UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI GENOVA

FILA A

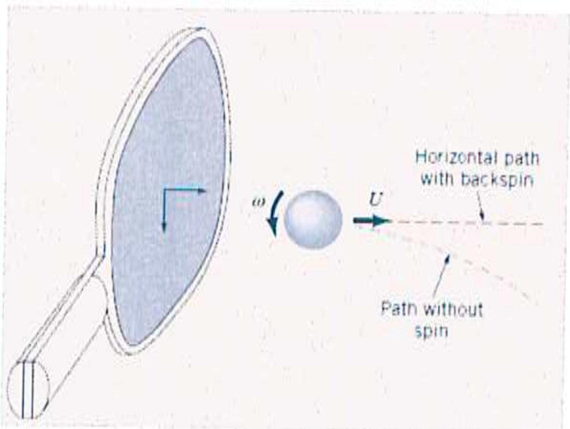
Nome e Cognome:______________________ Matricola:__________

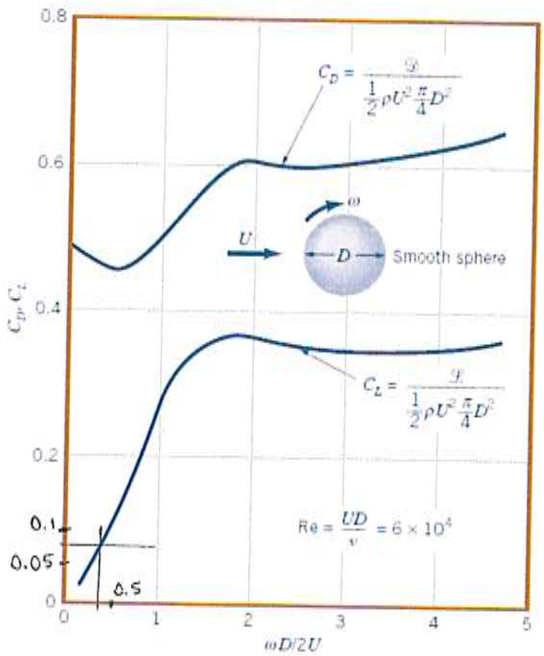
Compitino parziale del 3/6/2015

Un foglio aiuti A4 e il diagramma di Moody sono ammessi. Scrivere i passaggi principali e le soluzioni nei riquadri appositi; va consegnata anche la "brutta" con tutti i calcoli effettuati, ma solo il contenuto dei riquadri sarà corretto.

4

ESERCIZIO 1. Una pallina da ping-pong pesante 2.45×10^{-2} N e di diametro pari a $D = 3.8 \times 10^{-2}$ m viene colpita ad una velocità $U = 22$ m s^{-1} con un movimento di *back spin* che impartisce alla pallina una velocità angolare ω come mostrato in figura. Quale deve essere il valore di ω (da fornire sia in rad s^{-1} che in giri al minuto) se si vuole che la pallina si muova su una traiettoria orizzontale? ($\nu = 1.4 \times 10^{-5}$ m^2 s^{-1}; $\rho = 1.15$ kg m^{-3})





Affinché la traiettoria si mantenga orizzontale : $L = mg$

$Re = \frac{UD}{\nu} \sim 6 \times 10^4$: posso usare il grafico

$C_L = \dfrac{mg}{\frac{1}{2}\rho U^2 \frac{\pi D^2}{4}} = 0,078 \xrightarrow[\text{dal grafico}]{} \frac{\omega D}{2U} \cong 0.38$

$\omega \simeq 440 \ \frac{rad}{s} \cong 4200 \ g/min$

ESERCIZIO 2. Un flusso irrotazionale può essere descritto dalla funzione di corrente espressa in coordinate cilindriche (r, θ) come $\psi = A\, r^2 \sin(B\theta)$ dove A e B sono costanti reali. Si determinino i valori di A e B sulla base del requisito di irrotazionalità e assegnando valori arbitrari altrimenti. Si rappresenti infine il campo di moto così ottenuto.

5

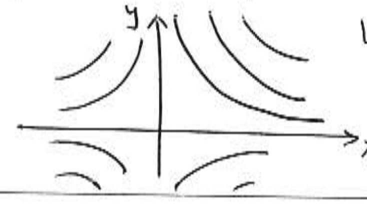
Moto irrotazionale $\vec{\nabla}\times\vec{v} = 0$ $\quad u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = ABr\cos(B\theta)$ $\quad u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -2Ar\sin(B\theta)$

$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right] = A\sin(B\theta)\left[B^2-4\right] = 0$ per $B = \pm 2$, A arbitrario

$\psi = Ar^2\sin(\pm 2\theta) = \pm Ar^2\sin 2\theta =$

$= \pm Ar^2(2\sin\theta\cos\theta) = \pm 2A(r\cos\theta)(r\sin\theta) =$

$= \pm 2Axy$ $\quad \psi = \text{cost} \iff xy = \text{cost.}$ $\longrightarrow$



Linee di corrente: iperboli equilatere

ESERCIZIO 3. Due oggetti di forma simile con rapporto tra le lunghezze pari a 2 e densità ρ uguale, si trovano in caduta libera in un fluido di densità ρ_F e viscosità μ_F. Nell'ipotesi di moto di Stokes, quanto vale il rapporto tra le velocità asintotiche raggiunte dai due oggetti? E nel caso di moto ad alti numeri di Reynolds? Si ipotizzi che, in entrambi i casi, i coefficienti aerodinamici non dipendano dalle dimensioni dell'oggetto.

Moto di Stokes:

$$\rho V g = c_D \mu_f v L + \rho_f V g \qquad v = \frac{(\rho-\rho_f)Vg}{c_D\mu_f L} \qquad \frac{v_2}{v_1} = \frac{V_2}{V_1}\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 = 4$$

4

Per Re >> 1 :

$$\rho V g = c_D \tfrac{1}{2}\rho A v^2 + \rho_f V g \qquad v = \sqrt{\frac{2(\rho-\rho_f)Vg}{c_D\rho_f A}} \qquad \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{V_2}{V_1}\frac{A_1}{A_2}} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^{1/2} = \sqrt{2}$$

ESERCIZIO 4. Dell'acqua viene pompata da un grosso serbatoio ad un altro attraverso una tubazione liscia lunga 1.5 km. La superficie dell'acqua nei due serbatoi è alla stessa quota (che rimane invariata). Quando la pompa fornisce una potenza di 20 kW all'acqua, la portata volumetrica è pari a 1 $m^3\,s^{-1}$. Trascurando le perdite minori, si valuti il diametro della tubazione.

Eq. dell'energia tra i due punti sul pelo libero, alla stessa quota e con velocità nulle: $h_{pump} = h_{loss}$

$$W = 20\text{ kW} = \rho\dot{V}g h_p \implies h_p = \frac{20\times10^3}{998\times1\times9.81} = 2.04\text{ m}$$

6

$$h_L = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = f\frac{L}{D}\frac{8Q^2}{\pi^2 g D^4} \longrightarrow D = \sqrt[5]{\frac{8fLQ^2}{g\pi^2 h_L}}, \qquad Re = \frac{4Q}{\pi D\nu}$$

con $\nu_{H_2O} = 10^{-6}\ \frac{m^2}{s}$

it	D [m]	Re	f
0	0.5	$2{,}55\times10^6$	0.010
1	0.905	$1{,}41\times10^6$	0.0112
2	0.926	$1{,}38\times10^6$	0.0113
3	0.928	$1{,}37\times10^6$	0.0113

$\mapsto D = 0.93$ m

ESERCIZIO 5. La pompa centrifuga è una macchina di grande utilizzo in ambito industriale, ed è possibile dimostrare che la sua prevalenza gH [m^2/s^2] è funzione delle seguenti grandezze dimensionali:

$$gH = f(\rho, n, D, Q, \mu, \{L_i\}) \qquad (1)$$

dove: ρ [kg m^{-3}] è la densità dell'acqua nella pompa, n [g/min] è il numero di giri con cui ruota la girante, D [m] è il diametro esterno della girante, Q [m^3 s^{-1}] è la portata volumetrica elaborata dalla pompa, μ [Pa s] è la viscosità dinamica dell'acqua, $\{L_i\}$ [m] sono una serie di parametri geometrici costruttivi della pompa.

1) Si ricavi la relazione adimensionale (2), cui si perviene applicando il teorema di Buckingham alla relazione dimensionale (1), esplicitando i numeri adimensionali coinvolti. Si utilizzino, dimostrandone l'indipendenza dimensionale, le grandezze ρ, n, D.

$$\Psi = f_1(\phi, Re, \{\Lambda_i\}) \qquad (2)$$

2) Si calcolino la velocità di rotazione e la portata volumetrica a cui deve operare un modello in scala 1:5 totalmente simile ad un prototipo operante nelle seguenti condizioni: n = 580 g/min, Q = 100 m^3/h, D = 1 m. Si assuma che le due pompe vengano costruite in modo che $\{\Lambda_i\}_p = \{\Lambda_i\}_m$, per tutti i valori di 'i'.

$$\begin{array}{c|ccc|} & m & kg & s \\ \rho & -3 & 1 & 0 \\ n & 0 & 0 & -1 \\ D & 1 & 0 & 0 \end{array} = -1 \neq 0$$

ρ, n, D possono essere prese come grandezze fondamentali perché sono dimensionalmente indip.

