Fila A

Es. 1

$\rho_p = 1028\ kg/m^3 \qquad \mu_p = 1.88 \times 10^{-3}\ Pa\ s \qquad U_p = 5\ \frac{m}{s}$

$\rho_m = 998\ kg/m^3 \qquad \mu_m = 10^{-3}\ Pa\ s \qquad \lambda = \frac{L_m}{L_p} = \frac{1}{20}$

Similitudine di Reynolds : $\boxed{U_m} = \frac{\rho_p U_p L_p}{\mu_p} \frac{\mu_m}{\rho_m L_m} =$

$= 1.88^{-1} \cdot 5 \cdot \frac{1028}{998} \cdot 20 = \boxed{54.8\ \frac{m}{s}}$

$\boxed{\Gamma} = \frac{L_m}{U_m} \frac{U_p}{L_p} = 20^{-1} \frac{5}{54.8} = 4.56 \times 10^{-3}$

$c_{D_p} = c_{D_m} \longrightarrow D_p = \frac{D_m}{\rho_m U_m^2 L_m^2} \rho_p U_p^2 L_p^2 = 208 \frac{1028}{998} \left(\frac{5}{54.8}\right)^2 20^2 =$

$D_m = 208\ N \qquad = 713\ N$

$\dot{W}_p = U_p D_p = 5 \times 713 = 3.56\ KW$

Es. 2

$p_{gage} = p - p_{atm} = 9.8 \times 10^5\ Pa$

$\varepsilon = 0.02\ mm = 2 \times 10^{-5}\ m$

$\Sigma K_L = 0.5 + 2 \times 0.3 = 1.1$

$\Sigma L = 500 + 150 + 200 = 850\ m$

Eq. energia : $\frac{p_{gage}}{\gamma} + h = \frac{v^2}{2g}\left(1 + f\frac{\Sigma L}{D} + \Sigma K_L\right) + L_2$

$\dot{V} = 0.2\ \frac{m^3}{s} = v \frac{\pi D^2}{4} \longrightarrow v = \frac{0.8}{\pi D^2} = \frac{0.2546}{D^2}$

$100 + 100 = \frac{0.0033}{D^4}\left(2.1 + f\frac{850}{D}\right) + 150$

$$50\, D^5 = 0.00694\, D + 2.805\, f$$

Procedura iterativa : $D^{(n+1)} = \sqrt[5]{1.388 \times 10^{-4}\, D^{(n)} + 0.0561\, f}$

	$D^{(n)}$ [m]	$v\ \left[\frac{m}{s}\right]$	Re	$\frac{\varepsilon}{D}$	f	D^{n+1} [m]
n=0	0.2	6.36	1.27×10^6	10^{-4}	0.0133	0.239
n=1	0.239	4.46	1.06×10^6	8.3×10^{-5}	0.0130	0.238
n=2	0.238	4.49	1.07×10^6	8.4×10^{-5}	0.0130	$\boxed{0.238}$

Es. 3

$$\phi = U\left[x + h\, e^{-2\pi \frac{y}{\ell}} \sin\left(2\pi \frac{x}{\ell}\right)\right]$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = U\left[1 + 2\pi \frac{h}{\ell}\, e^{-2\pi \frac{y}{\ell}} \cos\left(2\pi \frac{x}{\ell}\right)\right]$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -U\, 2\pi \frac{h}{\ell}\, e^{-2\pi \frac{y}{\ell}} \sin\left(2\pi \frac{x}{\ell}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -U\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2 h\, e^{-2\pi \frac{y}{\ell}} \sin\left(2\pi \frac{x}{\ell}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = U\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2 h\, e^{-2\pi \frac{y}{\ell}} \sin\left(2\pi \frac{x}{\ell}\right)$$

Siccome $\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ il potenziale e' accettabile.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow \psi = U\left[y - h\, e^{-2\pi \frac{y}{\ell}} \cos\left(2\pi \frac{x}{\ell}\right)\right] + f(x)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = U\, \frac{2\pi h}{\ell}\, e^{-2\pi \frac{y}{\ell}} \sin\left(2\pi \frac{x}{\ell}\right) + f'(x)$$

$f'(x) = 0$ (paragonando con l'espressione di v trovata precedentemente) $\rightarrow f(x) = \text{cost}$.

