Università di Genova
Facoltà di Ingegneria

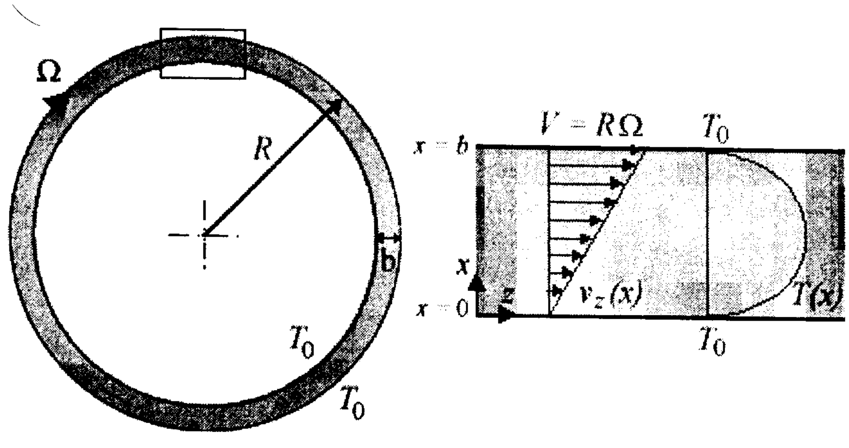
Esame di **Fondamenti di Meccanica dei Continui**
14 giugno 2005, Aula A7, Villa Cambiaso

Meccanica dei Fluidi
Appunti e testi ammessi

Esercizio 1: Aumento della temperatura di un lubrificante per dissipazione viscosa

Si consideri un olio Newtoniano (di viscosità dinamica μ, densità ρ e conducibilità termica κ) che agisce come lubrificante tra due cilindri coassiali supposti di profondità infinita (in modo da poter trascurare gli effetti di bordo). Il cilindro interno è fermo, mentre quello esterno, di raggio R, ruota a velocità angolare Ω costante generando un movimento laminare dell'olio. La distanza b tra i due cilindri è molto più piccola del raggio R, cosicché anche gli effetti della curvatura possono essere omessi ed il sistema cilindrico può essere approssimato dal sistema piano (coordinate Cartesiane 2D) di figura, con una velocità $v_z = v_z(x)$, e una distribuzione di temperatura $T=T(x)$ che si discosta dalla distribuzione uniforme $T=T_0$ per effetto del calore prodotto nell'olio dalla dissipazione viscosa.

a. Si scrivano le equazioni del moto per il caso incomprimibile e le si semplifichino di modo da ottenere la distribuzione di velocità $v_z(x)$,;
b. si calcoli il termine Φ che rappresenta il tasso di dissipazione viscosa e che esprime la trasformazione irreversibile di energia meccanica in energia termica;
c. si ottenga la distribuzione di temperatura nell'ipotesi che la temperatura delle pareti sia mantenuta costante e uguale a T_0;
d. si calcoli la temperatura massima del lubrificante e la posizione x dove tale massimo è raggiunto.



Esercizio 2: Moto di fluido non Newtoniano

Le componenti del tensore degli sforzi **T** di un fluido non Newtoniano sono:

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \tau_{ij},$$

con

$$\tau_{ij} = 2\mu_1\, d_{ij} + \mu_2 \left(\frac{\partial v_m}{\partial x_k}\right)^2 d_{ij} + \mu_3 \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right) \delta_{ij},$$

dove $d_{ij} = 0.5\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ sono le componenti del tensore velocità di deformazione **D**. Si vuole sapere se la forma data per **T** è accettabile. Giustificate la vostra risposta.

Esercizio 3: Moto incomprimibile potenziale

(solo per coloro che ricuperano il compitino del 3 giugno 2005)

Il moto incomprimibile, potenziale, piano di un fluido è descritto da $\psi = a(x^2 - y^2) + 2bxy + c$ (ψ funzione di corrente) o – alternativamente – da $\phi = b(y^2 - x^2) + 2axy + d$ (ϕ potenziale di velocità), con a, b, c, d delle costanti. Si vuole sapere se il moto con ψ e ϕ dati come sopra è possibile. La risposta deve essere giustificata analizzando le linee di corrente e le linee equipotenziali, **senza** calcolare le componenti del vettore velocità.

