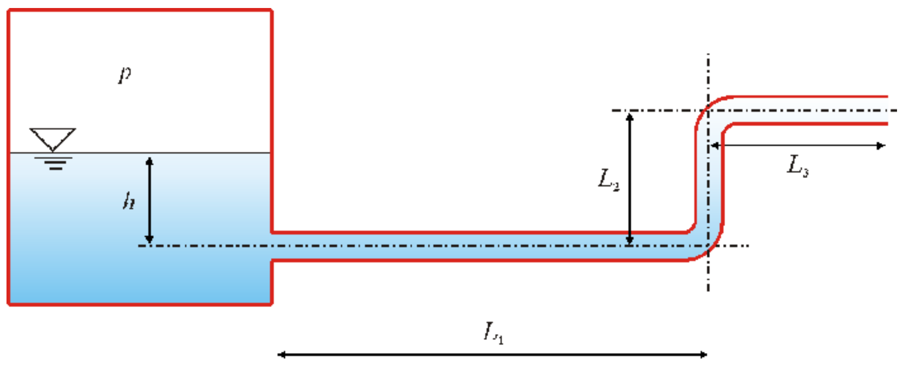
COMPITO DI MECCANICA DEI FLUIDI – 7 giugno 2017 – fila A

Esercizio 1: ANALISI DIMENSIONALE E SIMILITUDINE (4 punti). Si consideri un modello di sottomarino in scala 1:20. Il prototipo opera in mare ad una temperatura di circa 0.5 °C (ρ = 1028 kg/m^3, μ = 1.88 x 10^{-3} Pa s) e la sua velocità di crociera deve raggiungere i 5 m/s. Il modello viene testato in una vasca navale in acqua a 20 °C (ρ = 998 kg/m^3, μ = 10^{-3} Pa s). A che velocità si deve operare il modello per soddisfare il principio di similitudine dinamica? Quanto vale τ, rapporto tra le scale di tempo di modello e prototipo? Quanto è la potenza minima che deve essere fornita al prototipo di sottomarino per operare alla velocità di crociera richiesta, se in vasca la resistenza misurata sul modello è pari a 208 N?

Esercizio 2: CONDOTTE IN PRESSIONE (6 punti). Nel sistema di figura il recipiente è in pressione (la pressione assoluta è p = 1.0832 x 10^6 Pa) e la condotta è in acciaio inossidabile (scabrezza ε = 0.02 mm). Quanto deve valere il diametro affinché la portata sia $\dot{V}$ = 0.2 m^3/s? Si richiede una precisione di almeno un centimetro.

Dati: h = 100 m, L_1 = 500 m, L_2 = 150 m e L_3 = 200 m; i coefficienti di perdita di carico concentrati valgono $K_{L\ imbocco}$ = 0.5 e $K_{L\ curva}$ = 0.3; il fluido è acqua (γ = 9800 N/m^3 e ν = 10^{-6} m^2/s).



Esercizio 3: MOTI POTENZIALI BIDIMENSIONALI (7 punti). Si consideri un moto incomprimibile, irrotazionale e piano descritto dal potenziale di velocità

$$\phi = U\,[x + h\,e^{-2\pi y/l}\sin(2\,\pi\,x/l)],$$

con U, h e l delle costanti e h/l « 1. Si dimostri che tale potenziale di velocità è accettabile e si trovi la funzione di corrente ψ corrispondente. Si mostri che il potenziale dato descrive il moto sulla parete lievemente ondulata di equazione approssimata