La costante la posso porre arbitrariamente a zero:

$$\psi = U\left[y - h\, e^{-2\pi \frac{y}{\ell}} \cos\left(2\pi \frac{x}{\ell}\right)\right]$$

La parete è una linea di corrente (ad es. $\psi = 0$) $\rightarrow$

$$y = h\, e^{-2\pi \frac{y}{\ell}} \cos\left(2\pi \frac{x}{\ell}\right)$$

$$\rightarrow \quad y\, e^{+2\pi \frac{y}{\ell}} = h \cos\left(2\pi \frac{x}{\ell}\right)$$

$$\left| y\, e^{2\pi \frac{y}{\ell}} \right| < h \qquad \left|\frac{y}{\ell}\right| e^{2\pi \frac{y}{\ell}} < \frac{h}{\ell} \ll 1$$

$\rightarrow \left|\frac{y}{\ell}\right| \ll 1 \rightarrow y \ll \ell \rightarrow$ con buona approx la parete è definita da $y \cong h \cos\left(2\pi \frac{x}{\ell}\right)$

Bernoulli tra l'origine e un punto molto distante dalla parete:

$$\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)\Big|_{\text{origine}} + \frac{p}{\rho}\Big|_{\text{origine}} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2} U^2$$

$$u_{\text{origine}} = U\left(1 + 2\pi \frac{h}{\ell}\right)$$

$$v_{\text{origine}} = 0$$

$$\boxed{c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = -4\pi \frac{h}{\ell}\left(1 + \pi \frac{h}{\ell}\right)}$$

Es. 4

$$Re_{\text{cilindro}} = \frac{UD}{\nu} = 6 \times 10^4 \longrightarrow c_D = 0.445$$

$Re_{\text{lastra}} = \frac{UL}{\nu} = 9.42 \times 10^4$ il moto è ancora laminare su tutta la lunghezza $\left(\pi \frac{D}{2}\right)$ della lastra.

lastra: $C_{D_L} = \dfrac{1.328}{Re_L^{1/2}} = 0.00433$

area cilindro "vista" dal fluido

$$D_{cilindro} = C_{D\,cilindro}\ \frac{1}{2}\rho U^2 \underbrace{D\times 1}_{} = 0.445\ \frac{1}{2}10^3\cdot 1^2\times 0.06 = 13.35\ N$$

$$D_{lastra} = C_{D_L}\ \frac{1}{2}\rho U^2 L \cdot 2 = 0.00433\cdot 10^3\cdot 1^2\cdot \frac{\pi\cdot 0.06}{2} = 0.408\ N$$

2 facce

La resistenza per la lastra è dovuta interamente all'attrito; nel caso del cilindro la resistenza è superiore rispetto al caso della lastra ed è principalmente una resistenza di pressione.

Es. 5

Eq. continuità: $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r u_r) = 0 \rightarrow r u_r = F(\theta) \qquad u_r = \dfrac{F(\theta)}{r}$

Eq. di Stokes $(\vec{\nabla} p = \mu \nabla^2 \vec{u})$ lungo la direzione radiale:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} = \frac{\mu}{r^3} F'' \qquad (1)$$

e lungo la direzione azimutale:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{2\mu}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \frac{2\mu}{r^3}F' \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{2\mu}{r^2}F' \qquad (2)$$

Derivo la (1) rispetto a θ, la (2) rispetto ad r e uguaglio:

$$F''' + 4F' = 0$$

Se derivo la (2) rispetto a θ: $\dfrac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = \dfrac{2\mu}{r^2}F''$ e

questo mi permette di scrivere $F'' = \dfrac{r^2}{2\mu}\dfrac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = \dfrac{r^3}{\mu}\dfrac{\partial p}{\partial r}$

$$\rightarrow \quad 2r \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2}$$

Sulle due pareti, $\theta = 0, \theta_0$, si può applicare l'approssimazione di strato limite e imporre che il gradiente normale di pressione e' nullo:

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad \text{per} \quad \theta = 0, \theta_0$$

