Lezione 9
LA SPINTA ESERCITATA DA UN FLUIDO SU UNA SUPERFICIE GOBBA

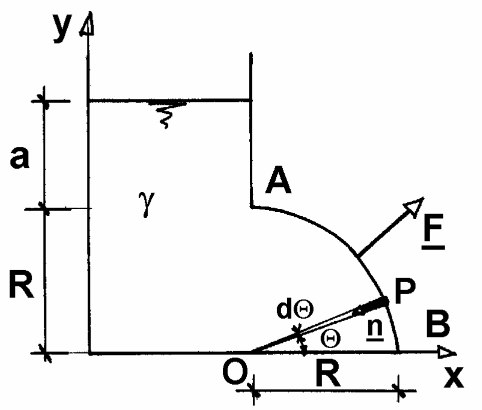
- Come illustrato nella LEZIONE 2 e nella LEZIONE 3, la forza esercitata da un fluido in quiete su una superficie S risulta

$$\underline{F} = \int_S -p\underline{n}dS$$

Mentre per una superficie piana $\underline{n}$ è indipendente dalla posizione sulla superficie e quindi costante, facilitando la valutazione dell'integrale, nel caso di una superficie gobba $\underline{n}$ risulta variabile. Non è possibile illustrare una procedura generale per la valutazione dell'integrale considerando che essa dipende dalla forma della superficie. Consideriamo il caso particolare illustrato in figura (assunto piano). Poniamoci l'obbiettivo di determinare la forza $\underline{F}$ esercitata dal liquido di peso specifico γ sulla superficie AB assunta di larghezza unitaria. In primo luogo è opportuno valutare separatamente la componente lungo la direzione x e quella lungo la direzione y.

$$F_x = \int_S -pn_x dS$$

$$F_y = \int_S -pn_y dS$$



Per valutare gli integrali è conveniente utilizzare un sistema di coordinate polari con l'origine nel punto O. Nel generico punto P della superficie AB si ha

$$\underline{n} = (-\cos\theta, -\text{sen}\,\theta)$$

Inoltre $dS = Rd\theta$ avendo assunto la larghezza della superficie unitaria. Infine la pressione p nel punto P risulterà

$$p = \gamma[a + R - R\,\mathrm{sen}\,\theta] = \gamma a + \gamma R(1 - \mathrm{sen}\,\theta)$$

Segue quindi

$$F_x = \int_0^{\Pi/2} -[\gamma a + \gamma R(1 - \mathrm{sen}\,\theta)](-\cos\theta)Rd\theta = \gamma(a+R)R[\mathrm{sen}\,\theta]_0^{\Pi/2} + \gamma R^2 \frac{1}{4}[\cos 2\theta]_0^{\Pi/2} =$$

$$= \gamma(a+R)R - \frac{\gamma R^2}{2} = \gamma\left(a + \frac{R}{2}\right)R$$

$$F_y = \int_0^{\Pi/2} -[\gamma a + \gamma R(1 - \mathrm{sen}\,\theta)](-\mathrm{sen}\,\theta)Rd\theta = -\gamma(a+R)R[\cos\theta]_0^{\Pi/2} - \gamma R^2\left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{sen}\,2\theta\right]_0^{\Pi/2} =$$

$$= \gamma(a+R)R - \gamma\frac{\pi R^2}{4}$$

Nel caso in esame si è riusciti facilmente a valutare gli integrali che forniscono F_x e F_y. Tuttavia quando la geometria del problema è più complessa, la valutazione di $\underline{F}$ utilizzando l'espressione $\int_S -p\underline{n}dS$ può risultare difficile.

- Una procedura alternativa che spesso consente il rapido calcolo di $\underline{F}$ è quella illustrata nel seguito

