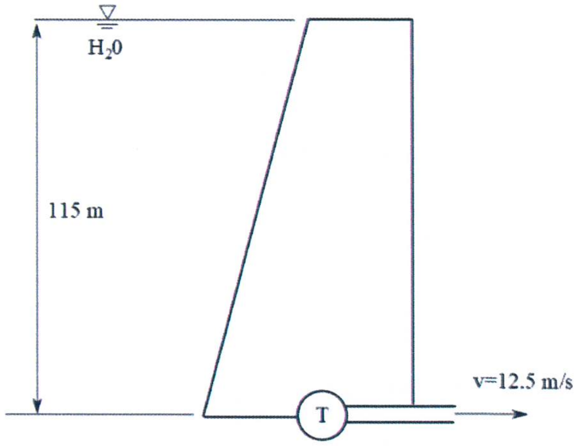
COMPITO DI MECCANICA DEI FLUIDI – 5 aprile 2018 – fila A

Esercizio 1. Una turbina alla base di una diga sfrutta un'altezza d'acqua di 115 m. La potenza prodotta all'albero della turbina è 4.60 Mw e le perdite di carico nel sistema sono pari a 10 m. Il diametro della condotta all'uscita della turbina è 0.75 m e la velocità di uscita dell'acqua è 12.5 m/s. Calcolare l'efficienza della turbina T.



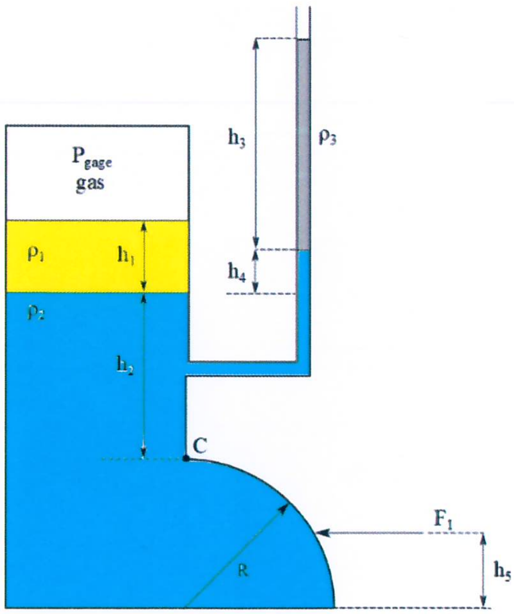
Esercizio 2. L'equazione di Bernoulli per un fluido comprimibile si scrive:

$$\int dP/\rho \ + \ V^2/2 \ + \ gz = \text{costante lungo ogni linea di corrente.}$$

Si assuma un gas perfetto e si mostri cosa diventa tale espressione per una trasformazione isoterma e per una trasformazione isentropica.

Esercizio 3. Si consideri una paratia a forma di quarto di cilindro incernierata nel punto C di figura. La profondità del sistema sia assunta unitaria. Quanto vale il modulo della forza orizzontale F_1 sufficiente a tener chiusa la paratia? Quanto vale la densità del fluido ρ_3?

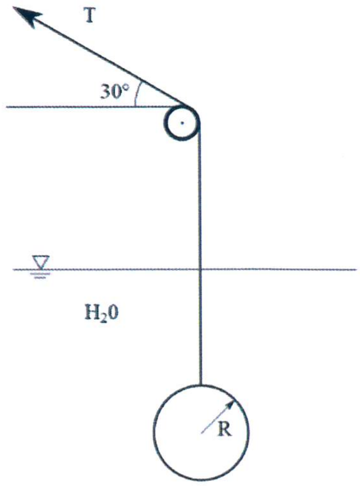
Dati: $P_{gage\ gas}$ = 10^4 Pa, ρ_1 = 800 kg/m^3, ρ_2 = 1000 kg/m^3, h_1 = 1 m, h_2 = 3 m, h_3 = 1.2 m, h_4 = 0.3 m, h_5 = 0.5 m, R = 2 m.



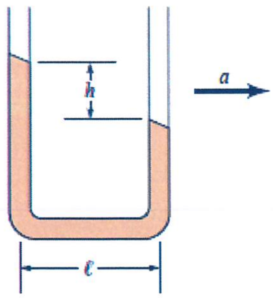
Esercizio 4. Qual è il diametro minimo di un tubicino di vetro pulito (angolo di contatto 0°) affinché la risalita capillare di acqua sia inferiore ad un millimetro? Dati: σ_s= 0.073 N/m.

Esercizio 5. Sia dato il campo di velocità in coordinate cartesiane: $\mathbf{u} = [a(x^2 + 1), 2ax, bz]$, con a e b due costanti. Tale campo corrisponde ad un moto comprimibile oppure incomprimibile? Permanente oppure no? Rotazionale oppure irrotazionale? Calcolare l'equazione della linea di corrente che passa per il punto (0, ln(a), 1). Calcolare l'equazione della traiettoria che passa per il punto (0, 0, 1) all'istante t = 0, esprimendola nella forma: $x = x(t)$, $y= y(t)$ e $z=z(t)$, con t la variabile tempo. Si dia infine l'espressione del vettore accelerazione.

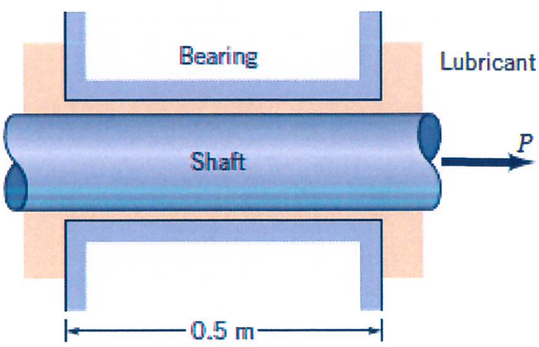
Esercizio 6. Si valuti il modulo della tensione minima T che si deve applicare sulla fune, che passa attraverso la carrucola senza attrito di figura, per poter sollevare il corpo sferico di raggio R = 0.6 m e densità ρ_{corpo} = 3000 kg/m^3, immerso in acqua. Si trascuri la forza detta di *massa aggiunta*, cioè quella forza supplementare necessaria ad accelerare anche un po' di liquido assieme alla sfera.



