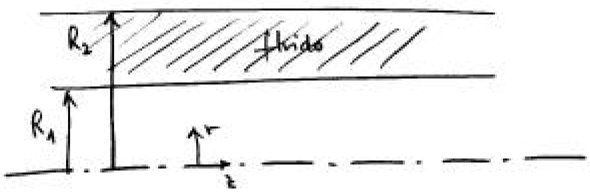
## Esercizio 1




1. $$\frac{dp}{dz} = \frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) \qquad \frac{r}{\mu}\frac{dp}{dz} = \frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right)$$

$$A + \frac{r^2}{2\mu}\frac{dp}{dz} = r\frac{dv_z}{dr}$$

$$\boxed{v_z = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}r^2 + A\ln r + B}$$

2. $$v_z(R_1) = 0 = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}R_1^2 + A\ln R_1 + B$$
$$v_z(R_2) = 0 = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}R_2^2 + A\ln R_2 + B$$

$$\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}\left(R_1^2 - R_2^2\right) + A\ln\frac{R_1}{R_2} = 0$$

$$\begin{cases} A = \dfrac{\frac{dp}{dz}\left(R_2^2 - R_1^2\right)}{4\mu\ln\frac{R_1}{R_2}} \\[2ex] B = -\dfrac{1}{4\mu}\dfrac{dp}{dz}R_1^2 - A\ln R_1 = \end{cases}$$

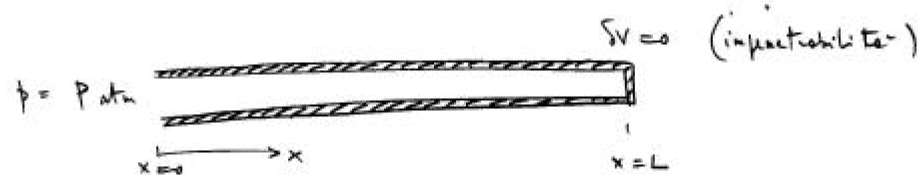
$$= \frac{R_2^2\ln R_1 - R_1^2\ln R_2}{4\mu}\frac{dp}{dz}\cdot\frac{1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

3. La velocità è massima se $\frac{dv_z}{dr} = 0$ :

$$\frac{A}{r} + \frac{r}{2\mu}\frac{dp}{dz} = 0 \qquad r^2 = \frac{-2\mu A}{\frac{dp}{dr}} \quad , \quad r = \left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{2\ln\frac{R_2}{R_1}}\right)^{1/2}$$

4. L'espressione della velocità sarebbe la stessa, ma la pressione dovrebbe comprendere anche il potenziale delle forze di massa.

Esercizio 2




1. $\phi(x,t) = A \cos(\omega t - kx) + B \cos(\omega t + kx)$

onda propagante $x \uparrow$ / onda propagante $x \downarrow$

2. $x = 0$ : $\delta p = 0$ (perché la pressione è $= p_{atm} \Rightarrow$ non c'è disturbo di pressione ... )

$\rightarrow \boxed{\phi_t(0,t) = 0}$

$x = L$ : $\delta v = 0$ (impenetrabilità)

$\rightarrow \boxed{\phi_x(L,t) = 0}$

3. $-A\omega \sin(\omega t) - B\omega \sin(\omega t) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{A + B = 0}$

$A k \sin(\omega t - kL) - B k \sin(\omega t + kL) = 0$

$\rightarrow \quad \sin(\omega t - kL) + \sin(\omega t + kL) = 0$

$\sin\omega t \cos kL - \cancel{\sin kL \cos\omega t} + \sin\omega t \cos kL + \cancel{\sin kL \cos\omega t} = 0$

$\rightarrow \boxed{\cos kL = 0} \quad \rightarrow \quad \boxed{k_n = \frac{2n+1}{2L}\pi} \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Dunque la relazione di dispersione ci dice che

$\omega = c_s k \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 2\pi F_n = c_s \frac{(2n+1)}{2L}\pi$

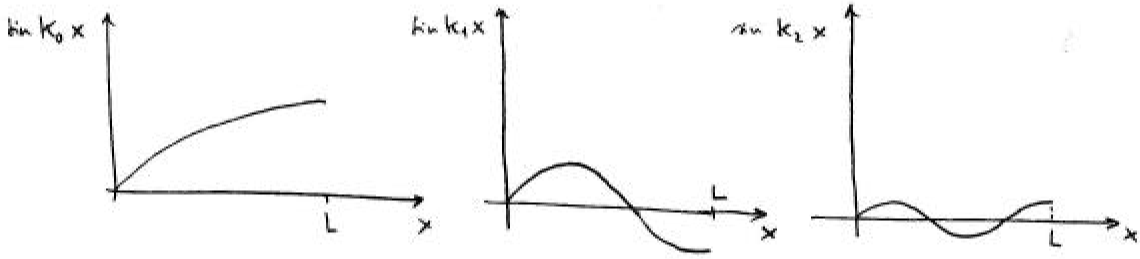
$$\boxed{F_n = \frac{2n+1}{4L} c_s}$$

4. $F_0 = \dfrac{c_s}{4L}$ con $c_s \simeq 340 \ m\,s^{-1}$

$$L_{teorica} = \frac{c_s}{4F_0} = \frac{340}{4 \times 146.8} = 0.579 \ m \approx \boxed{58 \ cm}$$

5. $\phi = A\left[\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)\right] = 2A \sin\omega t \sin kx$

Ad un tempo $t$ arbitrario si ha:




modo 0, $k_0 = \dfrac{\pi}{2L}$ modo 1, $k_1 = \dfrac{3\pi}{2L}$ modo 2, $k_2 = \dfrac{5\pi}{2L}$

## Esercizio 3

Il moto è possibile se l'equazione di continuità è soddisfatta:

1. $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

Abbiamo:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)^2(-2yz) + 4xyz\,(x^2+y^2)\,2x}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)^2(-2yz) - 2(x^2-y^2)z\,(x^2+y^2)\,2y}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$\rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$

IL MOTO È POSSIBILE

2. $\vec{\omega} = \vec{\nabla}\times\vec{v}$

$$\omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - \left[\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] = 0$$

$$\omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \left[\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right] = 0$$

$$\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{4xz\,(2xy - x^2 + y^2)}{(x^2+y^2)^3} \neq 0$$

$\vec{\omega} \neq \vec{0}$

IL MOTO È ROTAZIONALE