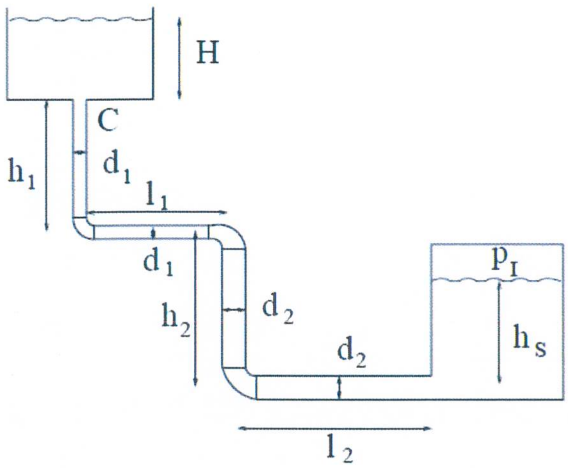
Esame parziale di meccanica dei fluidi, 14 giugno 2019 **FILA A**
Solo un foglio aiuti ammesso + diagramma di Moody

Esercizio 1
Si vuole stimare la resistenza di un prototipo di sottomarino che si deve muovere in acqua a velocità pari a 0.56 m/s (ρ_p = 1000 kg/m^3, μ_p = 1.14 x 10^{-3} Pa s). Si costruisce un modello in scala ridotta (1:8) che si prova in galleria del vento (ρ_m = 1.18 kg/m^3, μ_m = 1.85 x 10^{-5} Pa s). Si spieghi quale similitudine (parziale) deve essere usata tra quelle di Reynolds, Froude o Weber per affrontare il problema. Una volta scelta la corretta similitudine parziale, si valuti la velocità che deve essere usata per i test nel modello. Qual è il rapporto tra la scala di tempo caratteristica dei fenomeni fluidodinamici nel prototipo e quella nel modello? Se in galleria del vento si misura una forza resistente di 2.3 N, quanto varrà la resistenza del prototipo?

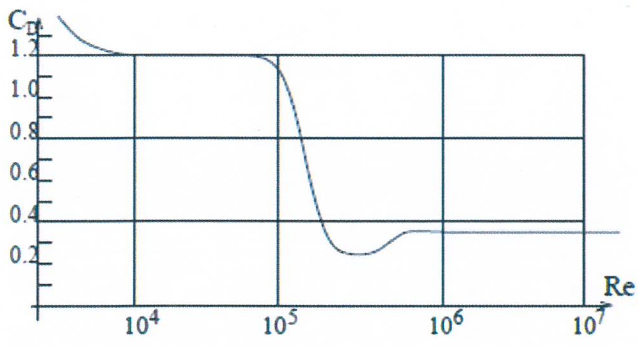
Esercizio 2



Dato il circuito di figura quale deve essere il livello dell'acqua H nel serbatoio affinché si abbia una portata di 100 l/min?

Dati: I condotti sono in plastica; h_1 = 2 m, h_2 = 2.5 m, l_1 = 2.2 m, l_2 = 3 m, d_1 = 1.5 cm, d_2 = 3 cm, h_S = 1 m, p_I = 150 000 Pa, $K_{L\ gomito}$ = 0.4, $K_{L\ uscita}$=0.5 (nel punto C), $K_{L\ ingresso}$ ≈ 0 (per il serbatoio a valle), ρ = 1000 kg/m^3, μ = 1.31 x 10^{-3} Pa s.

Esercizio 3

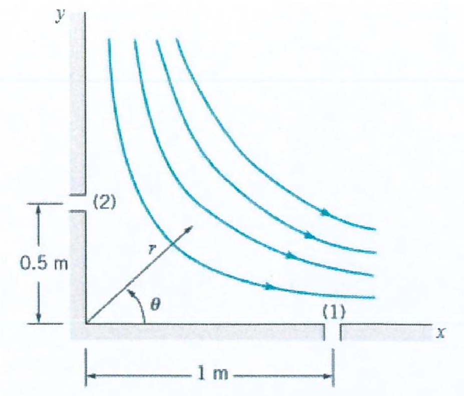


Un corpo ha un andamento del coefficiente di resistenza al variare del numero di Reynolds come riportato in figura. Il corpo ha dimensione caratteristica L = 0.25 m e, quando viene investito da una corrente uniforme a velocità U_1 = 3 m/s, fornisce un valore di resistenza pari a D_1 = 1.35 N. Sapendo che il fluido ha viscosità cinematica ν = 1.5 x 10^{-5} m^2/s, mostrare che il valore della resistenza è D_2 eccede i 300 N quando la velocità del fluido è pari a U_2 = 90 m/s.

Esercizio 4
Il coefficiente di attrito globale (ottenuto mediando il coefficiente locale su una distanza che va da 0 ad L) per uno strato limite senza gradiente di pressione vale $C_f = 1.328/Re_L^{1/2}$ nel caso laminare, e $C_f = 0.074/Re_L^{1/5}$ nel caso turbolento, con $Re_L = U\,L/\nu$. Nell'ipotesi che la transizione avvenga bruscamente a $Re_L = 10^6$ (cioè il moto è laminare nella regione dove Re_x è inferiore a 10^6, turbolento quando Re_x eccede 10^6), si calcoli il valore della resistenza di attrito totale per una lastra piana lunga 3 m, investita da una corrente d'acqua (ρ = 10^3 kg/m^3, ν = 10^{-6} m^2/s) in moto a U = 1 m/s.

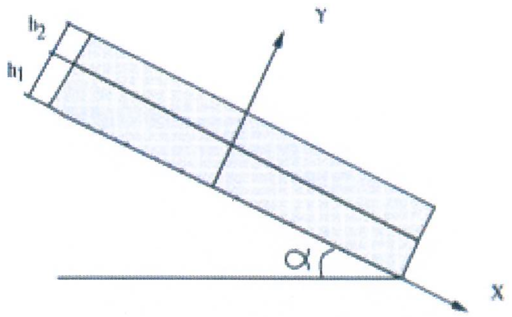
Esercizio 5

Un moto fluido 2D incomprimibile ed irrotazionale, posto su un piano orizzontale e vicino a un angolo di 90° come in figura, è descritto dalla funzione di corrente $\psi = 2\, r^2 \sin(2\theta)$. Si assuma che la densità del fluido sia 10^3 kg/m^3. Trovare l'espressione del potenziale di velocità e la pressione nel punto (2) nota la pressione in (1), p_1 = 30 kPa.



(a)

Esercizio 6



Due fluidi incomprimibili, immiscibili e viscosi scorrono sovrapposti uno all'altro su un piano inclinato di angolo α, per effetto della gravità. Non vi è gradiente di pressione imposto lungo x e il moto si può considerare stazionario e completamente sviluppato. I due fluidi, di densità ρ_1 e ρ_2 e viscosità μ_1 e μ_2, si dispongono su due strati di spessore costante, h_1 e h_2; il fluido superiore è in contatto, in $y = h_1 + h_2$, con aria a pressione atmosferica e viscosità trascurabile rispetto a μ_2. Determinare le distribuzioni di pressione e di velocità nei due strati.