Domanda supplementare: $\quad p = R(r)\, \Theta(\theta)$

$$\rightarrow \quad \underbrace{2r \frac{R'}{R}}_{\text{funzione solo di } r} = \underbrace{\frac{\Theta''}{\Theta}}_{\text{funzione solo di } \theta} = -\lambda^2 \qquad \lambda^2 = \text{costante} > 0$$

segno $-$ per avere sin e cos lungo la direzione θ

Risolviamo separatamente i due problemi:

$$\frac{dR}{R} = -\frac{\lambda^2}{2} \frac{dr}{r} \quad \rightarrow \quad R(r) = A\, r^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

$$\Theta'' = -\lambda^2 \Theta \quad \rightarrow \quad \Theta(\theta) = B \cos(\lambda\theta) + C \sin(\lambda\theta)$$

La soluzione e' quindi: $\quad p(r,\theta) = r^{-\frac{\lambda^2}{2}} \left[c_1 \cos(\lambda\theta) + c_2 \sin(\lambda\theta) \right]$

$$c_1 = AB \qquad c_2 = AC$$

Per applicare le condizioni al contorno serve $\frac{\partial p}{\partial \theta}$:

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \lambda\, r^{-\frac{\lambda^2}{2}} \left[-c_1 \sin(\lambda\theta) + c_2 \cos(\lambda\theta) \right]$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad \text{per} \quad \theta = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda r^{-\frac{\lambda^2}{2}} c_2 = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial \vartheta}(\vartheta_0) = 0 = \lambda r^{-\frac{\lambda^2}{2}} \left[-c_1 \sin(\lambda \vartheta_0) \right]$$

$c_1 = 0$ (soluzione triviale) non è accettabile $\longrightarrow$

$$\lambda \vartheta_0 = n\pi \quad , \quad n = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots$$

$\rightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{n\pi}{\vartheta_0}}$ questi sono gli autovalori del problema.

La soluzione è: $\boxed{p(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{-\frac{\lambda_n^2}{2}} \cos(\lambda_n \theta)}$

Per trovare i coefficienti c_n della serie sfrutto la relazione di ortogonalità delle funzioni coseno (la stessa che si usa per trovare i coefficienti della serie di Fourier) :

$$\int_0^{\vartheta_0} p(r,\theta) \cos(\lambda_m \theta) \, d\vartheta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{-\frac{\lambda_n^2}{2}} \int_0^{\vartheta_0} \cos\left(n\pi \frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right) \cos\left(m\pi \frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right) d\vartheta =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{-\frac{\lambda_n^2}{2}} \vartheta_0 \int_0^1 \cos(n\pi\tilde{\vartheta}) \cos(m\pi\tilde{\vartheta}) \, d\tilde{\vartheta} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{-\frac{\lambda_n^2}{2}} \vartheta_0 \int_0^1 \frac{\cos(n+m)\pi\tilde{\vartheta} + \cos(n-m)\pi\tilde{\vartheta}}{2} \, d\tilde{\vartheta}$$

se $n = m = 0 \rightarrow \quad c_0 = \frac{1}{\vartheta_0} \int_0^{\vartheta_0} p(r,\theta) \, d\vartheta$

se $n = m = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \rightarrow \quad c_m = \frac{2}{\vartheta_0} r^{\frac{n^2\pi^2}{\vartheta_0^2}} \int_0^{\vartheta_0} p(r,\theta) \cos\left(n\pi \frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right) d\vartheta$

Es. 6

$$u = U_\infty \sin \frac{\pi y}{2\,\delta(x)} \quad \text{per} \quad 0 < y \leq \delta(x)$$

$$u = U_\infty \quad \text{per} \quad y \geq \delta(x)$$

$\delta(x)$ rappresenta lo spessore dello strato limite.

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \sin\frac{\pi y}{2\delta}\right) dy = \delta + \frac{2\delta}{\pi}\cos\frac{\pi y}{2\delta}\Big|_0^\delta =$$

$$= \delta + \frac{2\delta}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 0.3633\ \delta(x)$$

$$\theta = \int_0^\delta \sin\frac{\pi y}{2\delta}\left(1 - \sin\frac{\pi y}{2\delta}\right) dy = -\frac{2\delta}{\pi}\cos\frac{\pi y}{2\delta}\Big|_0^\delta - \frac{2\delta}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\ dx =$$

$$= -\frac{2\delta}{\pi}\left[\cancel{\cos\frac{\pi}{2}} - \cos 0 + \frac{1}{2}\left(x - \sin x\cos x\right)\Big|_0^{\pi/2}\right] =$$

$$= -\frac{2\delta}{\pi}\left[-1 + \frac{\pi}{4}\right] = 0.1366\ \delta(x)$$

$$\tau_w = \mu\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \mu\frac{\pi}{2\delta}U\cos\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)\Big|_{y=0} = \frac{\pi}{2\delta}\mu U$$

$$c_{f_x} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \pi\frac{\nu}{U\,\delta(x)}$$

$$= \frac{\pi}{Re_{\delta_{99}}}$$

(nel caso di Blasius si ha $c_{f_x} = \frac{3.26}{Re_{\delta_{99}}}$)