4

$$Re = \frac{\rho n D^2}{\mu} \; ; \; \Psi = \frac{gH}{D^2 n^2} \; ; \; \phi = \frac{Q}{n D^3} \; ; \; \Lambda_i = \frac{L_i}{D}$$

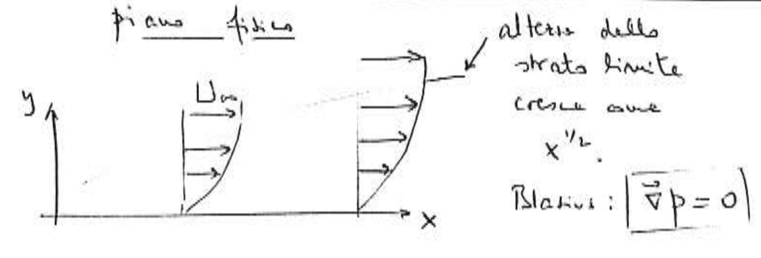
similitudine completa: $Re_m = Re_p$, $\phi_m = \phi_p \Rightarrow \Psi_m = \Psi_p$

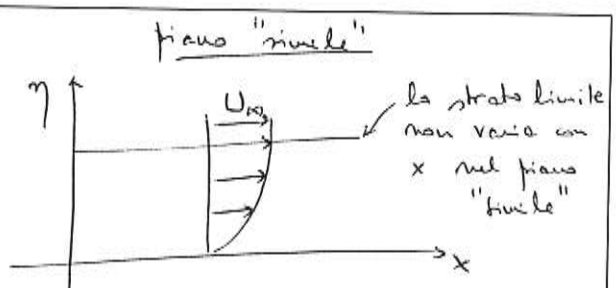
$Re_m = Re_p \rightarrow n_m = \left(\frac{D_p}{D_m}\right)^2 n_p = 25\, n_p = 14500$ giri/min

$\phi_m = \phi_p \rightarrow Q_m = \left(\frac{D_m}{D_p}\right)^3 \frac{n_m}{n_p} Q_p = 20\ m^3/h$

$\Psi_m = \Psi_p \rightarrow H_m = H_p$ stessa prevalenza per modello e prototipo

ESERCIZIO 6. Per lo strato limite di Blasius che si sviluppa su una lastra piana orientata lungo x, con y coordinata normale alla piastra, si definisca la variabile simile $\eta = \eta(x,y)$; si discuta il significato fisico di tale variabile e si spieghi come – usando η – si possono trasformare le equazioni del moto. Quanto vale $\partial p/\partial x$ per lo strato limite di Blasius? Quanto vale $\partial p/\partial y$?





4

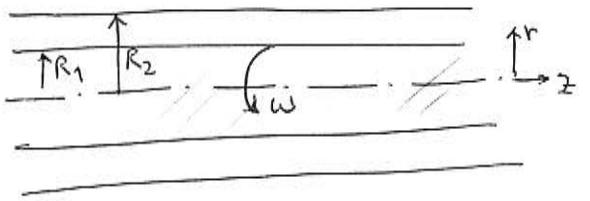
$$\eta(x,y) = \frac{y}{\delta(x)} = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}$$

$\delta(x)$ è una lunghezza di diffusione viscosa che cresce come lo spessore dello strato limite δ_{99}.

Usando η le P.D.E diventano ODE, sola variabile indipendente è η.

6

ESERCIZIO 7. Si consideri il moto stazionario di un fluido racchiuso tra due cilindri co-assiali di altezza infinita, con il cilindro interno (raggio R_1) che ruota a velocità angolare ω ed il cilindro esterno (raggio R_2) fermo. Supponendo che non ci siano gradienti di pressione, si trovi quanto vale la velocità del fluido nell'ipotesi di fluido non viscoso. Perché? Nel caso di fluido con viscosità cinematica ν diversa da zero, si trovi la distribuzione di velocità $u_\theta = u_\theta(r)$ (sempre nell'ipotesi che $\nabla p = 0$). Si calcoli infine lo sforzo di parete $\tau_{r\theta}$ per $r = R_1$ e per $r = R_2$.



Problema invariante lungo θ e z.

Continuità: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) = 0$

$r u_r = \text{cost} = 0$ (perché $u_r = 0$ in R_1 e R_2)

Caso non viscoso: il fluido non viene messo in movimento dal cilindro interno che ruota perché NON si applica la condizione di aderenza.

Caso viscoso: la componente θ dell'equazione di Navier-Stokes fornisce: $\nu\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_\theta}{dr}\right) - \frac{u_\theta}{r^2}\right] = 0$

la cui soluzione generale è $u_\theta = Ar + \frac{B}{r}$

Le condizioni al contorno sono:

$$u_\theta(R_1) = \omega R_1 \quad ; \quad u_\theta(R_2) = 0$$

Applicando le condizioni al contorno si ottiene:

$$A = -\frac{\omega R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \qquad B = \frac{\omega R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$\tau_{r\theta} = \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}}\right] = \mu\left(-\frac{2B}{r^2}\right)$$

$$\tau_{r\theta}(R_1) = -2\mu\frac{B}{R_1^2} \qquad \tau_{r\theta}(R_2) = -2\mu\frac{B}{R_2^2}$$

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI GENOVA

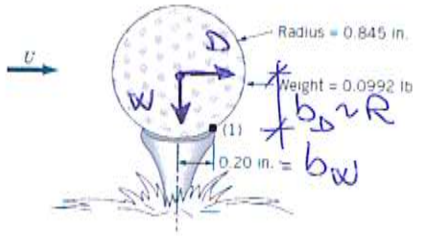
FILA B

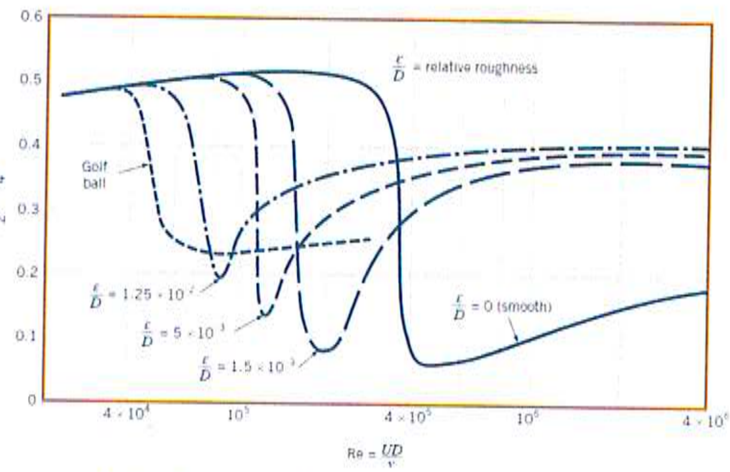
Nome e Cognome: CORREZIONE Matricola: ____________

Compitino parziale del 3/6/2015

Un foglio aiuti A4 e il diagramma di Moody sono ammessi. Scrivere i passaggi principali e le soluzioni nei riquadri appositi; va consegnata anche la "brutta" con tutti i calcoli effettuati, ma solo il contenuto dei riquadri sarà corretto.

ESERCIZIO 1. Un forte vento può far cadere una pallina da golf dal suo supporto, facendola ruotare attorno al punto 1 di figura. Si stimi la minima velocità U del vento (in m s^{-1}) capace di causare ciò (1 in = 2.54 cm; 1 lb = 0.4536 kg; $\nu = 1.5 \times 10^{-5}$ m^2 s^{-1}; $\rho = 1.2$ kg m^{-3}).





