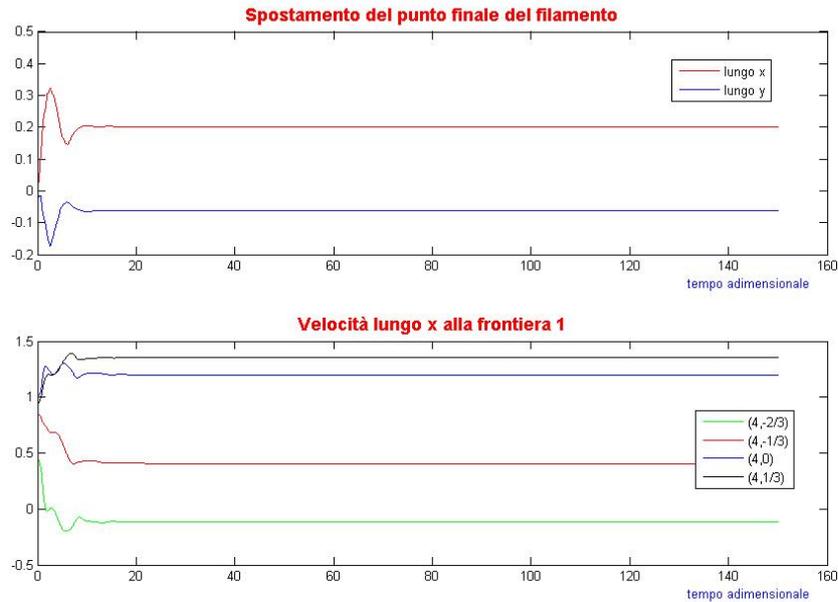


Figura 4.3: Grafico dello spostamento del filamento e dell'andamento della velocità a $Re = 50$ e $K_{bend} = 20 \cdot 10^{-3}$

Nelle figure 4.6 e 4.7 è presentato un ingrandimento del piano $Re - K_{bend}$ nella zona caotica con segnalate le simulazioni fatte e i risultati ottenuti.

Come si può vedere questa zona è molto complicata; infatti per bassi valori di Reynolds, ma comunque sempre maggiori di Re_{crit} , e di rigidità, il filamento tende ad allinearsi al moto del fluido risultando complessivamente un sistema stabile. All'aumentare della rigidità la struttura è sì molto inflessa, ma non così tanto da allinearsi al flusso, permettendo al fluido di imprimere una certa forza sulla sua superficie; questo unito alla bassa rigidità portano a oscillazioni caotiche e di grande ampiezza. All'aumentare del numero di Reynolds, nonostante la struttura si allinei al flusso, si risentono particolarmente gli effetti dell'aumento della forza d'attrito e, soprattutto, della scia instabile che comporta vibrazioni nel filamento. Aumentando maggiormente il numero di Reynolds si passa a una zona in un cui le oscillazioni diventano ordinate, acquisendo un periodo ben definito.

A titolo d'esempio riportiamo in figura 4.8 il diagramma dei risultati ottenuti in una simulazione nella zona caotica.

4.3 La zona con filamento stabile e fluido periodico

Nella zona centrale, compresa tra la stabilità e il moto caotico, abbiamo un comportamento diverso di filamento e fluido. Infatti qui il filamento presenta una rigidità abbastanza elevata da permettere solo movimenti minimi, quasi impercettibili, mentre il fluido ha una velocità abbastanza elevata da presentare una scia non stazionaria.

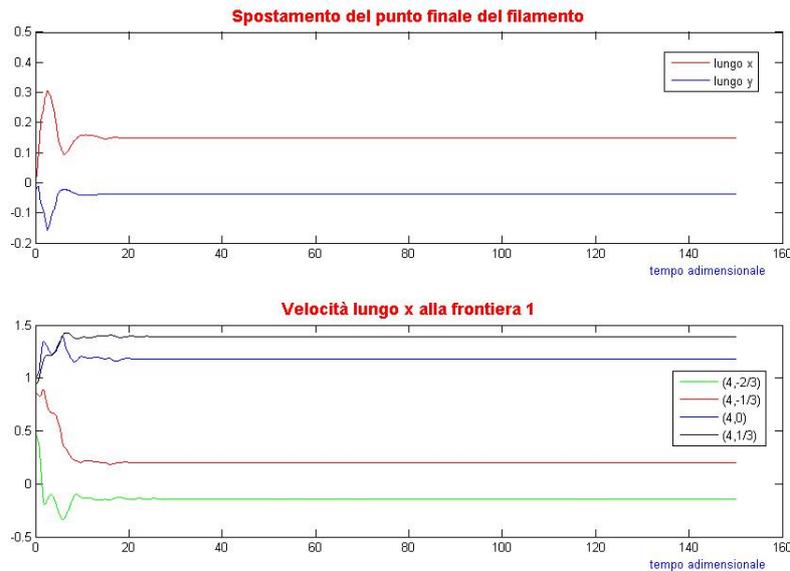


Figura 4.4: Grafico dello spostamento del filamento e dell'andamento della velocità a $Re = 110$ e $K_{bend} = 20 \cdot 10^{-3}$

In figura 4.9 viene mostrato il diagramma dei risultati di una simulazione in questa zona; anche se dal grafico può sembrare che il filamento oscilli, in realtà questo movimento è così piccolo da stare all'interno di una sola cella di calcolo. Abbiamo quindi ritenuto questa oscillazione come un rumore di fondo, un errore di calcolo, e considerato il filamento stabile, supportati anche dall'analisi spettrale come vedremo in seguito. Del fluido, invece, si può notare come sua la oscillazione sia abbastanza marcata e di periodo ben definito.

Riassumendo, dalle simulazioni sono state individuate tre zone diverse di comportamento del sistema, esattamente come ci aspettavamo dalla teoria; nelle figure 4.10 e 4.11 è riportato il piano $Re - K_{bend}$, uno relativo alla caratterizzazione del filamento e uno a quella del fluido, che riassumono le simulazioni fatte e i risultati ottenuti.

4.4 L'analisi spettrale

A supporto dei risultati trovati abbiamo lo strumento dell'analisi spettrale che ci ha permesso di calcolare le frequenze di oscillazione e le potenze del segnale.