$c_{f_L} = \frac{1}{L}\int_0^L c_{f_x}\,dx$ si potrebbe integrare se fosse noto $\delta = \delta(x)$

Fila B

$$\Delta\rho = \rho_{liquido} - \rho_{aria}$$

Es. 1 $\quad T = f(\sigma_s, \Delta\rho, R)$

$\sigma_s, \Delta\rho, R$ sono dimensionalmente indipendenti; le prendo quindi come G.F. $\rightarrow \quad \Pi_0 = \dfrac{T}{\sqrt{\dfrac{\Delta\rho R^3}{\sigma_s}}} = \text{cost.}$

Deduco quindi che il periodo delle oscillazioni è direttamente proporzionale alla scala di tempo $\sqrt{\dfrac{\Delta\rho\, R^3}{\sigma_s}}$.

Nel caso in oggetto la scala di tempo vale:

$$\sqrt{\frac{\Delta\rho\, R^3}{\sigma_s}} = \left(\frac{948.75 \times 27 \times 10^{-9}}{0.065}\right)^{1/2} = 0.02 \text{ s}$$

cioè le oscillazioni hanno alta frequenza e il fenomeno avviene molto rapidamente

Scala di velocità: $\dfrac{R}{\sqrt{\dfrac{\Delta\rho\, R^3}{\sigma_s}}} = \sqrt{\dfrac{\sigma_s}{\Delta\rho\, R}} = 0.15 \ \dfrac{m}{s}$

scala di accelerazione: $\dfrac{R}{\Delta\rho\,\dfrac{R^3}{\sigma_s}} = \dfrac{\sigma_s}{\Delta\rho\, R^2} = 7.61 \ \dfrac{m}{s^2}$

Se entra in gioco anche la gravità:

$$\Pi_0 = \frac{T}{\sqrt{\dfrac{\Delta\rho\, R^3}{\sigma_s}}} = f(\Pi_1) = f\left(g\,\frac{R^2\Delta\rho}{\sigma_s}\right)$$

numero di Bond $= \dfrac{\text{forze gravitazionali}}{\text{forze di tensione superficiale}}$

La gravità non gioca alcun ruolo se $Bo \ll 1$ $\rightarrow$

$$\frac{g R^2 \Delta\rho}{\sigma_s} \ll 1 \quad \rightarrow \quad R \ll \sqrt{\frac{\sigma_s}{g \Delta\rho}} = 2.6 \text{ mm}$$

Nel nostro caso ($R = 3$ mm) la gravità potrebbe avere un ruolo significativo.

Se anche la viscosità fosse importante:

$$\pi_0 = \frac{T}{\sqrt{\frac{\Delta\rho R^3}{\sigma_s}}} = f(Bo, \underset{\uparrow}{Ca})$$

Ca = numero di capillarità,

$$Ca = \frac{\mu W}{\sigma_s} = \frac{\mu}{\sqrt{\Delta\rho R \sigma_s}} = \frac{\text{forze viscose}}{\text{forze legate a } \sigma_s}$$

$$Ca = \frac{10^{-3}}{\sqrt{948.75 \times 3 \times 10^{-3} \times 0.065}} = 2.32 \times 10^{-3}$$ $\rightarrow$ le forze viscose sono trascurabili

Es. 2 Equazione dell'energia tra due punti sui peli liberi:

$$h_1 + h_{pump,u} = (L_2 + h_2) + \frac{V^2}{2g}\left(f \frac{\Sigma L}{D} + \Sigma K_L\right)$$

$$\Sigma L = L_1 + L_2 + L_3 = 675 \text{ m} \qquad h_1 = 50 \text{ m}; \; h_2 = 75 \text{ m}$$

$$\Sigma K_L = K_{L\,imbocco} + K_{L\,sbocco} + 2 K_{L\,gomito} + \left(\frac{1}{\eta} - 1\right)^2$$