5

$m = 0.0992$ lb $= 0.045$ kg $\Rightarrow W = 0.045$ kg $\cdot 9.81 \frac{m}{s} = 0.44$ N

EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE ATTORNO A (1): $D_{CR} \cdot b_D = W \cdot b_W$

$\Rightarrow D_{CR} = 0.44 \text{ N} \cdot \frac{0.20 \text{ in}}{0.845 \text{ in}} = 0.10$ N

RISOLVO ITERATIVAMENTE: IPOTIZZO Re (QUINDI U) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ OTTENGO C_D $\Rightarrow$ CALCOLO FORZA DI DRAG $D_{CR} = \frac{C_D}{2} \rho U^2 A$

$A = \pi R^2 = 1.26 \cdot 10^{-3}$ m^2

RENDO - NUOVO VALORE

Re	U [m/s]	C_D	D_{CR} [N]
10^5	35	0.25	0.27
$4 \cdot 10^4$	14	0.5	0,08
$7 \cdot 10^4$	24.5	0.25	0.13
$5.5 \cdot 10^4$	19.2	0.3	0.1

più grande di 0.10 N

più piccolo di 0.10 N

HO RAGGIUNTO IL VALORE D_{CR} CALCOLATO DALL'EQ. ALLA ROTAZIONE

METÀ DELL'INTERVALLO

VALORE A METÀ TRA $4 \cdot 10^4$ e $7 \cdot 10^4$ (METODO CHIAMATO "DI BISEZIONE")

$\Rightarrow \boxed{U_{MIN} = 16.25 \text{ m/s}}$

ESERCIZIO 2. Un flusso irrotazionale può essere descritto dalla funzione di corrente espressa in coordinate cilindriche (r, θ) seguente: $\psi = 5\, r^2 \sin(2\theta)$. Verificare che tale funzione soddisfi il requisito di irrotazionalità e scrivere l'espressione di u_θ per $r = 4$.

3

$$\zeta_z = 0 \Rightarrow \nabla^2\psi = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0$$

$$\frac{1}{\cancel{r^2}}\left(-20\cancel{r^2}\sin(2\theta)\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(10r^2\sin(2\theta)\right) = 0$$

$$-20\sin(2\theta) + \frac{1}{\cancel{r}}20\cancel{r}\sin(2\theta) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \ \checkmark$$

$$u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -10r\sin(2\theta) \Rightarrow u_\theta\Big|_{r=4} = -40\sin(2\theta)$$

ESERCIZIO 3. Un oggetto di forma sferica con densità $\rho = 1300\ kg\ m^{-3}$ si trova in caduta libera in acqua ($\rho_F = 1000\ kg\ m^{-3}$, $\mu_F = 10^{-3}\ N\ s\ m^{-2}$). Si calcoli il raggio massimo dell'oggetto affinché il suo moto possa essere considerato un moto di Stokes.

4

$$\left.\begin{aligned} D &= 6\pi\mu U R \\ A &= \frac{4}{3}\pi R^3(\rho-\rho_F)g \end{aligned}\right\} \Rightarrow D = A$$

$$6\cancel{\pi}\mu U\cancel{R} = \frac{4}{3}\cancel{\pi}R^{\cancel{3}\,2}(\rho-\rho_F)g$$

$$\frac{18}{4}\mu U = R^2(\rho-\rho_F)g$$

MOTO DI STOKES $\Rightarrow Re < 1$

$$\Downarrow$$

$$U < \frac{\nu}{2R} \Leftarrow \frac{2UR}{\nu} < 1 \Leftarrow \frac{UD}{\nu} < 1$$

$$\frac{\cancel{18}^{\,9}}{2\cancel{4}}\mu\frac{\nu}{2R} = R^2(\rho-\rho_F)g$$

$$\Rightarrow R^3 = \frac{9\mu\nu}{4(\rho-\rho_F)g} \Rightarrow \boxed{R = 9.15\cdot 10^{-5}\ m}$$

ESERCIZIO 4. Si consideri lo strato limite temporale che si forma sopra una lastra piana infinita improvvisamente messa in moto nel suo piano a $t = 0$. Si chiede di scrivere l'equazione alle derivate parziali che descrive questo moto e di mostrare come tale equazione può essere trasformata in un'equazione differenziale ordinaria. Qual è la *variabile simile* in questo caso?

4

HP MOTO INVARIANTE NELLA DIREZIONE // ALLA PIASTRA $\Rightarrow \left(\frac{\partial\cdot}{\partial x} = 0\right)$

CONT $\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad v(0) = 0 \quad \Rightarrow v = 0$

PDE

MOM-X $\cancel{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \cancel{u\frac{\partial u}{\partial x}} + \cancel{v\frac{\partial u}{\partial y}}\right) = -\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}} + \cancel{\mu}\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$

ANALISI DIMENSIONALE

$$\frac{u}{U} = f(\nu, y, t) \xrightarrow{\pi} \frac{u}{U} = f\left(\underbrace{\frac{y}{\sqrt{\nu t}}}_{\eta}\right)$$

INSERISCO QUESTA FORMA FUNZIONALE NELLA PDE

VARIABILE SIMILE

$$\frac{\partial u}{\partial t} = U\frac{\partial f}{\partial t} = U\frac{df}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t} = -Uf'\frac{y}{2\sqrt{\nu t^3}} = -\frac{Uf'\eta}{2t}$$

$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nu U\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = \nu U\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{df}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) = \nu U\frac{d}{d\eta}\left(\frac{df}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y} =$$

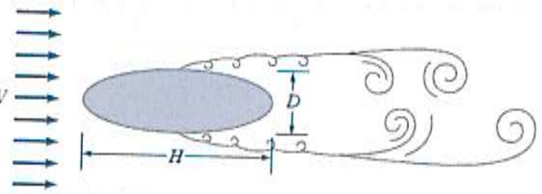
$$= \nu U f''\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 = \frac{\cancel{\nu}Uf''}{\cancel{\nu}t} = \frac{Uf''}{t}$$

$$\Rightarrow -\frac{\cancel{U}f'\eta}{2\cancel{t}} = \frac{\cancel{U}f''}{\cancel{t}} \Rightarrow \boxed{f'' + \frac{f'\eta}{2} = 0}$$

ODE

ESERCIZIO 5. Un lungo componente strutturale di un ponte sospeso ha sezione ellittica come mostrato in figura. Si sa che quando soffia un vento stazionario su questo tipo di corpo tozzo, possono essere emessi vortici dietro il corpo con una frequenza ben definita. Tali vortici possono creare pericolose forze periodiche sulla struttura ed è quindi importante determinare la frequenza di rilascio dei vortici. La struttura di specifico interesse ha D = 0.1 m, H = 0.3 m ed una velocità caratteristica del vento V = 50 km h^{-1}. La frequenza di rilascio dei vortici deve essere determinata attraverso un modello in scala (con D_m = 20 mm) da testare in una canaletta ad acqua. Si determini la dimensione H_m del modello. Se viene misurata una frequenza f_m = 49.9 Hz nel modello, quanto sarà la frequenza corrispondente nel prototipo? ($\mu_{aria} = 1.79 \times 10^{-5}$ kg m^{-1} s^{-1}; ρ_{aria} = 1.23 kg m^{-3}; $\mu_{acqua} = 10^{-3}$ Pa s; ρ_{acqua} = 998 kg m^{-3})

4



$$Re_P = Re_M \Rightarrow \frac{U_P H_P}{\nu_P} = \frac{U_M H_M}{\nu_M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{U_P}{U_M} = \frac{H_M}{H_P}\frac{\nu_P}{\nu_M}$$

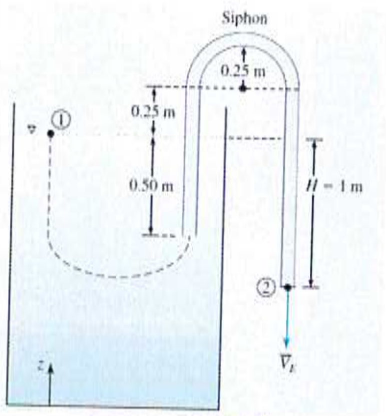
$$St_P = St_M \Rightarrow \frac{f_P H_P}{U_P} = \frac{f_M H_M}{U_M} \Rightarrow \frac{f_P}{f_M} = \frac{U_P}{U_M}\frac{H_M}{H_P} = \left(\frac{H_M}{H_P}\right)^2 \frac{\nu_P}{\nu_M} = \left(\frac{H_M}{H_P}\right)^2 \frac{\mu_P}{\mu_M}\frac{\rho_M}{\rho_P}$$

$$= 0.58 \Rightarrow \boxed{f_P = 28.99\,Hz}$$

$$\lambda = \frac{D_M}{D_P} = \frac{2 \cdot 10^{-2}\,m}{1 \cdot 10^{-1}\,m} = 0.2$$

$$\frac{H_M}{H_P} = \lambda \Rightarrow H_M = \lambda H_P = 0.3\,m \cdot 0.2 = \boxed{0.06\,m}$$

ESERCIZIO 6. Della benzina (ρ = 719 kg m^{-3}; $\mu = 2.92 \times 10^{-4}$ Pa s) viene estratta da un recipiente tramite un tubo liscio di diametro interno pari a 2 cm. Si determini la portata nel caso ideale (assenza di perdite) e nel caso reale. Si assuma un coefficiente di perdita concentrata nel gomito a 180° pari a K_L = 0.4.



