

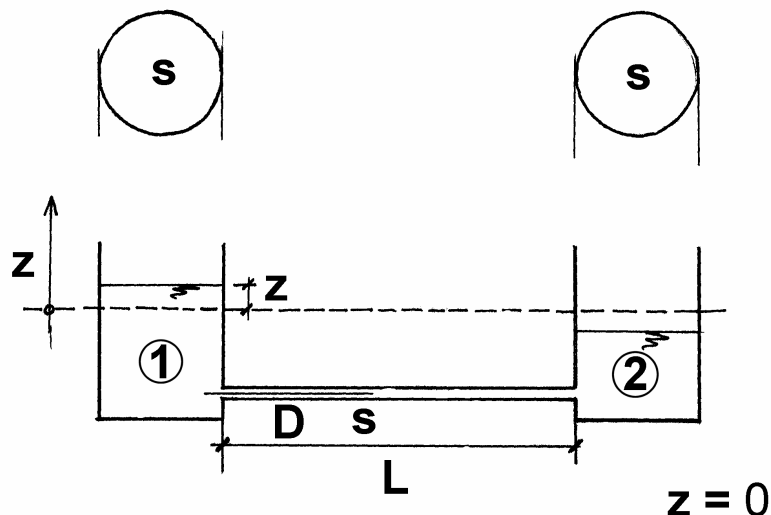
Lezione 26

I TRANSITORI NEGLI IMPIANTI IDRAULICI. IL MOTO VARIO NELLE CORRENTI

La complessità dello studio del moto vario nelle correnti dipende dalle ipotesi che si introducono, le quali a loro volta dipendono dalla natura dell'impianto in cui si realizza il transitorio.

Si possono individuare due diverse situazioni. Nella prima le variazioni di pressione sono modeste e quindi il fluido può essere considerato a densità costante. Nella seconda, invece, si hanno variazioni di pressione notevoli ed è necessario considerare la densità variabile. Consideriamo due casi esemplificativi.

CASO 1: DENSITA' COSTANTE



Nei serbatoi dell'impianto in figura la distribuzione di pressione può essere ritenuta pari a quella idrostatica, essendo il fluido contenuto in essi praticamente fermo.

Questo fatto impone dei limiti al valore che la pressione può assumere all'imbocco e allo sbocco della condotta e quindi alle variazioni di pressione che possono essere osservate in tutto l'impianto. La densità del fluido può quindi essere considerata costante così come costante può essere assunta la sezione della condotta. Al suo interno l'equazione di continuità impone dunque

$$\frac{\partial U}{\partial s} = 0$$

↓

$$U = U(t)$$

Mentre l'equazione del moto fornisce

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - j \quad \text{ove} \quad j = \frac{\lambda}{D} \frac{U|U|}{2g}$$

Una semplice analisi delle grandezze che compaiono nell'espressione di j mostra che j non dipende da s così come il termine $\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$. L'equazione del moto può quindi essere integrata dalla sezione iniziale a quella finale fornendo

$$H_2 - H_1 = \left(-\frac{1}{g} \frac{dU}{dt} - j \right) L$$

ove H_2 e H_1 rappresentano il carico totale nelle sezioni finali e iniziali rispettivamente, mentre $\frac{\partial U}{\partial t}$ è divenuto $\frac{dU}{dt}$ in quanto U non dipende da s . I valori H_2 e H_1 possono essere legati al livello nei serbatoi mettendo in conto le dissipazioni concentrate di energia

$$H_2 = -z + \zeta_2 \frac{U|U|}{2g}$$

$$H_1 = z - \zeta_1 \frac{U|U|}{2g}$$

ove si è indicato con z il livello nel serbatoio ① rispetto a quello in condizioni statiche. Avendo assunto la superficie della sezione dei due serbatoi uguale, deriva che il livello nel serbatoio ② risulta pari a $-z$. ζ_2 vale 1 mentre ζ_1 è pari a 0.5, quando U è positivo. Quando U è negativo, ζ_2 vale 0.5 e ζ_1 è pari a 1. Si ha dunque

$$-z + \zeta_2 \frac{U|U|}{2g} - z + \zeta_1 \frac{U|U|}{2g} = -\left(\frac{1}{g} \frac{dU}{dt} + \frac{\lambda}{D} \frac{U|U|}{2g}\right)L$$

$$\frac{L}{g} \frac{dU}{dt} - 2z = -\frac{U|U|}{2g} \left(\frac{\lambda L}{D} + \zeta_1 + \zeta_2\right) \quad (\text{NOTA 1})$$

Un semplice bilancio di massa all'interno del serbatoio ① mostra che

$$U\Omega dt = -dzS$$

Essendo Ω la superficie della sezione della condotta e S la superficie libera dei due serbatoi.