Valvola aperta ($\eta = 1$): $\Sigma K_L = 1.4$

$$\rightarrow \quad 50 + 120 = 75 + 75 + \frac{V^2}{2g}\left(f \frac{675}{D} + 1.4\right)$$

$$20 \cdot 2g = \frac{\dot{V}^2}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2}\left(f \frac{675}{D} + 1.4\right)$$

$$392.4 = \frac{7.94 \times 10^{-3}}{D^4}\left(f\,\frac{675}{D} + 1.4\right)$$

$$D^5 = 0.01366\, f + 2.834 \times 10^{-5}\, D$$

La procedura iterativa è: $D^{(n+1)} = \sqrt[5]{0.01366\, f + 2.834 \times 10^{-5}\, D^{(n)}}$

	$D^{(n)}$ [m]	v [$\frac{m}{s}$]	Re	f	$D^{(n+1)}$
$n=0$	0.2	2.228	4.45×10^5	0.0133	0.180
$n=1$	0.180	2.751	4.95×10^5	0.0129	0.179
$n=2$	0.179	2.781	4.98×10^5	0.0129	$\boxed{0.179}$

Supponiamo adesso che la valvola sia semi-chiusa:

$$392.4 = \frac{2.59 \times 10^{-3}}{(0.179)^4}\left(f\,\frac{675}{0.179} + 1.4 + \left(\frac{1}{\eta} - 1\right)^2\right)$$

Adesso si ha $v = \dfrac{0.04 \times 4}{\pi\,(0.179)^2} = 1.590\ \dfrac{m}{s} \rightarrow Re = 2.85 \times 10^5$

$$\rightarrow f = 0.0147$$

$$\Rightarrow 155.54 = 55.43 + 1.4 + \left(\frac{1}{\eta} - 1\right)^2$$

$$\frac{1}{\eta} - 1 = \sqrt{98.71} \Rightarrow \boxed{\eta = 0.091}$$

Es. 3

$$u = a\,(x^2 - y^2) = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = -2\,a\,x\,y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Dalla prima delle due ho:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = a x^2 - a y^2 \longrightarrow \psi = a x^2 y - \frac{a}{3} y^3 + f(x)$$

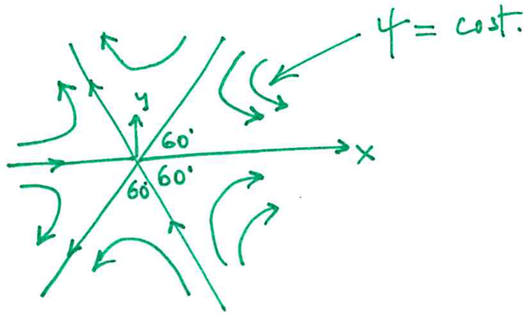
derivando questo risultato rispetto ad x : $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2 a x y + f'(x)$

Dall'espressione di v trovo che $f'(x) = 0 \implies f(x) =$ costante ;

arbitrariamente pongo la costante uguale a zero e ho quindi:

$$\psi = a y \left(x^2 - \frac{y^2}{3} \right)$$

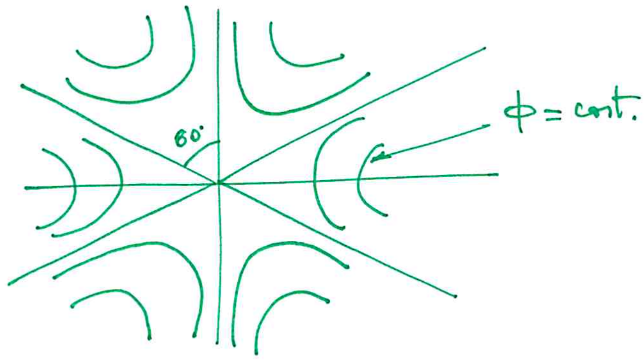
Le linee di corrente sono :



La componente z della vorticità è: $\vec{\zeta} \cdot \vec{e}_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} =$

