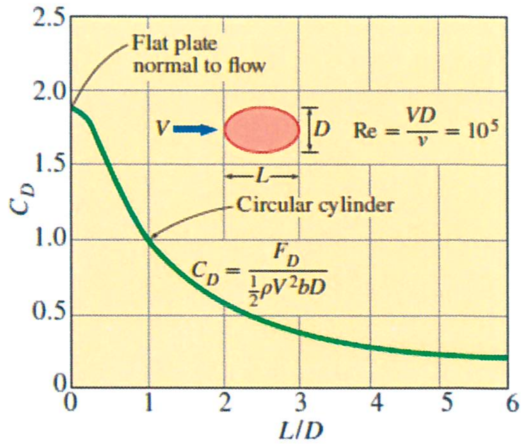
COMPITO DI MECCANICA DEI FLUIDI – 1 giugno 2018 – fila A

Esercizio 1. Un lungo (nella direzione ortogonale al foglio) cilindro ellittico viene posto in una corrente d'acqua in moto a velocità V = 1.3 m/s. La dimensione L del cilindro è pari a 45 cm. Con un dinamometro si misura una forza resistente, per unità di profondità b, pari a 21.125 N/m. Si trovi la lunghezza D, il coefficiente di resistenza C_D e si giustifichi l'impiego del grafico a fianco.

Dati: ρ = 1000 kg/m^3; ν = 1.3 x 10^{-6} m^2/s.



Esercizio 2. Viene costruito un modello per rappresentare un fenomeno fluido retto dalle forze di tensione superficiale e dalla gravità. Si ricavi il rapporto tra le scale di lunghezza di modello e prototipo che permette di realizzare una similitudine dinamica completa.

Esercizio 3. La figura mostra un film fotografico piatto mentre viene rimosso da un bagno liquido a velocità costante U, formando un angolo θ rispetto all'orizzontale. Mentre il film lascia il bagno trasporta con sé (per via della viscosità del liquido) un po' del liquido stesso. In questo particolare esperimento si assume che:

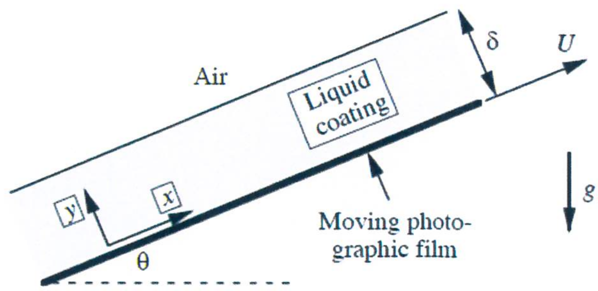
(i) il moto è stazionario e completamente sviluppato;

(*ii*) lo spessore del film liquido è costante e vale δ;

(*iii*) non c'è flusso netto di liquido (cioè la quantità trascinata verso l'alto dal liquido è bilanciata da quanto scende per effetto della gravità);

(*iv*) l'aria sovrastante è a pressione atmosferica ed esercita uno sforzo trascurabile sul liquido.

Si calcolino le componenti di velocità e la pressione nel liquido. Si valuti lo spessore del film, δ, usando l'ipotesi (*iii*) di cui sopra, cioè $\dot{V}$ = 0. Si faccia uno schizzo della distribuzione di velocità.

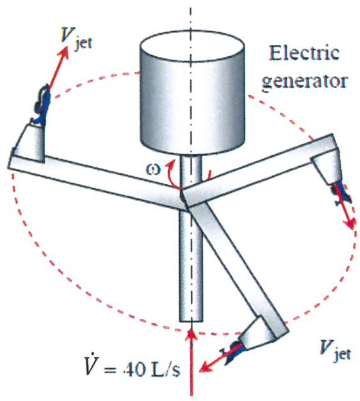


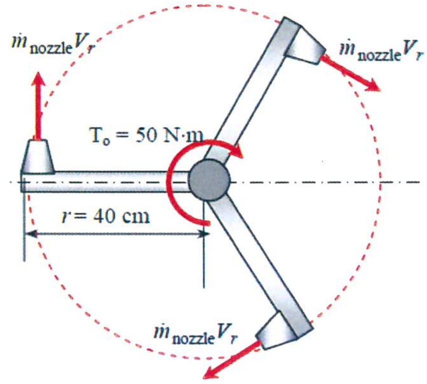
Esercizio 4. Una bolla sferica di gas in moto di Stokes all'interno di un bagno infinito d'acqua (con gli stessi parametri fisici dell'esercizio 1) sperimenta una forza resistente (parallela alla direzione del moto) pari a $F_D = 4\,\pi\,\mu\,R\,U$, con R il raggio della bolla e U la velocità della bolla. Si stimi il raggio massimo della bolla affinché l'approssimazione di Stokes sia accettabile. Si valuti la velocità (di salita o discesa?) della bolla in corrispondenza del diametro massimo.

Dati: ρ_{gas} = 1 kg/m^3.

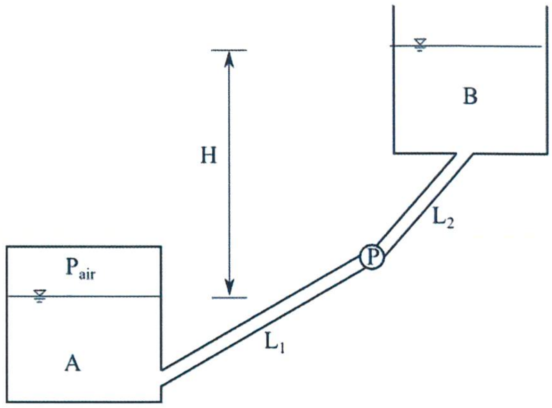
Esercizio 5. Uno spruzzatore a tre bracci viene usato per innaffiare un giardino. La portata che entra dal basso, assialmente, nel sistema è pari a $\dot{V}$= 40 l/s e il momento misurato per la rotazione dei tre bracci è uguale a T_0 = 50 Nm. L'acqua esce dai tre ugelli in atmosfera (p_{gage} = 0 Pa). Si valuti il valore medio della velocità assoluta con cui l'acqua esce da ciascun ugello (V_{jet}). Indi, si faccia un bilancio del momento angolare per il volume di controllo tratteggiato in figura (volume di controllo fisso) e si trovi la velocità relativa V_r dell'acqua, e la velocità angolare di rotazione ω dei bracci dello spruzzatore. Nella realtà ω sarà inferiore o superiore al valore trovato? Perché?