Nelle figure 4.12 e 4.13 sono riportati in tabelle i valori della potenza del segnale, rispettivamente del flusso lungo x e del moto del filamento lungo y . I dati sono stati suddivisi con colori diversi per potenze progressivamente crescenti.

Più la potenza del segnale è alta più la frequenza dominante incide sull'andamento del moto: risulterà quindi che un punto con potenza elevata (celle verdi) avrà un'oscillazione ben definita con frequenza corrispondente a quella potenza; al contrario i punti con potenza intermedia (celle gialle) mostreranno un andamento più caotico,

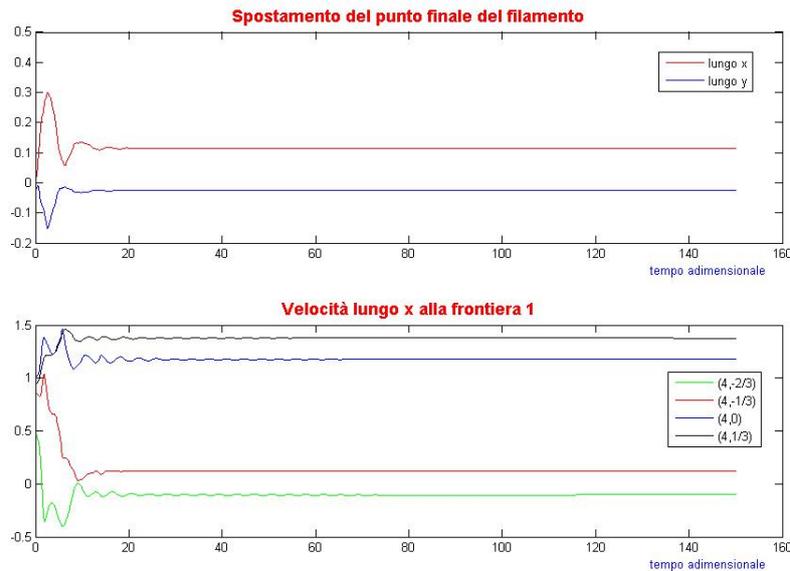


Figura 4.5: Grafico dello spostamento del filamento e dell'andamento della velocità a $Re = 200$ e $K_{bend} = 20 \cdot 10^{-3}$

senza quindi un'oscillazione con un periodo ben definito, per arrivare a andamenti stazionari per potenze molto basse (celle rosse)

Per quanto riguarda il filamento, come si può notare dalla fig. 4.13, le potenze dei segnali rimangono molto piccole per quasi tutto il piano al di fuori della zona caotica precedentemente vista. Inoltre all'interno della stessa zona caotica, spiccano i punti a $Re = 130 \div 150$ e $K_{bend} = 0,5 \div 1 \cdot 10^{-4}$.

Analogamente le tabelle riguardanti il fluido (fig. 4.13) mostrano una zona centrale di moto periodico per Re più elevati, caotico o periodico a più frequenze per valori di Reynolds più modesti. Nella zona a bassi valori di rigidità si notano i punti con andamento caotico (celle gialle) seguite da moti periodici ben definiti intorno a valori di $Re \approx 150$.

Nelle figure 4.14 e 4.15 sono riportati in tabelle i valori delle frequenze principali dei segnali, rispettivamente del flusso lungo x e del moto del filamento lungo y .

In giallo sono state evidenziate le frequenze appartenenti al moto periodico del solo flusso: come si può vedere quasi l'intera area mantiene frequenze approssimativamente intorno a $f_1 = 0,25$ a cui corrisponde un periodo di oscillazione di $T_1 = 4$ unità di tempo. In verde invece troviamo le frequenze che corrispondono a moti periodici sia del filamento che del flusso: qui le frequenze sono intorno a $f_2 = 0,06$ a cui corrisponde un periodo di $T_2 = 16,7$ unità di tempo. Da notare che l'oscillazione del filamento lungo y e della velocità hanno la stessa frequenza in tutto il piano.

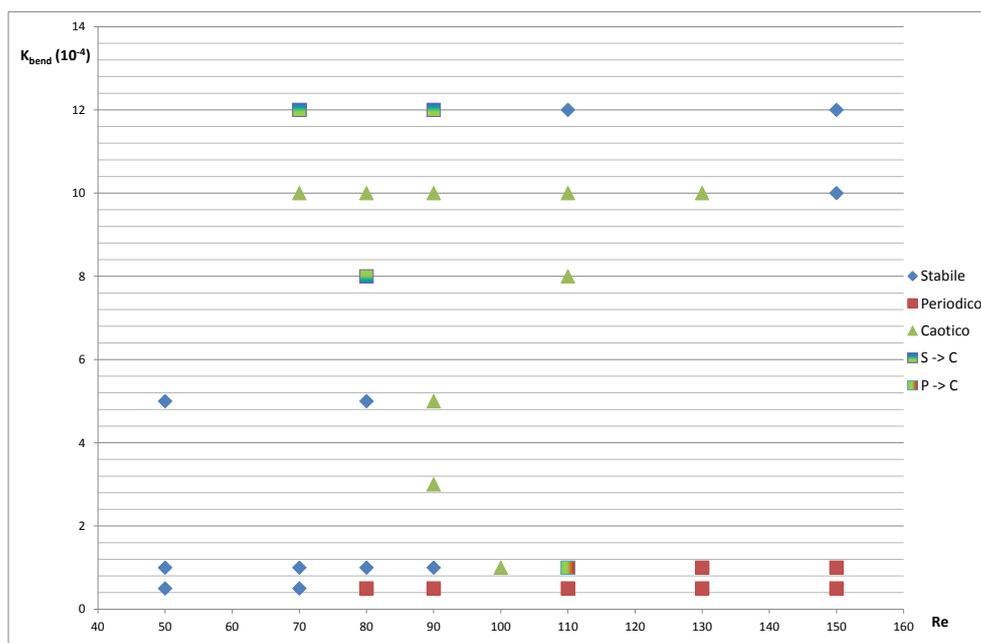


Figura 4.6: Tipo di movimento del filamento in diverse simulazioni: ingrandimento della zona caotica