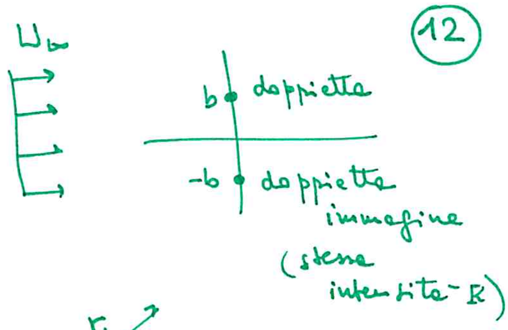
$$-2ay - (-2ay) = 0$$

Il moto è irrotazionale e quindi esiste ϕ, potenziale di velocità. Integrando si trova che $\phi = a x \left(-y^2 + \frac{x^2}{3} \right)$ (anche in questo caso una costante di integrazione è stata posta a zero). Le linee equipotenziali sono ortogonali alle linee di corrente e hanno questa forma:

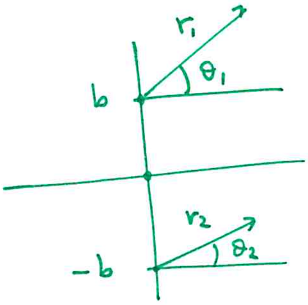


Es. 4

Con il metodo delle immagini:



$$\psi = U_\infty y - K \frac{\sin\theta_1}{r_1} - K \frac{\sin\theta_2}{r_2}$$



Conviene esprimere la doppietta con le coordinate cartesiane, noto che

$$\begin{cases} r_1^2 = x^2 + (y-b)^2 \\ r_2^2 = x^2 + (y+b)^2 \end{cases}$$

$$\to \psi = U_\infty y - K\left[\frac{r_1 \sin\theta_1}{r_1^2} + \frac{r_2 \sin\theta_2}{r_2^2}\right] = U_\infty y - K\left[\frac{(y-b)}{x^2+(y-b)^2} + \frac{(y+b)}{x^2+(y+b)^2}\right]$$

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = U_\infty - K\left[\frac{x^2-(y-b)^2}{\left[x^2+(y-b)^2\right]^2} + \frac{x^2-(y+b)^2}{\left[x^2+(y+b)^2\right]^2}\right]$$

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = K\left[\frac{-2x(y-b)}{\left[x^2+(y-b)^2\right]^2} + \frac{-2x(y+b)}{\left[x^2+(y-b)^2\right]^2}\right]$$

Sulla lastra $(y=0)$: $\quad u = U_\infty - 2K \dfrac{x^2-b^2}{(x^2+b^2)^2}, \quad v = 0$

Bernoulli: $\quad p + \frac{1}{2}\rho u^2 \Big|_{LASTRA} = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2$

$$p(x,0) = p_\infty - 2\rho K^2 \left[\frac{x^2-b^2}{(x^2+b^2)^2}\right]^2 + 2\rho K U_\infty \left[\frac{x^2-b^2}{(x^2+b^2)^2}\right]$$

Es. 5 $$F_D = c_D \frac{1}{2} \rho U^2 \frac{\pi D^2}{4}$$

acqua $\begin{cases} U = 0.01\ \frac{m}{s} & Re = 100 & c_D = 1.282 & F_D = 5 \times 10^{-6}\ N \\ U = 1\ \frac{m}{s} & Re = 10^4 & c_D = 1.17 & F_D = 4.59 \times 10^{-2}\ N \end{cases}$

aria $\begin{cases} U = 0.01\ \frac{m}{s} & Re = 9.43 & c_D = 3.924 & F_D = 1.9 \times 10^{-8}\ N \\ U = 1\ \frac{m}{s} & Re = 943 & c_D = 1.17 & F_D = 5.8 \times 10^{-5}\ N \end{cases}$

Es. 6 $\cancel{u_x} + v_y = 0 \rightarrow v = cost \rightarrow v = 0$

moto completamente sviluppato

per la condizione di non-penetrazione sulle pareti

Sviluppando l' eq. di Cauchy lungo x e y:

$$\rho \left[\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + \cancel{v} \frac{\partial u}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial x}}\right)\right]$$

$$\rho \left[\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}} + u \cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} + \cancel{v \frac{\partial v}{\partial y}} \right] = - \frac{\partial p}{\partial y} - \rho g + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}\right)$$

Dall' eq. lungo x ho:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d}{dy}\left[\mu \frac{du}{dy}\right]$$ gradiente di pressione imposto e moto