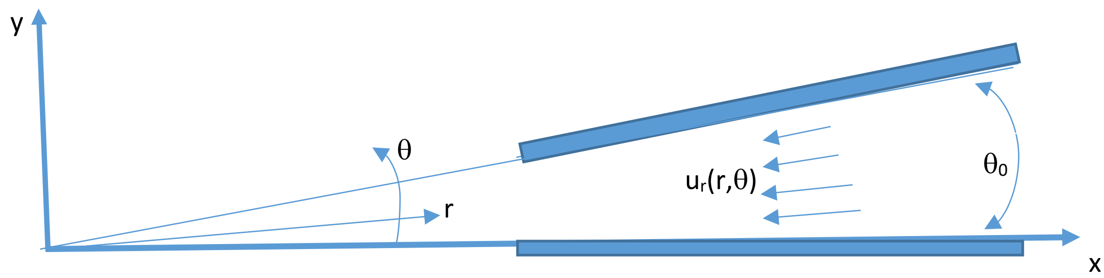
$$y \cong h\cos(2\,\pi\,x/l).$$

Si valuti infine il coefficiente di pressione nell'origine (0, 0) degli assi cartesiani.

Esercizio 4: RESISTENZA DI UN CILINDRO E DI UNA LASTRA (4 punti). Si vuole valutare comparativamente la resistenza prodotta da un lungo cilindro (posto trasversalmente alla corrente) e quella di una lastra piana di uguale area superficiale (posta parallelamente alla corrente). Il cilindro ha diametro D = 0.06 m, e la lastra è lunga $\pi D/2$ nella direzione della corrente. Per entrambi i casi si assuma una lunghezza trasversale unitaria; con i dati forniti, quindi, la superficie totale in contatto con l'aria vale 0.1885 m^2 in ambedue i casi considerati. Si prenda la velocità della corrente esterna di acqua ($\rho = 10^3$ kg/m^3, $\mu = 10^{-3}$ Pa s) pari a 1 m/s. Per il cilindro si ha $c_D = 0.445$ (nell'intervallo 750 < Re < 2 x 10^5); per il fluido che lambisce la lastra piana la soluzione laminare di Blasius fornisce $c_{f\,L} = 1.328\ Re_L^{-1/2}$, mentre in moto turbolento vale l'approssimazione $c_{f\,L} \cong 0.032\ Re_L^{-1/7}$. Cosa possiamo concludere riguardo resistenza di attrito e di pressione nei due casi?

Esercizio 5: APPLICAZIONE DEL PRINCIPIO DELLA QUANTITA' DI MOTO (7 punti). Il flusso nel canale bidimensionale convergente di figura, di apertura angolare θ_0, si può trattare come un moto puramente radiale con $u_r = u_r(r, \theta)$, nell'ipotesi di moto incomprimibile e stazionario. E' semplice mostrare che la velocità può essere espressa come $u_r = F(\theta)/r$ (come?) Si consideri adesso il moto come se fosse un moto di Stokes e si scrivano le componenti delle equazioni di quantità di moto lungo r e lungo θ. Derivando la seconda equazione una volta rispetto a θ e combinando le due equazioni, si osserva che si può eliminare la dipendenza dalla funzione F e si arriva ad un'unica equazione per la pressione della forma:

$$2\,r\,\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2}.$$



Quali sono delle condizioni al contorno adeguate per la pressione? Si giustifichi la risposta data.

Domanda supplementare (**4 punti addizionali**): se si conosce la tecnica di separazione delle variabili, si scriva p come il prodotto di due funzioni $p(r, \theta) = R(r)\,\Theta(\theta)$ e si integri l'equazione per la pressione fino ad arrivare ad un problema agli autovalori, che si può risolvere usando le condizioni al contorno .

Esercizio 6: STRATO LIMITE (5 punti). La distribuzione della componente longitudinale della velocità per lo strato limite che si sviluppa su una lastra piana lambita da una corrente incomprimibile U_∞, posta in y = 0, può essere approssimato da:

$$\begin{cases} u = U_\infty \sin\{\pi\, y/(2\,\delta(x))\} & \text{per } 0 < y \le \delta(x) \\ u = U_\infty & \text{per } y \ge \delta(x) \end{cases}$$

Che cosa rappresenta $\delta(x)$? Si calcolino lo spessore di spostamento e lo spessore di quantità di moto. Quanto vale τ_w? Si calcoli $c_{f,x}$ (coefficiente di attrito locale) e si compari con il caso dello strato limite di Blasius per il quale si ha $c_{f,x} = 3.3\ Re_\delta^{-1}$, con $Re_\delta = U_\infty\,\delta_{99}/\nu$.