Dati: ρ = 1000 kg/m^3, d = 1.2 cm (diametro ugello), r = 40 cm (lunghezza del braccio)

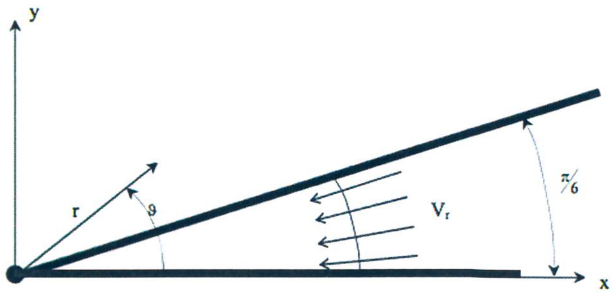




Esercizio 6. Nell'impianto di figura il serbatoio A è pressurizzato mediante aria compressa ed i due peli liberi sono distanti H = 20 m l'uno dall'altro. Si calcoli la portata d'acqua nella tubazione e la potenza assorbita dalla pompa avente prevalenza pari a 16 m e rendimento η = 0.8. Le perdite di carico concentrate, all'imbocco e allo sbocco dei serbatoi, presentano ciascuna un coefficiente di perdita K_L = 0.5. Si assuma che la tubazione sia lunga L = L_1 + L_2 = 20 m ed abbia diametro D = 100 mm, con scabrezza ε = 0.2 mm.



Esercizio 7. Un fluido incomprimibile e irrotazionale fluisce in un diedro solido come in figura. Si supponga che l'intensità $\dot{V}/L$ del pozzo situato nell'origine degli assi sia pari a 2 m^2/s. Determinare la portata volumetrica di fluido che passa attraverso l'apertura. Di quanto è necessario modificare l'intensità del pozzo se si vuole raddoppiare la portata nell'apertura diminuendo al contempo l'apertura di $\pi/7$?



A1.

$$\frac{F_D}{b} = 21.125 \ \frac{N}{m} = c_D \frac{1}{2} \rho V^2 D \quad \mapsto \quad c_D D = 0.025$$

		DAL GRAFICO	DALL' EQUAZIONE
$D^{(0)} = 20$ cm	$\left(\frac{L}{D}\right)^{(0)} = 2.25$	$C_D^{(0)} = 0.5$	$D^{(1)} = \frac{0.025}{0.5} = 0.05$ m
$D^{(1)} = 5$ cm	$\left(\frac{L}{D}\right)^{(1)} = 9$	$C_D^{(1)} = 0.2$	$D^{(2)} = 0.125$ m
$D^{(2)} = 12.5$ cm	$\left(\frac{L}{D}\right)^{(2)} = 3.6$	$C_D^{(2)} = 0.29$	$D^{(3)} = 0.086$ m
$D^{(3)} = 8.6$ cm	$\left(\frac{L}{D}\right)^{(3)} = 5.23$	$C_D^{(3)} = 0.23$	$D^{(4)} = 0.1087$ m
$D^{(4)} = 10.9$ cm	$\left(\frac{L}{D}\right)^{(4)} = 4.13$	$C_D^{(4)} = 0.25$	$D^{(5)} = 0.10$ m
$D^{(5)} = 10$ cm	$\left(\frac{L}{D}\right)^{(5)} = 4.5$	$C_D^{(5)} = 0.25$	$D^{(6)} = 0.10$ m

Soluzione e' arrivata a convergenza

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{1.3 \times 0.1}{1.3 \times 10^{-6}} = 10^5 \ \rightarrow$$ il grafico si può usare !

A2.

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & M & L & T \\
\sigma_s & 1 & 0 & -2 \\
g & 0 & 0 & -2 \\
L & 0 & 1 & 0
\end{array} = 2 \neq 0$$

$$\Pi_1 = Fr^{-2} = \frac{gL}{U^2}$$

$$\Pi_2 = We^{-2} = \frac{\sigma_s}{\rho U^2 L}$$

$$\Pi_{1m} = \Pi_{1p} \ \longrightarrow \ \frac{L_m}{L_p} = \left(\frac{U_m}{U_p}\right)^2$$

$$\Pi_{2m} = \Pi_{2p} \ \longrightarrow \ \sigma_m = \sigma_p \frac{\rho_m U_m^2 L_m}{\rho_p U_p^2 L_p} = \sigma_p \frac{\rho_m}{\rho_p} \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{L_m}{L_p} = \sqrt{\frac{\sigma_m}{\sigma_p} \frac{\rho_m}{\rho_p}}$$

A3.

$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \ \rightarrow \ v = cost \ \longrightarrow \ \boxed{v = 0}$$ perche' quello e' il valore alla parete

compl. sviluppato

$$\rho(\cancel{u_t} + u\cancel{u_x} + \cancel{v}u_y) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu(\cancel{u_{xx}} + u_{yy}) - \rho g \sin\theta$$

$$\rho(\cancel{v_t} + u\cancel{v_x} + v\cancel{v_y}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu(\cancel{v_{xx}} + \cancel{v_{yy}}) - \rho g \cos\theta$$

Dalla seconda: $\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos\theta \qquad p = -\rho g y \cos\theta + f(x)$

In $y=\delta \quad p = p_{atm} = -\rho g \delta \cos\theta + f(x) \rightarrow f(x) = p_{atm} + \rho g \delta \cos\theta$

è una costante

$$\boxed{p = p_{atm} + \rho g \cos\theta(\delta - y)}$$

$\rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \implies u_{yy} = \frac{\rho g \sin\theta}{\mu} \qquad u_y = \frac{\rho g \sin\theta}{\mu} y + A$

$$u = \frac{\rho g \sin\theta}{2\mu} y^2 + Ay + B$$

$y=0$: $u = U \longrightarrow B = U$

$y=\delta$: $\frac{du}{dy} = 0$ (l'aria esercita uno sforzo trascurabile sul fluido)

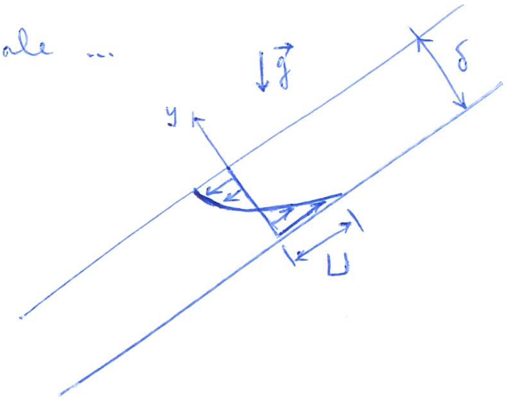
$$\longrightarrow A = -\frac{\rho g \sin\theta}{\mu}\delta$$

$$\longrightarrow \boxed{u(y) = U + \frac{\rho g \sin\theta}{\mu} y\left(\frac{y}{2} - \delta\right)}$$

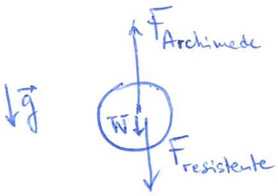
$$\dot{V} = 0 = \int_0^\delta u(y)\,dy = U\delta - \frac{\rho g \sin\theta}{\mu}\frac{\delta^3}{3}$$

Soluzioni: $\delta = 0$ soluzione triviale ...