Dall' eq. lungo y ho: $$\frac{\partial p}{\partial y} = - \rho g$$

$$p = -\rho g y + f(x) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{df}{dx} = \underset{\text{NOTO}}{A}$$

$$A\, dy = d\left(\mu \frac{du}{dy}\right) \quad \rightarrow \quad \mu \frac{du}{dy} = Ay + B$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{Ay}{\mu_0} e^{\alpha(T_1 - T_0)\frac{y}{H}} + \frac{B}{\mu_0} e^{\alpha(T_1 - T_0)\frac{y}{H}}$$

$$u = \frac{H e^{\alpha(T_1 - T_0)\frac{y}{H}}}{\mu_0 \alpha (T_1 - T_0)} \left[A\left(y - \frac{H}{\alpha(T_1 - T_0)} \right) + B \right] + C$$

Le condizioni al contorno permettono di trovare B e C:

$$u(0) = u(H) = 0 \quad \longrightarrow \quad B, C$$

File c

Es. 1

$$Re_m = Re_p$$

$$U_m = U_p \frac{\rho_p}{\rho_m} \overset{=1}{\cancel{\frac{\mu_m}{\mu_p}}} \frac{L_p}{L_m} = U_p \frac{p_p}{p_m} \frac{L_p}{L_m}$$

L' aria e' un gas perfetto : $p_p = \rho_p RT$, $p_m = \rho_m RT$ $\rightarrow \frac{\rho_p}{\rho_m} = \frac{p_p}{p_m}$

$$U_m = \frac{500}{3.6} \times \frac{1}{20} \times 10 = 69.44 \ \frac{m}{s}$$

$$F_{D_p} = F_{D_m} \frac{\rho_p U_p^2 L_p^2}{\rho_m U_m^2 L_m^2}$$ (dal fatto che C_D e' uguale)

$$= 337.5 \times \frac{1}{20} \times 4 \times 10^2 = 6750 \ N$$

$$\dot{W}_p = D_p U_p = 6750 \cdot \underbrace{138.88}_{=\frac{500}{3.6}} = 9.37 \times 10^5 \ W = 0.937 \ MW$$

Es. 2

Eq. energia tra i peli liberi dei due serbatoi :

$$\frac{p_A}{\gamma} + z_A = \frac{p_B}{\gamma} + z_B + \frac{V^2}{2g}\left(f \frac{\Sigma L}{D} + \Sigma K_L \right)$$

$$\Sigma L = L_1 + L_2 = 78 \ m \qquad \Sigma K_L = 0.4 + 1.2 + 2 \times 0.3 + \left(\frac{1}{0.2} - 1\right)^2 =$$

$$= 18.2$$

$$\varepsilon = 2 \times 10^{-5} \ m \qquad V = \frac{\dot{V}}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{4 \times 0.011}{\pi D^2} = \frac{0.014}{D^2}$$

Svolgendo l'equazione si trova:

$$5.646 \times 10^6 \, D^5 = 78 f + 18.2 \, D$$

e si può applicare la seguente formula iterativa:

$$D^{(n+1)} = 0.1 \sqrt[5]{1.381 f + 0.3223 \, D^{(n)}}$$

	$D^{(n)}$ [m]	v $\left[\frac{m}{s}\right]$	Re	$\frac{\varepsilon}{D}$	f	$D^{(n+1)}$
n=0	0.2	0.35	7×10^4	10^{-4}	0.0196	0.062
n=1	0.062	3.64	$2,2\times10^5$	3.2×10^{-4}	0.0175	0.054
n=2	0.054	4.80	2.6×10^5	3.7×10^{-4}	0.0179	0.053
n=3	0.053	4.98	2.6×10^5	3.8×10^{-4}	0.0179	$\boxed{0.053}$

Es. 3

$$\cancel{u_x} + v_y = 0 \longrightarrow v = \text{cost} \longrightarrow v = 0$$

moto completamente sviluppato nella regione centrale

per la condizione di impenetrabilità del flusso attraverso le pareti

NS:

x: $$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + \cancel{v}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

y: $$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \longrightarrow p = -\rho g y + f(x)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \underbrace{\frac{df}{dx}}_{\text{funzione solo di } x} = \mu \underbrace{\frac{d^2 u}{dy^2}}_{\text{funzione solo di } y} = A \quad (\text{costante})$$

(una funzione di x può essere uguale ad una funzione di y solo se entrambe le funzioni sono costanti)

$$\mu \frac{du}{dy} = Ay + B \quad \rightarrow \quad u = \frac{A}{2\mu} y^2 + \frac{B}{\mu} y + C$$

condizioni al contorno : $u(0) = C = 0$

$$u(H) = U = \frac{A}{2\mu} H^2 + \frac{B}{\mu} H$$

$$\rightarrow \quad B = \frac{\mu U}{H} - A \frac{H}{2} \qquad (1)$$

Per fissare il gradiente di pressione in x $\left(\frac{\partial p}{\partial x} = f' = A \right)$ devo imporre che la portata Q attraverso una qualunque sezione x nella "regione centrale" sia uguale a zero.