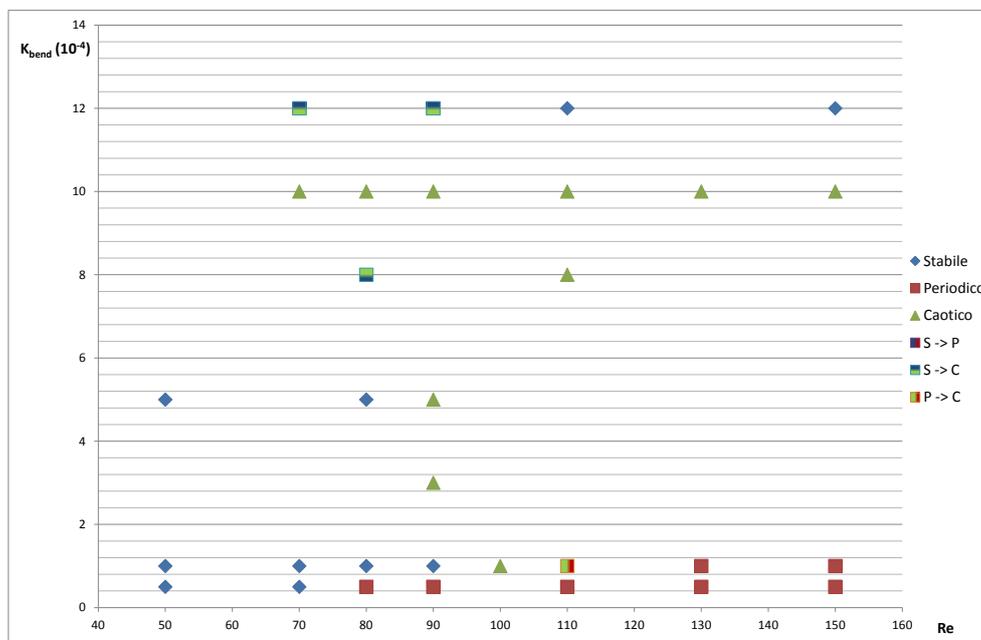


Figura 4.7: Tipo di moto del fluido in diverse simulazioni: ingrandimento della zona caotica

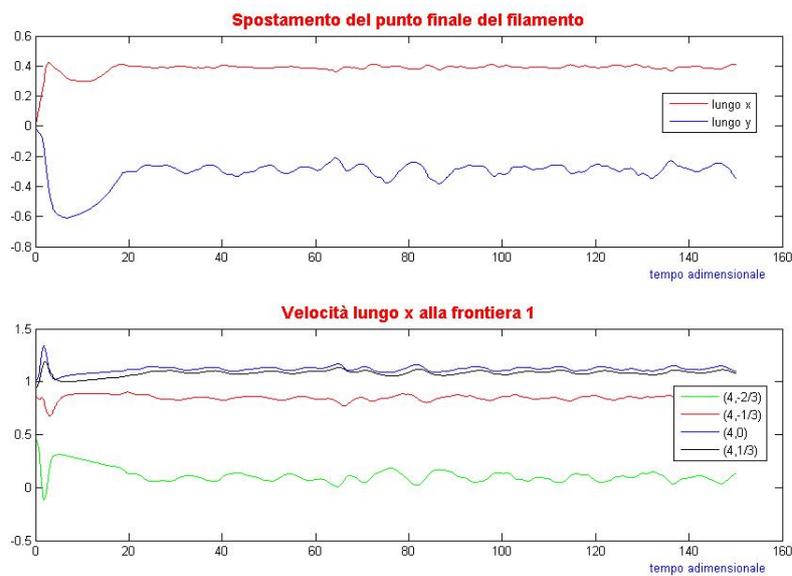


Figura 4.8: Grafico dello spostamento del filamento e dell'andamento della velocità a $Re = 70$ e $K_{bend} = 0,5 \cdot 10^{-3}$

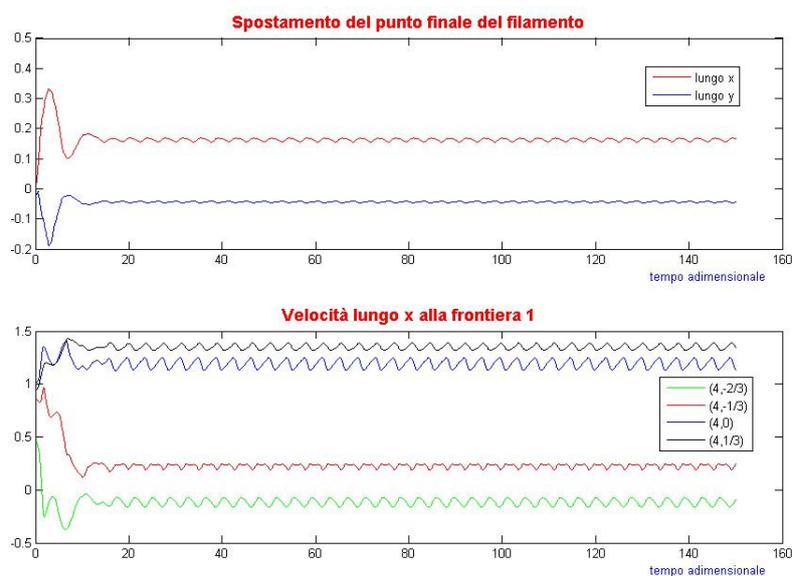


Figura 4.9: Grafico dello spostamento del filamento e dell'andamento della velocità a $Re = 150$ e $K_{bend} = 14 \cdot 10^{-3}$