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{3\mu U}{\rho g \sin\theta}}}$$



A4.



La bolla sale per effetto della forza di Archimede.

$$\left(\rho_{H_2O} - \rho_{gas}\right)\frac{4}{3}\pi R^3 g = 4\pi \mu_{H_2O} R U$$

Stokes è accettabile finché $Re = \dfrac{2UR\rho_{H_2O}}{\mu_{H_2O}} \lesssim 1$ $\longrightarrow$ con il valore max di Reynolds si ha: $UR = \dfrac{\nu_{H_2O}}{2} = 6.50 \times 10^{-7}\ \dfrac{m^2}{s}$.

Dal bilancio delle forze: $\dfrac{\left(\rho_{H_2O} - \rho_{gas}\right) g}{3\mu_{H_2O}} = \dfrac{U}{R^2} = 2.51 \times 10^{6}\ \dfrac{1}{ms}$

Sostituendo: $R^3 = 0.2589 \times 10^{-12} \longrightarrow R_{max} = 0.6373 \times 10^{-4}\ m =$

$0.064\ mm$

$$U = \frac{6.50 \times 10^{-7}}{0.6373 \times 10^{-4}} = 1.02 \times 10^{-2}\ \frac{m}{s} \cong 1\ \frac{cm}{s}$$

A5. $\dot{m}_{ugello} = \dfrac{\dot{m}}{3}$ $\qquad V_{jet} = \dfrac{\dot{V}_{ugello}}{A_{ugello}} = \dfrac{40 \times 10^{-3}}{3\left[\pi (0.012)^2/4\right]} = 117.9\ \dfrac{m}{s}$

$\dot{m}_{totale} = \rho\, \dot{V}_{totale} = 40\ kg/s$

Eq. momento angolare: $\sum M = \sum_{out} r\dot{m}V - \sum_{in} r\dot{m}V$ con tutti i momenti definiti positivi quando antiorari $\longrightarrow$

$$-T_0 = -3\, r\, \dot{m}_{ugello} V_r$$

$$\longrightarrow V_r = \frac{T_0}{r\, \dot{m}_{totale}} = \frac{50}{(0.40)\ 40} = 3.1\ m/s$$

Siccome $\vec{V}_r = \vec{V}_{jet} - \vec{V}_{ugello}$ e tutte le velocità sono tangenziali

$$\longrightarrow V_{ugello} = V_{jet} - V_r = 114.8\ \frac{m}{s}$$

$$\omega = \frac{V_{ugello}}{r} = \frac{114.8}{0.4} = 287\ \frac{rad}{s} \simeq 2741\ rpm$$

In realtà se considerassimo l'attrito dell'aria, che frena la rotazione dei bracci, troveremmo un valore di ω un po' più piccolo.

Es. 6

Eq. dell'energia $\quad \dfrac{P_1}{\rho g} + h_p - \Delta h = \dfrac{V^2}{2g}\left(k_i + k_s + f\dfrac{L}{D}\right) \rightarrow V = \sqrt{\dfrac{2g\left(\frac{P_1}{\gamma} + h_p - \Delta h\right)}{f\frac{L}{D} + k_i + k_s}}$

$\dfrac{\varepsilon}{D} = 10^{-3}$, $V^{(0)} = \sqrt{2g\left(\frac{P_1}{\gamma} + h_p - \Delta h\right)} \simeq 11.02$ m/s

V	Re × 10^6	f
11.02	1.1	0.0195
4.98	0.5	0.021
4.83	0.48	0.021

$\Longrightarrow \quad V = 4.83 \ \frac{m}{s}$

$Re \simeq 4.8 \times 10^5$, $f \simeq 0.021$

$$\dot{W} = \frac{\rho g h_p}{\eta} V \frac{\pi D^2}{4} = 7.5 \text{ kW}$$

Es. 7

Un pozzo ha equazione: $\psi = -\dfrac{\dot{V}/L}{2\pi}\theta$ con intensità $\dot{V}/L > 0$

$u_r = -\dfrac{\dot{V}/L}{2\pi r} \qquad Q_{\frac{\pi}{6}} = \displaystyle\int_0^{\pi/6} +|u_r| r \, d\theta = \frac{\dot{V}/L}{12} = \frac{2}{12} = 0.166 \ \frac{m^2}{s}$

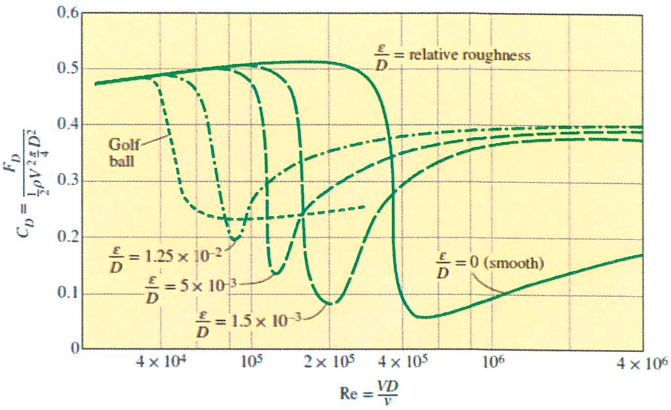
$$Q_{\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{7}\right)} = \int_0^{\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{7}} \frac{\dot{V}_{new}/L}{2\pi \cancel{r}} \cancel{r} \, d\theta = 2 \times 0.166 = 0.333 \ \frac{m^2}{s}$$

$$\frac{\dot{V}_{new}/L}{2\cancel{\pi}} \frac{\cancel{\pi}}{42} = 0.333 \rightarrow \frac{\dot{V}_{new}}{L} = 28 \ \frac{m^2}{s}$$

COMPITO DI MECCANICA DEI FLUIDI – 1 giugno 2018 – fila B

Esercizio 1. Una sfera di diametro pari a D = 5 cm e scabrezza superficiale pari a ε = 75 μm viene inserita in una canaletta piena d'acqua, in moto a velocità V. Con un dinamometro si misura una forza sulla sfera pari a 1.86 N. Si trovi la velocità dell'acqua. Il valore trovato è unico? Se pensate ci possa essere (almeno) un'altra soluzione si chiede di trovarla.

Dati: ρ = 1000 kg/m^3; ν = 1.3 x 10^{-6} m^2/s.



Esercizio 2. Un modello di serbatoio, aperto all'atmosfera e riempito di liquido, viene svuotato in 3 min dall'apertura di una paratoia. Il modello è in scala 1 : 100, e nel prototipo è contenuto lo stesso fluido. Quanto tempo ci vuole per svuotare il prototipo?