Questo viene dal fatto che il fluido ricircola nella cavità.

$$Q = 0 = \int_0^H u \, dy = \frac{A}{2\mu} \frac{H^3}{3} + \frac{B}{2\mu} H^2 \quad \rightarrow \quad B = -A \frac{H}{3} \qquad (2)$$

Mettendo assieme (1) e (2) :

$$A = 6\mu \frac{U}{H^2}$$

$$B = -2\mu \frac{U}{H}$$

$$\rightarrow \quad \frac{u}{U} = 3\left(\frac{y}{H}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{H}\right)$$

Inoltre : $\frac{df}{dx} = 6\mu \frac{U}{H^2} \rightarrow f = 6\mu \frac{U}{H^2} x + \text{costante}$

e quindi $p(x,y) = -\rho g y + 6\mu \frac{U x}{H^2} + \text{costante}$

Es. 4

$$\psi = -\frac{\Gamma}{4\pi}\ln\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right] - \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\arctan\frac{y}{x}$$

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{2(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2} - \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+(y-b)^2} + \frac{\dot{V}/L}{2\pi}\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$u(2a,-2b) = +\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{6b}{a^2+9b^2} - \frac{\dot{V}/L}{4\pi}\frac{a}{a^2+b^2}$$

$$v(2a,-2b) = +\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{2a}{a^2+9b^2} + \frac{\dot{V}/L}{4\pi}\frac{b}{a^2+b^2}$$

$$p(2a,-2b) = -\frac{1}{2}\rho(u^2+v^2)\Big|_{(2a,-2b)} + p_\infty$$ (la velocità all'infinito è uguale a zero)

Es. 5

$$\frac{\pi}{6}D^3\rho g + C_D\frac{1}{2}\rho U^2\frac{\pi D^2}{4} = mg$$

$$\rightarrow U = \sqrt{\frac{8\,mg - \frac{4}{3}\pi D^3\rho g}{\rho\pi D^2 C_D}} = \frac{0.2927}{\sqrt{C_D}}$$

$$Re = \frac{UD}{\nu}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} = 1.66\times10^{-4}\ \frac{m^2}{s}$$

$Re^{(n)}$	C_D	$U\left[\frac{m}{s}\right]$	$Re^{(n+1)}$
5	9.3	0.096	5.78
5.78	8.65	0.099	6.00
6.00	8.50	0.100	6.05
6.05	8.47	$\boxed{0.100}$	6.06

Es. 6

Affinché il moto sia incompressibile:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} = -2ax$$

$$v = -2axy + f(x,z) \qquad \text{forma generale}$$

$$\begin{cases} u = a(x^2 - y^2) \\ v = -2axy \end{cases} \qquad \vec{\zeta}\cdot\vec{e}_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

il moto e' irrotazionale

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

E' facile verificare che $\nabla^2\vec{v} = \vec{0}$, consistente con il fatto che il moto e' irrotazionale ed esiste ϕ tale che $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2(\vec{\nabla}\phi) = \vec{\nabla}(\nabla^2\phi) = 0 \quad \text{in quanto } \nabla^2\phi = 0.$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = 2\rho a^2(x^3 + xy^2) \quad \rightarrow \quad p = -2\rho a^2\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2}\right) + f(y)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g = 2\rho a^2(x^2y + y^3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -2\rho a^2(x^2y + y^3) - \rho g = -2\rho a^2(x^2y) + \frac{df}{dy}$$

$$\frac{df}{dy} = -2\rho a^2y^3 - \rho g \qquad f = -\frac{1}{2}\rho a^2y^4 - \rho g y + c$$

$$p = -\frac{1}{2}\rho a^2(x^2+y^2)^2 - \rho g y + c \quad \rightarrow \quad p + \frac{1}{2}\rho(u^2+v^2) + \rho g y = c$$

(accettabile!) Bernoulli!