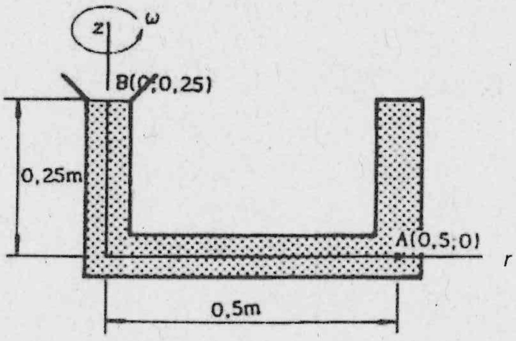
Compito di Meccanica dei Fluidi, 18 aprile 2023 **Fila A**

1 foglio aiuti permesso COGNOME, NOME, MATRICOLA: ____________________

Es. 1. Il tubo ad U di figura è pieno d'acqua ed è aperto alle due estremità. Qual è la pressione relativa nel punto A, di coordinate (0.5 m; 0 m) nel sistema (*r*, *z*) di figura, quando il tubo viene messo in rotazione attorno all'asse *z*? Si fornisca il risultato per le due velocità di rotazione $\dot{n}$ = 30 rpm (rpm = giri al minuto) e $\dot{n}$ = 300 rpm.

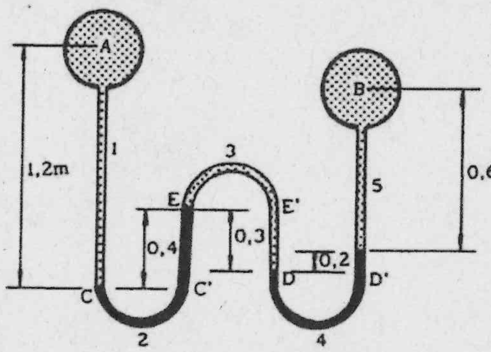


$$p_A - p_B = \rho \frac{\omega^2}{2}\left(r_A^2 - r_B^2\right) - \rho g \left(z_A - z_B\right)$$

$$p_{gage\,A} = 1000 \frac{\left(2\pi \dot{n}/60\right)^2}{2}\, 0.5^2 + 9810 \times 0.25 = 125\left(\frac{\pi \dot{n}}{30}\right)^2 + 2452.5$$

Se $\dot{n} = 30$ rpm $\longrightarrow$ $p_{gage\,A} = 3686$ Pa $= 0.037$ bar

Se $\dot{n} = 300$ rpm $\longrightarrow$ $p_{gage\,A} = 125823$ Pa $= 1.26$ bar



Es. 2. Sapendo che la pressione in A è di 1.2 bar, si determini la pressione in B (in Pascal).

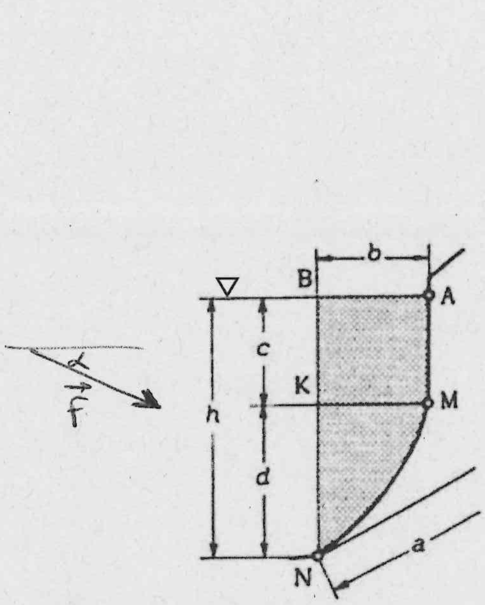
Dati: $SG_1 = 1$, $SG_2 = 13.6$, $SG_3 = 1.2$, $SG_4 = 1.6$, $SG_5 = 0.8$.

$$p_C = p_A + 1.2\,\gamma_1$$
$$p_E = p_C - 0.4\,\gamma_2$$
$$p_D = p_E + 0.3\,\gamma_3$$
$$p_B = p_D - 0.2\,\gamma_4 - 0.6\,\gamma_5$$

$\rightarrow$ sommando membro a membro:

$$p_B = 74089 \text{ Pa}$$

Es. 3. La paratia AMN, di profondità a = 2.5 m, trattiene dell'acqua. Le dimensioni della sezione sono le seguenti: area MNK = 1.7 m², b = 1.2 m, c = 1.5 m, d = 1.8 m. Calcolare la forza esercitata dall'acqua sulla parete AMN e l'angolo che tale forza forma con l'orizzontale.



Sulla "parete" verticale alta h: $F_H = \gamma \frac{h}{2}(ah) = 9810 \times \frac{3.3}{2} \times 2.5 \times 3.3 = 133539\ N$

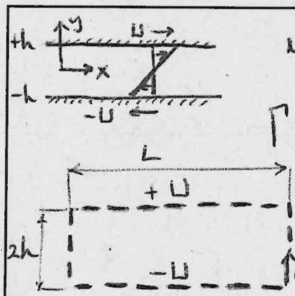
Sul volume di controllo "grigio" la forza verticale è:

$$F_V = \gamma\, a\, (\text{area AMNB}) = 9810 \times 2.5 \times (1.2 \times 1.5 + 1.7) = 85837.5\ N$$

$$F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = 158747\ N$$

$$\alpha = \operatorname{atan} \frac{F_V}{F_H} = 32.7°$$

Es. 4. Per il moto di Couette completamente sviluppato in un condotto bidimensionale nel piano (x, y), con le due pareti poste in $y = \pm h$, il campo di velocità unidirezionale lungo x è dato da $u = U\,(y/h)$, con U il modulo della velocità (costante) con cui le due pareti traslano. Si calcoli il vettore vorticità ζ e la circolazione Γ per tale moto, considerando un circuito (percorso in senso antiorario) di forma rettangolare con i lati orizzontali adiacenti alle due pareti e di lunghezza lungo x pari a L.

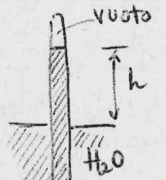


$$u = U \frac{y}{h} \qquad \vec{\zeta} = \vec{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\vec{k}\,\frac{U}{h}$$

$$\Gamma = \oint_{\ell} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \iint_A \vec{\zeta} \cdot \vec{n}\, dA = -UL - UL = -\int_{-h}^{h}\int_0^L \frac{U}{h}\, dx\, dy$$

$$= -\frac{U}{h}(2h)L = -2UL \quad \text{(il teorema di Stokes è soddisfatto)}$$

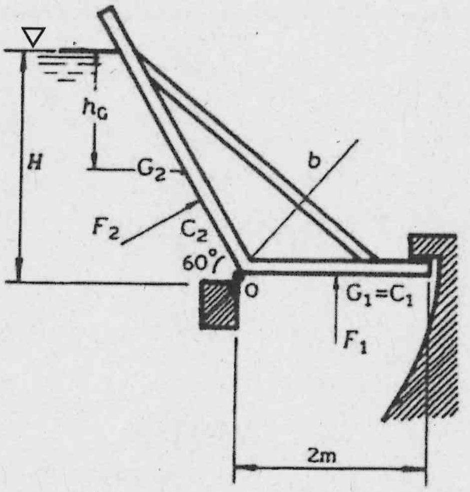
Es. 5. Si vuole misurare la pressione ambiente in una localitá montana e si usa un barometro di Torricelli ad acqua (ρ = 982 kg/m³). Si misura una quota della colonna di liquido nel barometro pari a 9,2 m. Si faccia uno schizzo del problema e si stimi il valore della pressione ambiente in bar.



$$P_{atm} = \rho g h =$$

$$= 982 \times 9.81 \times 9.2 =$$

$$88627\ Pa = 0.886\ bar$$



Es. 6. Calcolare il massimo valore di H che permette alla paratia di figura, incernierata in O e di profondità b = 1.5 m, di restare in equilibrio. Si trascuri la massa della paratia.

$$F_1 = \gamma H A_1 = \gamma H\, b\, 2$$

$$F_2 = \gamma h_G A_2 = \gamma \frac{H}{2} \frac{bH}{\sin 60°}$$

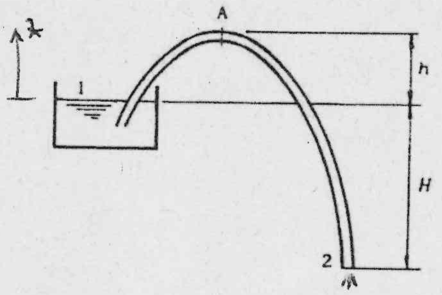
Centro di spinta di F_2 (in C_2) dista $\frac{H/3}{\sin 60}$ dalla cerniera in O.