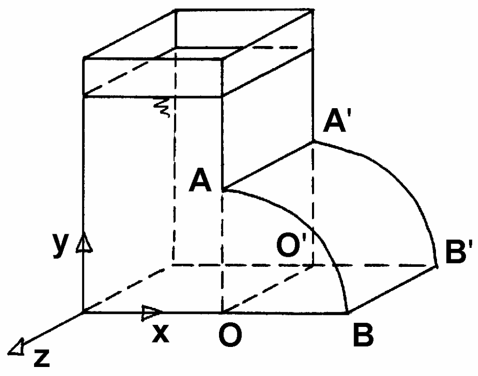
- Utilizzando superfici piane e la superficie gobba in esame, isolare un volume di fluido.
- Determinare le forze $\underline{F}_1, \underline{F}_2, ..., \underline{F}_N$ che il fluido all'esterno del volume esercita sulle superfici piane.
- Calcolare la forza $\underline{F}$ esercitata dal fluido sulla superficie gobba, imponendo l'equilibrio del volume isolato, su cui l'esterno esercita $\underline{F}_1, \underline{F}_2, ..., \underline{F}_N, -\underline{F}$ e la forza peso $\underline{G}$

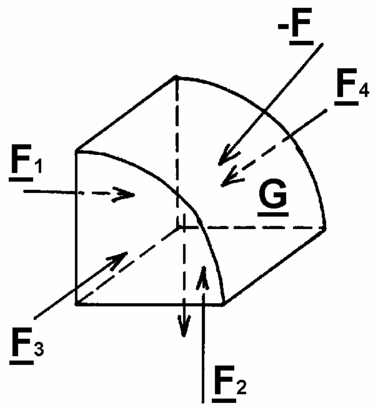
  Risulterà

$$\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i - \underline{F} + \underline{G} = 0$$

  Da cui

$$\underline{F} = \underline{G} + \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i$$





Al fine di illustrare chiaramente la procedura, applichiamola al problema considerato precedentemente. Consideriamo il volume di fluido delimitato dalla superficie gobba $AA'B'B$, dalle superfici piane $AA'O'O$, $OO'B'B$, OAB, $O'A'B'$.

Considerando l'orientamento delle superfici piane e indicando con $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ i versori degli assi x, y, z rispettivamente, è facile vedere che

$$\underline{F}_1 = F_1\underline{i}; \quad \underline{F}_2 = F_2\underline{j}; \quad \underline{F}_3 = -F_3\underline{k}; \quad \underline{F}_4 = F_4\underline{k}$$

$$\underline{G} = -G\underline{j}$$

L'equilibrio del volume considerato alla traslazione lungo i tre assi impone

$$F_x = F_1; \quad F_y = F_2 - G; \quad F_z = F_4 - F_3$$

avendo denotato con (F_x, F_y, F_z) il vettore $\underline{F}$.

Utilizzando i risultati illustrati nella LEZIONE 8 è possibile determinare F_i. Si ha

$$F_1 = \gamma\left(a + \frac{R}{2}\right)R \quad ; \quad F_2 = \gamma(a+R)R$$

$$F_3 = F_4 = \gamma\left(a + R - \frac{4R}{3\pi}\right)\frac{\pi R^2}{4}$$

Inoltre

$$G = \gamma\frac{\pi R^2}{4}$$

Segue

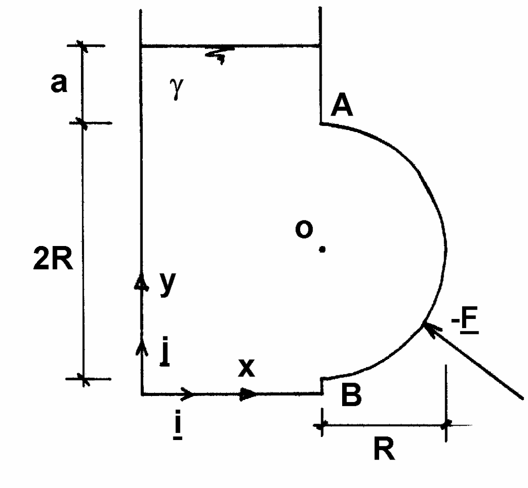
$$F_x = \gamma\left(a + \frac{R}{2}\right)R; \quad F_y = \gamma(a+R)R - \gamma\frac{\pi R^2}{4}; \quad F_z = 0$$

I risultati ottenuti coincidono con quelli ricavati precedentemente.

- Nel caso di una superficie gobba, il sistema equivalente alla somma delle forze infinitesime $-p\underline{n}dS$ è in generale fornito da una forza e da una coppia. Per individuare la retta di applicazione di $\underline{F}$ e il valore della coppia è necessario imporre l'equilibrio alla rotazione del volume in esame. Nel nostro caso, considerando che le forze infinitesime passano per la retta OO' e per la simmetria del problema, si può affermare che la forza $\underline{F}$ passa per la retta OO' in un punto equidistante da O e da O' e il valore della coppia è nullo.