(i punteggi di ciascun esercizio sono indicativi)

COMPITO DI MECCANICA DEI FLUIDI – 7 giugno 2017 – fila B

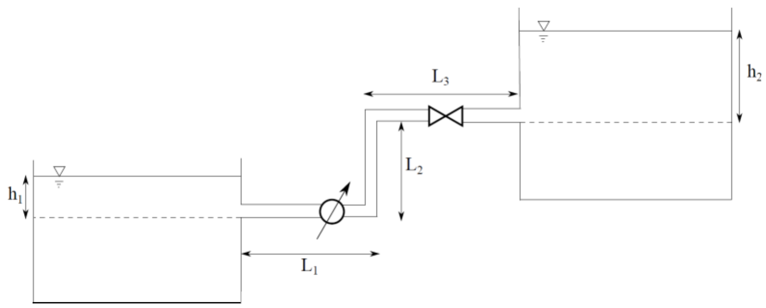
Esercizio 1: ANALISI DIMENSIONALE E SIMILITUDINE (7 punti). Quando si formano, le gocce liquide non sono inizialmente di forma sferica e oscillano nel tempo prima di assestarsi sulla forma finale. In assenza di gravità tale forma finale è sferica. Ci interessa stimare il periodo T delle oscillazioni di una goccia sulla base di un'analisi dimensionale.

1. Si assuma che T dipenda solo dalla tensione di superficie, dalla differenza tra la densità del liquido e quella dell'aria circostante, e da una dimensione lineare R (il raggio di una sfera di volume pari al volume iniziale di liquido). Che cosa si può concludere dall'analisi dimensionale?
2. Quanto valgono le scale di tempo, di velocità e di accelerazione per questo fenomeno, assumendo che il liquido sia inchiostro (ρ = 950 kg/m^3, σ_s = 0.065 N/m) e che R = 3 mm? Che cosa si può dedurre dall'analisi dell'ordine di grandezza della scala di tempo?
   Nota: la densità dell'aria vale 1.25 kg/m^3.
3. Supponiamo ora che le oscillazioni siano anche influenzate dalla gravità. Si scriva la relazione formale tra numeri adimensionali in questo caso e si provi a stimare il valore di R sotto il quale la gravità non dovrebbe giocare alcun ruolo.
4. Si immagini ora che anche la viscosità del liquido abbia un ruolo, e si costruisca un numero adimensionale per μ a partire dalle grandezze fondamentali usate al punto 1. Si stimi tale numero adimensionale e si concluda circa l'influenza o meno delle forze viscose per un sistema con $\mu = 10^{-3}$ Pa s e R = 3 mm.

Esercizio 2: CONDOTTE IN PRESSIONE (6 punti)
Nell'impianto di figura i due serbatoi sono collegati da una condotta in plastica (scabrezza ε trascurabile). Si assuma che il coefficiente di perdita di carico nella valvola sia $K_L = (\eta^{-1} - 1)^2$, con η il grado di apertura della valvola.

1. Calcolare il diametro della condotta quando, a valvola aperta (η = 1), si vuole raggiungere una portata pari a $\dot{V}$ = 0.07 m^3/s. Si richiede una precisione di almeno un centimetro.
2. Con il diametro calcolato al punto precedente, si calcoli la chiusura della valvola (si fornisca, cioè, il valore di η) di modo da ridurre la portata a 0.04 m^3/s.

Dati: L_1 = 100 m, L_2 = 75 m, L_3 = 500 m, h_1 = 50 m, h_2 = 75 m, $\nu = 10^{-6}$ m^2/s, $\rho = 10^3$ kg/m^3, $K_{L\ imbocco}$ = 0.5, $K_{L\ sbocco}$ = 0.3, $K_{L\ gomito}$ = 0.3, prevalenza della pompa: $h_{pump,u}$ = 120 m.

