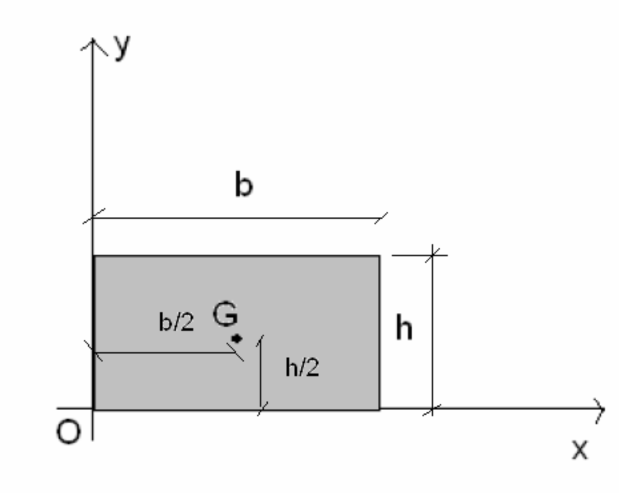
ESEMPIO 1 RETTANGOLO



Calcolare l'area (S) della superficie in figura, le coordinate del baricentro (x_G; y_G), il momento d'inerzia rispetto ad un asse parallelo all'asse y passante per il baricentro ($J_{yG\,yG}$) ed il momento centrifugo rispetto ad assi paralleli agli assi x e y passanti per il baricentro ($J_{yG\,xG}$).

Soluzione.

$dS = dxdy \quad \rightarrow \quad S = \int_S dS = \int_0^b \int_0^h dxdy = \int_0^b h dx = bh$

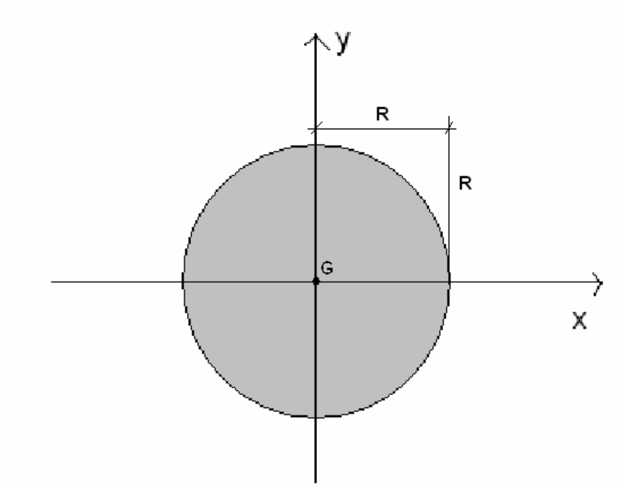
$$x_G = \frac{\int_S x dS}{S} = \frac{1}{bh}\int_0^b\int_0^h x dxdy = \frac{1}{bh}\int_0^b x h dx = \frac{1}{bh} h \frac{b^2}{2} = \frac{b}{2}$$

$$y_G = \frac{\int_S x dS}{S} = \frac{1}{bh}\int_0^b\int_0^h y dxdy = \frac{1}{bh}\int_0^b x\frac{h^2}{2}dx = \frac{1}{bh}\frac{h^2}{2}b = \frac{h}{2}$$

$$J_{yGyG} = \int_S (x-x_G)^2 dS = \int_0^b\int_0^h (x-\frac{b}{2})^2 dxdy = \int_0^b (x-\frac{b}{2})^2 h dx = \frac{h}{3}(x-\frac{b}{2})^3\Big|_o^b = \frac{h}{3}\left[(\frac{b}{2})^3 - (-\frac{b}{2})^3\right] = \frac{hb^3}{12}$$

$$J_{yGxG} = \int_S (y-y_G)(x-x_G)dS = \int_0^b\int_0^h (x-\frac{b}{2})(y-\frac{h}{2})dxdy = \int_0^b (x-\frac{b}{2})\left[\frac{1}{2}(y-\frac{h}{2})^2\right]_0^h dx = \int_0^b (x-\frac{b}{2})\frac{1}{2}\left[(\frac{h}{2})^2 - (-\frac{h}{2})^2\right] dx = 0$$

ESEMPIO 2 CERCHIO



Calcolare l'area (S) della superficie in figura, le coordinate del baricentro (x_G; y_G), il momento d'inerzia rispetto ad un asse parallelo all'asse y passante per il baricentro ($J_{yG\ yG}$) ed il momento centrifugo rispetto ad assi paralleli agli assi x e y passanti per il baricentro ($J_{yG\ xG}$).

Soluzione.
In questo caso è conveniente utilizzare le coordinate polari
$x = r \cos \theta$
$y = r \sin \theta$

$$dS = r dr d\theta \quad \rightarrow \quad S = \int_S dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} dr d\vartheta = \int_0^R 2\pi r dr = 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2$$

$$x_G = \frac{\int_S x dS}{S} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cos\vartheta dr d\vartheta = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R r^2 \Big[\sin\vartheta \Big]_0^{2\pi} dr = 0$$

$$y_G = \frac{\int_S x dS}{S} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R r^2 \Big[-\cos\vartheta \Big]_0^{2\pi} dr = 0$$

$$J_{yGyG} = \int_S (x - x_G)^2 dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} (r\cos\vartheta - 0)^2 r dr d\vartheta = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \cos\vartheta^2 dr d\vartheta = \int_0^R \left[\int_0^{2\pi} \cos\vartheta^2 d\vartheta \right] r^3 dr =$$

$$= \int_0^R \left[\frac{\vartheta}{2} + \sin\vartheta\cos\vartheta \right]_0^{2\pi} r^3 dr = \int_0^R \frac{2\pi}{2} r^3 dr = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$J_{yGxG} = \int_S (y - y_G)(x - x_G) dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \cos\vartheta \sin\vartheta dr d\vartheta = \int_0^R \left[\int_0^{2\pi} \sin\vartheta\cos\vartheta \ d\vartheta \right] r^3 dr == \int_0^R \left[\frac{\sin^2\vartheta}{2} \right]_0^{2\pi} r^3 dr = 0$$