Bilancio dei momenti rispetto ad O:

$$1 \cdot F_1 = \frac{H}{3 \sin 60} F_2 \rightarrow$$

$$2 \gamma b H = \frac{\gamma b H^3}{6 \sin^2 60°}$$

$$H^2 = 12 \sin^2 60 = 9, \qquad H = 3\,m$$



Es. 7. Il sifone di figura che scarica in atmosfera ha diametro d = 200 mm, h = 1.5 m, H = 4.9 m. Tra il punto 1 e il punto A si ha una perdita di carico pari a $h_{L\,1A}$ = 1 m, mentre tra A e 2 la perdita di carico è $h_{L\,A2}$ = 1.1 m. Calcolare la velocità media dell'acqua nel condotto, la portata volumetrica e la pressione di vuoto nel punto A.

Metto gli assi in modo che $z_1 = 0$. In 1 $p_1 = p_{atm} \rightarrow p_{1\,gage} = 0$

Energia 1-A: $p_{A\,gage} + \frac{1}{2} \rho V_A^2 + \rho g z_A + \rho g h_{L1A} = 0$

$$p_{A\,gage} = -\frac{1}{2} \rho V_A^2 - \rho g (h + h_{L1A})$$

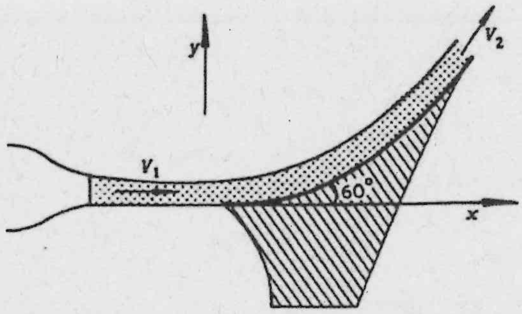
Energia 1-2: $\frac{1}{2} \rho V_2^2 + \rho g (z_2 + h_{L12}) = 0$ $\qquad p_{2\,gage} = 0$

$$\frac{1}{2} \rho V_2^2 = \rho g (-z_2 - h_{L12}) = \rho g (H - h_{L1A} - h_{L2A}) = 27468 \text{ Pa}$$

$V_2 = V_A$ per la conservazione della massa: $V_A = \sqrt{\frac{2 \times 27468}{1000}} = 7.41 \frac{m}{s}$

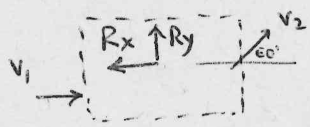
$$\dot{V} = V_A \frac{\pi d^2}{4} = 0.233 \frac{m^3}{s}$$

$$p_{vuoto_A} = -p_{A\,gage} = 27468 + 9810(2.5) = 51993 \text{ Pa}$$



$$\dot V_1 = V_2 = \frac{4\dot V}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.2}{\pi\, 0.1^2} = 25.46\ \frac{m}{s}$$

Pressione = p_{atm} su tutto il CV:



(R_x, R_y) = reazione del deviatore al getto

$$-R_x = \rho \dot V (V_2 \cos\alpha - V_1) \rightarrow R_x = 2546\ N$$

$$R_y = \rho \dot V (V_2 \sin\alpha) \rightarrow R_y = 4410\ N$$

La forza del getto sarà di stesso modulo

$\begin{cases} F_x = 2546\ N \\ F_y = 4410\ N \end{cases}$ e diretta in verso opposto

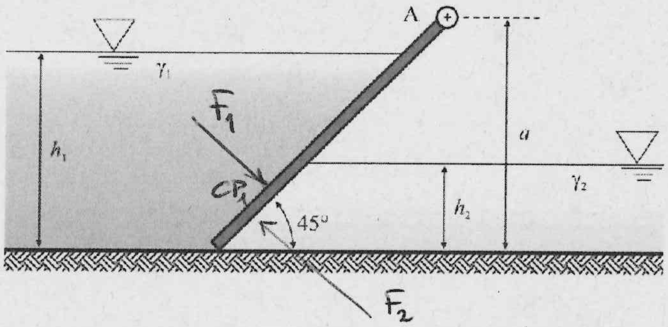
F_x
F_y

Es. 8. Calcolare F_x e F_y, le due componenti della forza F esercitata dal getto d'acqua sul deviatore di figura, quando il diametro del getto è pari a 0.1 m e la portata è di 0.2 m³/s.

Es. 9. Si consideri la paratoia di figura incernierata in A, a quota a = 4 m dal fondo orizzontale piano. I due liquidi hanno peso specifico γ_1 = 10 000 N/m³ e γ_2 = 12 000 N/m³ e il tirante del liquido a sinistra é pari a h_1 = 3 m. Trascurando il peso della paratoia, si calcoli:

1. la spinta esercitata dal liquido di sinistra, e
2. la distanza tra il punto A e il punto di applicazione della spinta sul lato sinistro della paratoia.

Si verifichi infine che quando h_2 = 2.69 m la paratoia si trova in condizione di apertura incipiente.



Si assume profondità unitaria.

$F_1 = \gamma_1 \frac{h_1}{2} (\sqrt{2}\, h_1)$ applicata a distanza (misurata parallelamente alla traccia della paratoia) a $h_1 \frac{\sqrt{2}}{3}$ dal fondo. F_1 = 63.6 kN

Il braccio della spinta rispetto alla cerniera in A è: $A - CP_1 = \left(a - \frac{h_1}{3}\right)\sqrt{2} = 4.24$ m

Il liquido a destra esercita $F_2 = \gamma_2 \frac{h_2}{2} (\sqrt{2}\, h_2)$ con braccio (rispetto alla cerniera in A): $\left(a - \frac{h_2}{3}\right)\sqrt{2}$

Equilibrio dei momenti: $F_1 \left(a - \frac{h_1}{3}\right)\cancel{\sqrt{2}} = F_2 \left(a - \frac{h_2}{3}\right)\cancel{\sqrt{2}}$

$$\rightarrow h_2^3 - 3a h_2^2 + 3 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} h_1^2 \left(a - \frac{h_1}{3}\right) = 0 \rightarrow h_2^3 - 12 h_2^2 + 67.5 = 0$$

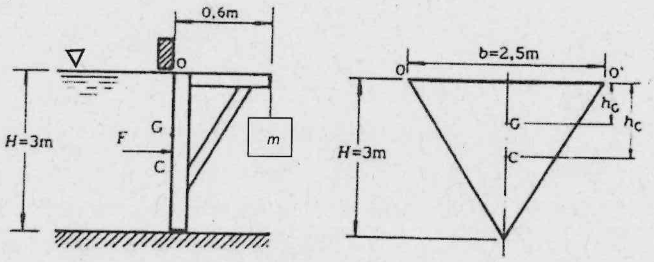
Tre soluzioni: $h_2 = 2.69$ m $\quad \underbrace{h_2 = 11.49 \quad h_2 = -2.19}_{NA}$

Compito di Meccanica dei Fluidi, 18 aprile 2023 **Fila B**

1 foglio aiuti permesso COGNOME, NOME, MATRICOLA: ______________________

Es. 1. La paratoia verticale di figura blocca un canale di sezione triangolare ed è montata su una cerniera, in modo tale che la paratoia può ruotare attorno all'asse OO'. Quando il canale è pieno fino all'orlo, quanto deve valere la massa m di figura per mantenere la paratoia chiusa?