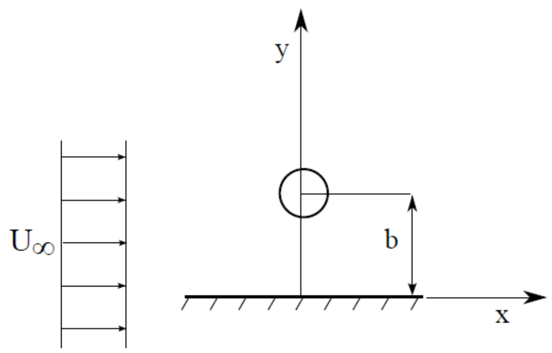


Esercizio 3: LINEE DI CORRENTE E LINEE EQUIPOTENZIALI (4 punti). Per il campo di velocità incomprimibile e bidimensionale espresso da

$$\begin{cases} u = a\,(x^2 - y^2) \\ v = -2\,a\,xy \end{cases}$$

si calcoli la funzione di corrente ψ e – se esiste – la funzione potenziale di velocità ϕ (si spieghi perché ϕ dovrebbe esistere) e si faccia uno schizzo delle linee corrispondenti.

Esercizio 4: MOTI POTENZIALI BIDIMENSIONALI (7 punti). Si vuole modellare il moto attorno ad un cilindro posto in prossimità di una lastra piana tramite la teoria potenziale, sovrapponendo un moto uniforme ed una doppietta di intensità κ posta a distanza fissa b dalla lastra (si veda la figura). Per rendere la presenza della lastra si usa il metodo delle immagini. Si scriva la funzione di corrente ψ per questo moto e si calcoli la pressione sulla lastra.



Esercizio 5: RESISTENZA DI UN DISCO (3 punti). Si consideri un disco circolare di spessore molto piccolo investito da una corrente d'aria in moto uniforme che scorre perpendicolarmente al disco stesso. In questo caso valgono le correlazioni:

$$\begin{cases} c_D = 64\,\pi^{-1}\,Re^{-1}\,(1 + 0.138\,Re^{0.792}) & \text{per } Re < 133 \\ c_D = 1.17 & \text{per } Re > 133 \end{cases}$$

Il numero di Reynolds è basato sul diametro D del disco, e si ha D = 1 cm. Quando il disco si trova in aria (ρ = 1.25 kg/m^3, ν = 1.06 x 10^{-5} m^2/s), quanto vale la forza resistente F_D se la velocità vale 0.01 m/s oppure 1 m/s? Si valuti la resistenza alle stesse due velocità quando il disco è in acqua (ρ = 10^3 kg/m^3, ν = 10^{-6} m^2/s).

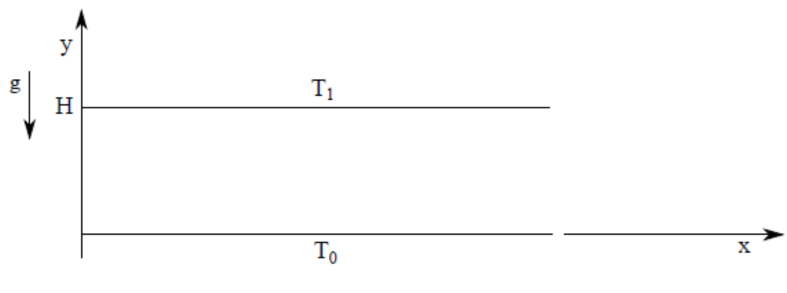
Esercizio 6: MOTO INCOMPRIMIBILE CON VISCOSITA' VARIABILE (6 punti)

Si consideri il moto incomprimibile, stazionario e completamente sviluppato di un fluido nel canale piano bidimensionale di figura. Un gradiente di temperatura nel canale è presente, di modo che $T(y) = T_0 + (T_1 - T_0)\, y/H$, con T_0 la temperatura della lastra inferiore e T_1 la temperatura della lastra superiore. Tale gradiente di temperatura è capace di modificare in modo apprezzabile la viscosità del fluido, secondo la legge $\mu = \mu_0 \exp[-\alpha(T - T_0)]$, con α una costante positiva. La viscosità vale μ_0 quando $T = T_0$ e, come succede tipicamente per i liquidi, μ diminuisce con il crescere della temperatura.