14/6/2019 fila A

$\boxed{A1}$

$U_p = 0.56 \frac{m}{s}$, $\rho_p = 10^3 \frac{kg}{s}$, $\mu_p = 1.14 \times 10^{-3}$ Pa s

$\lambda = \frac{L_m}{L_p} = \frac{1}{8}$ $\rho_m = 1.18 \frac{kg}{m^3}$, $\mu_m = 1.85 \times 10^{-5}$ Pa s

Uso similitudine di Re (sottomarino immerso, non vi è l'effetto di superficie libera – $\cancel{Fr}$ – né vi sono onde capillari – $\cancel{We}$).

$$Re_m = Re_p \qquad \frac{\rho_m U_m L_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p U_p L_p}{\mu_p}$$

$$\boxed{U_m = U_p \frac{L_p}{L_m} \frac{\rho_p}{\rho_m} \frac{\mu_m}{\mu_p}} = 0.56 \times 8 \times \frac{10^3}{1.18} \times \frac{1.85 \times 10^{-5}}{1.14 \times 10^{-3}} = \boxed{61.6 \frac{m}{s}}$$

$$\tau_p = \frac{L_p}{U_p} \qquad \tau_m = \frac{L_m}{U_m} \qquad \boxed{\frac{\tau_p}{\tau_m} = \frac{L_p}{L_m} \frac{U_m}{U_p} = 8 \times \frac{61.6}{0.56} = 880}$$

$$F_m = 2.3 \text{ N} \qquad Ne_m = \frac{F_m}{\frac{1}{2} \rho_m U_m^2 L_m^2} = \frac{2 \times 2.3}{1.18 \times 61.6^2 \times L_m^2} = 1.02 \times 10^{-3} \frac{1}{L_m^2}$$

$$\boxed{F_p = Ne_p \frac{1}{2} \rho_p U_p^2 L_p^2} = Ne_m \frac{1}{2} \rho_p U_p^2 L_p^2 = 1.02 \times 10^{-3} \times \frac{10^3}{2} \times 0.56^2 \times 64$$

$$\boxed{= 10.2 \text{ N}}$$

$\boxed{A2}$

$$\dot{V} = 100 \frac{dm^3}{min} = 100 \times 10^{-3} \frac{m^3}{60 s} = 0.001\bar{6} \frac{m^3}{s}$$

$d_1 = 1.5$ cm $\qquad A_1 = \frac{\pi}{4} \times 1.5^2 \times 10^{-4} = 1.767 \times 10^{-4}$ m^2 $\qquad V_1 = 9.43 \frac{m}{s}$

$d_2 = 3$ cm $\qquad A_2 = \frac{\pi}{4} \times 9 \times 10^{-4} = 7.068 \times 10^{-4}$ m^2 $\qquad V_2 = 2.36 \frac{m}{s}$

Eq. energia:

$$\cancel{\frac{P_{1gage}}{\rho g}} + \underbrace{\cancel{\frac{V_1^2}{2g}}}_{\text{pelo libero quasi fermo}} + z_1 + \cancel{h_{pump,u}} = \frac{P_{2gage}}{\rho g} + \underbrace{\cancel{\frac{V_2^2}{2g}}}_{\text{pelo libero quasi fermo}} + z_2 + \cancel{h_{turbine,e}} + h_L$$

$$h_L = f_1 \frac{h_1 + l_1}{d_1} \frac{V_1^2}{2g} + f_2 \frac{h_2 + l_2}{d_2} \frac{V_2^2}{2g} + \left(K_{L\,gomiti} + K_{L\,uscita}\right) \frac{V_1^2}{2g}$$

$$Re_1 = \frac{\rho V_1 d_1}{\mu} = \frac{10^3 \times 9.43 \times 0.015}{1.31 \times 10^{-3}} = 1.08 \times 10^5 \xrightarrow{\text{Moody}} f_1 = 0.0175$$

$$Re_2 = \frac{\rho V_2 d_2}{\mu} = \frac{10^3 \times 2.36 \times 0.03}{1.31 \times 10^{-3}} = 5.40 \times 10^4 \xrightarrow{\text{Moody}} f_2 = 0.021$$

$$h_L = \left(0.0175 \frac{4.2}{0.015} + 1.3\right) \times \frac{9.43^2}{2 \times 9.81} + \left(0.4 + 0.021 \frac{5.5}{0.03}\right) \times \frac{2.36^2}{2 \times 9.81} = 29.30 \text{ m}$$

$$\cancel{\frac{V_1^2}{2g}} + (H + h_1 + h_2) = \frac{P_{2\,gage}}{\rho g} + \cancel{\frac{V_2^2}{2g}} + h_s + h_L$$

$$\boxed{H = \frac{50\,000}{9810} + \cancel{\frac{2.36^2}{2 \times 9.81}} + 1 + 29.30 - 4.5 \cancel{\frac{9.43^2}{2 \times 9.81}} = 30.90 \text{ m}}$$

A3

$L = 0.25$ m
$U_1 = 3$ m/s $\mapsto D_1 = 1.35$ N

$$\nu = 1.5 \times 10^{-5} \ \frac{m^2}{s} \Longrightarrow Re_1 = \frac{U_1 L}{\nu} = \frac{3 \times 0.25}{1.5 \times 10^{-5}} = 5 \times 10^4$$

Dal grafico: $C_{D_1} = 1.2 = \dfrac{D_1}{\frac{1}{2} \rho U_1^2 L^2} = \dfrac{2 \times 1.35}{\rho \times 9 \times 0.25^2} = \dfrac{4.8}{\rho}$

$$\rho = 4 \ \text{kg/m}^3$$

$$U_2 = 90 \ \text{m/s} \rightarrow Re_2 = \frac{U_2 L}{\nu} = \frac{90 \times 0.25}{1.5 \times 10^{-5}} = 1.5 \times 10^6$$

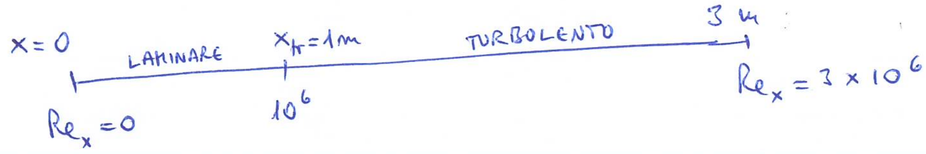
Dal grafico: $C_{D_2} = 0.30 \Longrightarrow \boxed{D_2 = \frac{1}{2} \rho U_2^2 L^2 C_{D_2} = }$

$$= 2 \times 90^2 \times (0.25)^2 \times 0.3 = \boxed{304 \text{ N}}$$

$\boxed{A4}$

$L = 3\ m \quad , \rho = 10^3 \ \frac{kg}{m^3} \quad , \mu = 10^{-3} \ Pa\ s \quad , \ U = 1 \ \frac{m}{s}$

$$Re_L = \frac{1 \times 3}{10^{-6}} = 3 \times 10^6$$



Se tutta la lastra fosse sotto un moto turbolento

avremmo :
$$D_{turb.} = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 L \ c_{f_T, L} = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 L \ \frac{0.074 \ \nu^{1/5}}{(U_\infty L)^{1/5}} = 5.62 \ N$$