Con riferimento alla figura, il momento di inerzia baricentrico del triangolo vale $I_{xx,G} = bH^3/36$, e il baricentro G del triangolo si trova nel punto di incontro delle mediane. Il punto C indica il centro di spinta.



Forza sulla paratoia:

$$F = \gamma h_G A = \gamma \frac{H}{3}\left(b\frac{H}{2}\right) = 36787.5\ N$$

(il baricentro di un triangolo isoscele si trova ad $\frac{H}{3}$ dalla base!)

Centro di spinta:

$$h_C = h_G + \frac{I_{xx,G}}{h_G A} = \frac{H}{3} + \frac{bH^3/36}{bH^2/6} = \frac{H}{2} = 1.5\ m$$

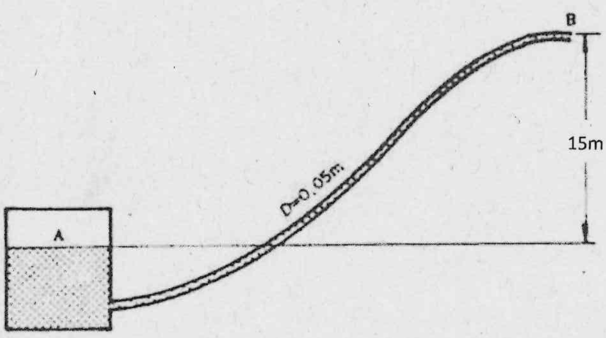
Bilancio dei momenti attorno ad OO':

$$0.6\, mg = 1.5\, F$$

$$\hookrightarrow mg = \frac{1.5}{0.6}\, 36787.5 = 91969\ N$$

$$m = \frac{91969}{9.81} = 9375\ kg$$

Es. 2. Per il sistema idraulico di figura, quale deve essere la pressione relativa del gas che si trova sopra al pelo libero dell'acqua in A affinchè la portata in uscita in B sia pari a 12 l/s? Si fornisca il risultato in bar, considerando una perdita di carico tra A e B pari a h_L = 5.5 m.



$$\dot{V} = 12 \times 10^{-3}\ \frac{m^3}{s}$$

$$V = \frac{4\dot{V}}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.012}{\pi\ 0.05^2} = 6.11\ \frac{m}{s}$$

Eq. energia tra A e B:

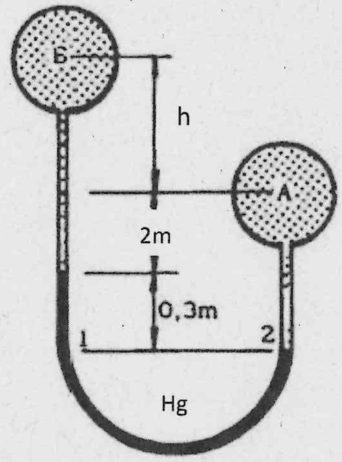
$$P_A = \frac{1}{2}\rho V_B^2 + \underset{P_{atm}}{\underset{\shortparallel}{P_B}} + \rho g z_B + \rho g h_L$$

$$P_{gage\,A} = P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g(z_B + h_L) =$$

$$= \frac{1}{2}\, 1000 \times 6.11^2 + 9810(20.5) = 219771\ Pa$$

$$= 2.20\ bar$$

Es. 3. Si valuti l'altezza h in figura nei due casi seguenti: (1) entrambi i condotti A e B contengono acqua, il liquido manometrico è mercurio, SG_{Hg} = 13.6, e $p_A - p_B$ = 46 892 Pa; (2) in A c'è acqua mentre in B c'è un olio con SG_{olio} = 0.85 (stesso liquido manometrico del caso 1), $p_A - p_B$ = 42 477 Pa.



$$P_1 = P_2$$

$$P_1 = P_B + (h+2)\gamma_B + 0.3\,\gamma_{Hg}$$

$$P_2 = P_A + 2.3\,\gamma_A$$

Caso (1): $\gamma_A = \gamma_B = \gamma_{H_2O}$

$$P_A - P_B = 46892 = 0.3\,\gamma_{Hg} + (h-0.3)\,\gamma_{H_2O}$$

$$h = 1 \text{ m}$$

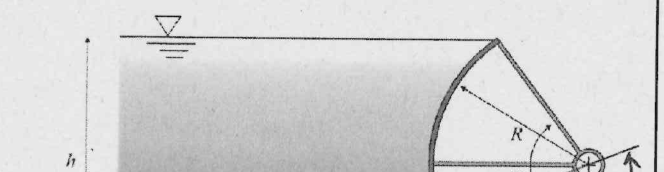
Caso (2):

$$P_A - P_B = (h+2)\gamma_B + 0.3\,\gamma_{Hg} - 2.3\,\gamma_A =$$

$$42477 = (h+2)\,0.85\,\gamma_{H_2O} + 0.3\,\gamma_{Hg} - 2.3\,\gamma_{H_2O}$$

$$h = 1 \text{ m}$$

Es. 4. La paratoia circolare cilindrica di figura è profonda b = 2 m e ha raggio R = 4 m; può trattenere acqua fino ad un tirante massimo $h = 2\,R\sin(\alpha/2)$. La paratoia è simmetrica rispetto all'orizzontale e l'angolo α = 120°. Quando il recipiente è pieno fino all'orlo, calcolare il modulo della spinta sulla paratoia, la sua direzione e il verso. Indicare infine per quale punto passa la retta d'azione della spinta.



retta d'azione passa per O

$$F_x = \frac{1}{2}\gamma h^2 b \qquad \text{con} \qquad h = 6.93 \text{ m}$$

$$F_z = \gamma\left(\frac{\alpha}{2}R^2 - R^2 \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)b =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma R^2 b\,(\alpha - \sin\alpha)$$

È la spinta di Archimede sul volume schematizzato in fig.

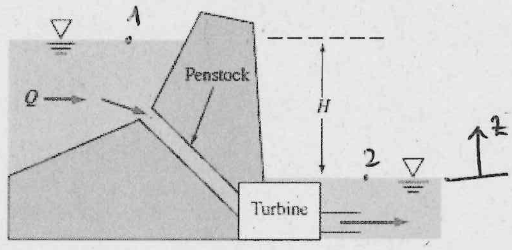
$$F_x = \frac{9800}{2} \times 6.93^2 \times 2 = 470.4 \text{ kN}$$

$$F_z = 9800\left(\frac{120\pi}{2 \cdot 180} \times 4^2 - 4^2 \sin 60 \cos 60\right)2 = 192.6 \text{ kN}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = 508.3 \text{ kN}$$

$$\alpha = \operatorname{atan}\frac{F_z}{F_x} = 22.27°$$

Es. 5. Si consideri una turbina che estrae energia da un condotto ("penstock") in una diga. Per il caso di moto turbolento la perdita di carico si può approssimare con $h_L = c\,Q^2$, dove la costante c dipende dalle dimensioni e caratteristiche di asperità del condotto di adduzione e dalle proprietà dell'acqua. Si mostri che per una data geometria e portata volumetrica Q di acqua nel condotto, la potenza massima possibile vale $\dot{W}_{max} = 2\,\rho\,g\,H\,Q/3$, e si trova quando la portata vale $Q = [H/(3c)]^{1/2}$.