Esercizio 7. Il tubo ad U aperto di figura è parzialmente riempito da un liquido. Quando il tubo viene accelerato orizzontalmente con accelerazione a, una differenza di quota h si instaura nei due rami, che sono a distanza ℓ l'uno dall'altro. Si determini la relazione tra a, ℓ ed h.

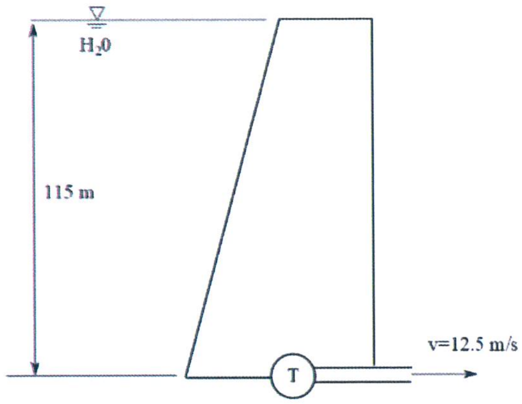


Esercizio 8. Un albero di 25 mm in diametro viene fatto passare attraverso un cuscinetto cilindrico come mostrato in figura. L'olio lubrificante che si trova nell'interstizio di 0.3 mm di spessore ha viscosità cinematica pari a 8 x 10^{-4} m^2/s e densita' relativa SG = 0.91. Si determini il modulo della forza P necessaria a tirare l'albero a velocità di 3 m/s, ipotizzando che la distribuzione della velocità dell'olio nell'interstizio sia lineare.

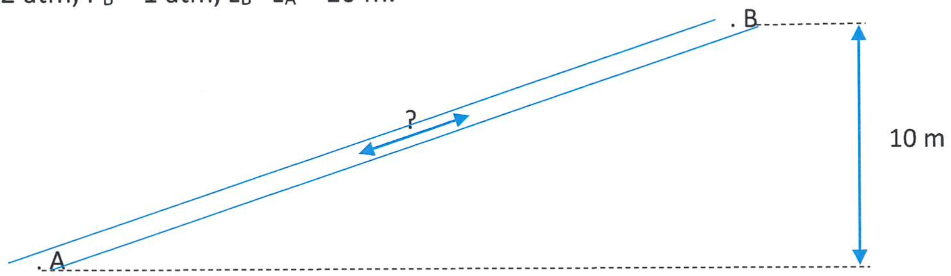


COMPITO DI MECCANICA DEI FLUIDI – 5 aprile 2018 – fila B

Esercizio 1. Una turbina alla base di una diga sfrutta un'altezza d'acqua di 115 m. La potenza in uscita dall'alternatore collegato alla turbina è 4.40 Mw e le perdite di carico nel sistema idraulico sono pari a 10 m. Il diametro della condotta all'uscita della turbina è 0.75 m e la velocità di uscita dell'acqua è 12.5 m/s. Se l'efficienza della turbina è pari a 82.40% si calcoli l'efficienza dell'alternatore.

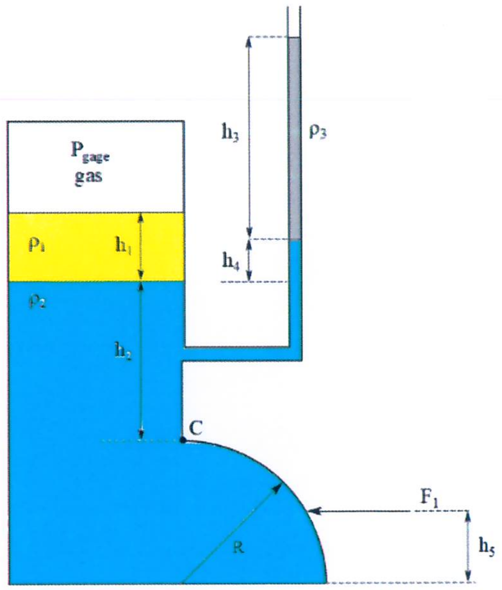


Esercizio 2. Qual è la direzione del moto dell'acqua in questo condotto? Quanto vale h_L?
Dati: P_A = 2 atm, P_B = 1 atm, $z_B - z_A$ = 10 m.



Esercizio 3. Si consideri una paratia a forma di quarto di cilindro incernierata nel punto C di figura. La profondità del sistema sia assunta unitaria. Se la forza F_1 è sufficiente a tener chiusa la paratia, quanto vale ρ_2? E quanto vale la densità del fluido ρ_3?

Dati: $P_{gage\ gas} = 10^4$ Pa, ρ_1 = 800 kg/m^3, F_1 = 152 235 N, h_1 = 1 m, h_2 = 3 m, h_3 = 1.3 m, h_4 = 0.3 m, h_5 = 0.5 m, R = 2 m.



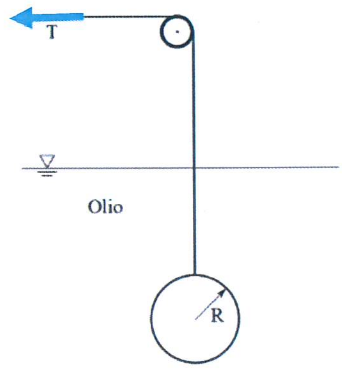
Esercizio 4. Qual è il diametro minimo di un tubicino di plastica (angolo di contatto 140°) affinché la discesa capillare di mercurio sia inferiore a 1 mm? Dato: σ_s= 0.466 N/m.