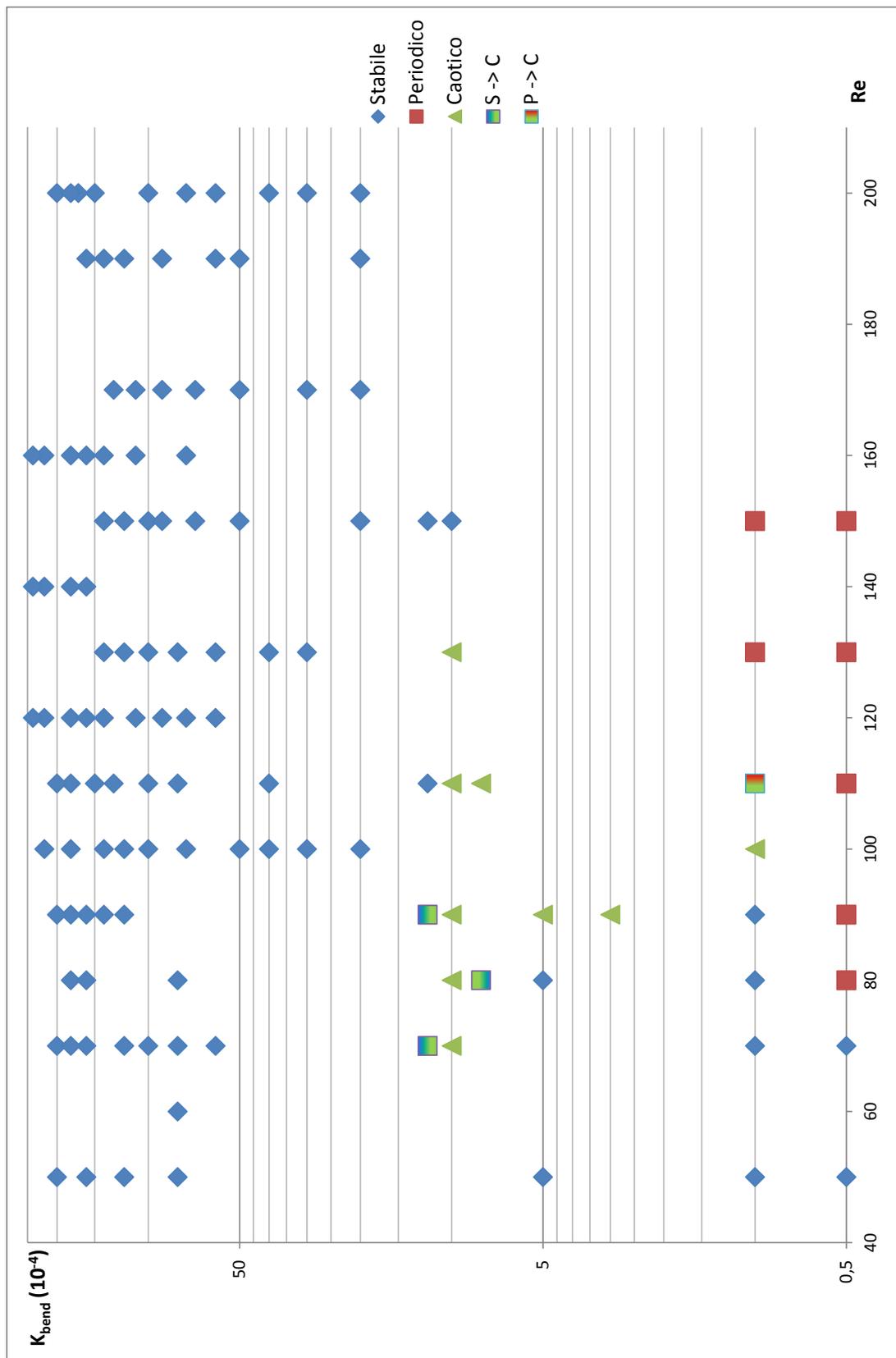


Figura 4.10: Piano $Re - K_{bend}$ riferito al filamento

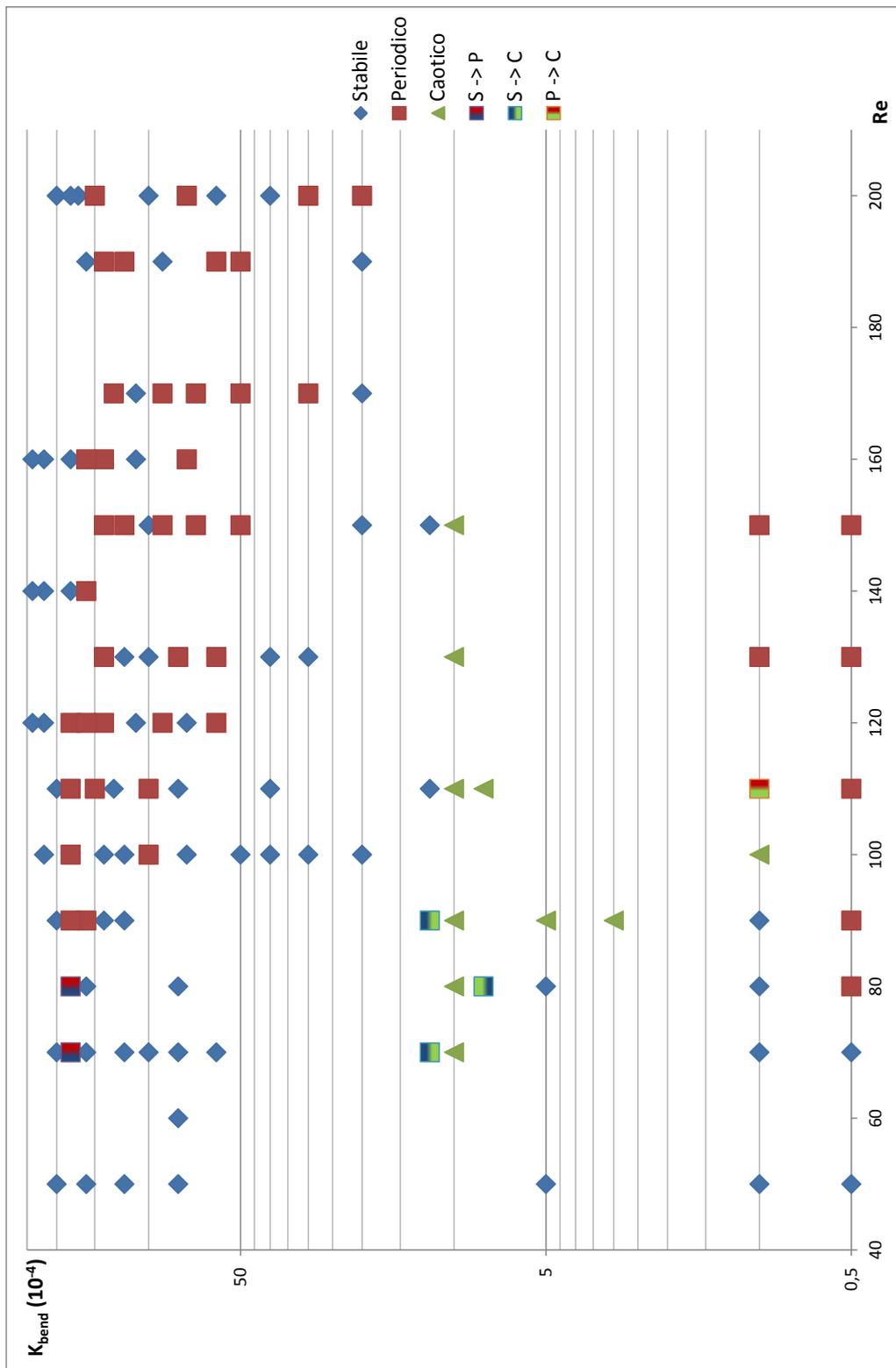


Figura 4.11: Piano $Re - K_{bend}$ riferito al fluido

POTENZA SEGNALE (FLUIDO)