Eq. energia tra 1 e 2 :

$$\rho g H = \rho g (h_{turb} + h_L)$$

$$\dot{W}_{turbina} = \dot{m} g h_{turb} = \rho Q g (H - c Q^2)$$

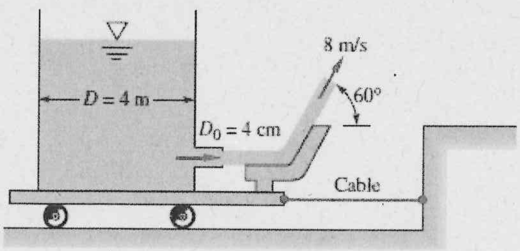
$\dot{W}_{turbina}$ è max quando $\dfrac{\partial \dot{W}_{turbina}}{\partial Q} = 0$

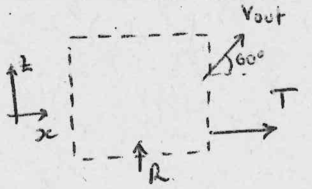
$$\rightarrow \cancel{\rho}\cancel{g}H - 3\cancel{\rho}Q^2\cancel{g}c = 0$$

$Q = \sqrt{\dfrac{H}{3c}}$ per massima potenza.

$$\dot{W}_{max} = \rho g Q \left(H - c\frac{H}{3c}\right) = \frac{2}{3}\rho g H Q$$

Es. 6. Un recipiente con acqua è appoggiato su un carrello senza attrito e alimenta un getto di 4 cm di diametro e velocità 8 m/s, che viene deviato di 60° da un deviatore come mostrato in figura. Si calcoli la tensione nel cavo di supporto.





P_{atm} dappertutto,
T = tensione del cavo
R = reazione del suolo

$\sum \vec{F} = \dot{m}\,\vec{V}_{out}$ proiettato lungo l'asse x:

$$T = \dot{m}\, v_{out} \cos 60° = \frac{1}{2}\rho V_{out}^2 \frac{\pi D_0^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{2} 1000 \times 8^2 \times \frac{\pi \times 0.04^2}{4} = 40.21 \text{ N}$$

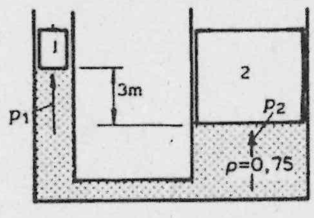
Es. 7 I due pistoni 1 e 2 di figura misurano rispettivamente 5 cm e 50 cm di diametro. Il peso del cilindro 2 è pari a 20 KN. Si calcoli la massa del pistone 1 affinché il sistema sia in equilibrio. Il liquido ha densità relativa SG = 0.75.

$$p_2 = \frac{W_2}{A_2} = \frac{20000}{\pi \times 0.25^2} = 101859 \text{ Pa}$$

$$p_1 = p_2 - \gamma h = 101859 - 9.81 \times 750 \times 3 =$$
$$= 79786 \text{ Pa}$$

Equilibrio se $W_1 = p_1 A_1 = 156.6$ N

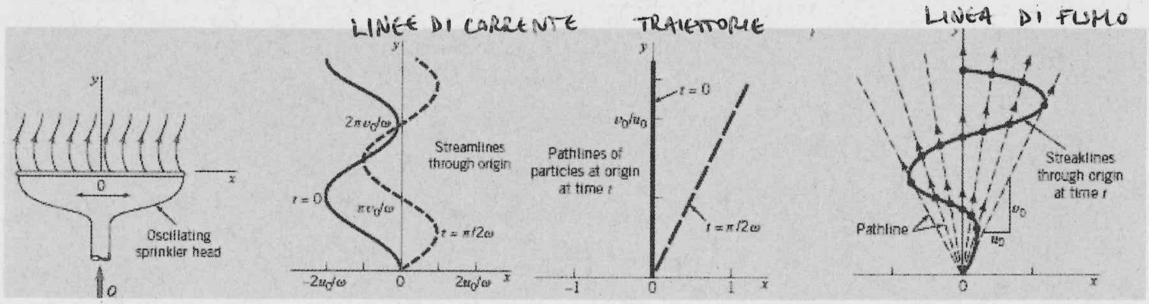
$$m_1 = \frac{W_1}{g} = \frac{156.6}{9.81} = 15.96 \text{ kg}$$



Es. 8. Uno spruzzatore da giardino oscilla orizzontalmente e produce un campo di velocità in uscita descritto da $\boldsymbol{V} = u_0 sin[\omega(t - y/v_0)]\, \boldsymbol{i} + v_0\, \boldsymbol{j}$, con u_0 e v_0 costanti. Si faccia riferimento alle figure sottostanti che mostrano il sistema fisico e varie linee caratteristiche, e si scrivano le equazioni:

1. delle linee di corrente che passano per l'origine nei due istanti successivi $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2\omega}$;
2. delle traiettorie di due particelle che si trovavano nell'origine rispettivamente quanto $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2\omega}$.

Si giustifichi in modo qualitativo l'andamento della linea di fumo che passa per l'origine nell'immagine di destra, facendo riferimento alla definizione di linea di fumo (definizione che deve essere fornita dallo studente). Si calcoli infine il campo di accelerazione del moto.



$$\frac{dy}{v} = \frac{dx}{u} \longrightarrow u_0 \int \sin\left[\omega\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right] dy = v_0 \int dx \rightarrow \frac{u_0 v_0}{\omega} \cos\left[\omega\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right] = v_0 x + C$$

La linea di corrente per l'origine $(0,0)$ fornisce $C = \frac{u_0 v_0}{\omega}$; l'equazione è quindi: $x = \frac{u_0}{\omega}\left[\cos\left(\frac{\omega y}{v_0}\right) - 1\right]$ nel caso $t = 0$.

Nel caso $t = \frac{\pi}{2\omega} \longrightarrow C = 0 \longrightarrow x = \frac{u_0}{\omega} \sin\left(\frac{\omega y}{v_0}\right)$.

Traiettorie: $\frac{dx}{dt} = u_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right]$ $\quad \frac{dy}{dt} = v_0 \mapsto y = v_0 t + c_1$

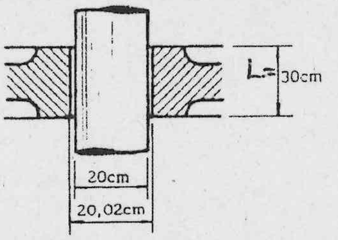
$\hookrightarrow x = -\left[u_0 \sin\left(\frac{c_1 \omega}{v_0}\right)\right] t + c_2$

Particella nell'origine in $t = 0$: $c_1 = c_2 = 0 \longrightarrow$ traiettoria $x = 0,\ y = v_0 t$

Particella nell'origine in $t = \frac{\pi}{2\omega}$: $c_1 \neq c_2 \neq 0 \longrightarrow$ " $\underbrace{x = u_0\left(t - \frac{\pi}{2\omega}\right),\ y = v_0\left(t - \frac{\pi}{2\omega}\right)}_{\text{Eliminando } t:\ y = \frac{v_0}{u_0} x}$

$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} \Longrightarrow a_x = 0 \quad a_y = 0$. Linea di fumo: ....

Es. 9. Calcolare il valore della viscosità dinamica dell'olio che riempie l'interstizio tra l'albero e il cuscinetto di figura, sapendo che quando l'albero gira a 200 rpm (rpm = giri al minuto) serve una potenza di 2 kW per vincere la resistenza viscosa.