Esercizio 5. La particella emessa dall'origine degli assi cartesiani a t = 0 per un dato moto fluido ha equazione:

$$\begin{cases} x(t) = a \sin(\omega t), \\ y(t) = a\,[1 - \cos(\omega t)], \\ z(t) = b\, t, \end{cases}$$

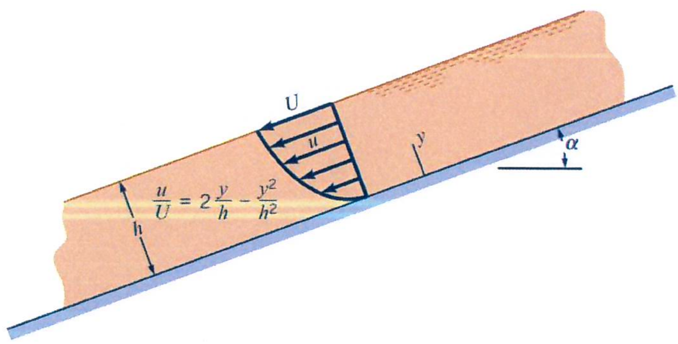
con a, b e ω costanti. Tali equazioni rappresentano la traiettoria della particella in forma lagrangiana. Si scrivano le equazioni della traiettoria in forma euleriana (cioè con x, y e z *variabili indipendenti*). Si calcolino le componenti dei campi di velocità e di accelerazione in coordinate cartesiane. Il campo di velocità trovato corrisponde ad un moto comprimibile oppure incomprimibile? Permanente oppure no? Rotazionale oppure no? Si scrivano le equazioni delle linee di corrente (ad un tempo t fissato). Tali linee coincidono con le traiettorie? Si giustifichi la risposta data. Per il caso $b = 0$, si disegni la traiettoria nel piano (x, y) evidenziando il senso di percorrenza della particella. Se la particella ha massa m, si calcoli la forza centripeta sulla particella e si disegni il vettore nella figura della traiettoria.

Esercizio 6. Si valuti la minima tensione T da applicare sulla fune che passa attraverso la carrucola (senza attrito) di figura per poter sollevare la sfera di raggio R = 0.4 m e densità $\rho_{sfera} = 3600$ kg/m^3 immersa in un bagno d'olio di densità $\rho_{olio} = 800$ kg/m^3. Si trascuri la forza detta di *massa aggiunta*, cioè quella forza supplementare necessaria ad accelerare anche un po' di liquido assieme alla sfera.



Esercizio 7. Un recipiente aperto all'estremità superiore ha la forma di un parallelepipedo, lungo 2 m e largo 1 m. Il recipiente contiene 2 m^3 di benzina. Se l'altezza delle pareti del recipiente è uguale a 1.5 m, qual è la massima accelerazione orizzontale (lungo la direzione parallela al lato più lungo del recipiente) che si può avere prima che la benzina inizi a fuoriuscire dal bordo superiore?

Esercizio 8. Un sottile strato di glicerina ($\nu = 1.19 \times 10^{-3}$ m^2/s; $\rho = 1.26 \times 10^3$ kg/m^3) scorre lungo un piano inclinato per effetto del suo peso, con una distribuzione di velocità parabolica di equazione data in figura. Per $h = 1$ cm e $\alpha = 20°$, si determini la velocità U all'interfaccia tra la glicerina e l'aria sovrastante.

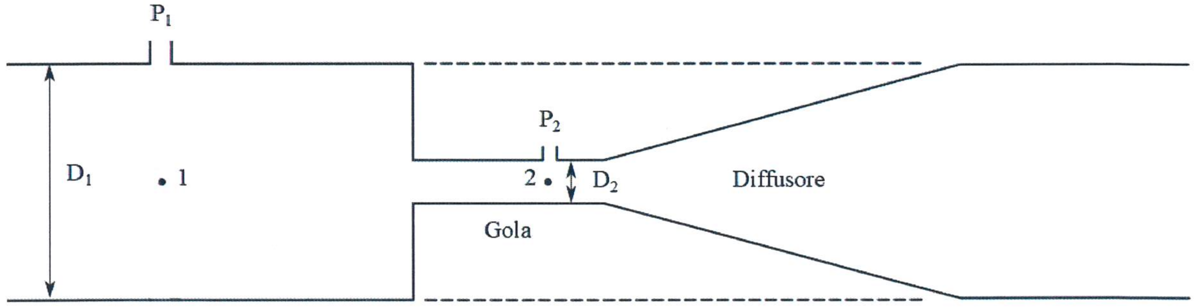


COMPITO DI MECCANICA DEI FLUIDI – 5 aprile 2018 – fila C

Esercizio 1. Il venturimetro è un dispositivo che si posiziona in un condotto per misurare la portata. Conoscendo D_1 e D_2 di figura e misurando la caduta di pressione $\Delta P = P_1 - P_2$, si trova

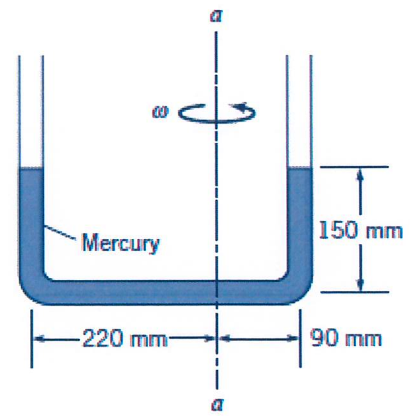
$$\dot{V} = \pi\,(D_1 D_2)^2 \sqrt{\frac{\Delta P}{8\,\rho\,(D_1^4 - D_2^4)}}\,.$$

Si mostri come si ricava questa equazione e si discuta se, in realtà, $\dot{V}$ è più grande o più piccolo del valore dato dalla relazione teorica di cui sopra. Si giustifichi la risposta data.



Esercizio 2. Sia dato il campo di moto seguente, in coordinate cartesiane, $\mathbf{u} = (ax + by,\ bx^2,\ az^2)$, con a e b costanti. Si determino tutte le componenti del vettore accelerazione $\mathbf{a}$. Si scrivano tutti i termini del tensore velocità di deformazione e di rotazione. Il moto è permanente oppure no? Comprimibile oppure no? Rotazionale oppure no? Esistono delle condizioni per le quali il moto è sempre irrotazionale? Per tali condizioni si calcoli la traiettoria di una particella emessa al tempo t = 0 dal punto di coordinate (1, 1, 1).