Esercizio 4: Analisi della deformazione per il flusso di Kolmogorov

(solo per coloro che ricuperano il compitino del 3 giugno 2005)

Si consideri un dominio fluido bidimensionale infinito nel piano (x,y), in cui il mezzo è soggetto all'unica forza (per unità di massa) $\mathbf{f} = [f(y), 0]$ con $f(y) = f_0 \cos(y/L)$, f_0 costante. Tale forza genera un moto incomprimibile, permanente e parallelo $\mathbf{v} = [v_x(y), 0]$ che si chiede di determinare (flusso di Kolmogorov). Si valutino inoltre tutte le componenti dei tensori della velocità angolare media di deformazione d_{ij} e della velocità angolare media di rotazione ω_{ij} e si descriva il loro significato fisico, analizzando la velocità in un intorno del punto P_0 di coordinate $(x_0, \pi L/2)$, per una ascissa x_0 qualunque.

Esame di Meccanica dei Continui

Meccanica dei Fluidi . .

14/06/05

Esercizio 1

a. Non c'è gradiente di pressione $\underline{\nabla} p = 0$, il moto è completamente sviluppato $\left(\frac{\partial}{\partial z} = 0\right)$ e stazionario $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$.

Inoltre è incomprimibile : $\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} = 0 \qquad v_x = v_x(z) = \text{cost} = 0$$

(perché $v_x = 0$ in $x = 0$)

L'eq. della q. di m. lungo z si riduce a $\mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = 0$

$$\rightarrow \quad v_z = Ax + B \qquad \begin{matrix} v_z(b) = R\Omega \\ v_z(0) = 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \boxed{v_z = \frac{R\Omega x}{b}}$$

moto di Couette

b. $$\phi = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2 = \mu \left(\frac{R\Omega}{b}\right)^2 = \text{costante}$$

c. L'eq. della temperatura si scrive :

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = -p\, \underline{\nabla} \cdot \underline{v} + \phi - \frac{\partial}{\partial x_i}(q_i)$$

$$\rightarrow \quad \phi + k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \qquad (\text{per } k \text{ costante})$$

$$\rightarrow \quad T = -\frac{\phi}{2k} x^2 + Ax + B \qquad T(0) = T_0 = B$$

$$T(b) = T_0 =$$

$$= -\frac{\phi}{2k} b^2 + Ab + T_0$$

$$\boxed{T = \frac{\phi}{2k}\left(b x - x^2\right) + T_0}$$

d) T e' max dove $\frac{dT}{dx} = 0 \rightarrow b - 2x = 0 \quad \boxed{x = \frac{b}{2}}$

$$T_{max} = T_0 + \frac{\phi b^2}{8k}$$

Esercizio 2

. τ_{ij} e' simmetrico poiche' $d_{ij} = d_{ji}$, $\delta_{ij} = \delta_{ji}$

e $\left(\frac{\partial v_m}{\partial x_k}\right)^2 = \sum_{n,k} \frac{\partial v_n}{\partial x_k} \frac{\partial v_n}{\partial x_k}$ = scalare poiche' gli indici n e k sono ripetuti.

Inoltre $\tau_{ij} = 0$ in condizioni di moto uniforme.

La forma data per $\mathbb{T}$ e' quindi accettabile.

Esercizio 3

$$\psi = a\left(x^2 - y^2\right) + 2bxy + c$$
$$\phi = b\left(y^2 - x^2\right) + 2axy + d$$

$\psi = \text{cost.} \rightarrow$ linee di corrente $\rightarrow d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$

$$\Rightarrow (2ax + 2by)\, dx - (2ay - 2bx)\, dy = 0$$

$$\rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\psi\, \text{cost.}} = \frac{2ax + 2by}{2ay - 2bx}$$

E' facile vedere che $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\phi\, \text{cost}} = - \frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\psi\, \text{cost.}}}$ di modo

che le linee equipotenziali e le linee di corrente sono ortogonali.

Esercizio 4

Moto parallelo, $V_y = 0$, permanente $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ $\Rightarrow$ $V_x = V_x(y)$

Nessun gradiente di pressione.

$$\cancel{V_x \frac{\partial V_x}{\partial x}} + \cancel{V_y \frac{\partial V_x}{\partial y}} = \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + f_0 \cos\left(\frac{y}{L}\right)$$

$$V_x(y) = \frac{f_0 L^2}{\nu} \cos\left(\frac{y}{L}\right) + \cancel{Ay} + B$$

$A=0$ perché si vuole prevenire la crescita senza limiti della velocità per $y \to \pm\infty$

B è una costante arbitraria che traduce l'invarianza galileiana del movimento.