5

CASO IDEALE $h_1 = h_2$

non considero le perdite distribuite nel tratto curvo poiché già considerate dentro K_L

$$z_1 + \cancel{\frac{P_1}{\gamma}} + \cancel{\frac{U_1^2}{2g}} = z_2 + \cancel{\frac{P_2}{\gamma}} + \frac{U_2^2}{2g}$$

$$\frac{U_2^2}{2g} = z_1 - z_2 \Rightarrow \boxed{U_{ID} = \sqrt{2g(z_1 - z_2)} = 4.43\,m/s}$$

$$\left(A = \frac{D^2\pi}{4} = 3.14 \cdot 10^{-4}\,m^2\right) \Rightarrow Q = 1.39 \cdot 10^{-3}\,m^3/s$$

CASO REALE

$$z_1 - \frac{U^2}{2g}\left(\frac{f}{D} L_{TOT} + K_L\right) = \frac{U^2}{2g} + z_2 \Rightarrow \frac{U^2}{2g}\left(\frac{f}{D} L_{TOT} + 1 + K_L\right) = z_1 - z_2$$

L_{TOT} = 0.50 m + 0.25 m + 0.25 m + 1 m = 2 m

RISOLVO ITERATIVAM. UTILIZZANDO U_{ID} COME PRIMO TENTATIVO

$U_1 = 4.43\,\frac{m}{s} \Rightarrow Re_1 = 2.18 \cdot 10^5 \Rightarrow f = 0.016 \Rightarrow U_{R1} = 2{,}56\,m/s$

$U_2 = 2{,}56\,m/s \Rightarrow Re_2 = 1.25 \cdot 10^5 \Rightarrow f = 0.018 \Rightarrow U_{R2} = 2{,}48\,m/s$

$U_3 = 2{,}48\,m/s \Rightarrow Re_3 = 1.2 \cdot 10^5 \Rightarrow f = 0.017 \Rightarrow U_{R3} = 2{,}5\,m/s$

$$U_R = \sqrt{\frac{2g(z_1 - z_2)}{\frac{f}{D} L_{TOT} + 1 + K_L}}$$

$$\Rightarrow \boxed{U_R = 2.5\,m/s} \Rightarrow Q_R = 7.85 \cdot 10^{-4}\,m^3/s$$

ESERCIZIO 7. Due cilindri coassiali di lunghezza infinita sono disposti orizzontalmente; nell'interstizio tra i due cilindri (di raggi R_1 e R_2, con $R_2 > R_1$) si trova un fluido di viscosità cinematica ν che viene messo in moto da un gradiente di pressione assiale imposto $dp/dz = A$ = costante. Si calcoli la distribuzione di velocità assiale $u_z = u_z(r)$ nell'interstizio tra i due cilindri. Si calcoli poi lo sforzo di parete τ_{rz} in $r = R_1$ ed in $r = R_2$.

HP. STAZIONARIETÀ $\Leftrightarrow \frac{\partial \cdot}{\partial t} = 0$

NO MOTO IN DIREZIONE RADIALE E TANGENZIALE $\Leftrightarrow u_\vartheta = u_r = 0$

ASSIALSIMMETRIA $\Leftrightarrow \frac{\partial \cdot}{\partial \vartheta} = 0$

IL MOTO NON DIPENDE DA z

CONTINUITÀ $\frac{1}{r}\frac{\partial(r\cancel{u_r})}{\partial r} + \frac{1}{r}\cancel{\frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta}} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$

MOM. LUNGO z

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u_z}{\partial t}} + u_r\cancel{\frac{\partial u_z}{\partial r}} + \cancel{\frac{u_\vartheta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \vartheta}} + u_z\cancel{\frac{\partial u_z}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \vartheta^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = \boxed{A = \frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)} \Rightarrow \frac{Ar}{\mu} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)$$

INTEGRO

$$B + \frac{Ar^2}{2\mu} = r\frac{\partial u_z}{\partial r}$$

$$\frac{B}{r} + \frac{Ar}{2\mu} = \frac{\partial u_z}{\partial r}$$

INTEGRO

$$u_z(r) = \frac{Ar^2}{4\mu} + B\ln r + C$$

IMPONGO C.C.

$$u_z(R_1) = \frac{AR_1^2}{4\mu} + B\ln R_1 + C = 0$$

$$u_z(R_2) = \frac{AR_2^2}{4\mu} + B\ln R_2 + C = 0$$

$$\rightsquigarrow B = -\frac{\frac{A}{4\mu}(R_2^2 - R_1)^2}{\ln(R_2/R_1)}$$

$$C = \frac{A}{4\mu}\frac{(R_2^2 - R_1^2)\ln R_1}{\ln(R_2/R_1)} - \frac{AR_1^2}{4\mu}$$

$$\tau_{rz} = \mu\left(\cancel{\frac{\partial u_r}{\partial z}} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) = \mu\frac{\partial u_z}{\partial r}$$

$$\tau_{rz}\Big|_{R_1} = \frac{AR_1}{2} + \frac{\mu B}{R_1}$$

$$\tau_{rz}\Big|_{R_2} = \frac{AR_2}{2} + \frac{\mu B}{R_2}$$

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI GENOVA

FILA C

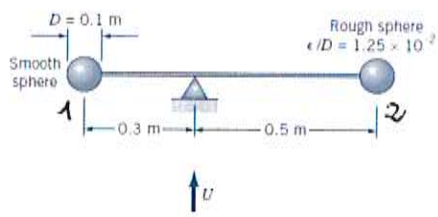
Nome e Cognome:_____________________________Matricola:____________

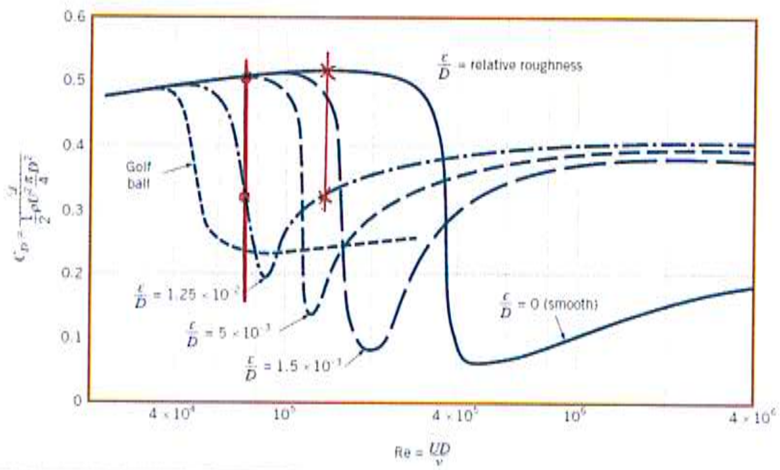
Compitino parziale del 3/6/2015

Un foglio aiuti A4 e il diagramma di Moody sono ammessi. Scrivere i passaggi principali e le soluzioni nei riquadri appositi; va consegnata anche la "brutta" con tutti i calcoli effettuati, ma solo il contenuto dei riquadri sarà corretto.

ESERCIZIO 1. Dell'aria scorre verso due sfere di uguale diametro (una liscia ed una seconda rugosa) che sono attaccate alle braccia di una bilancia come indicato in figura. Per U = 0 il sistema è bilanciato. Qual è la velocità minima dell'aria U $\neq 0$ per la quale il sistema è in equilibrio? ($\nu = 1.5 \times 10^{-5}\ m^2\ s^{-1}$; $\rho = 1.2\ kg\ m^{-3}$)

4





$$M_1 = M_2 \rightarrow F_1 r_1 = F_2 r_2 \rightarrow c_{D_1} \frac{1}{2} \rho U^2 \frac{\pi D^2}{4} r_1 = c_{D_2} \frac{1}{2} \rho U^2 \frac{\pi D^2}{4} r_2$$

$$\Rightarrow \quad c_{D_1} r_1 = c_{D_2} r_2 \rightarrow c_{D_1} = \frac{5}{3} c_{D_2}$$

$Re \sim 7.5 \times 10^4$ produce $c_{D_1} \sim 0.5$ e $c_{D_2} \sim 0.3$ che soddisfano il rapporto cercato.

$$U = \frac{Re\, \nu}{D} = 11.25\ ms^{-1}$$

Esiste inoltre una seconda soluzione per $Re \sim 1.5 \times 10^5$ cui corrisponde una velocità $U = 22.5\ ms^{-1}$

ESERCIZIO 2. Un flusso irrotazionale è espresso in coordinate cilindriche (r, θ). Sia la componente
3 $u_\theta = -2\,r\sin(2\theta)$; ricavare l'espressione della relativa funzione di corrente ψ.