Esercizio 3. Un liquido newtoniano di viscosità μ e densità ρ cade verticalmente lungo un cilindro infinito di raggio R per effetto solo della gravità g, formando un sottile strato assialsimmetrico, di spessore δ costante, in contatto con aria in quiete. Il moto è permanente e non ci sono effetti di tensione superficiale. La portata volumetrica del film è pari a Q, e si può mostrare che Q dipende da g, R, $\nu = \mu/\rho$, δ. Si trovi questa dipendenza, funzionale dopo aver risolto le equazioni del moto. Nella formula per Q appare il termine

$$[(1+\varepsilon)^4 \ln (1+\varepsilon)]$$

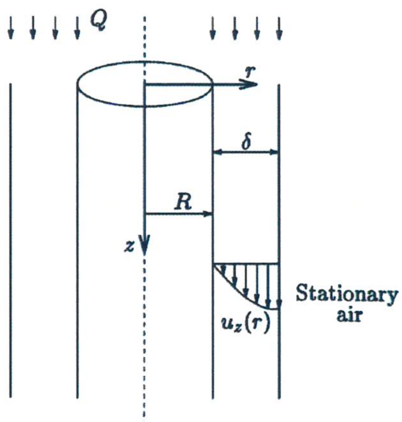
che può essere approssimato, tramite uno sviluppo di Taylor, dall'espressione

$$[\varepsilon + 7\varepsilon^2/2 + 13\varepsilon^3/3],$$

nell'ipotesi che $\varepsilon = \delta/R << 1$.

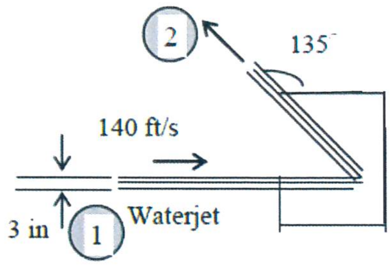
Con questa approssimazione si mostri che

$$\delta = [3\,\mu\, Q/ (2\,\pi\,\rho\, g\, R)]^{1/3}.$$



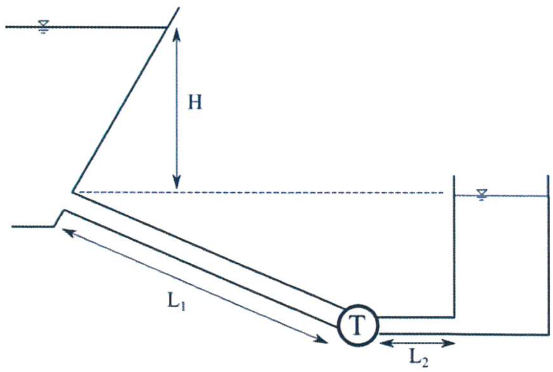
Esercizio 4. Un moto incomprimibile assialsimmetrico con $u_\theta = 0$ è descritto dalle componenti di velocità u_r e u_z, che possono essere espresse tramite una funzione di corrente ψ. Si definisca la funzione di corrente ψ e, dopo aver sostituito u_r e u_z nelle equazioni di quantità di moto lungo r e z nell'ipotesi di moto di Stokes, si mostri che, dopo aver eliminato la pressione, si arriva all'equazione: $E^2(E^2\psi) = 0$, con l'operatore differenziale E^2 definito da: $E^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Esercizio 5. Un getto d'acqua orizzontale di sezione circolare e diametro d = 3 in = 7.6 cm impatta contro una lastra piegata che fa ruotare il getto di un angolo pari a 135°. La velocità del getto è pari a 140 ft/s = 42.7 m/s. Si chiede di valutare la forza necessaria a mantenere la lastra piegata al suo posto, specificando modulo, direzione e verso di tale forza esterna.

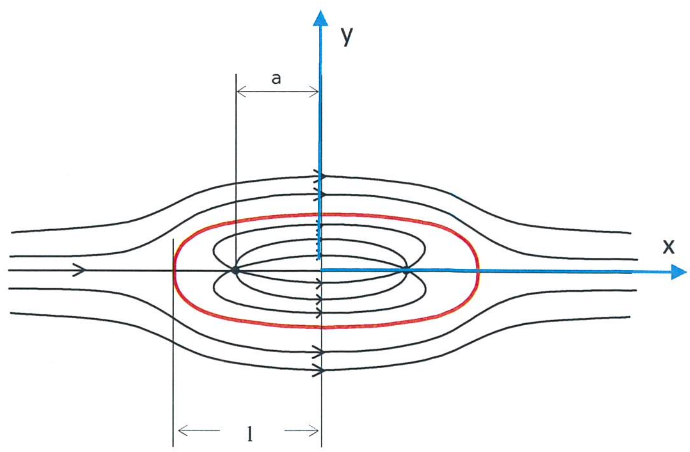


Informazioni: coefficienti di ragguaglio β = 1.03; ρ = 1000 kg/m^3; il getto è in atmosfera; effetti di attrito e gravitazionali trascurabili.

Esercizio 6. Una turbina viene utilizzata per produrre energia elettrica sfruttando una differenza di quota tra i due peli liberi pari a H = 100 m, come mostrato in figura. L'acqua è convogliata in entrata ed in uscita dalla macchina mediante due tubature in ghisa (ε = 0.2 mm) di eguale diametro e di lunghezza pari a L_1 = 400 m e L_2 = 100 m. Sapendo che la turbina sviluppa una potenza di 1 Mw quando la portata volumetrica dell'acqua è pari a 5 m^3/s, si calcoli il diametro D delle tubazioni. Si trascurino le perdite di carico concentrate.



Esercizio 7. Quali moti potenziali è necessario sovrapporre per ottenere il moto attorno all'ovale (rappresentato in rosso in figura)? Scrivere le equazioni che descrivono la funzione di corrente ψ e la funzione potenziale di velocità ϕ. Esiste una relazione fondamentale tra alcune delle costanti che definiscono le funzioni ψ e ϕ associate ad alcuni dei moti potenziali in gioco affinché la linea rossa sia chiusa? Esplicitare questa relazione e giustificarne fisicamente il significato. Determinare poi le relazioni tra le costanti che definiscono ψ e ϕ nel caso in cui l = 4 e a = 1. Se si volesse descrivere un moto potenziale attorno a un corpo aperto, mantenendo la configurazione utilizzata finora (cioè lo stesso numero di moti potenziali in gioco) che cosa sarebbe sufficiente modificare?