Velocità tangenziale $u = \pi D \dot{n}/60 = 2.09$ m/s

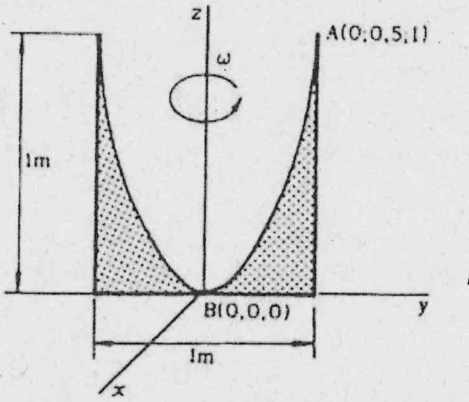
$\dot{W} = F u \rightarrow F = \dot{W}/u = 955$ N $\quad F = A\mu\, u/h \quad h = \text{gap}$

$$\mu = \frac{Fh}{Au} = \frac{Fh}{\pi D L u} = \frac{955 \times 0.0001}{\pi \times 0{,}2 \times 0.3 \times 2.09} = 0.246 \text{ Pa s}$$

Compito di Meccanica dei Fluidi, 18 aprile 2023 **Fila C**

1 foglio aiuti permesso COGNOME, NOME, MATRICOLA: ____________________

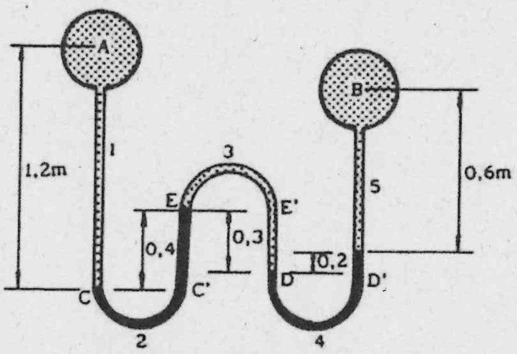
Es. 1. Il recipiente cilindrico in figura contiene del liquido. A quale velocità di rotazione (misurata sia in rad/s che in rpm, rpm = giri al minuto) deve ruotare attorno all'asse z affinchè la superficie libera tocchi il fondo del recipiente?



$$p_B - p_A = \rho \frac{\omega^2}{2}\left(r_B^2 - r_A^2\right) - \rho g (z_B - z_A)$$

$$p_B - p_A = 0 \quad \rightarrow \quad \rho \frac{\omega^2}{2}(-0.5)^2 - \rho g(-1) = 0 \quad \rightarrow \omega = 8.86 \ \frac{rad}{s}$$

$$\omega = \frac{2\pi \dot{n}}{60} \quad \longrightarrow \quad \dot{n} = \frac{60\ \omega}{2\pi} = 84.6 \ rpm$$



Es. 2. Si valuti la differenza di pressione $\Delta p = p_B - p_A$ (in bar) per il sistema di figura.

Dati: $SG_1 = 1$, $SG_2 = 11.4$, $SG_3 = 1.7$, $SG_4 = 2.6$, $SG_5 = 1$.

$$p_C = p_A + 1.2\ \gamma_1$$

$$p_E = p_C - 0.4\ \gamma_2$$

$$p_D = p_E + 0.3\ \gamma_3$$

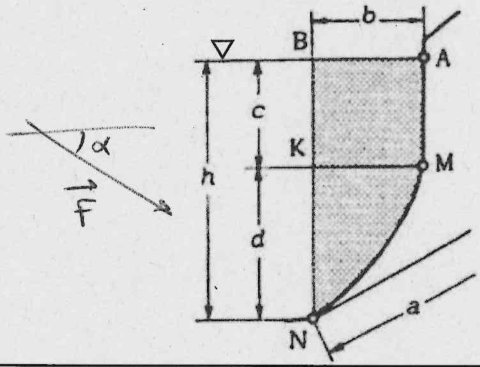
$$p_B = p_D - 0.2\ \gamma_4 - 0.6\ \gamma_5$$

→ Sommando membro a membro

$$p_B = p_A + 1.2\gamma_1 - 0.4\gamma_2 + 0.3\gamma_3 - 0.2\gamma_4 - 0.6\gamma_5$$

$$= 120\,000 + 9.81(1200 - 4560 + 510 - 520 - 600) = 81054 \ Pa$$

Es. 3. La paratia AMN, di profondità a = 1 m, trattiene un liquido di densità relativa SG = 0.9. Le dimensioni della sezione sono le seguenti: area MNK = 1.5 m^2, b = 1.3 m, c = 2.1 m, d = 1.6 m. Calcolare la forza esercitata dal liquido sulla parete AMN e l'angolo che tale forza forma con l'orizzontale.



$$F_H = \gamma \frac{h}{2}(a h) = 9810 \times 0.9 \times \frac{3.7}{2} \times 1 \times 3.7 = 60434,5 \text{ N}$$

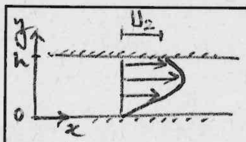
Sul volume di controllo "grigio" la forza verticale è:

$$F_V = \gamma\, a\, (\text{area AMNB}) = 9810 \times 0.9 \times 1 \times (2.1 \times 1.3 + 1.5) = 37346.7 \text{ N}$$

$$F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = 71043 \text{ N}$$

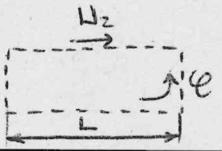
$$\alpha = \operatorname{atan} \frac{F_V}{F_H} = 31.71°$$

Es. 4. Per il moto di Couette-Poiseuille completamente sviluppato in un condotto bidimensionale nel piano (x, y), con le due pareti poste in $y = 0$ e $y = h$, il campo di velocità unidirezionale lungo x è dato da $u = 4\,U_1 \left[\frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right] + U_2\,\frac{y}{h}$, con U_1 e U_2 due velocità costanti. Si calcoli il vettore vorticità ζ e la circolazione Γ per tale moto, considerando un circuito (percorso in senso antiorario) di forma rettangolare con i lati orizzontali adiacenti alle due pareti e di lunghezza lungo x pari a L.



$$\vec{\zeta} = \vec{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \vec{k}\left[-4\frac{U_1}{h} + 4U_1\frac{2y}{h^2} + \frac{U_2}{h}\right]$$

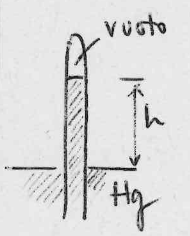
$$\Gamma = \oint_{\ell} \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = \iint_A \vec{\zeta}\cdot\vec{n}\, dA \qquad \Gamma = \oint \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = -U_2 L$$



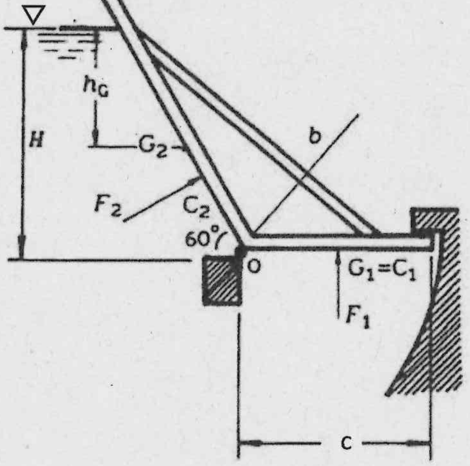
$$\Gamma = L\int_0^h \left(-4\frac{U_1}{h} + 4U_1\frac{2y}{h^2} + \frac{U_2}{h}\right) dy = L\left(-4U_1 + 4U_1 - U_2\right) = -U_2 L$$

Il teorema di Stokes è soddisfatto (!)