La porzione turbolenta da $x = 0$ a $x = x_{tr}$ sarebbe :
$$D_{turb \ 0 \le x \le x_{tr}} = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \ x_{tr} \ c_{f_T, x_{tr}} = \rho U_\infty^2 \ x_{tr} \ \frac{0.074 \ \nu^{1/5}}{(U_\infty x_{tr})^{1/5}} = 2.33 \ N$$

Quindi :
$$D_{turb \ x_{tr} \le x \le L} = \frac{1}{2}(11.24 - 4.67) = 3.28 \ N$$

Inoltre :
$$D_{lam \ 0 \le x \le x_{tr}} = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 x_{tr} \ c_{f_{L}, x_{tr}} = 0.664 \ N$$

$$\boxed{D_{totale}} = D_{lam \ 0 \le x \le x_{tr}} + D_{turb \ x_{tr} \le x \le L} \ \boxed{= 3.95 \ N}$$

$\boxed{A5}$

$$\psi = 2 r^2 \sin(2\theta) \qquad u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 4 r \cos 2\theta$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -4 r \sin 2\theta$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 4 r \cos 2\theta \quad \longrightarrow \quad \phi = 2r^2 \cos 2\theta + g(\theta)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\left(-4r^2 \sin 2\theta + g'\right) = -4r \sin 2\theta$$

$$\longrightarrow \frac{g'}{r} = 0 \qquad g = cost \quad \mapsto \quad \boxed{\phi = 2r^2 \cos 2\theta}$$

(che posso arbitrariamente fissare a zero)

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left(U_2^2 - U_1^2\right)$$

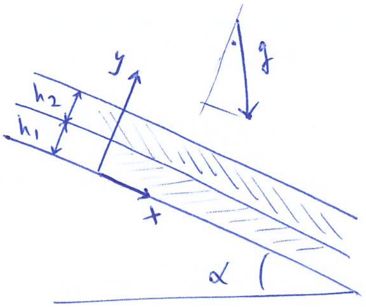
$$|U_1| = |u_{r_1}| = |4 r_1| = \left|4 \ \frac{m}{s}\right| = 4 \ \frac{m}{s}$$

$$U_2^2 - U_1^2 = -12 \ \frac{m^2}{s^2}$$

$$|U_2| = |u_{r_2}| = |-4 r_2| = \left|-2 \ \frac{m}{s}\right| = 2 \ \frac{m}{s}$$

$$\boxed{P_1 - P_2 = -6000 \ Pa} \qquad \boxed{P_2 = 36 \ kPa}$$

$\boxed{A6}$



$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = 0 \longrightarrow \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\boxed{v = 0}$$ (per la condizione di aderenza)

VALE PER ENTRAMBI GLI STRATI FLUIDI

$$\vec{\nabla} p = \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{g}$$ (per ambedue i fluidi)

x: $$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \sin\alpha = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{g}{\nu}\sin\alpha \ y + A$$

$$u = -\frac{g}{2\nu}\sin\alpha \ y^2 + Ay + B$$

y: $$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos\alpha$$

$$p = -\rho g \cos\alpha \ y + C$$

Fluido 1: $$u_1 = -\frac{g}{2\nu_1}\sin\alpha \ y^2 + A_1 y + B_1$$ $$u_1(0) = 0 \rightarrow \boxed{B_1 = 0}$$

Fluido 2: $$u_2 = -\frac{g}{2\nu_2}\sin\alpha \ y^2 + A_2 y + B_2$$ $$\left.\frac{\partial u_2}{\partial y}\right|_{h_1+h_2} = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{A_2 = \frac{g}{\nu_2}\sin\alpha\left(h_1 + h_2\right)}$$

Sull'interfaccia ($y = h_1$): $u_1 = u_2$, $\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \Rightarrow$

$$\begin{cases} -\frac{g}{2\nu_1}\sin\alpha \ h_1^2 + A_1 h_1 = +\frac{g}{\nu_2}\sin\alpha\left[h_1\left(\frac{h_1}{2} + h_2\right)\right] + B_2 \\ \mu_1\left[-\frac{g}{\nu_1}\sin\alpha \ h_1 + A_1\right] = \mu_2\left[-\cancel{\frac{g}{\nu_2}\sin}\alpha \ h_1 + \frac{g}{\nu_2}\sin\alpha\left(\cancel{h_1} + h_2\right)\right] \end{cases}$$

$$\boxed{A_1 = \frac{1}{\mu_1}\left[\rho_2 h_2 + \rho_1 h_1\right] g \sin\alpha}$$

$$\boxed{B_2 = g \sin\alpha \, h_1 \left[\frac{h_1}{2}\left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2}\right) + \rho_2 h_2 \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right)\right]}$$

$p_1 = p_2$ in $y = h_1$: $\quad -\rho_1 g \cos\alpha \, h_1 + C_1 = -\rho_2 g \cos\alpha \, h_1 + C_2$

$p_2 = p_{atm}$ in $y = h_1 + h_2$: $\quad -\rho_2 g \cos\alpha \left(h_1 + h_2\right) + C_2 = p_{atm}$

$$\boxed{\begin{aligned} C_2 &= p_{atm} + \rho_2 g \cos\alpha \left(h_1 + h_2\right) \\ C_1 &= p_{atm} + g \cos\alpha \left(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2\right) \end{aligned}}$$

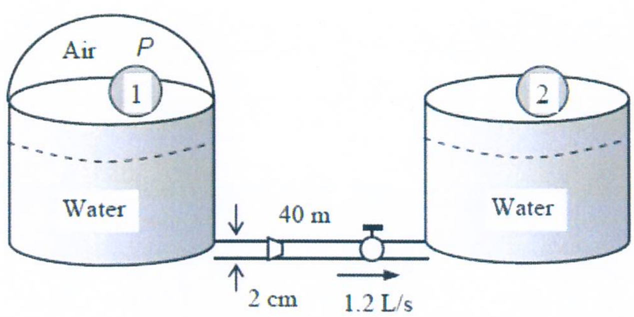
Esame parziale di meccanica dei fluidi, 14 giugno 2019 **FILA B**

Solo un foglio aiuti ammesso + diagramma di Moody

Esercizio 1

Si vuole studiare il comportamento di una palla da baseball che viene lanciata e si muove di moto rettilineo mentre ruota attorno ad un proprio asse. Le condizioni in aria sono: ρ_p = 1.18 kg/m^3, μ_p = 1.85 x 10^{-5} Pa s, V_p = 120 km/h e frequenza angolare ω_p = 50 rad/s. Immaginiamo di testare la stessa palla da baseball in un canale idrodinamico, mantenendo la palla immersa e lontana dalle pareti. Quale similitudine dinamica dobbiamo usare e perché? Le condizioni nel canale sono: ρ_m = 1000 kg/m^3, μ_m = 1.14 x 10^{-3} Pa s. A che velocità e frequenza (che si chiede di fornire in Hz) dobbiamo far spostare la palla nel modello?