	Re																			
$K (10^{-4})$	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	190	200					
260						2,52E-07	4,26E-11	1,63E-10												
240							3,93E-06			3,25E-09		3,17E-12								
220						2,24E-13				1,69E-09		1,28E-08								
200	1,26E-14		8,52E-11		3,19E-08		1,10E-12								1,55E-10					
180		4,87E-06	4,10E-06	1,32E-04	1,70E-04	2,00E-04	1,17E-05		2,62E-13		4,35E-14			4,95E-14						
170														1,21E-13						
160	2,27E-11		3,13E-14	3,25E-13	7,29E-06			2,30E-04		3,48E-04		4,37E-04		2,76E-14						
150							1,06E-04								7,56E-04					
140						9,88E-14	2,35E-13		3,34E-04	3,09E-04		5,45E-04	8,35E-04		8,72E-04					
130							3,84E-13							7,83E-04						
120	1,94E-11		3,29E-06		9,21E-11	2,34E-13		4,29E-14	1,14E-10		1,44E-05			6,47E-04						
110												1,26E-09	3,55E-10							
100			5,62E-11			1,82E-04	2,90E-04		2,78E-07		2,96E-12				4,97E-08					
90								3,31E-04			7,75E-04			4,76E-04	3,57E-07					
80	9,93E-14	6,04E-10	2,56E-07	1,99E-09		9,94E-15			7,67E-05											
75						1,93E-08		1,52E-11				1,59E-04			1,09E-03					
70											2,85E-05		2,44E-04							
60			3,28E-09						9,76E-05	4,36E-04										
50						1,05E-08					2,19E-04			3,36E-06	7,14E-11					
40						3,41E-08	3,95E-10		4,94E-10				3,90E-04	7,28E-04						
30						1,97E-11			3,12E-10					2,07E-04	1,81E-04					
20						3,97E-09								1,15E-09	7,99E-07					
12			2,36E-05		2,16E-05		1,31E-05				2,65E-09									
10			3,24E-05	5,94E-05	2,71E-05		6,25E-05		5,04E-05		1,19E-09									
8				7,24E-06			3,42E-05													
5	2,01E-06		6,67E-06	9,29E-07																
3					2,02E-05															
1	9,82E-08		7,93E-08	4,69E-07	1,02E-08	3,26E-05	1,98E-05		2,47E-04		3,05E-04									
0,5	2,76E-08		3,69E-06	1,62E-06	3,74E-05	8,01E-06			3,83E-05		1,44E-04									

Figura 4.12: Tabella delle potenze dei segnali riguardanti la componente u della velocità

POTENZA DEL SEGNALE (FILAMENTO)

	Re	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	190	200
$K (10^{-4})$																
260								7,79E-10	3,53E-13	7,38E-12						
240									6,94E-09		7,92E-12		1,72E-12			
220									2,44E-13		1,69E-12		1,41E-11			
200	3,50E-14			1,29E-12		2,28E-10	1,61E-13	1,78E-14								1,99E-11
180				2,59E-07	7,09E-08	9,23E-07	7,09E-07	4,55E-07	7,55E-07	2,10E-14		5,01E-14				1,80E-13
170				2,00E-14	2,26E-15	1,61E-07			6,86E-07	4,98E-07		3,32E-07			2,94E-13	4,64E-13
150								8,26E-07								3,06E-07
140									2,20E-06	1,52E-06		1,44E-06	1,62E-06		9,44E-07	
130								5,77E-15						1,91E-06		
120	3,68E-11			1,08E-08		4,43E-10	2,23E-13		1,14E-12	1,55E-13		5,40E-08			1,50E-06	
110				4,85E-11				9,24E-07		7,97E-10		4,34E-11		2,03E-12	4,84E-13	
100								1,41E-06	4,09E-06			1,99E-06			2,64E-06	6,25E-11
90								2,00E-13		6,21E-06						
80	6,13E-13	7,40E-11		6,64E-08	4,43E-11				2,14E-10				1,18E-05			4,31E-06
75								2,45E-09						1,16E-06		
70				4,58E-11					4,55E-07	3,21E-06					1,39E-05	
60								9,91E-11								1,07E-06
50								6,51E-10	5,78E-12			2,89E-07			7,67E-07	2,06E-06
40								2,18E-12		5,74E-12						7,87E-14
30								4,42E-10		7,78E-12						2,38E-06
20																1,33E-06
12				3,55E-05		5,12E-05		1,16E-05				2,05E-11				
10				1,15E-04	2,62E-04	3,23E-05		4,63E-05		5,75E-05		2,62E-10				
8					3,46E-05			4,79E-05				4,25E-06				
5	3,18E-05			5,43E-05	6,15E-07											
3								1,58E-04								
1	6,28E-06			1,39E-06	1,96E-06	4,21E-07	3,54E-04	2,52E-04		3,14E-03		3,57E-03				
0,5	1,48E-06			3,84E-05	5,10E-05	7,42E-04		5,17E-05		5,31E-04		1,64E-03				

Figura 4.13: Tabella delle potenze dei segnali riguardanti lo spostamento del filamento lungo y

FREQUENZA SEGNALE (FLUIDO)