B1.

$$\frac{\varepsilon}{D} = 1{,}5 \times 10^{-3}$$

$$1{,}86 = \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{\pi D^2}{4} C_D \left(\frac{\nu^2}{\nu^2}\right) = \frac{1}{2}\, 1000\, \frac{\pi}{4} \left(1{,}3\times 10^{-6}\right)^2 C_D Re^2$$

$$\rightarrow C_D Re^2 = 2{,}80 \times 10^9$$

	DAL GRAFICO	DALL' EQUAZIONE
$Re^{(0)} = 10^5$	$C_D^{(0)} = 0{,}51$	$Re^{(1)} = \sqrt{\frac{2{,}80\times 10^9}{0{,}51}} = 7.41 \times 10^4$
$Re^{(1)} = 7.41 \times 10^4$	$C_D^{(1)} = 0.5$	$Re^{(2)} = 7{,}48 \times 10^4$
$Re^{(2)} = 7.48 \times 10^4$	$C_D^{(2)} = 0{,}51$	$Re^{(3)} = 7{,}41 \times 10^4$

Soluzione finale : $Re = 7.45 \times 10^4 \rightarrow V = \frac{Re\, \nu}{D} = 1{,}94 \ \frac{m}{s}$

Esiste un' altra soluzione (almeno una) in $Re = 2\times 10^5$, $C_D = 0.07$ e l' eq. $C_D Re^2 = 2{,}80 \times 10^9$ e' soddisfatta. In questo secondo caso $V = 5.2 \ \frac{m}{s}$.

B2. Il serbatoio si svuota per gravita' $\rightarrow Fr^{-2} = \frac{gL}{U^2}$ sara' il parametro importante

E' un problema che posso scrivere formalmente come :

$$t_{svuotamento} = f\left(\rho, U, L, g\right)$$

Altri parametri (come la viscosita') sono poco importanti.

Scegliendo ρ, U, L come G.F., dimensionalmente indipendenti, trovo :

$$\Pi_0 = \frac{tU}{L} = \tilde{f}\left(\frac{gL}{U^2}\right) = \tilde{f}\left(Fr^{-2}\right)$$

$$Fr_m = Fr_p \rightarrow \frac{U_m}{U_p} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{1/2} = 0.1 \rightarrow \Pi_{0\,m} = \Pi_{0\,p} \Rightarrow$$

$$\rightarrow t_p = t_m \frac{U_m}{U_p}\frac{L_p}{L_m} = t_m \left(\frac{L_p}{L_m}\right)^{1/2} = 3 \times 10 = 30 \ \text{min}.$$

B3.

Il moto è assialsimmetrico e non c'è nessun termine che genera velocità lungo θ. L'eq. di continuità è:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}=0 \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r)+\cancel{\frac{\partial u_z}{\partial z}}=0$$

compl. sviluppato, lo spessore δ è costante

$$(r u_r)=A \qquad u_r=\frac{A}{r}$$

$$\text{in } r=R:\ u_r=0 \ \rightarrow\ 0=\frac{A}{R}\ \rightarrow\ A=0\ \rightarrow\ \boxed{u_r=0}$$

q. di m. lungo z: $\quad \rho g+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\right]=0$

$$-\frac{r\rho g}{\mu}=\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_z}{dr}\right) \qquad \frac{du_z}{dr}=-\frac{\rho g r}{2\mu}+\frac{A}{r} \qquad u_z=-\frac{\rho g r^2}{4\mu}+A\ln r+B$$

$$u_z(R)=0=-\frac{\rho g R^2}{4\mu}+A\ln R+B$$

$$\frac{du_z}{dr}(R+\delta)=0=-\frac{\rho g}{2\mu}(R+\delta)+\frac{A}{R+\delta} \ \rightarrow\ A=\frac{\rho g}{2\mu}(R+\delta)^2$$

$$B=\frac{\rho g}{2\mu}\left(\frac{R^2}{2}-(R+\delta)^2\ln R\right)$$

$$Q=\int_R^{R+\delta}u_z\,2\pi r\,dr=2\pi\int_R^{R+\delta}-\frac{\rho g r^3}{4\mu}+A r\ln r+B r\,dr$$

sapendo che $\int r\ln r=\frac{r^2\ln r}{2}-\frac{r^2}{4}+\text{cst.}$

$$Q=2\pi\left\{-\frac{g}{16\nu}\left[(R+\delta)^4-R^4\right]+\frac{A}{2}\left[(R+\delta)^2\ln(R+\delta)-R^2\ln R\right]+\left(\frac{B}{2}-\frac{A}{4}\right)\left(2R\delta+\delta^2\right)\right\}$$

$$=\dots=\frac{\pi\rho g R^4}{8\mu}\left\{4\left(1+\frac{\delta}{R}\right)^4\ln\left(1+\frac{\delta}{R}\right)-\frac{\delta}{R}\left(2+\frac{\delta}{R}\right)\left[3\left(1+\frac{\delta}{R}\right)^2-1\right]\right\}=$$

$$\varepsilon=\frac{\delta}{R} \qquad =\frac{\pi\rho g R^4}{8\mu}\left\{4\left[\varepsilon+\frac{7}{2}\varepsilon^2+\frac{13}{3}\varepsilon^3+\frac{25}{12}\varepsilon^4+O(\varepsilon^5)\right]-\left(4\varepsilon+14\varepsilon^2+12\varepsilon^3+3\varepsilon^4\right)\right\}\simeq$$

$$\simeq\frac{16}{24}\frac{\pi\rho g R^4}{\mu}\left(\frac{\delta}{R}\right)^3 \ \Longrightarrow\ \delta\simeq\left(\frac{3\mu Q}{2\pi\rho g R}\right)^{1/3}$$

B4. $u_\theta = 0 \quad , \quad \dfrac{\partial}{\partial\theta} = 0$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r}\underbrace{(r u_r)}_{\psi_z} + \frac{\partial}{\partial z}\underbrace{(r u_z)}_{-\psi_r} = 0$$

$$\rightarrow \quad u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z} \quad , \quad u_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Moto di Stokes:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial r} = \mu\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r u_r)}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right] = \dfrac{\mu}{r}\left[-\dfrac{1}{r}\psi_{zr} + \psi_{zrr} + \psi_{zzz}\right] \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \mu\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right] = \dfrac{\mu}{r}\left[-\psi_{rrr} - \psi_{rzz} + \dfrac{1}{r}\psi_{rr} - \dfrac{1}{r^2}\psi_r\right] \end{cases}$$

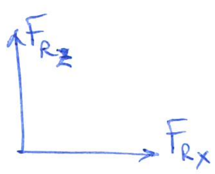
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r}\left[-\frac{1}{r}\psi_{zzr} + \psi_{zzrr} + \psi_{zzzz}\right] = -\frac{1}{r^2}\left[-\psi_{rrr} - \psi_{rzz} + \frac{1}{r}\psi_{rr} - \frac{1}{r^2}\psi_r\right]$$
$$+ \frac{1}{r}\left[-\psi_{rrrr} - \psi_{rrzz} - \frac{1}{r^2}\psi_{rr} + \frac{1}{r}\psi_{rrr} - \frac{1}{r^2}\psi_{rr} + \frac{2}{r^3}\psi_r\right]$$

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad E^2(E^2\psi) = E^2\left(\psi_{rr} - \frac{1}{r}\psi_r + \psi_{zz}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\psi_{rr} - \frac{1}{r}\psi_r + \psi_{zz}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\psi_{rr} - \frac{1}{r}\psi_r + \psi_{zz}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\psi_{rr} - \frac{1}{r}\psi_r + \psi_{zz}\right) =$$

$$= \psi_{rrrr} - \frac{2}{r^3}\psi_r + \frac{2}{r^2}\psi_{rr} - \frac{1}{r}\psi_{rrr} + \psi_{rrzz} - \frac{1}{r}\psi_{rrr} + \frac{1}{r^2}\psi_{rr} - \frac{1}{r^3}\psi_r - \frac{1}{r}\psi_{zzr} + \psi_{rrzz} - \frac{1}{r}\psi_{rzz} + \psi_{zzzz}$$

B5.