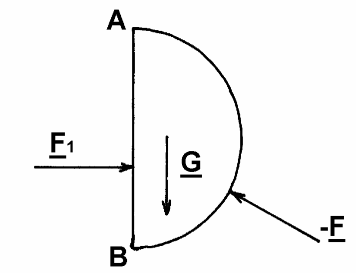
ESERCIZI SULLA DETERMINAZIONE DELLA SPINTA SU UNA SUPERFICIE GOBBA

1)



Si consideri il problema piano rappresentato in figura e costituito dalla determinazione della forza $\underline{F}$ esercitata dal fluido di peso specifico γ sulla superficie AB supposta di larghezza unitaria.

Soluzione: si consideri il volume isolato dalla superficie gobba AB e dalla superficie piana AB, come evidenziato nella figura accanto. Per quanto spiegato precedentemente



$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{G}$$

Da cui

$$F_x = F_1 = \gamma(a+R)2R$$

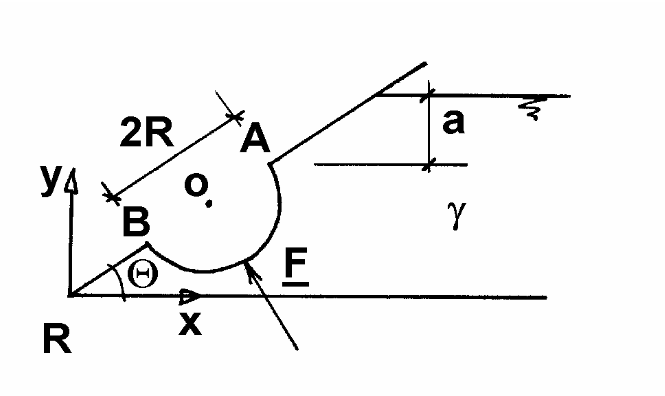
$$F_y = G = \gamma \frac{\pi R^2}{2}$$

con

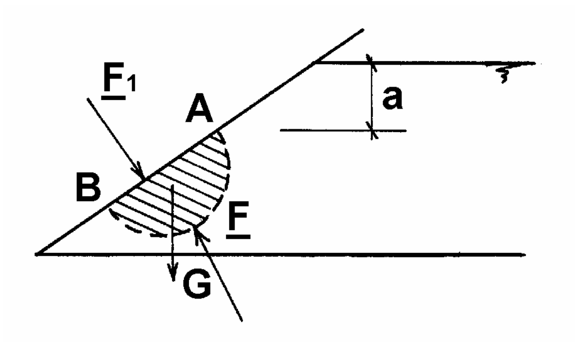
$$\underline{F}_1 = F_1 \underline{i} \qquad \underline{G} = -G\,\underline{j} \qquad \underline{F} = F_x \underline{i} - F_y\,\underline{j}$$

E' evidente inoltre che la forza $\underline{F}$ passa per il punto O.

2) Si consideri il problema piano rappresentato in figura e costituito dalla determinazione della forza $\underline{F}$ esercitata dal fluido di peso specifico γ sulla superficie AB supposta di larghezza unitaria.



Soluzione: il modo più rapido per risolvere il problema è quello di considerare il serbatoio evidenziato nella figura a lato e imporre l'equilibrio del volume tratteggiato e costituito dalla superficie gobba $\overset{\frown}{AB}$ e da quella piana AB.



Su tale volume l'esterno eserciterà le seguenti forze:

$$\underline{F}, \underline{F}_1, \underline{G}$$

Si ha inoltre

$$\underline{F} = (-F_x, F_y); \underline{F}_1 = (F_1 \operatorname{sen} \theta, -F_1 \cos \theta); \underline{G} = (O, -G)$$

Segue

$$\underline{F} = -\underline{F}_1 - \underline{G}$$

$$\underline{F} = (-F_x, F_y) = (-F_1 \operatorname{sen} \theta, F_1 \cos \theta) + (O, G)$$

oppure

$$F_x = F_1 \,\text{sen}\,\theta \quad , \quad F_y = F_1 \cos\theta + G$$

ove

$$F_1 = \gamma(a + R\,\text{sen}\theta)2R$$

$$G = \gamma \frac{\pi R^2}{2}$$