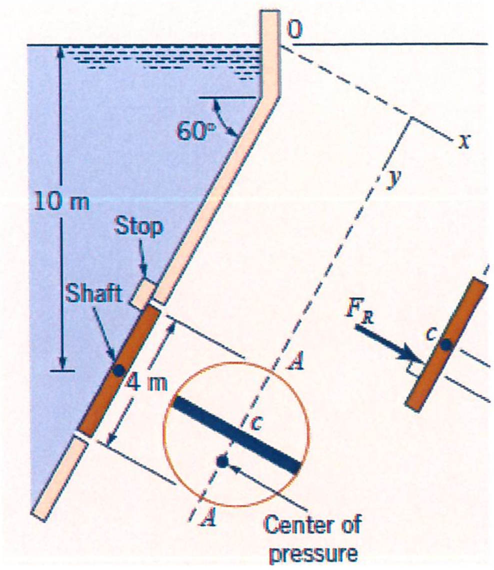
Esercizio 3. Il tubo ad U di figura contiene mercurio e ruota attorno all'asse a-a. Quando il sistema è a riposo l'altezza del mercurio in ogni braccio è pari a 150 mm. Si determini la velocità angolare di rotazione per la quale si instaura una differenza di altezza tra i due bracci del tubo pari a 75 mm.



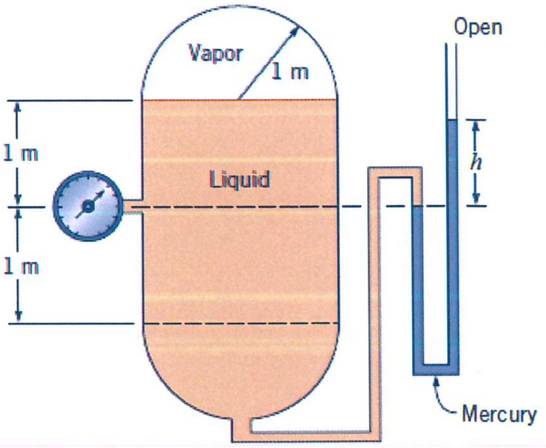
Esercizio 4. Qual è il diametro minimo di un tubicino di plastica (angolo di contatto 20°) affinché la risalita capillare di acqua sia inferiore a 2 mm? Dato: σ_s= 0.073 N/m.

Esercizio 5. Una paratia circolare di diametro 4 m si trova sulla parete inclinata di un grosso serbatoio che contiene acqua (γ = 9806 N/m^3). La paratia è montata su un albero che può ruotare lungo il diametro orizzontale, come mostrato in figura, e si trova ad una profondità di 10 m (misurata all'altezza dell'albero). Si trovino modulo, direzione e verso della spinta risultante $\boldsymbol{F_R}$ dell'acqua sulla paratia. Si calcoli la coordinata y_P del centro di spinta e il momento rispetto all'albero che la spinta idrostatica dell'acqua esercita sulla paratia.

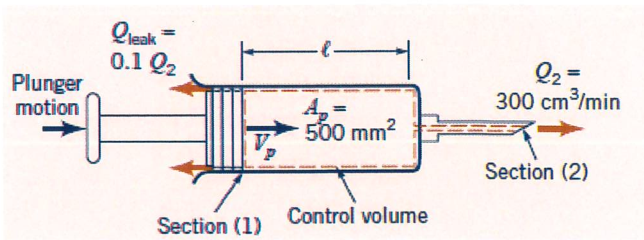
Dati: $I_{xx,C} = \pi R^4/4$ (momento d'inerzia, rispetto al baricentro, di una superficie circolare)



Esercizio 6. Il serbatoio cilindrico con chiusure semisferiche di figura contiene un liquido in equilibrio di fase con il suo vapore. La densità del liquido è 800 kg/m^3 mentre quella del vapore è trascurabile. La pressione assoluta del vapore è 120 kPa (la pressione atmosferica è 101 kPa). Si determini la pressione relativa p_{gage} letta dal manometro del recipiente (a sinistra in figura) e l'altezza h del mercurio (SG_{Hg} = 13.6).



Esercizio 7. Una siringa ha un pistone di area A_p = 500 mm^2, che viene spinto a velocità V_p per fare uscire liquido dall'ago con portata desiderata pari a Q_2 = 300 cm^3/min. Si deve tener conto anche di una perdita di liquido, dalle pareti laterali del pistone, di portata Q_{leak} = 0.1 Q_2. Quanto vale la velocità V_p?



Esercizio 8. Si immagini un fiume con un letto di forma costante e portata nota, e si posizioni una piccola girante nel letto del fiume, per estrarre potenza elettrica. A valle della girante l'acqua viene subito re-immessa nel fiume. Si disegni la linea dei carichi totali e la linea dei carichi piezometrici per un tratto di fiume che comprende la girante, e si spieghi con riferimento alla figura quale grandezza fisica dell'acqua è cambiata nell'attraversamento della girante.

5 Aprile 2018

A1. Eq. energia tra pelo libero e uscita:

$$\rho g h = \rho g h_{turbina} + \rho g h_L + \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$\rho g h_{turbina} = \rho g (h - h_L) - \frac{1}{2}\rho v^2 = 9.52 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$\dot{V} = v \cdot \frac{\pi D^2}{4} = 5.52 \ \frac{m^3}{s}$$

$$\Delta \dot{E}_{mech} = \rho g \dot{V} h_{turbina} = 5.26 \text{ MW}$$

$$\eta_{turbina} = \frac{\dot{W}_{shaft}}{\Delta \dot{E}_{mech}} = \frac{4.60}{5.26} = 87.5\ \%$$

A2. Isoterma: $p = k_1 \rho \rightarrow dp = k_1 \, d\rho$

$$\int \frac{dp}{\rho} = k_1 \int \frac{d\rho}{\rho} = k_1 \ln \rho = \frac{p}{\rho} \ln \rho$$

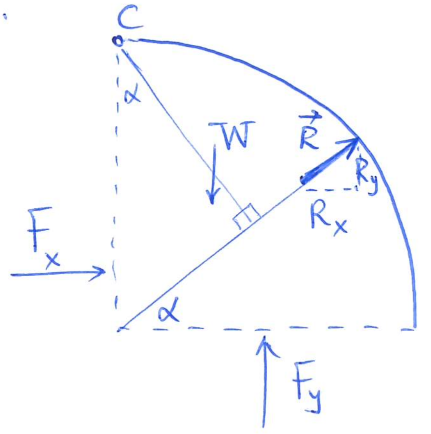
c'è poi una costante di integraz. che va a modificare la costante di Bernoulli per ogni linea di corrente

Isentropica: $p = k_2 \rho^{\gamma} \rightarrow dp = \gamma k_2 \rho^{\gamma-1} d\rho$

$$\int \frac{dp}{\rho} = k_2 \gamma \int \rho^{\gamma-2} d\rho = \frac{k_2 \gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$$

(+ costante di integrazione ...)