		Re																		
K (10⁻⁴)		50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	190	200				
260									0,293	0,013	0,013									
240									0,293	0,280	0,013									
220							0,013		0,280	0,293	0,280									
200	0,013		0,267	0,587	0,013										0,267	0,267				
180		0,240	0,267	0,267	0,347	0,147	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013				
170																0,013				
160	0,013	0,013	0,013	0,253					0,280	0,320	0,387	0,387	0,387	0,013	0,013	0,387				
150					0,253											0,387				
140				0,240	0,253				0,240	0,253	0,267	0,267	0,267	0,280	0,280	0,280				
130					0,240									0,253	0,253	0,253				
120	0,013	0,293	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,293	0,293	0,293	0,240	0,240	0,253	0,253	0,253	0,253				
110									0,013	0,307	0,307	0,013	0,253	0,253	0,253	0,253				
100		0,013	0,013	0,293	0,293	0,293	0,253	0,293	0,307	0,307	0,013	0,013	0,013	0,253	0,253	0,253				
90									0,213	0,267	0,267	0,267	0,267	0,227	0,280	0,280				
80	0,013	0,240	0,213	0,453				0,467	0,267	0,267	0,267	0,267	0,267	0,267	0,240	0,240				
75							0,387	0,440	0,440	0,440	0,440	0,440	0,440	0,267	0,267	0,240				
70												0,240	0,240	0,267	0,267	0,240				
60		0,293	0,293	0,293	0,293	0,293	0,293	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360				
50						0,267	0,267	0,267	0,267	0,267	0,267	0,267	0,267	0,267	0,267	0,267				
40						0,387	0,387	0,360	0,320	0,320	0,320	0,293	0,293	0,307	0,307	0,307				
30						0,320	0,320	0,173	0,173	0,173	0,173	0,173	0,173	0,333	0,333	0,307				
20						0,120	0,120	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,293	0,293	0,280				
12		0,240	0,013	0,013	0,013	0,013	0,213	0,213	0,213	0,213	0,213	0,253	0,253	0,253	0,253	0,253				
10		0,013	0,013	0,173	0,173	0,147	0,147	0,147	0,147	0,147	0,147	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200				
8				0,013	0,013	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200				
5	0,027		0,053	0,160	0,160	0,160	0,160	0,160	0,160	0,160	0,160	0,160	0,160	0,160	0,160	0,160				
3						0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013				
1	0,013	0,067	0,080	0,013	0,053	0,067	0,053	0,053	0,053	0,053	0,053	0,053	0,053	0,053	0,053	0,053				
0,5	0,013	0,013	0,067	0,053	0,053	0,027	0,027	0,027	0,027	0,027	0,027	0,027	0,027	0,027	0,027	0,027				

Figura 4.14: Tabella delle frequenze dei segnali riguardanti la componente u della velocità

FREQUENZA DEL SEGNALE (FILAMENTO)

K (10 ⁻⁴)	Re																			
	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	190	200					
260							0,293	0,013	0,013											
240						0,013	0,293	0,013		0,280		0,013								
220						0,013	0,013	0,013		0,293		0,280								
200	0,013		0,267		0,587		0,013								0,013					
180		0,240	0,240	0,267	0,267	0,280	0,347	0,147		4,413		4,413		4,413	4,413					
170														4,427	4,427					
160	0,013		0,013	0,013	0,253		0,280	0,280		0,320		0,387		4,427	0,387					
150							0,253													
140					0,013	4,440		0,240	0,253		0,267	0,267		0,280						
130						4,440							0,253							
120	0,013		0,293		0,013	0,013		0,293	0,293		0,240		0,253	0,253						
110							0,013					0,253								
100			0,013			0,240	0,293	0,307	0,307		0,013		0,253		0,253					
90								0,213		0,267				0,227	0,280					
80	0,013	0,240	0,213	0,453			0,467	0,133												
75						0,387		0,440				0,133			0,240					
70											0,053		0,133							
60			0,293					0,373	0,360					0,373	0,347					
50						0,267					0,293		0,307	0,307						
40						0,387	0,360		0,320						0,333					
30						0,013		0,173					0,333		0,307					
20						0,320					0,200		0,307	0,293	0,267					
12		0,240			0,013		0,213					0,200								
10		0,013	0,013	0,013	0,173		0,147	0,013			0,253									
8				0,013			0,200													
5	0,053		0,053	0,160																
3					0,013															
1	0,013		0,067	0,080	0,187	0,053	0,053	0,053			0,053			0,053						
0,5	0,013		0,013	0,067	0,053		0,027	0,053			0,053			0,053						

Figura 4.15: Tabella delle potenze dei segnali riguardanti lo spostamento del filamento lungo y

Capitolo 5

Conclusioni

In questo lavoro è stata analizzata l'interazione tra un filamento elastico e un fluido in moto all'interno di un canale. Lo scopo era quello di caratterizzare il sistema al variare del numero di Reynolds e della rigidità del filamento, riuscendo a distinguere sul piano $Re - K_{bend}$ le zone di instabilità da quelle di stabilità.

E' stato necessario innanzitutto studiare il problema in continuo per poter identificare in comportamento teorico del sistema al variare dei parametri dai noi scelti come variabili, uno riguardante il fluido (il numero di Reynolds) e uno il filamento (la rigidità). Questa analisi preventiva è stata utile per indirizzare al meglio le simulazioni e allo stesso tempo convalidare i risultati ottenuti.

Successivamente, attraverso un codice di calcolo a differenze finite implementato su piattaforma MATLAB, si sono simulate diverse configurazioni di flusso e di filamento. Attraverso l'uso di alcuni strumenti descritti in questa tesi, si sono classificati i risultati ottenuti in tre diverse categorie: moto stabile, moto periodico e moto caotico.

Le soluzioni trovate hanno dato vita a quattro zone distinte all'interno del piano $Re - K_{bend}$ da noi analizzato, in linea con quanto atteso dagli studi teorici; nelle figure 5.1 e 5.2 sono riassunti tutti i risultati delle simulazioni da noi eseguite.

Come si può notare dai grafici 5.1 e 5.2 vi è una zona di completa stabilità per bassi valori di Re e/o alti valori di rigidità e una zona con movimenti caotici sia del fluido che della struttura per valori di K_{bend} e Re modesti, che transiziona in una zona con moti periodici per entrambi all'aumentare del numero di Reynolds. Infine vi è una zona centrale in cui si sono riscontrati moti diversi per fluido e struttura; infatti in quest'area il filamento rimane stabile mentre il flusso presenta variazioni periodiche.

