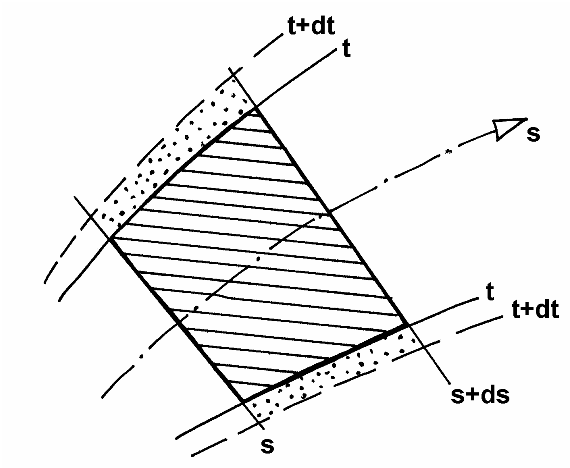
Lezione 16

IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA PER UNA CORRENTE: L'EQUAZIONE DI CONTINUITA'

- Nella LEZIONE 14 si è visto che il principio di conservazione della massa conduce a

$$\int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_0 + \int_{S_0} \rho(\underline{v} \cdot n) dS_0 = 0$$

Applichiamo l'equazione precedente al volume di controllo V_0 (vedi figura) individuato dal contorno della corrente al tempo t e dalle sezioni di ascisse s e $s+ds$ (volume tratteggiato). La linea tratteggiata sia il contorno della corrente al tempo $t+dt$.



Il primo termine dell'equazione derivante dal principio di conservazione della massa può essere approssimato nel seguente modo:

$$\int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad dV_0 \cong \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \Omega \right)_{s,t} ds$$

dove $(\Omega)_{s,t} ds$, a meno di termini di ordini ds^2 , rappresenta il volume V_0 e dove le quantità $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ e Ω possono essere valutate in s e al tempo t .

Il secondo termine rappresenta il flusso di massa attraverso la superficie S_0 che delimita V_0, positivo se uscente. Dalla sezione posta in $s+ds$ il flusso è $[\rho\,Q]_{s+ds,t}$ mentre il flusso corrispondente alla sezione posta in s è $[\rho\,Q]_{s,t}$. La massa uscita nell'intervallo dt dalla superficie laterale del volume di controllo è pari al prodotto di ρ per il volume punteggiato in figura, quest'ultimo essendo pari a

$$\left[\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right]_{s,t} dt\, ds$$

il flusso legato alla superficie laterale sarà dunque

$$\left[\rho\,\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right]_{s,t} ds$$

L'equazione derivante dal principio di conservazione della massa, detta anche <u>equazione di continuità</u>, risulta dunque

$$\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\Omega\right]_{s,t} ds + [\rho\,Q]_{s+ds,t} - [\rho\,Q]_{s,t} + \left[\rho\,\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right]_{s,t} ds = 0$$

$$\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\Omega\right]_{s,t} ds + [\rho Q]_{s,t} + \left[\frac{\partial(\rho\,Q)}{\partial s}\right]_{s,t} ds - [\rho Q]_{s,t} + \left[\rho\,\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right]_{s,t} ds = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho\ \ \Omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\ \ Q)}{\partial s} = 0}$$

Come detto in precedenza, questa è l'equazione di continuità per le correnti.

- Nel caso di un moto stazionario, un moto cioè in cui le grandezze non dipendono dal tempo si ha

$$\frac{d(\rho Q)}{ds} = 0$$

  Si noti che la derivata rispetto a s è ora ordinaria, considerato che sia ρ sia Q dipendono solo da s.

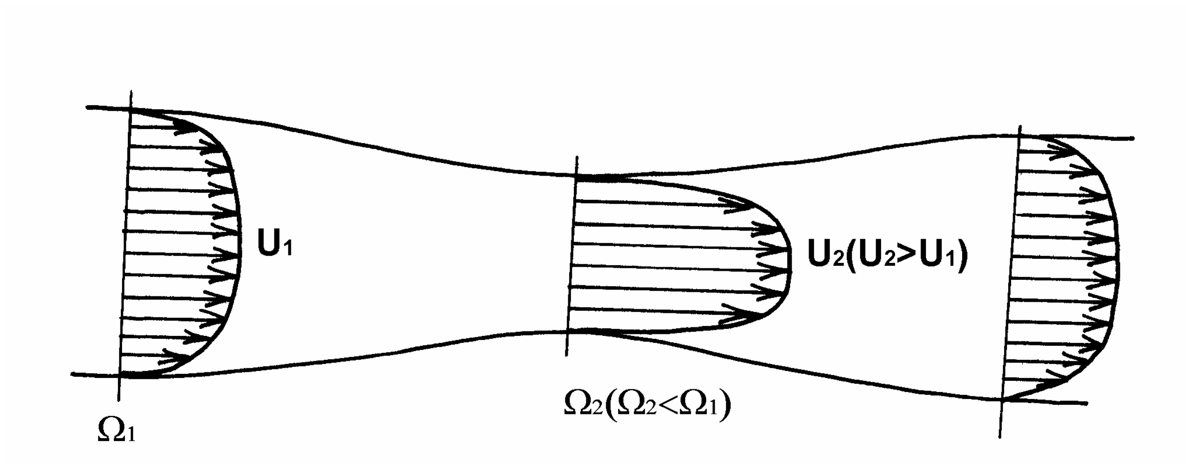
Segue

$$\rho Q = \text{costante}$$

la portata massica lungo le correnti stazionarie si mantiene dunque costante. Se inoltre il fluido in esame è a densità costante l'equazione di continuità impone

$$Q = \text{costante}$$

Essendo $Q = U\Omega$, quando la sezione diminuisce la velocità aumenta, quando invece la sezione aumenta la velocità diminuisce



Ciò non è vero se il fluido è a densità variabile. In tal caso infatti si deve mantenere costante il prodotto $\rho U\Omega$.

- Nel caso di un condotto a sezione indipendente dal tempo (per esempio un condotto in acciaio) e di un fluido a densità costante si ha

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

Si noti che la derivata rispetto a s rimane parziale. La funzione Q che soddisfa l'equazione precedente è

$$Q = Q(t) = \Omega(s)U(s,t)$$

Se poi la sezione Ω è costante si ha

$$U = U(t)$$

cioè quello che si definisce un moto in blocco. Infatti in ogni sezione la velocità è uguale anche se essa varia nel tempo.