Esercizio 2



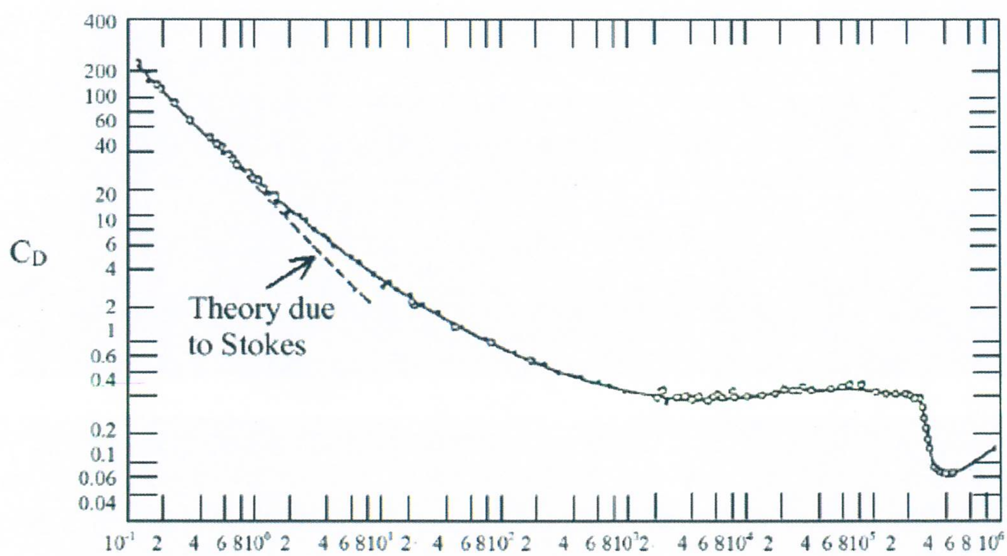
Due serbatoio molto grandi sono collegati da un condotto lungo 40 m, di diametro pari a 2 cm, e rugosità superficiale pari a ε = 0.26 mm. Il livello dell'acqua nei due serbatoi è inizialmente lo stesso e nel tempo varia lentamente. L'acqua scorre dal serbatoio 1 verso 2 per effetto della pressione dell'aria in 1, pressione che si chiede di determinare.

Dati: $K_{L\ \text{ingresso tubatura}}$ = 0.4, $K_{L\ \text{uscita tubatura}}$ = 1, $K_{L\ \text{prima valvola}}$ = 2, $K_{L\ \text{seconda valvola}}$ = 0.2, ρ = 1000 kg/m^3, μ = 1.31 x 10^{-3} Pa s, $\dot{V}$= 1.2 l/s.

Esercizio 3

Una sfera di ferro di diametro d precipita in acqua alla velocità U. Quanto vale U? Con quale velocità (ed in che verso) "precipiterebbe" la stessa sfera immersa nel mercurio?

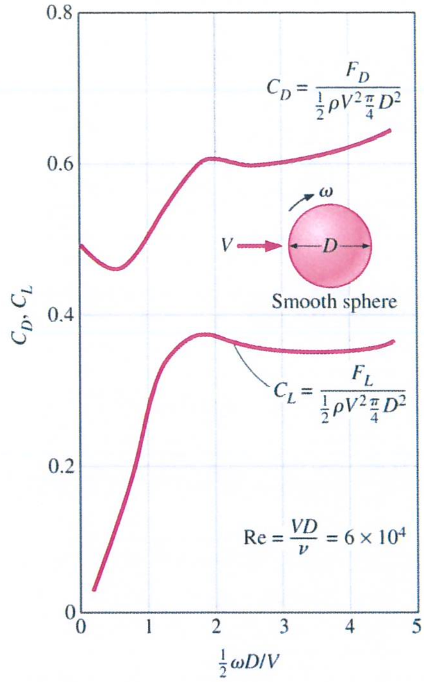
Dati: ρ_{Fe} = 7800 kg/m^3, ρ_{Hg} = 13600 kg/m^3, d = 8.3 mm, ν_{H2O}= 1.31 x 10^{-6} m^2/s, ν_{Hg}= 1.24 x 10^{-7} m^2/s.



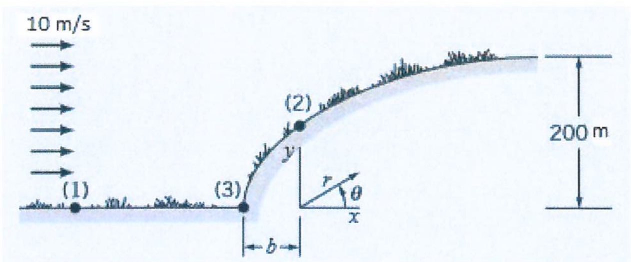
$$Re = \frac{VD}{\nu}$$

Esercizio 4

Si consideri la stessa palla da baseball di cui all'esercizio 1, di diametro D = 10 cm. A quale velocità deve essere messa in movimento in aria affinchè si possa usare il grafico a fianco. E in acqua? Supponiamo che la palla si sposti alle velocità trovate, rispettivamente in aria ed in acqua. Nei due casi qual è il valore della velocità angolare di rotazione che minimizza la forza di resistenza. Quanto vale la portanza L nei due casi?



Esercizio 5



Un vento a 10 m/s soffia verso una collina alta 200 m che si chiede di approssimare con la teoria potenziale come un semi-corpo di Rankine (sorgente nell'origine degli assi più moto uniforme). Si assuma che la densità dell'aria sia uguale a 1.2 kg/m^3. Trovare la portata (per unità di profondità) della sorgente nell'origine, il valore di *b* in figura, la quota del punto (2), il modulo della velocità in (2) e la differenza di pressione tra i punti (1) e (2).

Esercizio 6

Si consideri un flusso stazionario ed incomprimibile di un fluido viscoso newtoniano, descritto dal campo di velocità $u = -2xy$, $v = y^2 - x^2$, $w = 0$. Tale moto soddisfa il principio di conservazione della massa? Trovare il campo di pressione p(x, y, z), nota la pressione p_0 nel punto (0,0,0) e trascurando la gravità. Determinare l'equazione delle linee di corrente.

14/6/2019 fila B

$\boxed{B1}$ $\rho_p = 1.18\ kg/m^3$, $\mu_p = 1.85 \times 10^{-5}$ Pa s

$V_p = 120\ \frac{Km}{h} = 33.3\ \frac{m}{s}$ $f_p = 50\ \frac{rad}{s}$

Similitudine di Re, St (Fr non interviene lontano da superfici libere)

$\rho_m = 10^3\ kg/m^3$, $\mu_m = 1.14 \times 10^{-3}$ Pa s $L_m = L_p$

$$\boxed{Re_m = Re_p} \quad \frac{\rho_m V_m \cancel{L_m}}{\mu_m} = \frac{\rho_p V_p \cancel{L_p}}{\mu_p} \quad \boxed{V_m = V_p \times \frac{\rho_p}{\rho_m} \times \frac{\mu_m}{\mu_p}} =$$

$$= 33.3 \times \frac{1.18}{10^3} \times \frac{1.14 \times 10^{-3}}{1.85 \times 10^{-5}} = \boxed{2.42\ \frac{m}{s} = 8.73\ \frac{Km}{h}}$$

$$\boxed{St_m = St_p} \quad \frac{f_m \cancel{L_m}}{U_m} = \frac{f_p \cancel{L_p}}{U_p} \quad \boxed{f_m = f_p \frac{U_m}{U_p}} =$$