$p = p_{atm}$ dappertutto

$$\sum \vec{F}_R = \beta\,\dot m\,\vec V_{out} - \beta\,\dot m\,V_{in} \qquad \dot m = \rho V \frac{\pi d^2}{4} = 19370\ \frac{kg}{s}$$

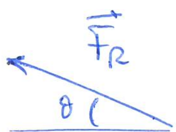
$$F_{Rx} = \beta\,\dot m\left(-\frac{\sqrt2}{2} - 1\right)V = 1.03 \times 19370 \times (-1.707) \times 42.7 = -1.454\ MN$$

$$F_{Rz} = \beta\,\dot m\,\frac{\sqrt2}{2}V = 0.602\ MN$$

La reazione F_{Rx} è quindi orientata nel verso delle x decrescenti.

$F_R = 1.574\ MN$

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{F_z}{F_x} = 22.5°$



B6. Dall'eq. dell'energia si ha:

$$h_L = H - h_T = \frac{v^2}{2g} f \frac{L}{D} \qquad v = \frac{4\dot{V}}{\pi D^2}, \; Re = \frac{4\dot{V}}{\pi D \nu} \qquad h_T = \frac{\dot{W}\eta}{\rho g \dot{V}}$$

$$D = \sqrt[5]{\frac{8 f L \dot{V}^2}{h_L g \pi^2}}$$

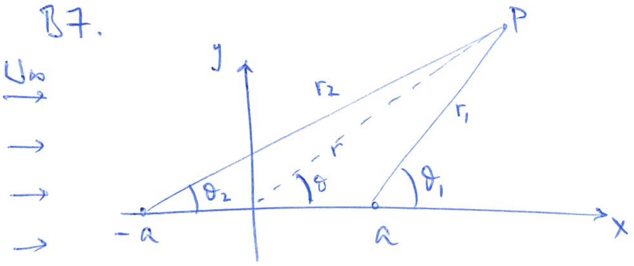
. In assenza di perdite $h_T = H \rightarrow D = \sqrt{\frac{4\dot{W}\eta}{\pi \rho g H v}} \simeq 0.16$ m

e $v = \sqrt{2gH}$

D	V	Re x 10^7	$\frac{\varepsilon}{D}$	f
0.16	44.3	3.92	0.00125	0.0195
0.75	11.31	0.84	0.00026	0.014
0.707	12.7	0.9	0.00028	0.014

$\mapsto$ $D \simeq 0.71$ m
$Re \simeq 9 \times 10^6$

B7.



Sovrappongo un moto uniforme, un pozzo in $x = a$ e una sorgente (di uguale portata $\dot{V}/L$) in $x = -a$;

per chiudere la linea rossa!

$$\psi = U_\infty r \sin\theta - \frac{\dot{V}/L}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) =$$

$$= U_\infty r \sin\theta - \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \operatorname{atan} \frac{2ar\sin\theta}{r^2 - a^2}$$

$$\phi = U_\infty r \cos\theta - \frac{\dot{V}/L}{2\pi}(\ln r_1 - \ln r_2) = U_\infty r \cos\theta - \frac{\dot{V}/L}{4\pi} \ln \frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} =$$

$$= U_\infty r \cos\theta - \frac{\dot{V}/L}{4\pi} \ln \frac{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}{r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta}$$

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = U_\infty \cos\theta - \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{2ar(r^2 - a^2)\cos\theta}{4a^2r^2\sin^2\theta + (r^2 - a^2)^2}$$

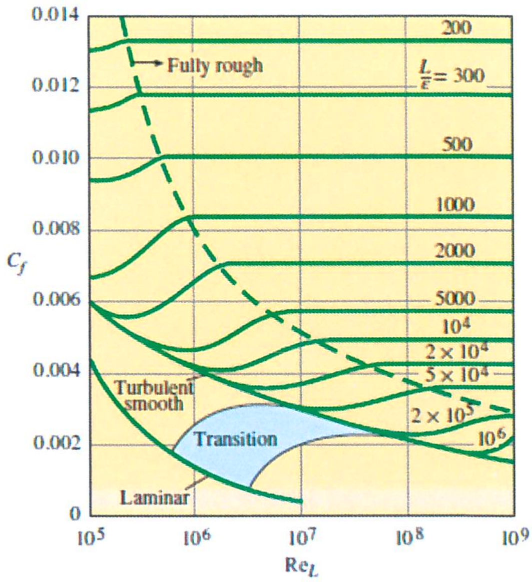
Nel pt di ristagno anteriore (di coordinate polari $r = 4$, $\theta = \pi$) si ha

$u_r = 0 \longrightarrow U_\infty = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \frac{1}{4} \frac{8\,(+15)}{15^2} = \frac{\dot{V}/L}{15\pi}$. Basta modificare la portata del pozzo/sorgente per "aprire" la curva rossa, in quanto la massa non è più conservata.

COMPITO DI MECCANICA DEI FLUIDI – 1 giugno 2018 – fila C

Esercizio 1. Dell'acqua scorre sopra un piano in calcestruzzo (scabrezza ε = 0.25 mm) lungo L = 0.5 m e largo b = 1 m. La forza viscosa esercitata dall'acqua sul piano in calcestruzzo viene stimata essere uguale a F = 1420 N. Con quale velocità sta scorrendo l'acqua?

Dati: ρ = 1000 kg/m^3; ν = 1.3 x 10^{-6} m^2/s.