A3.



$$F_x = \left[p_{gage\ gas} + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g \left(h_2 + \frac{R}{2}\right) \right] R \cdot 1 = R_x$$

$$F_y = \left[p_{gage\ gas} + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g (h_2 + R) \right] R \cdot 1$$

$$W = \rho_2 R^2 \left(\frac{\pi}{4} \right) g \cdot 1 \qquad R_y = F_y - W$$

$R_x = 114176 \text{ N}$

$R_y = 102977 \text{ N}$

$|\vec{R}| = 153754 \text{ N}$

$\alpha = \text{atan}\,\frac{R_y}{R_x} = 42.05°$

Equilibrio dei momenti: $F_1 (R - h_5) = |\vec{R}|\, \underbrace{R \cos\alpha}_{1.485 \text{ m}}$

$\rightarrow F_1 = 152235 \text{ N}$

$P_{gage\,gas} + \rho_1 g h_1 - \rho_2 g h_4 - \rho_3 g h_3 = 0 \quad \rightarrow \rho_3 = 1266 \text{ kg/m}^3$

A4.

$\sigma_s \pi d = \frac{\pi d^2}{4} h \rho g \qquad d = 0.0298 \text{ m} = 29.8 \text{ mm}$

A5.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 2ax + b \neq 0$ in generale. Il moto è comprimibile.

La vel. $\vec{u}$ non dipende dal tempo: moto permanente.

$\vec{\nabla} \times \vec{u} = 2a\,\vec{k}$: il moto è rotazionale

$\frac{dx}{x^2+1} = \frac{dy}{2x} \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int dy \qquad \ln(x^2+1) = y + c_1$

la linea di corrente che passa per $x=0$ e $y = \ln a$ ha: $c_1 = -\ln a$

$\rightarrow y = \ln\left[a(x^2+1)\right]$

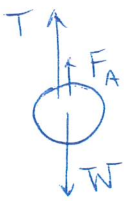
$\frac{dx}{x^2+1} = \frac{a}{b}\frac{dz}{z} \qquad \text{atan}\,x + c_2 = \frac{a}{b} \ln z$

la linea di corrente che passa per $x=0$ e $z=1$ ha: $c_2 = 0$

$\rightarrow a \ln z = b\,\text{atan}\,x$

CONTINUA PAGINA 26

A6.



$T_{min} = W - F_A = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) g \left(\rho_{boccia} - \rho_{H_2O}\right) = 17752 \text{ N}$

CONTINUAZIONE A5 :

Traiettoria che passa per (0, 0, 1) al tempo $t = 0$

$$\frac{dx}{x^2+1} = a\,dt \qquad \arctan x = at + \cancel{c_1} \qquad x = \tan(at)$$

$$\frac{dy}{2ax} = dt \quad \rightarrow \quad dy = 2a\tan(at)\,dt$$

$$y = -2\log_e|\cos at| + \cancel{c_2}$$

$$\frac{dz}{z} = b\,dt \qquad \ln z = bt + \cancel{c_3} \qquad z = e^{bt}$$

Vettore accelerazione :

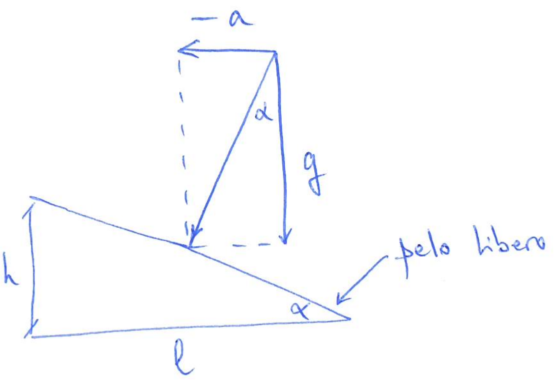
$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{v}$$

$$a_x = \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}} + w\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}} = 2a^2x(x^2+1)$$

$$a_y = \cancel{\frac{\partial v}{\partial t}} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} + w\cancel{\frac{\partial v}{\partial z}} = 2a^2(x^2+1)$$

$$a_z = \cancel{\frac{\partial w}{\partial t}} + u\cancel{\frac{\partial w}{\partial x}} + v\cancel{\frac{\partial w}{\partial y}} + w\frac{\partial w}{\partial z} = b^2 z$$

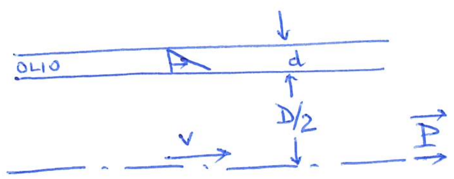
A7.



$$\alpha = \tan^{-1}\frac{a}{g} = \tan^{-1}\frac{h}{l}$$

$$\frac{a}{g} = \frac{h}{l}$$

A8.



$$\tau_w = \mu_{olio}\frac{V}{d} = 7280 \ \frac{N}{m^2}$$

$$|\vec{F}| = \tau_w \pi D L = 286 \ N$$

B1. See A1.

$\dot{W}_{elect} = 4.40$ MW $\qquad \Delta\dot{E}_{mech} = 5.26$ MW

$$\eta_{sistema} = \frac{4.40}{5.26} = 83.7\% = \eta_{turbina} \cdot \eta_{alternatore}$$

$$\rightarrow \eta_{alt} = \frac{83.7}{82.4} = 101.5\% \ !!$$

Impossibile! Il valore della potenza elettrica in uscita è sovrastimato.

B2.