$(\omega = 2\pi f)$

$$= \frac{50}{2\pi} \times \frac{8.73}{120} = \frac{3.64}{2\pi}\ \frac{rad}{s} = \boxed{0.579\ Hz}$$

$\boxed{B2}$

$$\frac{P_{1gage}}{\rho g} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} + \cancel{z_1} = \cancel{\frac{P_{2gage}}{\rho g}} + \cancel{\frac{V_2^2}{2g}} + \cancel{z_2} + h_L$$

$$h_L = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + K_{L\,tot} \frac{V^2}{2g} = \left(f \frac{L}{D} + 3.6\right) \frac{V^2}{2g}$$

$$P_{1\,gage} = \rho \frac{V^2}{2} \left(f \frac{40}{0.02} + 3.6\right) = 500\ V^2 \left(f\ 2000 + 3.6\right)$$

$$\dot{V} = 1.2\ \frac{dm^3}{s} = 1.2 \times 10^{-3}\ \frac{m^3}{s} \qquad V = \frac{4\dot{V}}{\pi d^2} = \frac{4.8 \times 10^{-3}}{\pi\ (0.02)^2} = 3.82\ \frac{m}{s}$$

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{3.82 \times 0.02}{1.31 \times 10^{-6}} = 5.83 \times 10^4 \qquad \frac{\varepsilon}{d} = \frac{0.26 \times 10^{-3}}{0.02} = 0.013$$

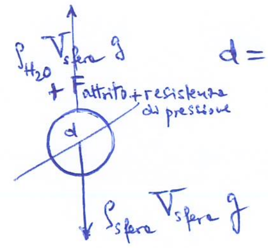
Da Moody: $f \cong 0.042$

$$\boxed{P_{1\,gage} = 6.39 \times 10^5\ Pa} \qquad \boxed{P_1 = 7.39 \times 10^5\ Pa}$$

B3

Nell' acqua la sfera cade, nel mercurio sale per effetto della forza di Archimede.

H_2O



$d = 8.3 \times 10^{-3}\ m$

$\vec{g} \downarrow$

$$\rho_{sfera} V_{sfera}\, g = \rho_{H_2O} V_{sfera}\, g + \frac{1}{2} \rho U^2 \frac{\pi d^2}{4} c_D$$

$$6800 \cdot \frac{4}{3} \pi \left(\frac{8.3 \times 10^{-3}}{2}\right)^3 9.81 = 500 \times c_D U^2 \frac{\pi (8.3 \times 10^{-3})^2}{4} \qquad c_D U^2 = 0.738$$

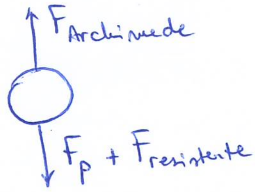
$$C_D \frac{U^2 d^2}{\nu^2} = C_D Re^2 = \frac{0.738\,(8.3 \times 10^{-3})^2}{(1.31)^2 \times 10^{-12}} = 2.96 \times 10^7$$

✓

$C_D \cong 0.4$, $Re \simeq 8600 \longrightarrow U \simeq 1.36\ \frac{m}{s}$

Nel mercurio si avrebbe:

Hg



$$(\rho_{Hg} - \rho_{Fe}) \times \frac{1}{6} \cancel{\pi}\, d^{\cancel{3}} \times 9.81 = 500\, c_D U^2 \frac{\cancel{\pi}}{4} \cancel{d^2}$$

$$c_D U^2 = \frac{5800}{6} \times 8.3 \times 10^{-3} \times 9.81 \times \frac{4}{500} = 0.630$$

$C_D \simeq 0.4 \rightarrow U = 1.255\ \frac{m}{s} \rightarrow Re = \frac{1.255 \times 8.3 \times 10^{-3}}{1.24 \times 10^{-7}} = 8.4 \times 10^4$ ✓

B4

$Re = 6 \times 10^4$

H_2O : $Re = \frac{V D}{\nu} = \frac{V \times 0.1}{1.14 \times 10^{-6}}$ $\qquad V_{H_2O} = 0.684\ \frac{m}{s}$

aria : $Re = \frac{V \times 0.1}{1.57 \times 10^{-5}}$ $\qquad V_{aria} = 9.41\ \frac{m}{s}$

Resistenza minima quando $\frac{1}{2} \frac{\omega D}{V} \simeq 0.5$ e in corrispondenza di tale valore si ha $C_L \simeq 0.12$

$$\omega_{H_2O} = \frac{V_{H_2O}}{\Delta} = \frac{0.684}{0.1} = 0.068 \ \frac{rad}{s}$$

$$\omega_{aria} = \frac{V_{aria}}{\Delta} = \frac{9.41}{0.1} = 0.941 \ \frac{rad}{s}$$

$$L_{H_2O} = C_L \frac{1}{2} \rho U_{H_2O}^2 \frac{\pi D^2}{4} = 0.12 \frac{1}{2} 1000 (0.684)^2 \frac{\pi \ 0.01}{4} = 0.22 \ N$$

$$L_{aria} = 0.12 \frac{1}{2} 1.18 (9.41)^2 \pi \frac{0.01}{4} = 0.05 \ N$$

$\boxed{B5}$

Sorgente nell'origine degli assi più moto uniforme (semi-corpo di Rankine)

$$\psi = Vy + \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\theta = V r \sin\theta + \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\theta$$

Alla sommità del corpo si ha $\theta \to 0$, $y = H$

$$\psi_{\text{linea di corrente di superficie}} = VH$$

Questa stessa linea di corrente passa anche nel punto (2) e nel punto di ristagno (3)

(2) $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, y_2? $x_2 = 0$ $\qquad VH = V y_2 + \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\frac{\pi}{2}$

(3) $\theta_3 = \pi$, $y_3 = 0$ x_3? $\qquad VH = \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\theta_3 = \frac{\dot{V}/L}{2}$

Quindi la portata della sorgente è: $\boxed{\dot{V}/L} = 2VH = $

$$= 2 \times 10 \times 200 = \boxed{4000 \ \frac{m^2}{s}}$$

Inoltre:

$$\boxed{y_2 = H - \frac{\dot{V}/L}{4V} = H - \frac{2VH}{4V} = \frac{H}{2} = 100 \ m}$$

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = V\cos\theta + \frac{\dot{V}/L}{2\pi r} = V\cos\theta + \frac{2VH}{2\pi r} = V\left[\cos\theta + \frac{H}{\pi r}\right]$$

$$u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = V\sin\theta$$

Nel punto di ristagno in (3) si ha $\vartheta_3 = \pi$, $r_3 = b$

$$u_r = V\left[\cos\pi + \frac{H}{\pi b}\right] \qquad u_r = 0 \iff \boxed{b = \frac{H}{\pi} = 63.66\ m}$$

$$u_\vartheta = V \sin\pi = 0$$

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho\left(U_1^2 - U_2^2\right)$$

$$U_1^2 = u_{r_1}^2 + u_{\vartheta_1}^2 = V^2\left[\cos^2\vartheta + \frac{H^2}{\pi r^2} + \frac{2H\cos\vartheta}{\pi r}\right] + V^2\sin^2\vartheta$$