Inoltre in questo studio siamo riusciti ad individuare approssimativamente un valore critico del numero di Reynolds e della rigidità che limitano le zone di stabilità da quelle di instabilità: questi valori sono rispettivamente $Re_{crit} \approx 50$ e $K_{bend,crit} \approx 200 \cdot 10^{-4}$.

In ottica di ulteriori studi futuri, il primo passo da fare è sicuramente quello di

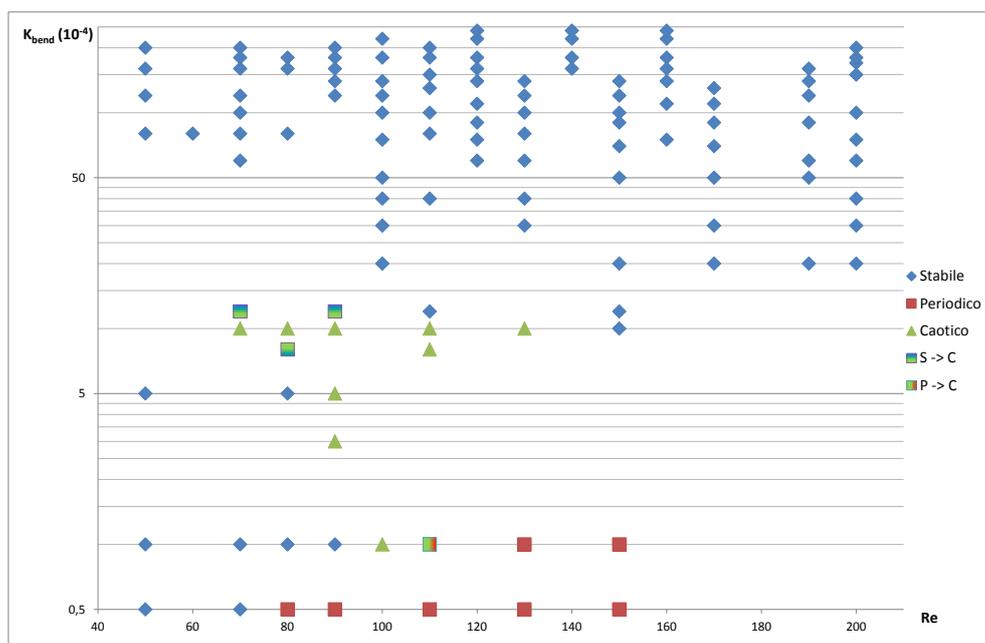


Figura 5.1: Piano $Re - K_{bend}$: risultati riferiti al filamento

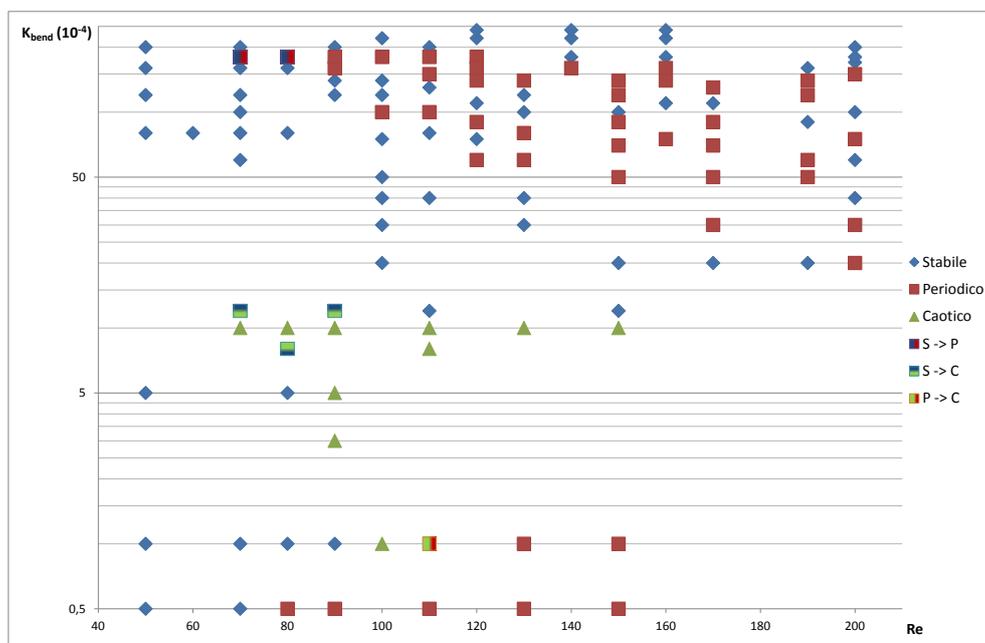


Figura 5.2: Piano $Re - K_{bend}$: risultati riferiti al fluido

migliorare la precisione nel tracciare le aree a diverso comportamento e permettere una caratterizzazione in funzione di più parametri portando a leggi empiriche utili per conoscere gli effetti di queste interazioni.

Inoltre, un'implementazione del codice sviluppando la parte mancante sull'urto tra parete e filamento porterebbe sicuramente a benefici miglioramenti, potendo eliminare il vincolo di una frazione del filamento rigido che per noi è stato necessario ma la cui assenza porterebbe a risposte ancora più vicine alla realtà.

Nuove ricerche potrebbero essere indirizzate sullo studio di più filamenti disposti in serie, analizzandoli non più come oggetti discreti immersi in un fluido ma come un continuo poroelastico; questo potrebbe dare un contributo allo studio di nuovi materiali e sistemi utili a controllare in modo passivo lo stato di moto del sistema fluido.

Appendice A

L'analisi spettrale

Lo scopo dell'analisi spettrale è quello di porre in evidenza quali sono le frequenze (e quindi le periodicità) più importanti; il mezzo è quello di decomporre una serie temporale in alcune sotto-funzioni sinusoidali di una particolare lunghezza d'onda e studiare la densità di potenza del segnale al variare della frequenza. Per far ciò, si fa uso della *trasformata di Fourier* per decomporre il segnale originario e del *periodogramma* per analizzare lo spettro di potenza.

A.1 La trasformata veloce di Fourier (FFT)

La trasformata di Fourier veloce (spesso indicata come FFT, dall'inglese Fast Fourier Transform) è un algoritmo ottimizzato per calcolare la trasformata discreta di Fourier (detta DFT) e la sua inversa (IDFT).