$u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -2r\sin(2\theta)$ $\qquad \psi = r^2\sin(2\theta) + f(\theta)$

$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 2r\cos(2\theta) + \frac{f'(\theta)}{r}$ (nell'ipotesi di moto incomprimibile)

La condizione di irrotazionalità è: $\zeta_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} = 0$

e questo porta a $\frac{d^2f}{d\theta^2} = 0 \rightarrow f(\theta) = A\theta + B$, A e B costanti

ESERCIZIO 3. Dalla ciminiera di una fabbrica fuoriescono piccole particelle di polvere aventi diametro caratteristico pari a 10^{-6} m e densità $\rho = 1250$ kg m^{-3}. Ipotizzando la particella inizialmente ferma, viene accelerata sotto l'influenza della gravità. La viscosità dell'aria vale $\mu = 15 \times 10^{-6}$ Pa s e la sua densità vale $\rho = 1.2$ kg m^{-3}. Quale velocità assumerà la particella dopo il transitorio iniziale? Verificare l'approssimazione di moto di Stokes a regime. Utilizzando intervalli di integrazione temporali $\Delta t = 10^{-6}$ s si risolva l'equazione
5 dinamica del moto della particella e si determini dopo quale intervallo di tempo la particella assume una velocità pari al 75% della sua velocità terminale.

$m_p\frac{dv}{dt} = m_p g - F_{Archimede} - F_{Stokes}$; La velocità terminale è costante

ed è: $v_{terminale} = (\rho_p - \rho_{aria})\frac{g D^2}{18\mu} = 4.54\times10^{-5}\ m\,s^{-1}$ ($Re = 3.6\times10^{-6} \ll 1$, OK)

75% $v_{terminale} = 3.40\times10^{-5}\ m\,s^{-1}$. Nel transitorio si ha $\frac{dv}{dt} = g\left(1-\frac{\rho_{aria}}{\rho_p}\right) - \frac{3\pi\mu D v}{m_p}$

$\frac{dv}{dt} = 9.80 - 2.16\times10^{5}\,v$

$\frac{v^{(n+1)} - v^{(n)}}{\Delta t} = 9.80 - 2.16\times10^{5}\,v^{(n)}$ FORMULA ESPLICITA

$v^{(n+1)} = 9.80\times10^{-6} + 0.794\,v^{(n)}$ (con $\Delta t = 10^{-6}$ s)

$t_0 = 0 \quad v^{(0)} = 0$ m/s

$t_1 = 10^{-6}$ s $\quad v^{(1)} = 9.80\times10^{-6}$ m/s

$t_2 = 2\times10^{-6}$ s $\quad v^{(2)} = 1.76\times10^{-5}$ m/s

$t_3 = 3\times10^{-6}$ s $\quad v^{(3)} = 2.38\times10^{-5}$ m/s, quindi

75% $v_{terminale}$ è raggiunta in $t < t_3 = 3\times10^{-6}$ s

ESERCIZIO 4. Si consideri lo strato limite che si sviluppa su una lastra piana semi-infinita allineata con la corrente esterna. Sviluppando un'analisi detta "di normalizzazione" si mostri come le equazioni di conservazione di massa e quantità di moto possono essere ridotte (producendo le equazioni di Prandtl).

4 Scala di u : U (velocità esterna) $\qquad$ Scala lungo x : L (lunghezza di riferimento dal bordo d'attacco)

" " v : V (non nota a priori) $\qquad$ " " y : δ (proporzionale allo spessore dello strato limite)

Scala di pressione: ρU^2

NS 2D

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{U}{L} \sim \frac{V}{\delta} \Rightarrow V = U\frac{\delta}{L} \ll U \qquad \delta \ll L$

$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \Rightarrow \frac{U^2}{L} \sim \nu\frac{U}{\delta^2}$ con $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$\hookrightarrow \frac{\delta}{L} \sim \frac{\nu}{\delta U} = Re_\delta^{-1} \ll 1$

$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \Rightarrow$ rimane $\frac{\partial p}{\partial y}$ = termini piccoli che trascuriamo

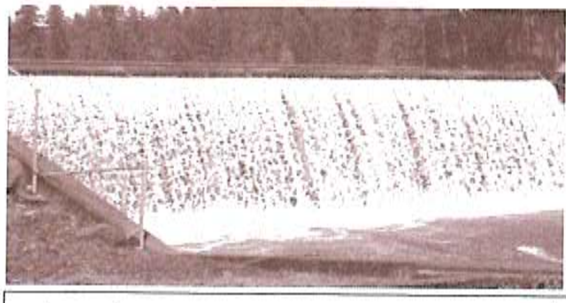
eq. strato limite:

$u u_x + v u_y = -\frac{1}{\rho}p_x + \nu u_{yy}$

$p_y = 0$

$u_x + v_y = 0$

4



ESERCIZIO 5. Il rilascio d'acqua da una diga avviene – a bacino pieno - su una larghezza di 20 m con una portata di 125 m^3s^{-1}. Un modello in scala 1:15 viene costruito per studiare le caratteristiche dello sfioratore. Trascurando gli effetti di viscosità e tensione di superficie, si determini la larghezza del modello e la portata. Per un intervallo di tempo nel prototipo pari a t_p = 24 h quale sarà il tempo t_m nel modello?

$$\lambda = \frac{L_m}{L_p} = \frac{1}{15} \qquad L_m = \frac{L_p}{15} = 1{,}33 \text{ m}$$

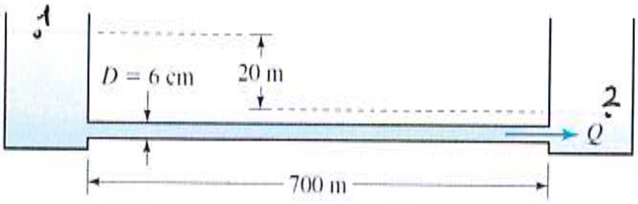
$$Fr_m = Fr_p \qquad \frac{U_m}{\sqrt{gL_m}} = \frac{U_p}{\sqrt{gL_p}} \rightarrow \frac{U_m}{U_p} = \sqrt{\lambda} = 0.26 = \frac{\dot{V}_m/A_m}{\dot{V}_p/A_p} = \frac{\dot{V}_m}{\dot{V}_p}\left(\frac{L_p}{L_m}\right)^2$$

$$\rightarrow \dot{V}_m = \dot{V}_p(\lambda)^{5/2} = 0.1434 \text{ m}^3/s$$

$$\frac{L_m}{T_m} = \frac{L_p}{T_p}\sqrt{\lambda} \rightarrow T_m = T_p\sqrt{\lambda} = 6{,}20 \text{ h}$$

ESERCIZIO 6. I due serbatoi in figura contengono acqua ($\nu = 10^{-6}$ m^2 s^{-1}; ρ = 998 kg m^{-3}). Il condotto che li unisce è liscio e di sezione circolare; imbocco e sbocco dalla tubazione ai serbatoi sono bruschi con $K_{L\,ingresso}$ = 0.5 e $K_{L\,uscita}$ = 1.05. Quanto vale la portata nella tubazione?

6



Eq. energia fra 1 e 2

$$\cancel{\frac{P_1}{\gamma}} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} + z_1 = \cancel{\frac{P_2}{\gamma}} + \cancel{\frac{V_2^2}{2g}} + z_2 + h_L$$

$$h_L = z_1 - z_2 = 20 \text{ m}$$

$$h_L = (K_{L\,ingresso} + K_{L\,uscita})\frac{V_{tubazione}^2}{2g} + f\frac{L}{D}\frac{V_{tubazione}^2}{2g} \rightarrow V_{tubazione} = \sqrt{\frac{2g\,h_L}{\Sigma K_L + f\frac{L}{D}}}$$

con $Re = \dfrac{V_{tubazione}\,D}{\nu}$

iterazione	$V_{tubazione}$	Re	f
1	1 ms^{-1}	6×10^4	0.020
2	1,29 ms^{-1}	7.75×10^4	0.01875
3	1,33 ms^{-1}	8×10^4	0.0187
4	1,336 ms^{-1}	8×10^4	0,0187

$\rightarrow V_{tubazione} = 1{,}336 \text{ ms}^{-1}$

$$\rightarrow \dot{V} = \frac{\pi D^2}{4} V_{tubazione} = 3{,}78\times10^{-3} \text{ m}^3s^{-1}$$

6

ESERCIZIO 7. Si consideri il moto stazionario di un fluido racchiuso tra due cilindri co-assiali di altezza infinita, con il cilindro interno (raggio R_1) fermo e quello esterno (raggio R_2) che ruota a velocità angolare ω. Supponendo che non ci siano gradienti di pressione, si trovi quanto vale la velocità del fluido nell'ipotesi di fluido non viscoso. Perché? Nel caso di fluido con viscosità cinematica ν diversa da zero, si trovi la distribuzione di velocità $u_\theta = u_\theta(r)$ (sempre nell'ipotesi che $\nabla p = 0$). Si calcoli infine lo sforzo di parete $\tau_{r\theta}$ per $r = R_1$ e per $r = R_2$.

Fluido non-viscoso: non c'è moto perché il fluido non aderisce alla parete.