(1) : $r_1 \to \infty$, $\vartheta_1 = \pi$ $\;\vdash\; U_1^2 = V^2$

$$U_2^2 = V^2\left[\cancel{\cos^2\frac{\pi}{2}} + \frac{H^2 4}{\pi H^2} + \cancel{\frac{2H\cos\pi/2}{\pi H/2}}\right] + V^2\sin^2\frac{\pi}{2} = V^2\left[1 + \frac{4}{\pi}\right]$$

(2) : $r_2 = \frac{H}{2}$, $\vartheta_2 = \pi/2$

$$\boxed{p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho V^2\left[\cancel{1} - \cancel{1} - \frac{4}{\pi}\right] = \frac{2}{\pi}\rho V^2 = \frac{2}{\pi}\times 1.2\times 100 = 76.4\ Pa}$$

$\boxed{B6}$

$u = -2xy$, $v = y^2 - x^2$ $\;\vdash\;$ moto 2D stazionario $\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -2y + 2y = 0$ ✓

$$\begin{cases} \rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}\right) \\ \rho\left[u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \end{cases}$$

$\boxed{\frac{\partial p}{\partial z} = 0}$, $w = 0$

p uniforme lungo z

$$\rho\left[+4xy^2 - (y^2 - x^2)2x\right] = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho\left[+4x^2y + (y^2 - x^2)2y\right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(-\cancel{2} + \cancel{2}\right)$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 2xy^2 + 2x^3 \longrightarrow p = -2\rho\left[\frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right] + f_1(y)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 2\rho\left[x^2 y\right] - f_1' = \rho\left(2x^2y + 2y^3\right)$$

$$\Longrightarrow f_1' = -2\rho y^3 \Longrightarrow f_1 = -\frac{1}{2}\rho y^4 + A$$

costante che posso fissare ~~[illegible]~~ con la condizione al contorno in $(0,0,0)$

Quindi: $$p = -\frac{\rho}{2}\left(x^2+y^2\right)^2 + A$$

$$p = p_0 \text{ in } x = y = 0 \Longrightarrow \boxed{p = p_0 - \frac{\rho}{2}\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -2xy \qquad \psi = -xy^2 + f_2(x)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = y^2 - x^2 \qquad -\frac{\partial \psi}{\partial x} = y^2 - f_2'$$

$$\rightarrow f_2' = x^2 \qquad f_2(x) = \frac{x^3}{3} + B$$

$$\boxed{\psi = -xy^2 + \frac{x^3}{3} + B}$$

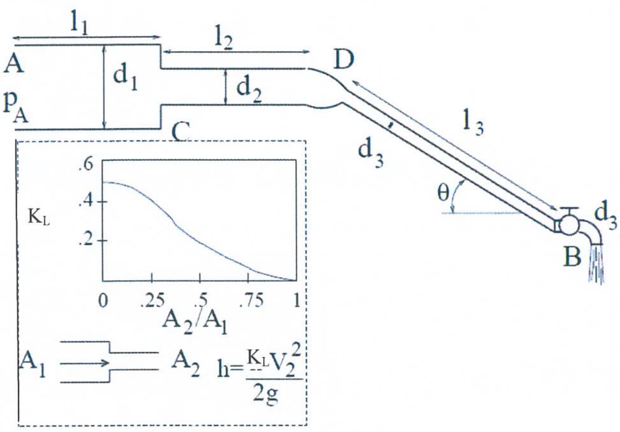
Esame parziale di meccanica dei fluidi, 14 giugno 2019 **FILA C**

Solo un foglio aiuti ammesso + diagramma di Moody

Esercizio 1

Un modello di velivolo in galleria del vento è soggetto ad una forza resistente di modulo pari a D_m = 1500 N. Se il propulsore del prototipo ha potenza massima pari a $\dot{W}$ = 3.5 x 10^5 W, quale sarà la massima velocità del prototipo in condizioni di similitudine dinamica? Si assumano le stesse condizioni termofisiche dell'aria per modello e prototipo.

Esercizio 2



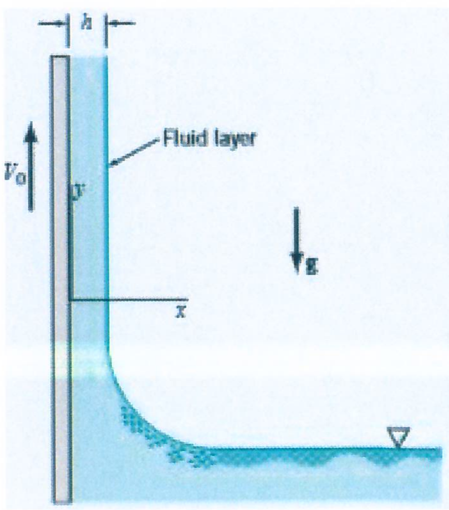
Nel dispositivo in figura transita una portata di acqua pari a 27 l/min. Quanto deve valere la pressione in A affinché il sistema rimanga in condizioni stazionarie?

Nota: la figura nel riquadro fornisce la variazione del coefficiente di perdita di carico concentrata, in funzione del rapporto tra le aree, nel caso di un brusco restringimento di sezione.

Dati: l_1 = 4 m, l_2 = 3 m, l_3 = 8 m, d_1 = 10 cm, d_2 = 3 cm, d_3 = 1 cm, ε = 0.12 mm, θ = 30°, $K_{L\ in\ D}$ = 1, $K_{L\ rubinetto\ in\ B}$ = 2, ρ = 10^3 kg/m^3, μ = 1.31 x 10^{-3} Pa s.

Esercizio 3

Un nastro trasportatore passa attraverso un recipiente che contiene un liquido di viscosità nota, molto più grande della viscosità dell'aria ambiente. Il nastro si muove verticalmente con velocità constante V_0 mettendo in movimento uno strato liquido di spessore h costante (non si consideri la regione iniziale vicino al bagno di liquido). Si assuma che il moto sia stazionario, laminare e completamente sviluppato e, in assenza di gradiente di pressione imposto, si determini la distribuzione di velocità, la velocità sull'interfaccia x = h, la portata volumetrica per unità di profondità e la velocità media del liquido nello strato. Per quale valore di velocità V_0 si ottiene uno strato con portata di fluido nulla?



Esercizio 4

Si consideri un moto permanente, bidimensionale ed incomprimibile descritto dalla funzione potenziale di velocità $\phi = 5\,(x^2 - y^2) + 2\,x - 4\,y$. Dopo aver verificato che tale moto è irrotazionale, si calcolino le componenti del vettore velocità u e v, e la funzione di corrente.