Es. 5. Si vuole misurare la pressione ambiente in una localitá montana e si usa un barometro di Torricelli a mercurio (ρ = 13 580 kg/m^3). Si misura una quota della colonna di liquido nel barometro pari a 72 cm. Si faccia uno schizzo del problema e si stimi il valore della pressione ambiente in bar.



$$P_{atm} = \rho g h = 13580 \times 9.81 \times 0.72 = 95918 \text{ Pa} = 0.959 \text{ bar}$$



Es. 6. Calcolare il massimo valore di H che permette alla paratia di figura, incernierata in O e di profondità b = 1 m, di restare in equilibrio. Si trascuri la massa della paratia. Dati: $SG_{liquido}$ = 0.74; c = 3 m.

$$F_1 = \gamma H A_1 = \gamma H bc = 3\gamma H$$

$$F_2 = \gamma h_G A_2 = \gamma \frac{H}{2}\frac{bH}{\sin 60°} = \frac{\gamma H^2}{2\sin 60°}$$

$$OC_2 = \frac{H/3}{\sin 60°}$$ (C_2 = centro di spinta di F_2)

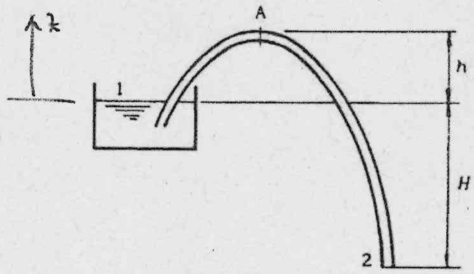
Bilancio dei momenti rispetto ad O :

$$F_1 \frac{c}{2} = \frac{H}{3\sin 60°} F_2$$

$$4.5\,\gamma H = \frac{\gamma H^3}{6\sin^2 60°}$$

$$H^2 = 4.5 \times 6 \times \frac{3}{4} = 40.5 \ m^2$$

$$H = 6.36 \ m$$



Es. 7. Il sifone di figura che scarica in atmosfera ha diametro d = 150 mm, h = 2 m, H = 4.5 m. Tra il punto 1 e il punto A si ha una perdita di carico pari a $h_{L\,1A}$ = 0.7 m, mentre tra A e 2 la perdita di carico è $h_{L\,A2}$ = 1.3 m. Calcolare la velocità media dell'acqua nel condotto, la portata volumetrica e la pressione di vuoto nel punto A.

Eq. energia 1-2 : $\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g (z_2 + h_{L12}) = 0$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = -\rho g(-H + h_{L1A} + h_{LA2}) = 24525 \ Pa$$

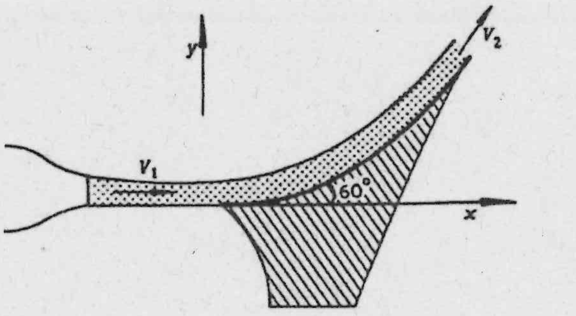
$$v \underset{\uparrow}{=} v_A \underset{\uparrow}{=} v_2 = \sqrt{\frac{2 \times 24525}{1000}} = 7{,}00 \ \frac{m}{s}$$

cons. massa

Eq. energia 1-A : $p_{A\,gage} + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g (z_A + h_{L1A}) = 0$

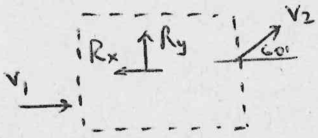
$$p_{A\,vuoto} = -p_{A\,gage} = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g (h + h_{L1A}) = 51012 \ Pa$$

$$\dot{V} = v\frac{\pi d^2}{4} = \frac{7\ \pi\ 0.15^2}{4} = 0.124 \ \frac{m^3}{s}$$



$$V_1 = V_2 = \frac{4\dot{V}}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.3}{\pi \times 0.13^2} = 22.60 \ \frac{m}{s}$$

$p = p_{atm}$ su tutto il CV



$(R_x, R_y) =$ reazione del deviatore di getto

$$-R_x = \rho \dot{V} (V_2 \cos 60° - V_1) \Rightarrow R_x = 3390 \ N$$

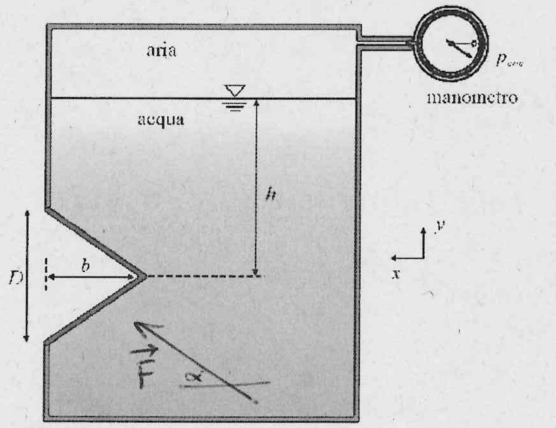
$$R_y = \rho \dot{V} (V_2 \sin 60°) \Rightarrow R_y = 5872 \ N$$

La forza del getto avrà lo stesso modulo

$\begin{cases} F_x = 3390 \ N & \text{e sarà diretta} \\ F_y = 5872 \ N & \text{in verso opposto} \end{cases}$ $\quad \rightarrow F_x \quad \downarrow F_y$

Es. 8. Calcolare F_x e F_y, le due componenti della forza **F** esercitata dal getto d'acqua sul deviatore di figura, quando il diametro del getto è pari a 0.13 m e la portata è di 0.3 m³/s.

Es. 9. Il serbatoio in pressione in figura contiene acqua (γ = 9806 N/m³) e aria nella sua parte superiore; esso presenta sulla parete una rientranza verso l'acqua di forma conica di altezza *b* = 0.5 m e diametro della base *D* = 0.30 m. L'affondamento del vertice del cono vale *h* = 1 m. L'aria sovrastante ha una pressione misurata dal manometro collegato alla parte superiore del serbatoio, pari a p_{gage} = 3 bar. Determinare modulo e inclinazione sull'orizzontale della spinta idrostatica netta esercitata sulla rientranza conica.



$$F_x = \left(p_{gage\ air} + \gamma_{H_2O} h \right) \frac{\pi D^2}{4} \qquad F_y = \gamma_{H_2O} \frac{\pi D^2}{4} \frac{b}{3}$$

F_y è la forza di Archimede su un corpo conico immerso in acqua

$$F_x = (3 \times 10^5 + 9810 \times 1) \frac{\pi \times 0.3^2}{4} = 21.90 \ kN$$

$$F_y = 9810 \ \frac{\pi \times 0.3^2}{4} \times \frac{0.5}{3} = 0.11 \ kN$$

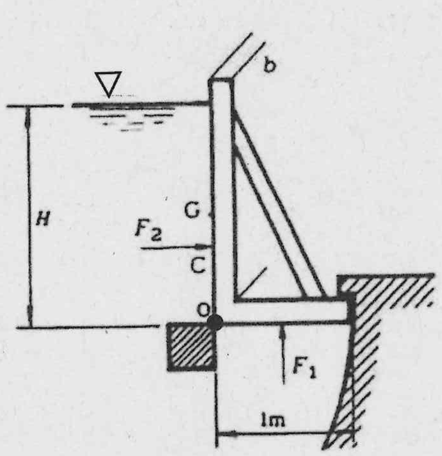
$$\rightarrow F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 21.9 \ kN$$

$$\alpha = \text{atan} \frac{F_y}{F_x} = 0.287° \cong 17'$$

Compito di Meccanica dei Fluidi, 18 aprile 2023 **Fila D**

1 foglio aiuti permesso COGNOME, NOME, MATRICOLA: ____________________

Es. 1. Per un sufficiente livello d'acqua, la paratoia di figura può ruotare in senso orario attorno alla cerniera in O. Trascurando gli attriti e la massa della paratoia si determini il valore minimo di H affinchè la paratoia possa iniziare a ruotare.