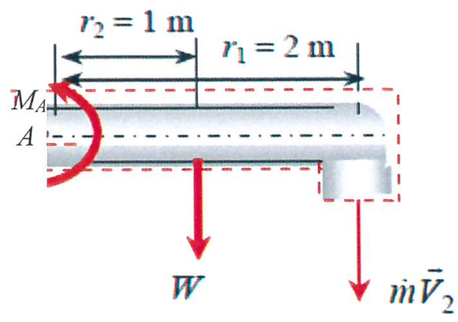
Esercizio 2. Dell'acqua (stessi parametri di cui all'esercizio 1) scorre per gravità sopra un piano inclinato di un angolo $\alpha = 35°$, formando un film sottile di spessore t = 10 cm. Il piano è lungo L = 0.5 m e profondo b = 2 m. Sopra il film liquido è presente un gas a pressione atmosferica che esercita uno sforzo trascurabile sull'interfaccia. Si scriva la relazione dimensionale che esprime la forza di attrito F esercitata dalla parete sul film d'acqua in funzione di un insieme di parametri dipendenti. Si adimensionalizzi tale relazione per formare una relazione formale tra numeri Π che si chiede di identificare. Vengono eseguiti dei test su un modello usando acetone (ρ = 785 kg/m^3; μ = 0.3 x 10^{-3} Pa s) in similitudine geometrica, con scala 1 : 2.25, e viene misurata una forza di 1 N. Quanto deve valere lo spessore del film di acetone? Si trovi la scala di riduzione dei tempi e la scala di riduzione delle forze tra modello e prototipo. Si trovi infine la forza che agisce sul film d'acqua.

Esercizio 3. Dell'acqua (stessi parametri dell'esercizio 1) scorre in moto permanente completamente sviluppato tra due lastre piane orizzontali distanti tra loro 30 mm (quindi: -15 mm < y < 15 mm). Se la velocità media dell'acqua vale 0.2 m/s, quanto vale lo sforzo di taglio τ_{xy} sulla lastra inferiore (in y = -15 mm) e nel piano medio (in y = 0 mm)?

Esercizio 4. Una soluzione approssimata dello strato limite incomprimibile e stazionario che si sviluppa su una lastra piana in assenza di gradiente di pressione esterno ha la forma: $\frac{u}{U_\infty} = 1 - e^{-a(x)\,y}$, con U_∞ la velocità esterna e la funzione $a(x)$ definita da: $a(x) = \sqrt{\frac{U_\infty}{4\,\nu\,x}}$, con ν la viscosità cinematica del fluido.

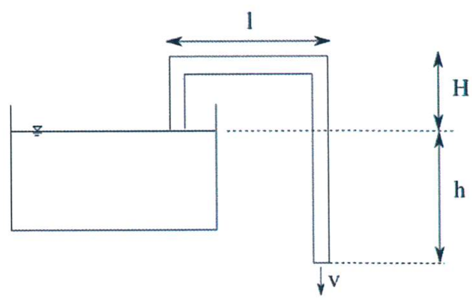
1. Si discuta sulla pertinenza della scelta fatta per $a(x)$.
2. Si calcoli la componente verticale v della velocità.
3. Si calcolino le tre grandezze caratteristiche dello strato limite δ_{99}, δ^* e θ.
4. Si calcoli lo sforzo di parete.

Esercizio 5. Dell'acqua viene pompata attraverso il condotto di figura, con moto incomprimibile e stazionario, sfociando in atmosfera (p_{gage} = 0 Pa). Si chiede di valutare il momento che agisce nel punto A, specificandone modulo, direzione e verso.

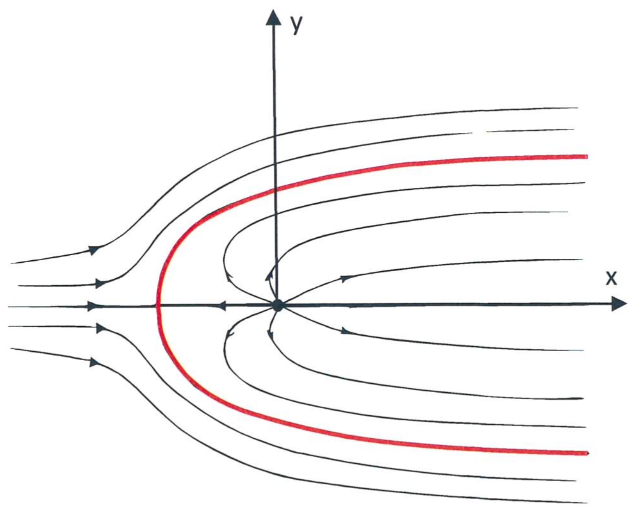


Dati: ρ = 1000 kg/m^3; d = 0.12 m (diametro del condotto), V = 4 m/s (velocità media dell'acqua); m/L = 15 kg/m (massa di condotto e acqua per unità di lunghezza).

Esercizio 6. Il sifone in ghisa (ε = 0.2mm) di figura ha diametro d = 0.2 m e scarica dell'acqua presa da un serbatoio direttamente in atmosfera. Calcolare la velocità dell'acqua in uscita dal sifone e la pressione nel punto A. Si assuma il coefficiente di perdita di ciascun gomito pari a $K_{Lgomito}$ = 1.1, e il coefficiente di perdita all'imbocco pari a $K_{L\,imbocco}$ = 0.5. Le dimensioni del sifone sono H = 2 m, h = 1.5 m, l = 1 m.



Esercizio 7. Quali moti potenziali è necessario sovrapporre per ottenere il moto intorno a un ovale semiaperto rappresentato in figura? Trovare le equazioni che descrivono la funzione di corrente e la funzione potenziale di velocità. Fissare le costanti che definiscono le suddette funzioni in modo tale che il corpo semi aperto (rappresentato in rosso) intersechi l'asse orizzontale in x = - 2. Quale altro moto potenziale si dovrebbe sovrapporre affinché l'ovale si chiuda? Che valore devono avere le costanti che definiscono quest'ultimo moto potenziale rispetto al caso precedente?



C1.

$$\frac{L}{\varepsilon} = \frac{0.5}{0.25 \times 10^{-3}} = 2000$$

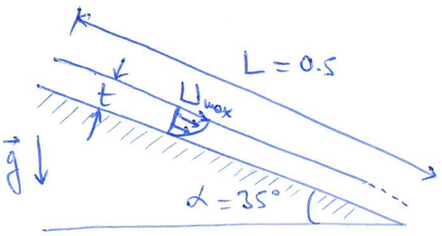
$$F = 1420\,\text{N} = c_f \tfrac{1}{2}\rho U_\infty^2 bL = c_f U_\infty^2\ 500 \times 1 \times 0.5 = 250\ c_f U_\infty^2$$

Supponiamo di essere nel regime completamente turbolento $\rightarrow c_f \cong 0.0071$

$$\Longrightarrow \quad U_\infty = \sqrt{\frac{1420}{250 \cdot 0.0071}} = 28.28\ \frac{m}{s}$$

$$\rightarrow \quad Re = \frac{U_\infty L}{\nu} = \frac{28.28 \times 0.5}{1.3 \times 10^{-6}} = 1.088 \times 10^{8}$$; l'ipotesi di moto in regime "fully rough" è giustificata.