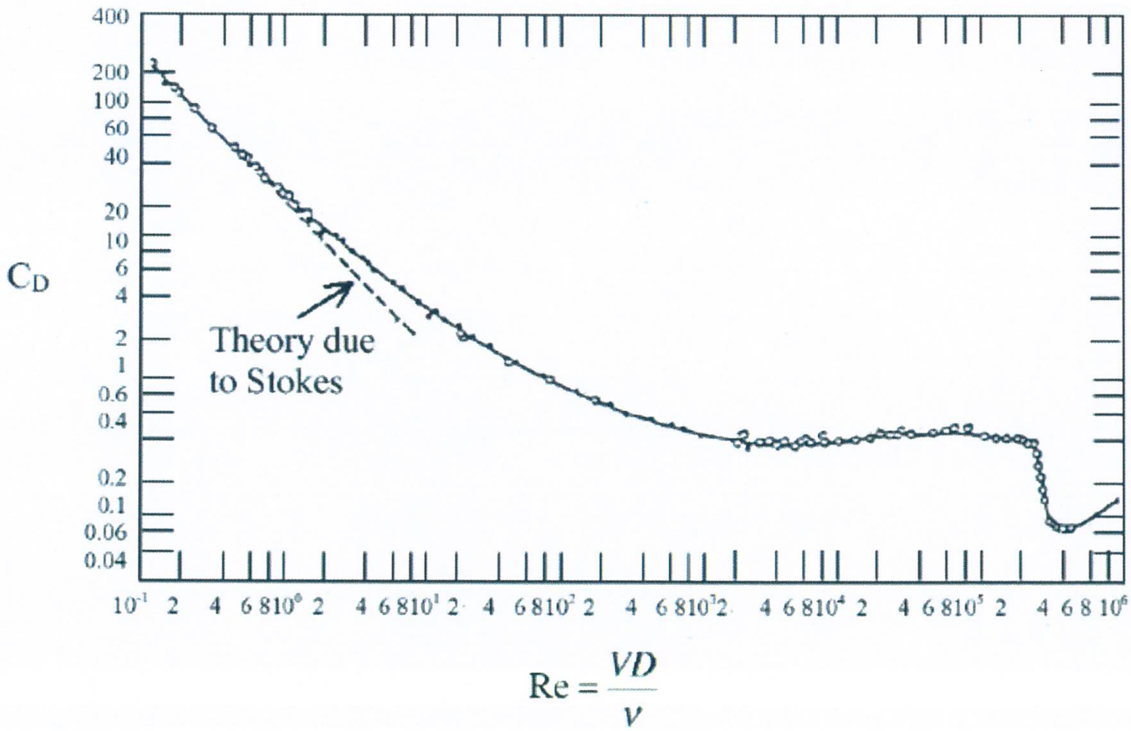
Esercizio 5

Una bolla d'aria sferica di diametro D sale in un recipiente pieno d'acqua per effetto della forza di Archimede. Quando la bolla si muove di moto di Stokes, si trova che la resistenza vale: $F_D = 2\,\pi\,\mu\,D\,U$ (il coefficiente 2 invece del solito 3 è legato al fatto che ora l'acqua può scorrere sulla superficie della bolla). Trascurando le forze di massa aggiunta e il peso della bolla e assumendo che la bolla salga a velocità costante, si determini il diametro massimo della bolla affinché l'approssimazione di Stokes rimanga accettabile. Per il valore trovato del diametro, a che velocità risale la bolla? Si calcoli il coefficiente di resistenza C_D.

Dati: $\nu_{H2O} = 1.31 \times 10^{-6}\ m^2/s$.

Esercizio 6

Si supponga ora che la bolla di cui all'esercizio precedente abbia diametro pari a 50 mm. Usando la figura sottostante (assumendo che i risultati in figura siano validi sia per una sfera solida che per una bolla), si calcoli C_D, il numero di Reynolds e la velocità di risalita della bolla.



14/6/2019 fila C

C1

$D_m = 1500\ N$

$\dot{W}_p = 3.5 \times 10^5\ W \qquad \dot{W}_p = D_p U_p$

$Ne_m = Ne_p$ se $Re_m = Re_p$

$$\frac{D_m}{\frac{1}{2}\rho_m U_m^2 L_m^2} = \frac{D_p}{\frac{1}{2}\rho_p U_p^2 L_p^2} \quad \text{se} \quad \frac{U_m L_m}{\nu_m} = \frac{U_p L_p}{\nu_p} \rightarrow U_p L_p = U_m L_m$$

$$D_p = D_m \left(\frac{U_p}{U_m}\right)^2 \left(\frac{L_p}{L_m}\right)^2 = D_m$$ in condizioni di similitudine di Re

$$U_p = \frac{\dot{W}_p}{D_p} = \frac{3.5 \times 10^5}{1500} = 233\ \frac{m}{s}$$

In condizioni standard $c_s = 340\ \frac{m}{s} \longrightarrow Ma = \frac{233}{340} = 0.68$

(siamo in condizioni di Mach per le quali potrebbe essere necessario fare anche una similitudine parziale di Mach)

Attenzione però: se avessi fatto $Ma_p = Ma_m \longrightarrow U_p = U_m$

e la similitudine di Re sarebbe stata soddisfatta solo

per $\lambda = \frac{L_m}{L_p} = 1$ ...

C2

$$\dot{V} = 27\ \frac{l}{min} = 27\ \frac{10^{-3}\ m^3}{60\ s} = 4.5 \times 10^{-4}\ \frac{m^3}{s}$$

$$V_2 = \frac{4\dot{V}}{\pi d_2^2} = \frac{18 \times 10^{-4}}{\pi \times 9 \times 10^{-4}} = 0.637\ \frac{m}{s} \qquad Re_2 = \frac{V_2 d_2}{\nu} = 14580$$

$$V_3 = \frac{4\dot{V}}{\pi d_3^2} = \frac{18 \times 10^{-4}}{\pi \times 10^{-4}} = 5.73\ \frac{m}{s} \qquad Re_3 = \frac{V_3 d_3}{\nu} = 43740$$

$$\frac{\epsilon}{d_2} = \frac{0.12 \times 10^{-3}}{3 \times 10^{-2}} = 0.004 \qquad \frac{\epsilon}{d_3} = \frac{0.12 \times 10^{-3}}{10^{-2}} = 0.012$$

$$\xrightarrow[\text{Moody}]{} f_2 \cong 0.035 \qquad \xrightarrow[\text{Moody}]{} f_3 \cong 0.042$$

Nella prima parte, analogamente:

$$v_1 = \frac{18 \times 10^{-4}}{\pi \times 10^{-2}} = 5.73 \times 10^{-2} \qquad Re_1 = \frac{5.73 \times 10^{-2} \times 10^{-1}}{\nu} = 4374$$

$$\frac{\epsilon}{d_1} = \frac{0.12 \times 10^{-3}}{0.1} = 0.0012 \xrightarrow[\text{Moody}]{} f_1 = 0.039$$

$$h_{L_{tot}} = f_1 \frac{l_1}{d_1}\frac{v_1^2}{2g} + f_2 \frac{l_2}{d_2}\frac{v_2^2}{2g} + f_3 \frac{l_3}{d_3}\frac{v_3^2}{2g} + \sum_i K_{L_i}\frac{v_i^2}{2g}$$

$$= 0.039 \frac{4}{0.1}\frac{5.73^2 \times 10^{-4}}{2 \times 9.81} + 0.035 \frac{3}{0.03}\frac{0.637^2}{2 \times 9.81} + 0.042 \frac{8}{0.01}\frac{5.73^2}{2 \times 9.81} + \sum_i K_{L_i}\frac{v_i^2}{2g}$$

$$= 2.6 \times 10^{-4} + 0.0724 + 56.228 + \overbrace{0.5 \times \frac{0.637^2}{2 \times 9.81}}^{0.0103} + \overbrace{3 \times \frac{5.73^2}{2 \times 9.81}}^{5.0203} =$$

dal grafico

$\boxed{K_{L_C} = 0.5}$ perché $\frac{A_2}{A_1} = \frac{d_2^2}{d_1^2} = 0.09$ $\rightarrow$ vel. da usare v_2