1. Si mostri che, dall'equazione di continuità, si trova che la componente verticale v della velocità **u** è identicamente nulla.
2. Per un fluido newtoniano, l'equazione di Cauchy, usando la notazione con gli indici, si scrive:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right].$$

Partendo da questa equazione, si calcoli la distribuzione della componente di velocità u nel canale, assumendo che il moto sia generato da un gradiente di pressione imposto (e costante) lungo x. Si lascino indicate le costanti di integrazione e si specifichino le condizioni al contorno necessarie per determinarle, senza svolgere i calcoli.



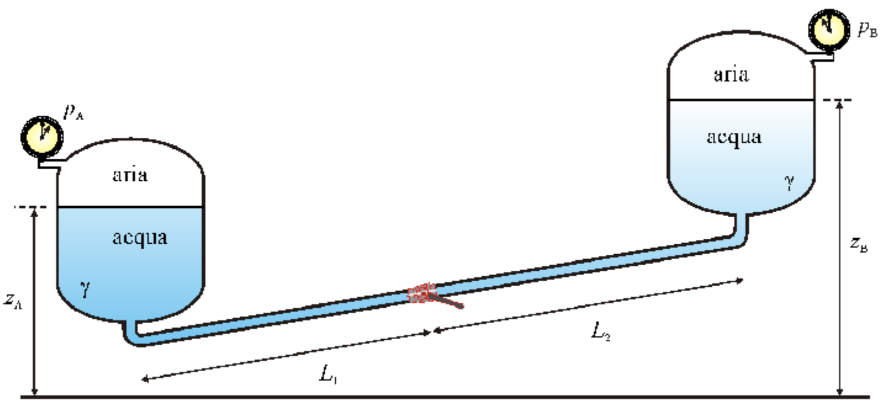
(i punteggi di ciascun esercizio sono indicativi)

COMPITO DI MECCANICA DEI FLUIDI – 7 giugno 2017 – fila C

Esercizio 1: ANALISI DIMENSIONALE E SIMILITUDINE (4 punti). Un modello di aereo in scala 1:10 viene testato in una galleria del vento pressurizzata ($p = 20$ atm) a $T = 0$ °C. Il prototipo deve volare alla velocità di 500 km/h in un ambiente a pressione atmosferica e $T = 0$ °C. A quale velocità si deve operare la galleria del vento per avere similitudine parziale di Reynolds tra modello e prototipo? Per rispondere si consideri che l'aria può essere considerata un gas perfetto, e che la viscosità dinamica dell'aria varia in modo trascurabile con la pressione. Se la resistenza misurata nel modello è pari a 337.5 N, quanto sarà la potenza minima necessaria per far muovere il prototipo a 500 km/h?

Esercizio 2: CONDOTTE IN PRESSIONE (6 punti)