G_{ij} = componenti del tensore gradiente di velocità =

$$= \underbrace{d_{ij}}_{\text{velocità di deformazione}} + \underbrace{\omega_{ij}}_{\text{velocità di rotazione}}$$

$$d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$$

$$d_{xx} = d_{yy} = 0$$

$$d_{xy} = d_{yx} = \frac{1}{2}\frac{dV_x}{dy} = -\frac{f_0 L}{2\nu}\sin\left(\frac{y}{L}\right)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\omega_{xx} = \omega_{yy} = 0$$

$$\omega_{xy} = -\omega_{yx} = \frac{1}{2}\frac{dV_x}{dy} = -\frac{f_0 L}{2\nu}\sin\left(\frac{y}{L}\right)$$

SVILUPPO DI TAYLOR ATTORNO A P_0:

$$V_x = V_x\big|_0 + \cancel{d_{xx}\big|_0}\, dx + d_{xy}\big|_0\, dy + \omega_{xy}\big|_0\, dy + \dots$$

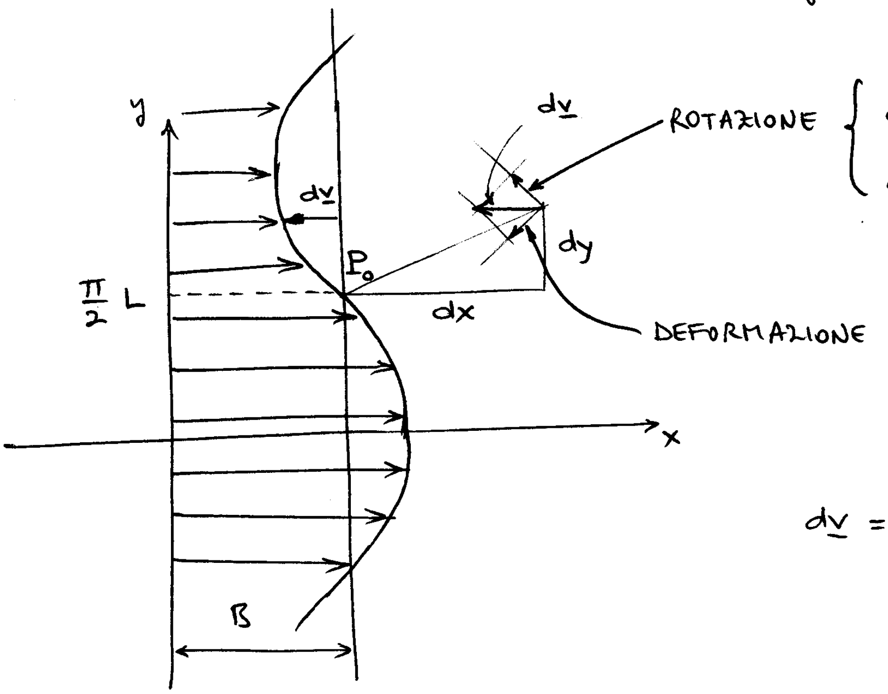
$$V_y = V_y\big|_0 + d_{xy}\big|_0\, dx + \cancel{d_{yy}\big|_0}\, dy - \omega_{xy}\big|_0\, dx + \dots$$

Nel punto P_0 di coordinate $\left(x_0, \frac{\pi L}{2}\right)$ si ha

$v_x\big|_0 = B$ e $d_{xy}\big|_0 = \omega_{xy}\big|_0 = -\dfrac{f_0 L}{2\nu}$.

di modo che:

$$\begin{cases} v_x = B + d_{xy}\big|_0\, dy + \omega_{xy}\big|_0\, dy \ldots = \\ \quad = B - \dfrac{f_0 L}{\nu}\, dy + \ldots \\ v_y = 0 + d_{xy}\big|_0\, dx - \omega_{xy}\big|_0\, dx \ldots = 0 \end{cases}$$



$$\text{ROTAZIONE} \begin{cases} dv_x = -\dfrac{f_0 L}{2\nu}\, dy \\ dv_y = \dfrac{f_0 L}{2\nu}\, dx \end{cases}$$

$$\text{DEFORMAZIONE} \begin{cases} dv_x = -\dfrac{f_0 L}{2\nu}\, dy \\ dv_y = -\dfrac{f_0 L}{2\nu}\, dx \end{cases}$$

$$d\underline{v} = \left(-\frac{f_0 L}{\nu}\, dy\, ,\ 0\right)$$