$K_{L_D} = 1$

$K_{L_{rubinetto}} = 2$ $\rightarrow$ velocità da usare: v_3

$$h_{L_{Tot}} = 66,36 \text{ m}$$

Eq. energia

$$\frac{P_{gage\,A}}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \cancel{\frac{P_{gage\,B}}{\rho g}} + \frac{v_3^2}{2g} + \cancel{z_3} + h_L \qquad z_1 = l_3 \sin\theta = 4 \text{ m}$$

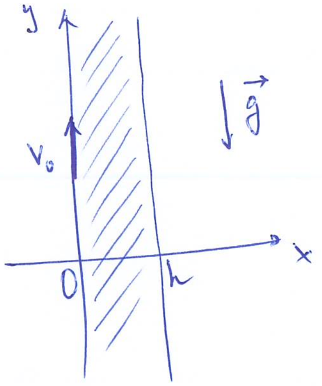
$$\boxed{P_{gage\,A}} = \frac{1}{2}\rho\left(v_3^2 - v_1^2\right) - z_1 + \rho g h_L =$$

$$= \frac{1}{2}10^3\left(5.73^2 - 5.73^2 \times 10^{-4}\right) - 4 + 9810 \times 66.36 =$$

$$= 667402 \text{ Pa} \simeq \boxed{6.7 \times 10^5 \text{ Pa}}$$

$$\boxed{P_A \cong 7.7 \times 10^5 \text{ Pa}}$$

$\boxed{C3}$



Completamente sviluppato: $\frac{\partial \vec u}{\partial y}=0$

$\frac{\partial u}{\partial x}+\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}=0$ $\quad \boxed{u=0}$ per l'aderenza alle parete

$$\begin{cases} 0 = -\cancel{\frac{\partial p}{\partial y}} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \rho g \\ u\Big|_{x=0} = V_0 \\ \mu \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=h} = 0 \end{cases}$$

$$\mu \frac{\partial v}{\partial x} = \rho g x + A \qquad v = + \frac{\rho g}{2\mu} x^2 + \frac{A}{\mu} x + \cancel{B}$$

$B = V_0$ per l'aderenza

$$0 = \rho g h + A$$

$$\rightarrow \boxed{v = \frac{\rho g}{2\mu} x^2 - \frac{\rho g h}{\mu} x + V_0}$$

$$\boxed{v_{interfaccia} = v(x=h) = V_0 - \frac{1}{2}\frac{\rho g h^2}{\mu}}$$

$$\boxed{\dot V / L} = \int_0^h v \, dx = V_0 h + \frac{\rho g}{2\mu}\left[\frac{h^3}{3} - h^3\right] = \boxed{-\frac{\rho g h^3}{3\mu} + V_0 h}$$

$$\boxed{\bar V = \frac{\dot V / L}{h} = V_0 - \frac{\rho g h^2}{3\mu}}$$

La portata si annulla per $\boxed{V_0 = \frac{\rho g h^2}{3\mu}}$.

$\boxed{C4}$

$$\phi = 5(x^2 - y^2) + 2x - 4y$$

Moto irrot. se $\nabla^2 \phi = 0$

In questo caso: $\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 5(2-2) = 0$ ✓

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 10x + 2 \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -10y - 4$$

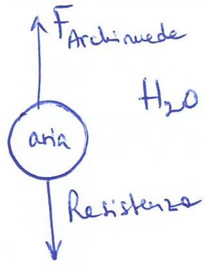
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 10x + 2 \qquad \psi = 10xy + 2y + f(x)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\left(10y + f'\right) = -10y - 4$$

$$f' = 4 \qquad f = 4x + A$$

$$\boxed{\psi = 10xy + 2y + 4x + A}$$

$\boxed{C5}$



$$\frac{1}{6}\cancel{\pi} d^{\cancel{3}} \rho_{H_2O}\, g = 2\cancel{\pi}\mu_{H_2O} \cancel{d}\, U_\infty$$

$$\rightarrow U_\infty = \frac{1}{12}\frac{\rho_{H_2O}\, g\, d^2}{\mu_{H_2O}}$$

Stokes accettabile finché $Re \le 1$

$$\frac{\rho_{H_2O} U_\infty d}{\mu_{H_2O}} \le 1 \qquad d_{max} = \frac{\mu_{H_2O}}{\rho_{H_2O} U_\infty} \Rightarrow \cancel{\frac{12}{g}\left(\frac{\mu_{H_2O}}{d\,\rho_{H_2O}}\right)^2}$$

$$d_{max}^3 = \frac{12\,\mu_{H_2O}^2}{\rho_{H_2O}^2\, g} = \frac{12 \times 1.31^2 \times 10^{-12}}{9.81} = 2.1 \times 10^{-12}\ m^3$$

$$\boxed{d_{max} = 1.28 \times 10^{-4}\ m \simeq 0.12\ mm}$$

La velocità corrispondente è: $\boxed{U_\infty = \frac{\nu_{H_2O}}{d_{max}} = \frac{1.31 \times 10^{-6}}{1.28 \times 10^{-4}} = 1.02 \times 10^{-2}\ \frac{m}{s}}$

~~C6~~ ~~D = 0.05 m~~

$$\boxed{C_D = \frac{2F_D}{\rho U_\infty^2 \frac{\pi D^2}{4}} = \frac{16\cancel{\pi}\mu D U_\infty}{\rho U_\infty^2 \cancel{\pi} D^2} = \frac{16}{Re} = 16} \quad (\text{se } Re = 1)$$

$\boxed{C6}$

$D = 0.05\ m$

Adesso $F_D = C_D \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \frac{\pi D^2}{4} = F_{Arch} =$

$$= \frac{1}{6}\pi D^3 \rho g$$

$$\rightarrow C_D U^2 = \frac{4}{3} D g = 0.654 \left[\frac{m^2}{s^2}\right] \Longrightarrow C_D Re^2 = \frac{4}{3}\frac{D^3 g}{\nu^2} = 9.53 \times 10^8$$

Posso iterare :

$$Re = 5 \times 10^4 \longrightarrow C_D = \frac{9.53 \times 1\cancel{0}^{8}}{25 \times 1\cancel{0}^{8}} = 0,38$$

e osservo che mi trovo in una spiaggia di valori costanti di C_D.

Se prendo $\boxed{C_D = 0.4}$ $\longrightarrow$ $\boxed{Re = \left(\frac{9.52 \times 10^8}{0.4}\right)^{1/2} = 4.88 \times 10^4}$

$$\boxed{U = \frac{Re\, \nu}{D} = \frac{4.88 \times 10^4 \times 1.31 \times 10^{-6}}{0.05} = 1.28 \ \frac{m}{s}}$$