$$F_1 = \gamma H A_1 = \gamma H (b \cdot 1) = \gamma H b$$

$$F_2 = \gamma h_G A_2 = \gamma \frac{H}{2} (H \cdot b) = \gamma b \frac{H^2}{2}$$

Centro di spinta di F_2:

$$h_C = h_G + \frac{I_{xx,G}}{h_G A} = \frac{2}{3} H \quad \text{(dal pelo libero)}$$

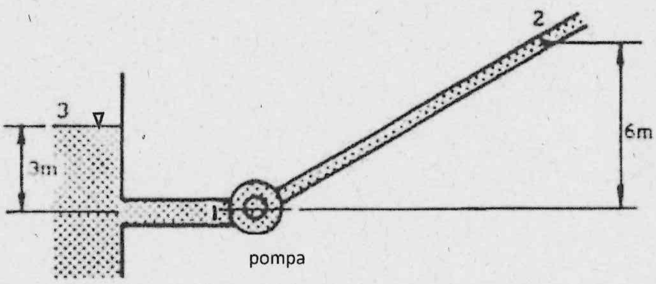
Bilancio dei momenti attorno ad O:

$$F_1 \frac{1}{2} = F_2 \frac{H}{3}$$

$$\frac{\gamma H b}{2} = \left(\gamma b \frac{H^2}{2}\right) \frac{H}{3}$$

$$H = \sqrt{3} = 1.73 \text{ m}$$

Es. 2. Per il sistema idraulico di figura si determinino le pressioni relative (in bar) nei punti 1 (subito a monte della pompa) e 2 (nel condotto), trascurando la perdita di carico nelle condutture e impiegando i seguenti dati: $\dot{V}$ = 30 l/s; D_1 = 0.25 m; D_2 = 0.20 m; $\dot{W}_{pompa}$= 22 kW; rendimento della pompa = 0.75 (questo rendimento è solo quello relativo al sistema pompa, non è il rendimento totale del sistema pompa + motore elettrico).



$$V = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{4\dot{V}}{\pi D^2}$$

$$V_1 = \frac{4 \times 0.03}{\pi \times 0.25^2} = 0.61 \ \frac{m}{s}$$

$$V_2 = \frac{4 \times 0.03}{\pi \times 0.20^2} = 0.96 \ \frac{m}{s}$$

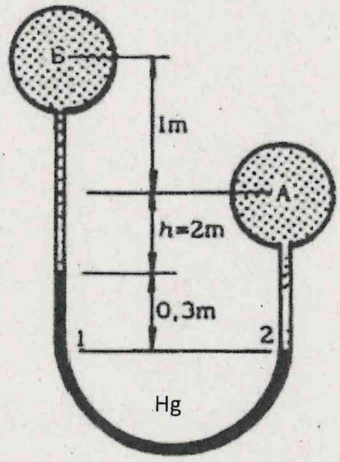
Energia 3-1 : $z_3 = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} \mapsto p_1 = 0.292$ bar

$$\dot{W}_{pompa} = \frac{\gamma \dot{V} H}{\eta} \rightarrow H_p = \frac{\eta \dot{W}_{pompa}}{\gamma \dot{V}} = \frac{0.75 \times 22000}{9810 \times 0.03} = 56.07 \text{ m}$$

Energia 1-2 : $\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + H_p = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2$

$$p_2 = 5.201 \text{ bar}$$

Es. 3. Si valuti la differenza di pressione (in Pascal) misurata dal manometro differenziale di figura tra i punti A e B nei due casi seguenti: (1) entrambi i condotti A e B contengono acqua (e il liquido manometrico è mercurio, $SG_{Hg} = 13.6$); (2) in A c'è acqua mentre in B c'è un olio con $SG_{olio} = 0.85$ (stesso liquido manometrico del caso 1).



$$p_1 = p_2 \qquad p_1 = p_B + 0.3\,\gamma_{Hg} + 3\,\gamma_B$$

$$p_2 = p_A + 2.3\,\gamma_A$$

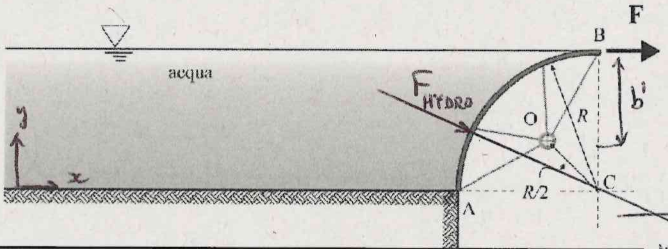
Caso (1): $\gamma_A = \gamma_B = \rho_{H_2O}\, g$

$$p_A - p_B = 0.3\,\gamma_{Hg} + 0.7\,\gamma_{H_2O} = $$
$$= 46892 \text{ Pa}$$

Caso (2): $p_A - p_B = 0.3\,\gamma_{Hg} + 3\,\gamma_B - 2.3\,\gamma_A$

$$= 42477 \text{ Pa}$$

Es. 4. La paratoia cilindrica AB di figura ha profondità b = 2 m e raggio R = 4 m. L'asse di simmetria cilindrica ha traccia C, e la paratoia è incernierata in O. L'angolo OCA = 45° e OC = R/2 = 2 m. Calcolare la spinta esercitata dall'acqua sulla paratoia in modulo, direzione e verso. Si indichi in particolare la linea d'azione di tale spinta. Si trovi infine il modulo della forza esterna orizzontale **F** che si deve applicare per iniziare ad aprire la paratoia.

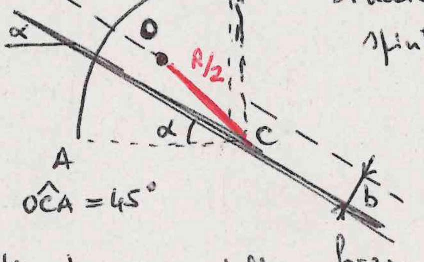


$$F_x = \frac{1}{2}\gamma R (R b) = 156.9 \text{ kN}$$

$$F_y = \gamma R^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) b = 67.34 \text{ kN}$$

$$F_{HYDRO} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 170.74 \text{ kN}$$

La retta d'azione della spinta passa per C e $\alpha = \operatorname{atan}\dfrac{F_y}{F_x} = 23.23°$

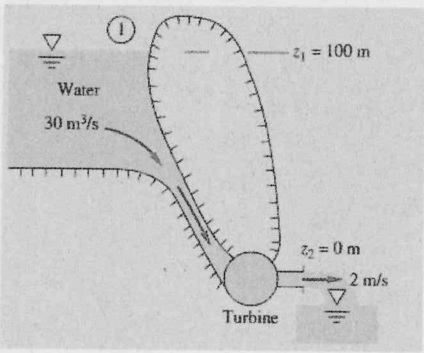


braccio b della spinta $= \dfrac{R}{2}\sin(45° - \alpha)$
$= 0.185\, R$
$= 0.7418$ m