Fluido viscoso: $\exists$ solo $u_\theta = u_\theta(r)$

NS lungo θ: $\mu \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r u_\theta)\right) = 0 \rightarrow u_\theta = Ar + \frac{B}{r}$

condizioni al contorno: $u_\theta(R_1) = 0 \qquad u_\theta(R_2) = \omega R_2$

si trova $A = \frac{\omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$ e $B = -\frac{\omega R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$

$$\tau_{r\theta} = \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right] = \mu r \frac{d}{dr}\left(A + \frac{B}{r^2}\right) = -\frac{2\mu}{r^2}B$$

$$\tau_{r\theta}(R_1) = \frac{2\mu\omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \qquad \tau_{r\theta}(R_2) = \frac{2\mu R_1^2\omega}{R_2^2 - R_1^2}$$

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI GENOVA

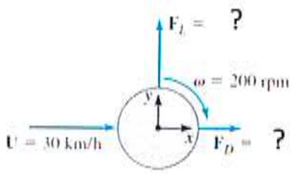
FILA D

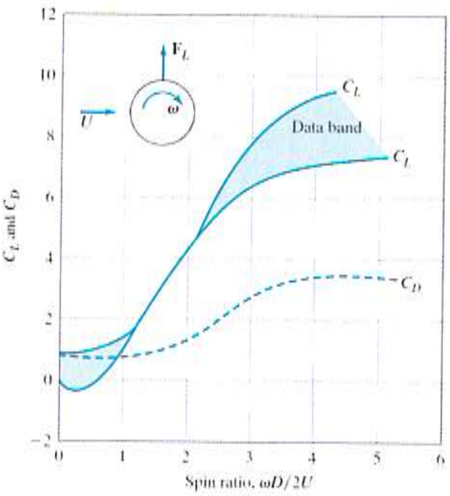
Nome e Cognome:____________________________ Matricola:____________

Compitino parziale del 3/6/2015

Un foglio aiuti A4 e il diagramma di Moody sono ammessi. Scrivere i passaggi principali e le soluzioni nei riquadri appositi; va consegnata anche la "brutta" con tutti i calcoli effettuati, ma solo il contenuto dei riquadri sarà corretto.

ESERCIZIO 1. La nave *Bruckau*, progettata da Anton Flettner, sfruttava la rotazione di due rotori, ognuno di diametro pari a 3 m ed altezza 15 m. Per una velocità angolare di rotazione dei rotori di ω = 200 giri al minuto, ed una velocità del vento relativa al rotore di 30 km/h, quanto vale la forza su ciascun rotore (modulo, direzione e verso). Si prenda ρ = 1.2 kg m^{-3} e si usi la figura di destra specificando come sono definiti i coefficienti di resistenza e portanza in questo caso.





$\omega = \frac{200 \cdot 2\pi}{60} \frac{rad}{s} = 20.94 \frac{rad}{s}$, $U = \frac{30}{3.6} = 8.33 \frac{m}{s}$

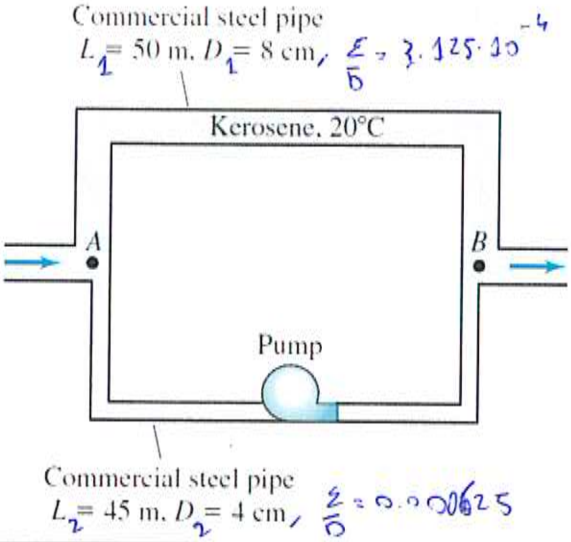
$SR = \frac{\omega D}{2U} \simeq 3.77$, da cui si legge $C_L \simeq 8$ e $C_D \simeq 3.6$

$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$, $C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$ con $A = DH =$

$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho U^2 A = 6750$ N $\quad \tan\alpha = \frac{F_L}{F_D} \rightarrow \alpha = 65.77°$

$F_L = \frac{1}{2} C_L \rho U^2 A = 1.5 \cdot 10^4$ N

$|F| = \sqrt{F_D^2 + F_L^2}$ $1.645 \cdot 10^4$



ESERCIZIO 4. Il sistema di tubazioni in parallelo di figura è realizzato in acciaio commerciale; trasporta kerosene (ρ = 804 kg m^{-3}, ν = 2.4 x 10^{-6} m^2 s^{-1}) con una portata totale di 0.05 m^{3}s^{-1}. Quando la pompa non è in funzione la si può considerare come una perdita di carico concentrata con K_L = 1.4. Si determini la portata in ciascuno dei due rami e la caduta di pressione tra A e B.

$\varepsilon = 0.025$ mm

Si rifaccia il problema con la pompa in funzione e capace di fornire 35 kW al flusso.

Le tubazioni sono in parallelo per cui:

$$\begin{cases} h_{L1} = h_{L2} \\ Q_1 + Q_2 = Q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{V_1^2}{2g} F_1 \frac{l_1}{D_1} = \frac{V_2^2}{2g}\left(F_1 \frac{l_2}{D_2} + K_L\right) \\ \frac{\pi D_1^2}{4} V_1 + \frac{\pi D_2^2}{4} V_2 = Q \end{cases}$$

Occorre procedere in maniera iterativa, finché $h_{L1} = h_{L2}$ non è soddisfatta:

V_1	V_2	Re_1	Re_2	F_1	F_2	h_{L1}	h_{L2}
8.4	6.2	$2.3 \cdot 10^5$	$1.031 \cdot 10^5$	0.019	0.0215	42.71	48.95
8.5	5.78	$2.33 \cdot 10^5$	$9.61 \cdot 10^4$	//	//	43.73	43.7

$$\frac{\Delta P_{AB}}{\rho g} = \frac{P_A - P_B}{\rho g} = \frac{V_1^2}{2g}\left(F_1 \frac{l}{D}\right) =$$

$\Rightarrow \Delta P_{AB} = \rho g h_L = 3.45 \cdot 10^5 Pa$

Con pompa accesa $K_L = 0$ e $h_{pump} \neq 0$, si avrà:

$$V_1^2/2g \, F_1 \frac{L_1}{D_1} = \frac{V_2^2}{2g} F_2 \frac{l_2}{D_2} - h_{pump}$$

V_1	V_2	Re_1	Re_2	F_1	F_2	h_{L1}	h_{L2}
7.4	11.19	$2.46 \cdot 10^5$	$1.1 \cdot 10^5$	0.0215	0.0251	30.5	27.3
7.37	10.3	$2.45 \cdot 10^5$	$1.78 \cdot 10^5$	//	//	30.2	30.1

$\Delta P = \rho g (h_L - h_p)$
$= 2.37 \cdot 10^5 Pa$

ESERCIZIO 5. Due oggetti di forma simile con rapporto tra le lunghezze pari a 3 e densità ρ uguale, si trovano in caduta libera in un fluido di densità ρ_F e viscosità μ_F . Nell'ipotesi di moto di Stokes, quanto vale il rapporto tra le velocità asintotiche raggiunte dai due oggetti? E nel caso di moto ad alti numeri di Reynolds? Si ipotizzi che, in entrambi i casi, i coefficienti aerodinamici non dipendano dalle dimensioni dell'oggetto.

$L_2 = 3 L_1$

F_a F_D F_p

$F_p = F_D + F_{arch}$ *

Equazione del moto per il corpo 1:

$(\rho_p - \rho_F) g L_1^3 = 3\mu V_1 L_1$

Per il corpo 2:

$(\rho_p - \rho_F) g (3L_1)^3 = 3 \cdot 3 \mu V_2 L_1$

$\rightarrow \frac{V_2}{V_1} = 9$

Nel caso ad alti Re:

$F_D = \frac{1}{2} \rho_F V^2 L^2 C_D$, sostituendo in *

si ha che

$$\begin{cases} (\rho_p - \rho_F) g L_1^3 = \frac{1}{2} \rho_F V_1^2 L_1^2 C_D \\ (\rho_p - \rho_F) g (3L_1)^3 = \frac{1}{2} \rho_F V_2^2 (3L_1)^2 C_D \end{cases} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \sqrt{3}$$

ESERCIZIO 6. Le equazioni dello strato limite su una lastra piana allineata con la corrente esterna ed in assenza di gradiente di pressione possono essere opportunamente semplificate introducendo la nuova variabile $\eta = y/\delta(x)$. Si specifichi cosa è tale nuova variabile dipendente $\eta(x,y)$, che cosa è $\delta(x)$ ed in cosa consiste la semplificazione.