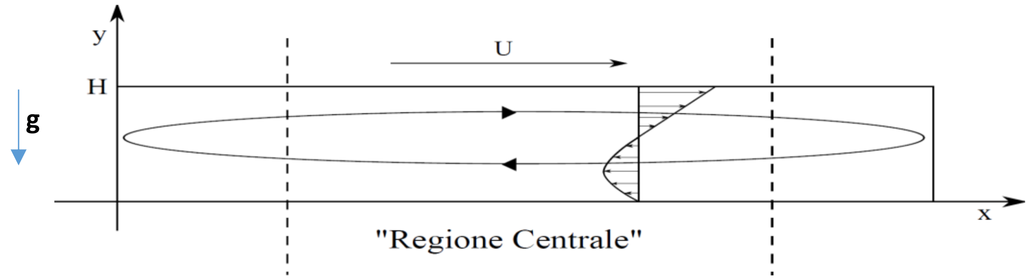
Nell'impianto di figura i due serbatoi sono pressurizzati e collegati da una condotta in acciaio inox ($\varepsilon = 0.02$ mm). Le pressioni relative lette dai manometri sono $p_A = 17$ bar, $p_B = 10$ bar, e le quote sono $z_A = 35$ m, $z_B = 50$ m. Una saracinesca separa la condotta in due tronchi di lunghezza $L_1 = 40$ m e $L_2 = 38$ m. Si assuma che il coefficiente di perdita di carico nella saracinesca sia $K_L = (\eta^{-1} - 1)^2$, con η il grado di apertura della saracinesca. Si assuma inoltre che $K_{L\,imbocco} = 0.4$, $K_{L\,sbocco} = 1.2$, $K_{L\,curva} = 0.3$, e che il fluido sia acqua ($\gamma = 9800$ N/m^3, $\nu = 10^{-6}$ m^2/s). Calcolare il diametro della condotta con una precisione del centimetro, tale da assicurare una portata di 11 l/s con saracinesca parzialmente aperta ($\eta = 0.2$).



Esercizio 3: APPLICAZIONE DELLE EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES (9 punti). Si consideri il moto bidimensionale, incomprimibile e stazionario che si genera in una cavità rettangolare molto lunga. Il moto del fluido è prodotto dal movimento a velocità costante U della parete orizzontale superiore. Si è interessati a studiare il moto in una regione, denominata "regione centrale", sufficientemente lontana dai bordi laterali della cavità; in tale zona la distribuzione di velocità può essere considerata, con buona approssimazione, come completamente sviluppata.

1. Quanto vale la componente verticale, v, del vettore velocità **u**?
2. Risolvendo le equazioni di Navier-Stokes si mostri che nella "regione centrale" si ha:

$$u(y) = 3U\,(y/H)^2 - 2U\,(y/H) \qquad \text{e} \qquad p(x, y) = 6\,\mu\,U\,x / H^2 - \rho\,g\,y + \text{costante}$$



Esercizio 4: MOTI POTENZIALI BIDIMENSIONALI (5 punti). Si consideri un vortice antiorario di circolazione Γ centrato in (a, b) ed un pozzo di portata -$\dot{V}$/L centrato nell'origine degli assi. Si determini il campo di pressione nel punto di coordinate (2a, -2b).

Esercizio 5: MOTI DI STOKES (5 punti). Si calcoli la velocità terminale di caduta di una sferetta immersa in un olio viscoso (μ = 0.1 Pa s, ρ = 600 kg/m^3) usando – se si può – l'approssimazione di Oseen:

$$c_D = \frac{24}{Re}\left(1 + \frac{3}{16}Re\right)$$

accettabile per Re inferiore a 10. Si assuma che la sferetta abbia un diametro di 1 cm e massa di 0.52 g.

Esercizio 6: MOTO INCOMPRIMIBILE (4 punti). Il moto incomprimibile di un fluido reale di viscosità dinamica μ presenta il campo di velocità seguente:

$$\begin{cases} u = a\,(x^2 - y^2) \\ v = \text{incognita} \\ w = b \end{cases}$$

con a e b costanti note. Quale deve essere la forma generale della componente v del vettore velocità? Si consideri ora il seguente campo di velocità:

$$\begin{cases} u = a\,(x^2 - y^2) \\ v = -2\,a\,xy \\ w = 0. \end{cases}$$

Tale moto è rotazionale oppure no? Determinare il campo di pressione che corrisponde a questo campo di velocità, utilizzando le equazioni di Navier-Stokes, con l'accelerazione di gravità parallela all'asse y e con verso opposto a quello di y. Si verifichi infine se risulta soddisfatta l'equazione di Bernoulli e si commenti se tale risultato è accettabile oppure no.

(i punteggi di ciascun esercizio sono indicativi)