Il braccio della forza F vale $b' = R - \dfrac{R}{2}\sin 45 = 2.586$ m

Bilancio dei momenti: $F_{HYDRO}\, b = F\, b'$ $\qquad F = \dfrac{170.74 \times 0.7418}{2.586} = 48.98$ kN

Es. 5. Un impianto idroelettrico riceve un flusso d'acqua di 30 m³/s attraverso la turbina e la scarica in atmosfera alla velocità di 2 m/s. La perdita di carico attraverso il sistema è h_L = 20 m. Se il carico teorico disponibile è pari a 100 m (cf. figura), che porzione di questo carico la turbina può estrarre dalla diga? Si assuma che l'albero della turbina sia collegato ad un alternatore con rendimento pari a 85%. Che potenza elettrica si può ottenere da questo impianto idroelettrico?



$$\cancel{p_1} + \frac{1}{2}\rho \cancel{v_1^2} + \rho g z_1 = \cancel{p_2} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g(\cancel{z_2} + h_t + h_L)$$

$$h_t = z_1 - \frac{V_2^2}{2g} - h_L = 79.796$$

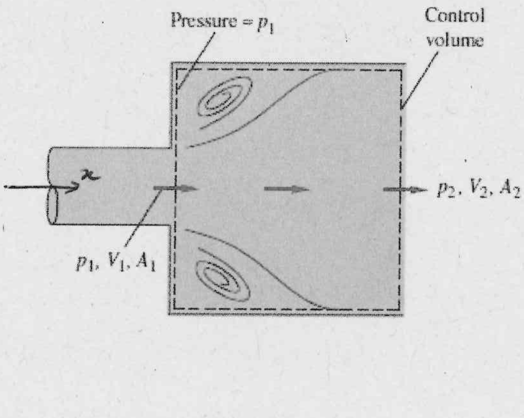
La turbina estrae 79,8% del carico teorico disponibile.

$$\dot W_t = \dot m g h_t = \rho \dot V g h_t = 23.48 \text{ MW}$$

$$\dot W_{elettrica} = 0.85\, \dot W_t = 19.96 \text{ MW}$$

Es. 6. Quando un condotto di sezione circolare ha un brusco allargamento di sezione da A_1 a A_2 dei vortici di bassa velocità si formano negli spigoli e il flusso espande gradualmente verso valle. Si usi il volume di controllo di figura per studiare il moto incomprimibile e stazionario, assumendo che $p \approx p_1$ in tutta la sezione di ingresso del volume di controllo, e si mostri, trascurando gli attriti, che p_2 vale:

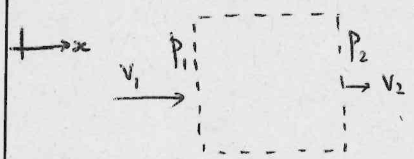
$$p_2 = p_1 + \rho V_1^2 \frac{A_1}{A_2}\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right).$$



Cons. massa: $V_1 A_1 = V_2 A_2$

$$V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2}$$

Quantità di moto (proiettata lungo x):

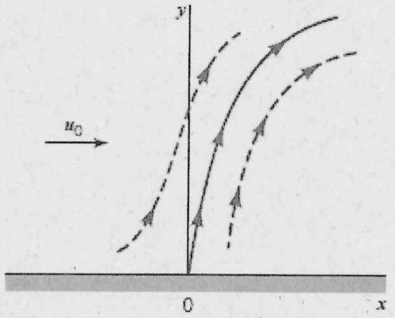


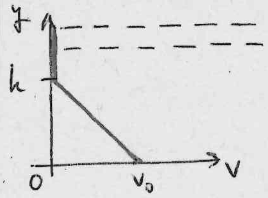
$$p_1 A_2 - p_2 A_2 = \dot m (V_2 - V_1) = \rho V_1 A_1 \left(V_1 \frac{A_1}{A_2} - V_1\right)$$

$$p_2 - p_1 = \rho V_1^2 \frac{A_1}{A_2}\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)$$

$$p_2 = p_1 + \rho V_1^2 \frac{A_1}{A_2}\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)$$

Es. 7. In aggiunta all'usuale velocità dell'aria in atmosfera (il "vento"), spesso ci sono anche correnti d'aria verticali (correnti termiche) legate alla forza di Archimede e al disuguale riscaldamento dell'aria. Si assuma che il campo di velocità in una certa regione sia approssimato da $u = u_0, v = v_0\left(1 - {}^{y}/_{h}\right)$ per $0 < y < h$, e $u = u_0, v = 0$ per $y > h$. Si disegnino il più accuratamente possibile le linee di corrente che passano per l'origine degli assi nei due casi ${}^{u_0}/_{v_0} = 0.5$ e 2. Si calcoli poi il campo di accelerazione di questo moto.



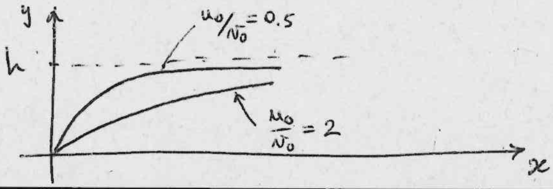


$y > h$ le linee di corrente : $dy = 0 \rightarrow y = \text{cost.}$

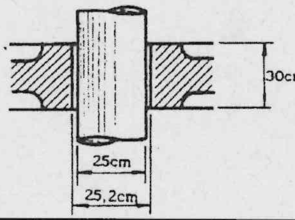
Per $y < h$: $dx = \frac{u_0}{v_0}\frac{dy}{1 - y/h} \rightarrow \int_0^x dx = \frac{u_0}{v_0}\int_0^y \frac{dy}{1 - \frac{y}{h}}$

$$x = -h\frac{u_0}{v_0}\left[\ln\left(1 - \frac{y}{h}\right) - \ln 1\right] = -h\frac{u_0}{v_0}\ln\left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

$$\rightarrow y = h\left[1 - e^{-\frac{x v_0}{h u_0}}\right]$$



Es. 8. Calcolare il valore della viscosità dinamica dell'olio che riempie l'interstizio tra l'albero e il cuscinetto di figura, se è necessaria una coppia di 1 N m per mantenere una velocità di rotazione dell'albero di 60 rpm (rpm = giri al minuto).

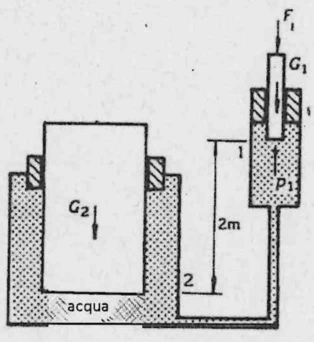


Velocità tangenziale $u = \pi D \dot{n}/60 = 0.785$ m/s

$F = M/r = 1/0.125 = 8$ N $\qquad F = A\mu u/h$ con $h = 0.001$ m

$$\mu = \frac{Fh}{Au} = \frac{Fh}{\pi \times 0.25 \times 0.3 \times 0.785} = 0.043 \text{ Pa s}$$

Es. 9. I diametri dei due pistoni in figura sono pari a 3 cm e 90 cm. Il peso del pistone grande è G_2 = 170 kN, mentre il pistone piccolo pesa G_1= 50 N. Si calcoli la pressione p_1 e la forza esterna F_1 necessaria per mantenere il sistema in equilibrio. Il liquido è acqua (ρ = 1000 kg/m³).



$$P_2 = \frac{170000}{\pi \times 0.45^2} = 267222 \text{ Pa}$$

$$P_1 = P_2 - \gamma h = 267222 - 9810 \times 2 = 247602 \text{ Pa}$$

$$F_1 + G_1 = P_1 A_1 \longrightarrow F_1 = 247602 \times \pi \times 0.015^2 - 50 = 125 \text{ N}$$