$\delta(x)$ è lo spessore dello strato limite che si sviluppa sulla lastra

$\eta = y$, semplifica le equazioni dello strato limite (PDE) in una ODE dipendente solo dalla variabile similare

ESERCIZIO 2. Un flusso irrotazionale è espresso in coordinate cilindriche (r, θ). Sia la componente $u_r = r\cos(2\theta)$; ricavare l'espressione della relativa funzione di corrente ψ.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = u_r \rightarrow \psi = \int r^2\cos(2\theta)\,d\theta = \frac{r^2}{2}\sin(2\theta) + f(r)$$

$$u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -r\sin 2\theta - f'(r)$$

Dall'irrotazionalità si ha:

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} r u_\theta - \frac{\partial}{\partial\theta} u_r\right) = 0 \rightarrow f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) = 0 \Rightarrow f(r) = A\log(r) + B$$

Per cui $\psi = \frac{r^2}{2}\sin 2\theta + A\log(r) + B$

ESERCIZIO 3. La pompa centrifuga è una macchina di grande utilizzo in ambito industriale, ed è possibile dimostrare che la potenza erogata $\dot{W}$ [W] è funzione delle seguenti grandezze dimensionali:

$$\dot{W} = f(\rho, n, D, Q, \mu, \{L_i\}) \qquad (1)$$

dove: ρ [kg m^{-3}] è la densità dell'acqua nella pompa, n [g/min] è il numero di giri con cui ruota la girante, D [m] è il diametro esterno della girante, Q [m^3 s^{-1}] è la portata volumetrica elaborata dalla pompa, μ [Pa s] è la viscosità dinamica dell'acqua, $\{L_i\}$ [m] sono una serie di parametri geometrici costruttivi della pompa.

1) Si ricavi la relazione adimensionale (2), cui si perviene applicando il teorema di Buckingham alla relazione dimensionale (1), esplicitando i numeri adimensionali coinvolti. Si utilizzino, dimostrandone l'indipendenza dimensionale, le grandezze ρ, n, D.

$$\Psi = f_1(\phi, Re, \{\Lambda_i\}) \qquad (2)$$

2) Si calcolino la velocità di rotazione e la portata volumetrica a cui deve operare un modello in scala 1:5 totalmente simile ad un prototipo operante nelle seguenti condizioni: n = 540 g/min, Q = 120 m^3/h, D = 1.2 m. Si assuma che le due pompe vengano costruite in modo che $\{\Lambda_i\}_p = \{\Lambda_i\}_m$, per tutti i valori di 'i'.

ρ, n, D sono indipendenti infatti $\det\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

Adimensionalizzo $\dot{W}$:

$$\begin{cases} -3\alpha + \gamma = 2 \\ \beta = 3 \\ \alpha = 1 \end{cases} \rightarrow \Psi = \frac{\dot{W}}{\rho n^3 D^5}$$

Adimensionalizzo Q

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \\ -3\alpha + \gamma = 3 \end{cases} \rightarrow \phi = \frac{Q}{nD^3}$$

Adimensionalizzo μ:

$$\begin{cases} -3\alpha + \gamma = -1 \\ \beta = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases} \rightarrow \frac{\mu}{\rho n D^2} = \frac{\mu}{\rho V_p D} = \frac{1}{Re}$$

infine $\{\Lambda_i\} = \frac{\{L_i\}}{D}$

PARTE 2:

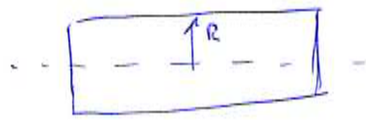
Similitudine totale:

$$\begin{cases} Re_m = Re_p \rightarrow n_m = \frac{n_p}{\lambda^2} = 13500\ g/min \\ \phi_m = \phi_p \rightarrow Q_m = \lambda Q_p = 24\ m^3/h \\ \{\Lambda_m\}_i = \{\Lambda_p\}_i \end{cases}$$

ESERCIZIO 7. Si consideri un cilindro di lunghezza infinita e raggio R, inizialmente fermo ed immerso in un fluido a riposo di viscosità cinematica ν. Al tempo $t = 0$ il cilindro viene improvvisamente messo in rotazione attorno al proprio asse con velocità angolare ω costante. Il fluido, ovviamente, si mette in moto anch'esso, per effetto della condizione di aderenza e attorno al cilindro si forma uno strato limite che cresce nel tempo. Dopo aver scritto le equazioni del moto e le condizioni al contorno ed iniziali, si mostri che il cambio di variabile $\eta = (r - R)/(\nu t)^{1/2}$ non permette di semplificare il problema, cioè non permette di passare da un'equazione alle derivate parziali ad un'equazione differenziale ordinaria. Esiste però un limite per il quale questo cambio di variabile conduce alla semplificazione cercata; si definisca tale caso limite.

Il problema è assialsimmetrico, per cui $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$, inoltre $u_r = u_z = 0$ e $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ per continuità.

Le eq^{ni} di NS vanno scritte in coordinate polari ottenendo:



$r: \quad \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{u_\theta^2}{r}$

$z: \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$

$\theta: \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial t} = \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} \right]$, con $\begin{cases} u_\theta(R, 0) = 0 \\ u_\theta(R, t) = \omega t \\ u_\theta(r \to +\infty, t) = 0 \end{cases}$

Cambio variabile:

$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} = -\frac{1}{2} \frac{(r-R)}{\sqrt{\nu}\, t^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \eta}$, $\quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{(\nu t)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \eta}$, quindi

$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} = u_\theta' \left(-\frac{\eta}{2t} \right)$, $\quad \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} \right] = \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} - \frac{u_\theta}{r^2} \right] = \nu \left[\frac{u_\theta'}{r\sqrt{\nu t}} + \frac{u_\theta''}{\nu t} - \frac{u_\theta}{r^2} \right]$.

$\Rightarrow \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial \eta} \left(-\frac{\eta}{2t} \right) = \nu \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{\nu t}} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \eta^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\nu t}} - \frac{u_\theta}{r^2} \right]$. Che è ancora una PDE

Tuttavia nel caso limite in cui $R \to +\infty$, l'equazione diventa:

$+\frac{1}{2} u' \eta = -u''$, è un ODE che corrisponde al caso piano.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI GENOVA

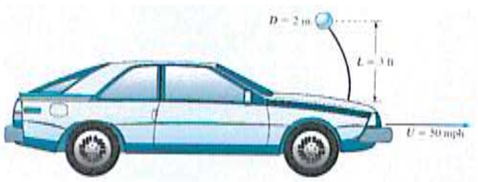
FILA E

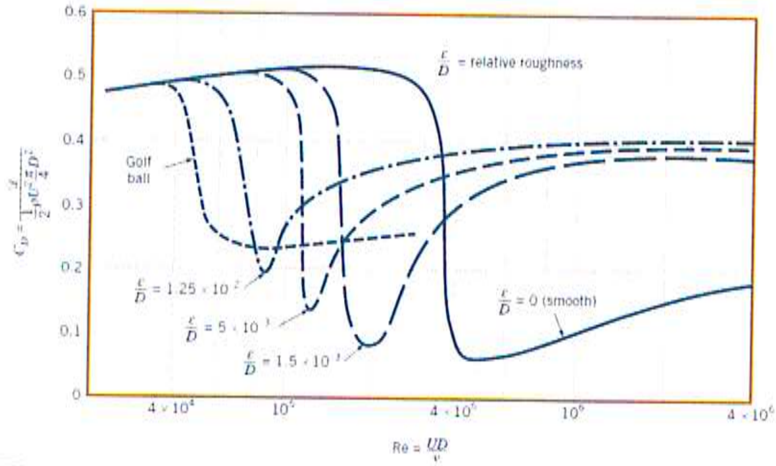
Nome e Cognome:____________________________Matricola:____________

Compitino parziale del 3/6/2015

Un foglio aiuti A4 e il diagramma di Moody sono ammessi. Scrivere i passaggi principali e le soluzioni nei riquadri appositi; va consegnata anche la "brutta" con tutti i calcoli effettuati, ma solo il contenuto dei riquadri sarà corretto.