Una DFT decompone una sequenza di valori in componenti a differenti frequenze; questa operazione è molto utile in molti campi ma calcolare la trasformata discreta direttamente dalla definizione è spesso troppo lento per essere pratico, mentre la Trasformata Veloce di Fourier è la via per calcolare lo stesso risultato ma in un tempo decisamente più ridotto.

Sia x_0, \dots, x_{N-1} una n-upla di numeri complessi, la DFT è definita dalla formula:

$$X_q = \mathcal{F}_d(x_n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j \frac{2\pi}{N} kq}$$

per $q = 0, 1, \dots, N - 1$.

Risolvere una DFT usando la definizione richiede $O(N^2)$ operazioni matematiche, mentre un algoritmo FFT ottiene lo stesso risultato un numero di operazioni $O(N \log(N))$. La differenza in velocità può essere molto rilevante, specialmente per grandi quantità di dati dove il tempo di risoluzione può essere ridotto di molti ordini di grandezza.

La FFT è di grande importanza per una grande varietà di applicazioni, dall'elaborazione di segnali digitali alla soluzione di equazioni differenziali alle derivate

parziali agli algoritmi per moltiplicare numeri interi di grandi dimensioni grazie al basso costo computazionale.

L'algoritmo FFT più diffuso è l'algoritmo di Cooley-Tukey: questo algoritmo si basa sul principio di *divide et impera* e spezza ricorsivamente una DFT di qualsiasi dimensione N , con N numero composto tale che $N = N_1 \cdot N_2$, in DFT più piccole di dimensioni N_1 e N_2 , accostando $O(N)$ moltiplicazioni per l'unità immaginaria, detti fattori *twiddle*.

L'uso più conosciuto dell'algoritmo di Cooley-Tukey è di dividere la trasformata in due pezzi di dimensione $N/2$ ad ogni passo; è quindi ottimizzato solo per dimensioni che siano potenze di due, ma in generale può essere utilizzata qualsiasi fattorizzazione. Questi casi sono chiamati rispettivamente casi *radix-2* e *mixed-radix*. Anche se l'idea di base è ricorsiva, la gran parte delle implementazioni tradizionali riorganizzano l'algoritmo per evitare la ricorsione esplicita. Inoltre, poiché l'algoritmo di Cooley-Tukey spezza la DFT in DFT più piccole, può essere arbitrariamente combinato con qualsiasi altro algoritmo per la DFT.

A.2 Il periodogramma

Il periodogramma è lo strumento principale dell'analisi spettrale; esso misura l'intensità della frequenza k -esima all'interno della serie di valori e quindi l'importanza che assume ogni singolo periodo della serie.

Per un vettore di dati $\{x_1, \dots, x_n\}$ il periodogramma è definito come:

$$I_n(\omega_k) = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n x_t e^{-j(t-1)\omega_k} \right|^2$$

dove $\omega_k = 2\pi(k/n)$ sono le frequenze di Fourier espresse in radianti per unità di tempo, $k = -(n/2) + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, (n/2)$ e, dal punto di vista matematico, I_n è il quadrato del modulo della trasformata di Fourier.

Risulterà quindi che valori relativamente alti di $I_n(\omega_k)$ corrisponderanno a un segnale con periodo dominante $T_k = 1/\omega_k$.

A titolo d'esempio, si riporta in figura [A.1](#) il grafico di un segnale e il relativo periodogramma.

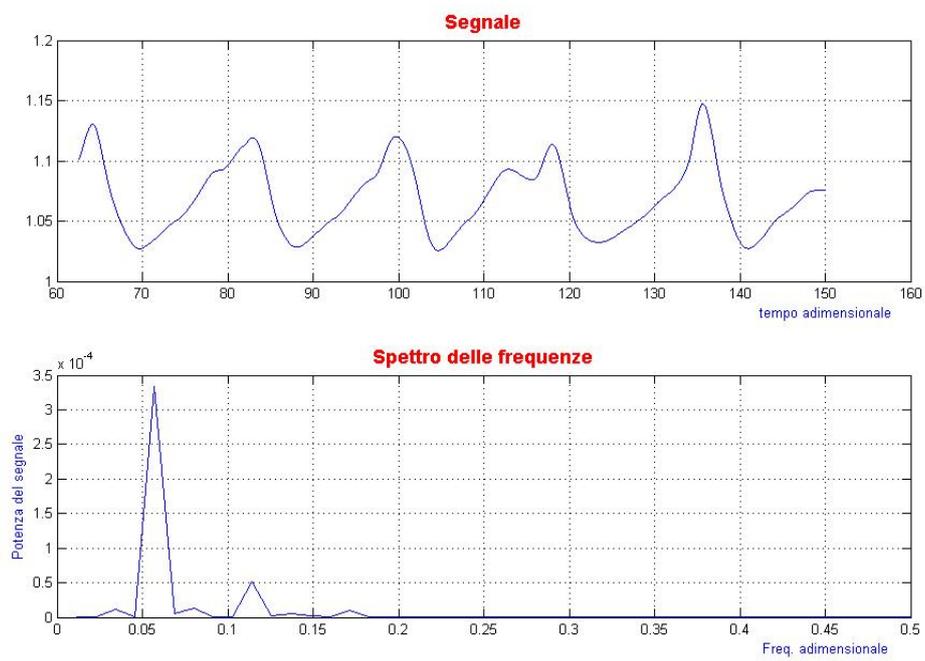


Figura A.1: Grafico di un segnale e periodogramma relativo (periodo principale 17,5 unità di tempo)

Bibliografia

- [1] M. J. Shelley, J. Zhang, *Flapping and bending bodies interacting with fluid flows*. Annu. Rev. Fluid Mech. (2011) 43:449-65
- [2] C. S. Peskin, *The immersed boundary method*. Acta Numerica (2002), pp. 479-517
- [3] E. P. Newren, A. L. Fogelson, R. D. Guy, R. M. Kirby, *A comparison of implicit solvers for the immersed boundary equations*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 197 (2008) 2290-2304
- [4] K. Taira, T. Colonius, *The immersed boundary method: A projection approach*. Journal of Computational Physics 225 (2007) 2118–2137