Supponiamo che il moto vada da A verso B e applichiamo l'eq. dell'energia:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 + \rho g z_A = p_B + \frac{1}{2}\rho V_B^2 + \rho g z_B + \rho g h_L$$

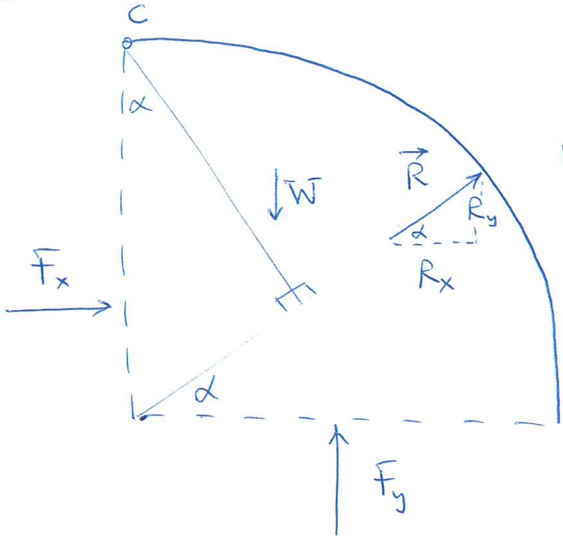
$V_A = V_B$ per l'eq. di conservazione della massa (tenendo conto che l'area della sezione del condotto non cambia)

$$\rightarrow p_A - p_B = \rho g (z_B - z_A) + \rho g h_L$$

$$101300 = 9810 \cdot 10 + 9810 \cdot h_L$$

$h_L = 0.326$ m $> 0 \rightarrow$ quindi il moto va effettivamente da A verso B.

B3.



$$F_x = \left[P_{gage\ gas} + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g \left(h_2 + \frac{R}{2} \right) \right] \cdot R \cdot 1 = R_x$$

$$F_y = \left[P_{gage\ gas} + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g \left(h_2 + R \right) \right] \cdot R \cdot 1$$

$$W = \rho_2 R^2 \cdot \frac{\pi}{4} g \cdot 1 \qquad R_y = F_y - W$$

In numerical terms (SI units):

$$R_x = 35696 + 78.48\ \rho_2$$

$$R_y = 35696 + 67.28\ \rho_2$$

$$\alpha = \operatorname{atan} \frac{R_y}{R_x}$$

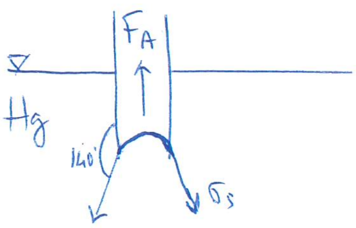
Equilibrio dei momenti : $F_1 (R - h_5) = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}\ R \cos\alpha$

$$228352.5 = 2 \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \cos\left(\operatorname{atan} \frac{R_y}{R_x} \right)$$

Questa è un'equazione non lineare per ρ_2. Se uno prova alcuni valori, si trova rapidamente che $\rho_2 = 1000$ kg/m³ soddisfa l'equazione, con $R_x = 114176$ N, $R_y = 102977$ N, $\alpha = 42°$.

$$P_{gage\ gas} + \rho_1 g h_1 - \rho_2 g h_4 = \rho_3 g h_3 \rightarrow \rho_3 = 1169\ \text{kg/m}^3$$

B4.



$$\sigma_s \pi d \cos 40° = \rho_{Hg} g h \frac{\pi d^2}{4}$$

$$d = \frac{4 \sigma_s \cos 40°}{\rho_{Hg} g h} = 0.0107\ \text{m} = 10.7\ \text{mm}$$

B5.

Traiettoria (lagrangiana) di una particella rilasciata dal punto $(0,0,0)$ all'istante $t=0$:

$$x(t) = a \sin(\omega t)$$
$$y(t) = a(1-\cos(\omega t))$$
$$z(t) = b\,t$$

$$\frac{x^2}{a^2} = \sin^2(\omega t)$$
$$\frac{(y-a)^2}{a^2} = \cos^2(\omega t)$$

$$\mapsto \begin{cases} x^2 + (y-a)^2 = a^2 \\ z = \frac{b}{\omega}\, \operatorname{atan}\left(\frac{x}{a-y}\right) \end{cases}$$

eq. in forma euleriana con x, y, z variabili indipendenti

$$\dot{x} = a\omega \cos(\omega t) \quad \rightarrow \quad u = \omega(a-y)$$
$$\dot{y} = a\omega \sin(\omega t) \quad \rightarrow \quad v = \omega x$$
$$\dot{z} = b \quad \rightarrow \quad w = b$$

$$\ddot{x} = -a\omega^2 \sin(\omega t) \quad \rightarrow \quad a_x = -\omega^2 x$$
$$\ddot{y} = a\omega^2 \cos(\omega t) \quad \rightarrow \quad a_y = \omega^2(a-y)$$
$$\ddot{z} = 0 \quad \rightarrow \quad a_z = 0$$

campi di velocità e accelerazione

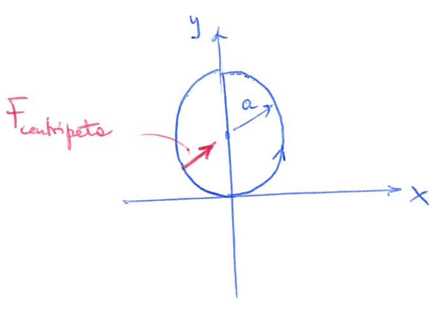
Il campo di velocità è incomprimibile perché $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ ed è permanente. Si ha $\vec{\nabla}\times\vec{u} = 2\omega\vec{k}$ $\rightarrow$ il moto è rotazionale

Linee di corrente:

$$\frac{dx}{\omega(a-y)} = \frac{dy}{\omega x} \quad \rightarrow \quad \int x\,dx = \int a-y\;dy$$

$$\frac{x^2}{2} = ay - \frac{y^2}{2} + \cancel{c_1} \Rightarrow 0$$

perché traiettoria = linea di corrente passa per $x=0$, $y=0$



$$\rightarrow \quad x^2 + (y-a)^2 = a^2 \qquad \text{(vedi sopra!)}$$

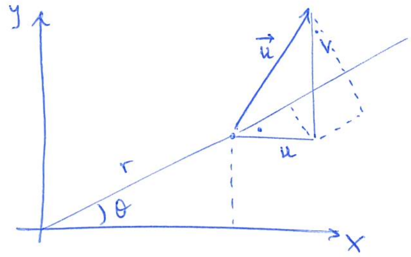
$$\frac{dx}{\omega(a-y)} = \frac{dz}{b} \qquad \text{con} \qquad a-y = \sqrt{a^2-x^2}$$

$$\frac{b}{\omega}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int dz \quad\rightarrow\quad z=-\frac{b}{\omega}\,\mathrm{atan}\left(\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{x^2-a^2}\right)+\underbrace{c_3}_{=0}$$