ESERCIZIO 1. Per trovare più facilmente una vettura in un parcheggio affollato, si sistema una pallina di plastica colorata di diametro pari a 2 *in* sulla cima ad un'antenna lunga 3 *ft*. Quanto vale il momento flettente sull'antenna dovuto alla pallina quando la macchina si muove a 50 miglia orarie? Sarebbe utile produrre asperità superficiali sulla pallina? (1 *in* = 2.54 cm; 1 *ft* = 0.3048 m; 1 miglio = 1.609 km; $\nu = 1.5 \times 10^{-5}\ m^2 s^{-1}$; $\rho = 1.2\ kg\ m^{-3}$)





Dopo aver convertito tutti i dati nel S.I., ~~e~~ calcolando Re ottengo $Re \approx 1.5 \cdot 10^4$

Guardando nel grafico si deduce che, per una pallina liscia, $C_D \sim 0.5$.

$$M = F_D \cdot L = C_D \cdot \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{\pi D^2}{4} L = 0.28\ N \cdot m$$

Nel caso di asperità superficiali, se $\frac{\varepsilon}{D}$ è sufficientemente grande, si ottiene un C_D minore a parità del numero di Reynolds, da cui si conclude che è utile considerare quest'ultimo caso.

ESERCIZIO 2. Un flusso irrotazionale può essere descritto dalla funzione di corrente espressa in coordinate cilindriche (r, θ) seguente: $\psi = -7\, r^2 \sin(2\theta)$. Verificare che tale funzione soddisfi il requisito di irrotazionalità e scrivere l'espressione di u_r per $\theta = \pi/6$.

Per verificare che il flusso sia irrotazionale basta ~~calcolare~~ verificare che
$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) - \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}\right) = 0$$
Calcolo u_r e u_θ $\quad u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -14\, r \cos(2\theta) + g(r)$ $\quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 14\, r \sin(2\theta) + f(\theta)$

da cui si verifica facilmente la prima equazione e che $u_r\left(\frac{\pi}{6}\right) = -7r + g(r)$

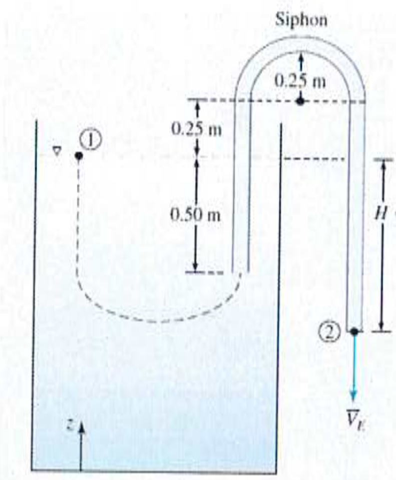
ESERCIZIO 3. Dalla ciminiera di una fabbrica fuoriescono piccole particelle di polvere aventi diametro caratteristico pari a 10^{-6} m e densità $\rho = 1350$ kg m^{-3}. Ipotizzando la particella inizialmente ferma, viene accelerata sotto l'influenza della gravità. La viscosità dell'aria vale $\mu = 14 \times 10^{-6}$ Pa s e la sua densità vale $\rho = 1.2$ kg m^{-3}. Quale velocità assumerà la particella dopo il transitorio iniziale? Verificare l'approssimazione di moto di Stokes a regime. Utilizzando intervalli di integrazione temporali $\Delta t = 0.1$ s si risolva l'equazione dinamica del moto della particella e si determini dopo quale intervallo di tempo la particella assume una velocità pari al 75% della sua velocità terminale.

Scrivendo il bilancio delle forze per una particella di polvere nell'ipotesi di moto di Stokes ottengo
$$\frac{4}{3}\pi \frac{D^3}{8}\rho_p g = \frac{4}{3}\pi\frac{D^3}{8}\rho_f g + 3\pi\mu V_{FINALE} D$$ da cui si deduce che

$V_{FINALE} = 5.25 \cdot 10^{-5}$ m/s $\quad$ Calcolando Re ottengo $Re \sim 10^{-6} \ll 1$

quindi l'ipotesi di Stokes è verificata.

ESERCIZIO 4. Della benzina ($\rho = 719$ kg m^{-3}; $\mu = 2.92 \times 10^{-4}$ Pa s) viene estratta da un recipiente tramite un tubo liscio di diametro interno pari a 2 cm. Si determini la portata nel caso ideale (assenza di perdite) e nel caso reale. Si assuma un coefficiente di perdita concentrata nel gomito a 180° pari a $K_L = 0.5$.



Scrivendo Bernoulli tra i punti ① e ② nel caso $\boxed{\text{IDEALE}}$ ho

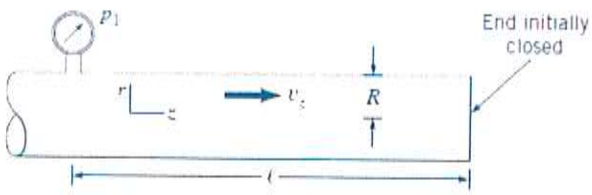
$$z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \quad , \quad z_1 - z_2 = H$$

$\Rightarrow V_2 = \sqrt{2gH} = 4{,}43$ m/s da cui calcolo la portata.

Nel caso $\boxed{\text{REALE}}$ invece l'equazione precedente diventa:

$$z_1 - z_2 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g}\left(f\frac{L}{D} + K_e\right) \Rightarrow V_2 = \sqrt{\frac{H2g}{1.5 + f\frac{L}{D}}}$$ a questo punto procedo iterativamente cercando di trovare un punto fisso per V_2 e deducendo dal diagramma di Moody f. Si ottiene $V_2 = 2.47$ m/s con una precisione fino alla seconda cifra decimale. Con tale valore di V_2 si deduce in maniera ovvia la portata del tubo.

ESERCIZIO 5. Un liquido è contenuto in un condotto di sezione circolare chiuso da un lato. Il liquido è inizialmente a riposo; quando il lato chiuso viene improvvisamente aperto il liquido inizia a muoversi, soddisfacendo la seguente equazione differenziale:



$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{p_1}{\ell} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$$

Si riscriva l'equazione in forma adimensionale, usando ρ, μ e il raggio del condotto R come parametri di riferimento.

le 3 grandezze ρ, μ, R sono linearmente indipendenti

Risolvo i sistemi

$M^\alpha l^{-\alpha} t^{-\alpha} M^\beta l^{-3\beta} l^\gamma = M^i l^i t^i$ dove il secondo membro al variare di i rappresenta le ~~dimensioni~~ grandezze caratteristiche di ciascuna variabile che si vuole adimensionalizzare. Tali grandezze sono:

$r = R r^*$ $\quad v_z = \frac{\mu}{\rho R} v_z^*$ $\quad t = \frac{\rho R^2}{\mu} t^*$

Sostituendo nell'equazione le nuove variabili dimensionali ~~otte~~ e semplificando per $\frac{\mu^2}{\rho R^3}$ ottengo

$$\frac{\partial v_t^*}{\partial t^*} = \frac{\rho p_1 R^3}{l \mu^2} + \left(\frac{\partial^2 v_t^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*}\frac{\partial v_t^*}{\partial r^*}\right)$$

ESERCIZIO 6. Le equazioni dello strato limite temporale che si sviluppa su una lastra piana infinita allineata con la corrente esterna possono essere opportunamente semplificate introducendo la nuova variabile η = y/δ(t). Si specifichi cosa è tale nuova variabile dipendente η(t,y), che cosa è δ(t) ed in cosa consiste la semplificazione.

- δ(t) rappresenta lo spessore dello strato limite
- η(t,y) è detta variabile di similitudine.

Introdurre tale variabile ~~consente~~ equivale a ~~nel~~ semplificare le equazioni dello strato limite in quanto trasforma una PDE in una ODE.

ESERCIZIO 7. Due cilindri coassiali di lunghezza infinita sono disposti orizzontalmente; nell'interstizio tra i due cilindri (di raggi R_1 e R_2, con $R_2 > R_1$) si trova un fluido di viscosità cinematica ν che viene messo in moto facendo scorrere il cilindro interno lungo il suo asse a velocità V costante, mentre il cilindro esterno rimane fermo. Si calcoli la distribuzione di velocità assiale $u_z = u_z(r)$ nell'interstizio tra i due cilindri. Si calcoli poi lo sforzo di parete τ_{rz} in $r = R_1$ ed in $r = R_2$.

Sotto le ipotesi di assialsimmetria e invarianza lungo z del problema (cilindri ~~di~~ di lunghezza infiniti) la componente z dalle equazioni di N-S si riduce a.

$$\mu \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) = 0 \iff \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{A}{r} \Rightarrow u_z = A \log r + B$$

Imponendo le condizioni al contorno $\begin{cases} u(R_1) = V \\ u(R_2) = 0 \end{cases}$

ottengo il sistema lineare $\begin{cases} A\log(R_1) + B = V \\ A\log(R_2) + B = 0 \end{cases}$

da cui si deducono A e B.

u_z diventa

$$u_z = \frac{V}{\log\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \log r - \frac{V}{\log\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \log(R_2) =$$

$$= \frac{V}{\log\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \log\left(\frac{r}{R_2}\right).$$

Per definizione

$$\tau_{rz} = \mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) = \mu \frac{\partial u_z}{\partial r} = \mu \frac{V}{\log\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \frac{1}{r}.$$

Sostituendo trovo i valori richiesti.