C2.



$$\lambda = \frac{L_m}{L_p} = \frac{1}{2.25}$$

$$F = f(\rho, U_{max}, L, b, t, \alpha, g, \mu)$$

σ_s ininfluente

$$\frac{F}{\rho U_{max}^2 L^2} = \tilde{f}\left(\frac{b}{L}, \frac{t}{L}, \alpha, \frac{gL}{U_{max}^2}, \frac{\mu}{\rho U_{max} L}\right)$$

$$\tau = \frac{t_m}{t_p} = \frac{L_m/U_m}{L_p/U_p} = 0.\bar{4}\ \frac{U_p}{U_m}$$

Similitudine dinamica $\rightarrow$

$$\begin{cases} Fr_m = Fr_p \\ + \quad Re_m = Re_p \end{cases}$$

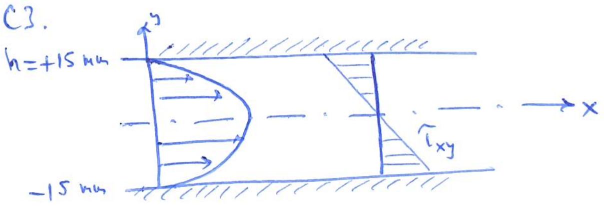
$$Fr_m = Fr_p \rightarrow \frac{L_m}{U_m^2} = \frac{L_p}{U_p^2} \rightarrow \frac{U_m}{U_p} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{1/2} = 0.\bar{6}$$

$$\Longrightarrow \tau = \frac{t_m}{t_p} = 0.2963$$

$Re_m = Re_p$ SODDISFATTA !

$$\varphi = \frac{F_m}{F_p} = \frac{\rho_m U_m^2 L_m^2}{\rho_p U_p^2 L_p^2} = 0.0690 \quad \rightarrow \quad F_p = \frac{F_m}{\varphi} = 14.51\ \text{N}$$

C3.



$$\frac{u}{U_{medio}} = \frac{3}{2h^2}\left(h^2-y^2\right) = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right)$$

$$\tau_{xy} = \mu\frac{du}{dy} \qquad \tau_w = \mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=-15\,mm} \qquad \left.\tau_{xy}\right|_{y=0} = \mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}$$

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\mu U_{medio}\left(-\frac{2y}{h^2}\right) \qquad \tau_w = 0.52\ Pa \qquad \left.\tau_{xy}\right|_{y=0} = 0$$

C4. $u = U_\infty\left(1-e^{-ay}\right)$

$a = a(x) = \sqrt{\dfrac{U_\infty}{4\nu x}}$ è una distanza^{-1} di diffusione viscosa, simile all'inverso dello spessore di strato limite di Blasius. Normalizzare y con a^{-1} è ragionevole per rendere lo strato limite "parallelo".

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U_\infty a' y e^{-ay} \qquad \text{con} \qquad a' = -\frac{1}{2}\frac{a}{x}$$

$\rightarrow$ continuità: $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -U_\infty a' y e^{-ay}$

$$v = -U_\infty a'\int y e^{-ay}\,dy = U_\infty\frac{a'}{a}\left(y e^{-ay} + \frac{1}{a}e^{-ay}\right) + \text{costante}$$

$$v(0) = 0 \rightarrow \text{costante} = -U_\infty\frac{a'}{a^2} \Rightarrow v = U_\infty\frac{a'}{a}\left[y e^{-ay} + \frac{1}{a}\left(e^{-ay}-1\right)\right]$$

$$\delta_{99} \rightarrow \left.u\right|_{\delta_{99}} = 0.99\,U_\infty = U_\infty\left(1-e^{-a\delta_{99}}\right) \Rightarrow -a\delta_{99} = \ln(0.01)$$

$$\delta_{99} = \frac{4.605}{a(x)}$$

$$\delta^* = \int_0^\infty\left(1-\frac{u}{U_\infty}\right)dy = \int_0^\infty e^{-ay}\,dy = -\frac{1}{a}\left.e^{-ay}\right|_0^\infty = \frac{1}{a(x)}$$

$$\Theta = \int_0^\infty\frac{u}{U_\infty}\left(1-\frac{u}{U_\infty}\right)dy = \int_0^\infty e^{-ay}-e^{-2ay}\,dy = \frac{1}{2\,a(x)}$$

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \mu U_\infty a \left. e^{-ay}\right|_{y=0} = \mu U_\infty a$$

C5.

$$\dot{m} = \rho A_c V = 1000 \ \frac{\pi (0,12)^2}{4} \ 4 = 45,24 \ kg/s$$

$$W = mg = 15 \times 2 \times 9,81 = 294,3 \ N/m$$

$$\sum \vec{M} = \sum_{out} \vec{r} \dot{m} \times \vec{V} - \sum_{in} \vec{r} \dot{m} \times \vec{V} .$$

Momenti antiorari sono positivi per definizione :

$$M_A - r_2 W = - r_1 \dot{m} V_2 \quad \Rightarrow \quad M_A = -70 \ Nm$$

Il momento delle forze esterne in A è quindi orario, di modulo 70 Nm

C6.

Eq. dell'energia tra i peli liberi :

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{K_i + 2K_g + 1 + \frac{fL}{D}}} \qquad L = 2H + h + \ell$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = 10^{-3}$$

$$V^{(0)} = \sqrt{2gh} = 5,42 \ \frac{m}{s} \quad , \quad Re^{(0)} = 1,1 \times 10^6$$

V	$Re \cdot 10^6$	f
5.42	1.1	0.019
2.67	0.53	0.021
2.65	0.53	0.021

$$\Rightarrow \quad V = 2.65 \ \frac{m}{s} \ , \ f \simeq 0.021$$

$$\frac{P_A}{\rho g} + (h + H) = f \ \frac{\frac{\ell}{2} + H + h}{D} \ \frac{V^2}{2g} + k_g \frac{V^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \quad P_A = \dots = -2,9 \times 10^4 \ Pa \qquad (P_{gage})$$

C7. Sovrappongo un flusso uniforme e una sorgente centrata nell'origine :

$$\psi = U_\infty r \sin\theta + \frac{\dot V/L}{2\pi}\theta \qquad \phi = U_\infty r \cos\theta + \frac{\dot V/L}{2\pi}\ln r$$

da cui
$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = U_\infty \cos\theta + \frac{\dot V/L}{2\pi r} \\ u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -U_\infty \sin\theta \end{cases}$$

Il punto $(-2, 0)$ è un punto di ristagno quindi lungo l'asse x abbiamo

$$u_r = -U_\infty + \frac{\dot V/L}{2\pi \cdot 2} \longrightarrow U_\infty = \frac{\dot V/L}{4\pi}$$

Affinché l'ovale si chiuda è sufficiente sovrapporre un pozzo sull'asse x a distanza arbitraria dall'origine di portata pari a $\dot V/L = 4\pi U_\infty$.