$=0$ perché passa per $x=0$ e $z=0$.

$$z=\frac{b}{\omega}\,\mathrm{atan}\,\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad \text{(vedi sopra !)}$$

La coincidenza con la traiettoria è legata al fatto che il moto è permanente.
Se $b=0 \rightarrow z=0$ e la traiettoria è il cerchio di raggio "a" e centro in $(x,y)=(0,a)$, percorsa in senso antiorario.

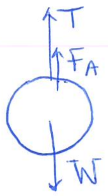


$$u_\theta = v\cos\theta - u\sin\theta$$
$$= \omega x\cos\theta + \omega(y-a)\sin\theta$$
$$= \omega r\cos^2\theta + \omega r\sin^2\theta - \omega a\sin\theta$$

$$F_{centripeta} = m\frac{u_\theta^2}{r} = m\,\omega^2\left(r - 2a\sin\theta + \frac{a^2}{r}\sin^2\theta\right)$$

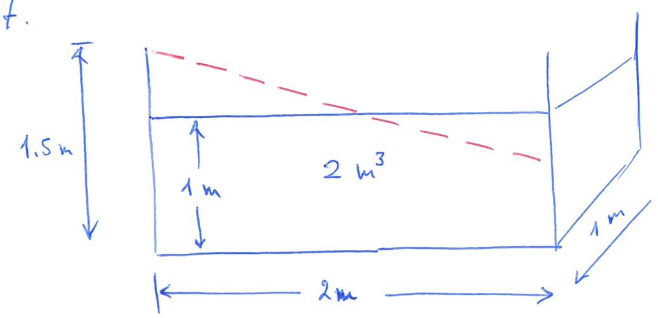
$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

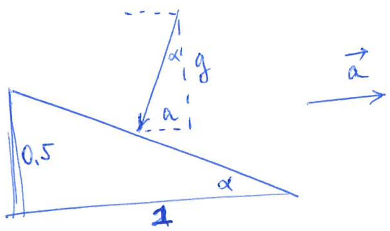
B6.



$$T = W - F_A = \frac{4}{3}\pi R^3 g\left(\rho_{boccia} - \rho_{olio}\right) = 7364 \text{ N}$$

B7.

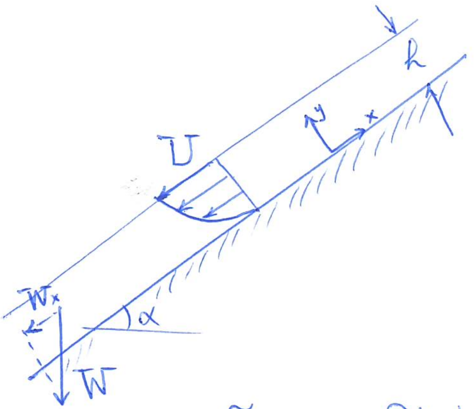




$$\frac{a}{g}=\frac{0.5}{1} \qquad a = 0.5\,g = 4.90\ \frac{m}{s^2}$$

Per $a > 4.90\ \frac{m}{s^2}$ il fluido può fuoriuscire dal bordo.
(oppure $a < -4.90\ \frac{m}{s^2}$)

B8.



$$u = U\left(2\frac{y}{h} - \frac{y^2}{h^2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U\left(\frac{2}{h} - \frac{2y}{h^2}\right) \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{2U}{h}$$

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{2\mu U}{h}$$

$$W_x = W \sin\alpha = \rho g\, LPh \sin\alpha$$

$F_x = \tau_w LP$ (forza di attrito – frenante – in $y=0$)

$$\rightarrow \quad \rho g h \sin\alpha = 2\frac{\mu U}{h} \quad \longrightarrow \quad U = \frac{\rho g h^2 \sin\alpha}{2\mu} = \frac{g h^2 \sin\alpha}{2\nu} = 0.141\ \frac{m}{s}$$

C1. Bernoulli tra 1 e 2:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{1}{2}\rho\left(V_2^2 - V_1^2\right)$$

Conservazione della massa: $V_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = V_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \rightarrow V_1 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 V_2$

$$\rightarrow \quad \Delta p = \frac{1}{2}\rho\left[V_2^2\left(1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right)\right] = \frac{1}{2}\rho V_2^2\left[\frac{D_1^4 - D_2^4}{D_1^4}\right]$$

$$V_2 = D_1^2\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho\left(D_1^4 - D_2^4\right)}} \qquad \dot{V} = V_2 \frac{\pi D_2^2}{4} = \pi\left(D_1 D_2\right)^2\sqrt{\frac{\Delta P}{8\rho\left(D_1^4 - D_2^4\right)}}$$

C2.

$$\begin{cases} u = ax + by \\ v = bx^2 \\ w = az^2 \end{cases} \qquad \vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{u}}{\partial z}$$

$$\rightarrow a_x = u(a) + bx^2(b) = a^2x + b^2x^2 + aby$$

$$a_y = (ax+by)(2bx) = 2abx^2 + 2b^2xy$$

$$a_z = az^2(2az) = 2a^2z^3$$

Tensore velocità di deformazione e rotazione:

$$\vec{\nabla}\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2bx & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2az \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla}\vec{u}^T = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 2bx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2az \end{pmatrix}$$

$$\vec{\vec{S}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{\nabla}\vec{u}^T\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a & b(2x+1) & 0 \\ b(2x+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4az \end{pmatrix}$$

$$\vec{\vec{\Omega}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\vec{u} - \vec{\nabla}\vec{u}^T\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & b(2x-1) & 0 \\ b(1-2x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

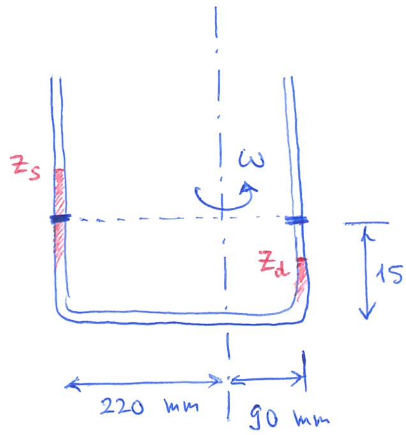
Il moto è permanente, comprimibile ($\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = a + 2az \neq 0$ in generale) e rotazionale ($\vec{\zeta} = \vec{\nabla}\times\vec{u} = \vec{k}\, b\,(2x-1)$).

Il moto è sempre irrotazionale per $b \equiv 0 \rightarrow \begin{cases} u = ax \\ v = 0 \\ w = az^2 \end{cases}$

La traiettoria nelle condizioni di moto irrotazionale ($b=0$) è solo su un piano $y = \text{cost}$ (perché $v=0$). Se a $t=0$ la particella è in $(1,1,1)$ si ha:

$$\frac{dx}{x} = a\,dt \Rightarrow \boxed{x(t) = e^{at}} \; ; \; \boxed{y=1} \; ; \; \frac{dz}{z^2} = a\,dt \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{1-at}}$$

C3.



$$dp = 0 \rightarrow \frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

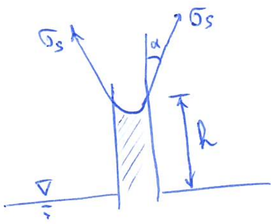
$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + A$$

$$z_d = \frac{\omega^2 r_d^2}{2g} + A \qquad z_s = \frac{\omega^2 r_s^2}{2g} + A$$

$$z_s - z_d = \Delta z = \frac{\omega^2}{2g}(r_s^2 - r_d^2)$$

$$\rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2g\,\Delta z}{r_s^2 - r_d^2}} = 0.00604 \ \frac{rad}{s}$$

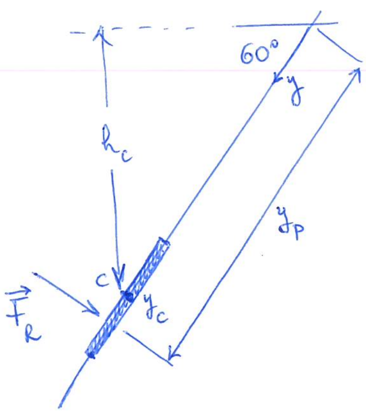
C4.



$$\sigma_s \pi d \cos\alpha = \frac{\pi d^2}{4} h \rho g$$

$$d = \frac{4\sigma_s \cos\alpha}{\rho g h} = 0.014 \text{ m} = 14 \text{ mm}$$

C5.



$$F_R = p_c A = \rho g h_c \pi R^2 = 9806 \times 10 \times \pi \times 4 = 1.23 \times 10^6 \text{ N}$$

direzione e verso come in figura

$$y_p = y_c + \frac{I_{xx,c}}{y_c A} = \frac{h_c}{\sin 60°} + \frac{\sin 60° \ \pi R^4}{(\pi R^2) h_c 4}$$

$$= \frac{h_c}{\sin 60°} + \underbrace{\frac{R^2}{4h_c}\sin 60°}_{0.0866 \text{ m}} = 11.634 \text{ m}$$

Il momento rispetto a C è:

$$M = F_R\, b = 1.23 \times 10^6 \text{ N} \times 0.0866 \text{ m} = 106714 \text{ N m}$$

C6. $p_{gage\ manometer} = p_{gage\ vapor} + \rho_{liquid}\, g\, h_1$ con $h_1 = 1\ m$

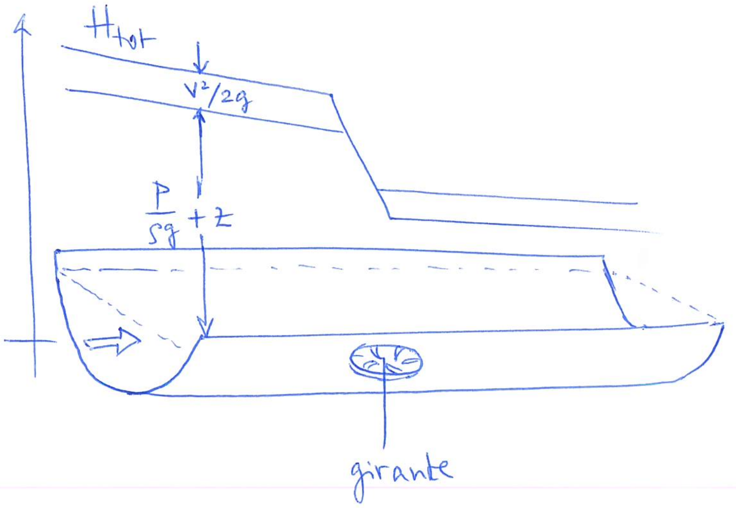
$= 26{,}8\ kPa$

$p_{gage\ vapor} + \rho_{liquid}\, g\, h_1 - \rho_{Hg}\, g\, h = 0 \rightarrow h = 0{,}20\ m = 20\ cm$

C7. Il volume di controllo si riduce di $V_p A$ cosicché:

$$V_p A = Q_2 + Q_{leak} \rightarrow V_p = \frac{330 \times \frac{10^{-6}}{60}}{500 \times 10^{-6}} = 0{,}011\ \frac{m}{s} = 1{,}1\ \frac{cm}{s}$$

C8.



La differenza tra carico totale e carico piezometrico è $V^2/2g$ ed è costante (perché ho stessa portata e sezione a monte e a valle). La quota z è sempre la stessa.

La girante assorbe energia di pressione e, nell'attraversamento, è la pressione dell'acqua che si riduce. Notare che le curve, prima e dopo, non sono orizzontali per via delle perdite distribuite (attrito tra l'acqua e il letto del fiume).