Segue quindi che

$$U = -\frac{S}{\Omega} \frac{dz}{dt}$$

e

$$-\frac{L}{g} \frac{S}{\Omega} \frac{d^2 z}{dt^2} - 2z = \left(\frac{S}{\Omega}\right)^2 \frac{1}{2g} \frac{dz}{dt} \left| \frac{dz}{dt} \right| \left[\frac{\lambda L}{D} + 1.5 \right]$$

Tale equazione può facilmente essere integrata utilizzando un metodo numerico. Un'idea sul comportamento della soluzione può essere ottenuta trascurando le dissipazioni di energia, assumendo cioè il fluido ideale. In tal caso

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{2g\Omega}{LS} z = 0$$

La soluzione è dunque $z = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{2g\Omega}{LS}} t\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{2g\Omega}{LS}} t\right)$

NOTA 1:

Si noti che sia le perdite di carico distribuite, sia quelle concentrate sono state assunte proporzionali a $U|U|$ invece che a U^2 in quanto il moto può invertire la sua direzione rispetto alla direzione s .

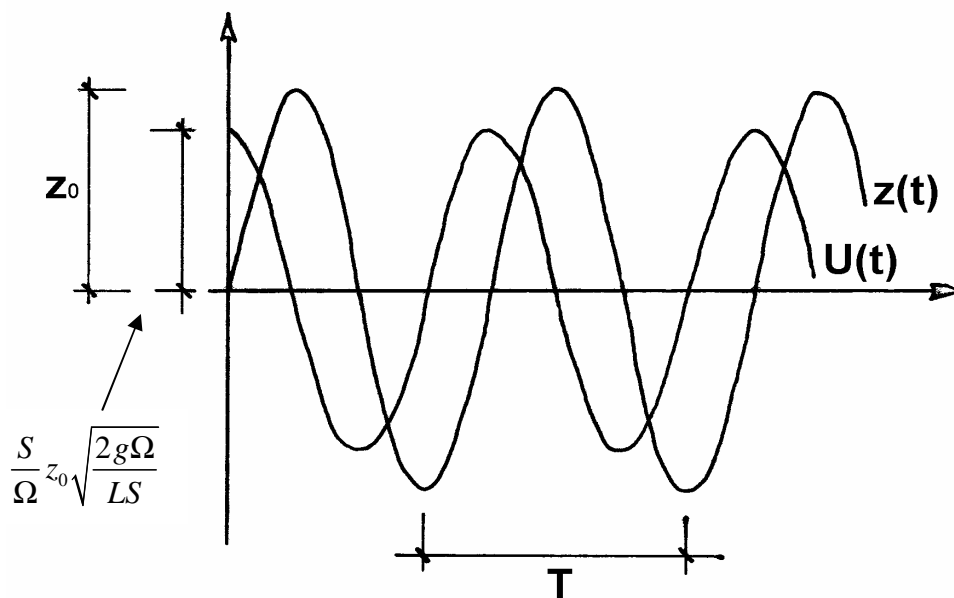
Le costanti c_1 e c_2 possono essere determinate imponendo le condizioni iniziali. Ad esempio se per $t = 0$ il fluido è fermo e z è pari a z_0 si ha

$$\begin{aligned} z_0 &= c_2 \\ 0 &= c_1 \end{aligned}$$

La soluzione mostra quindi che sia il livello nei serbatoi sia la velocità nella condotta oscillano nel tempo con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2g\Omega}{LS}}}$$

Inoltre fra velocità e pelo libero esiste uno sfasamento di 90°

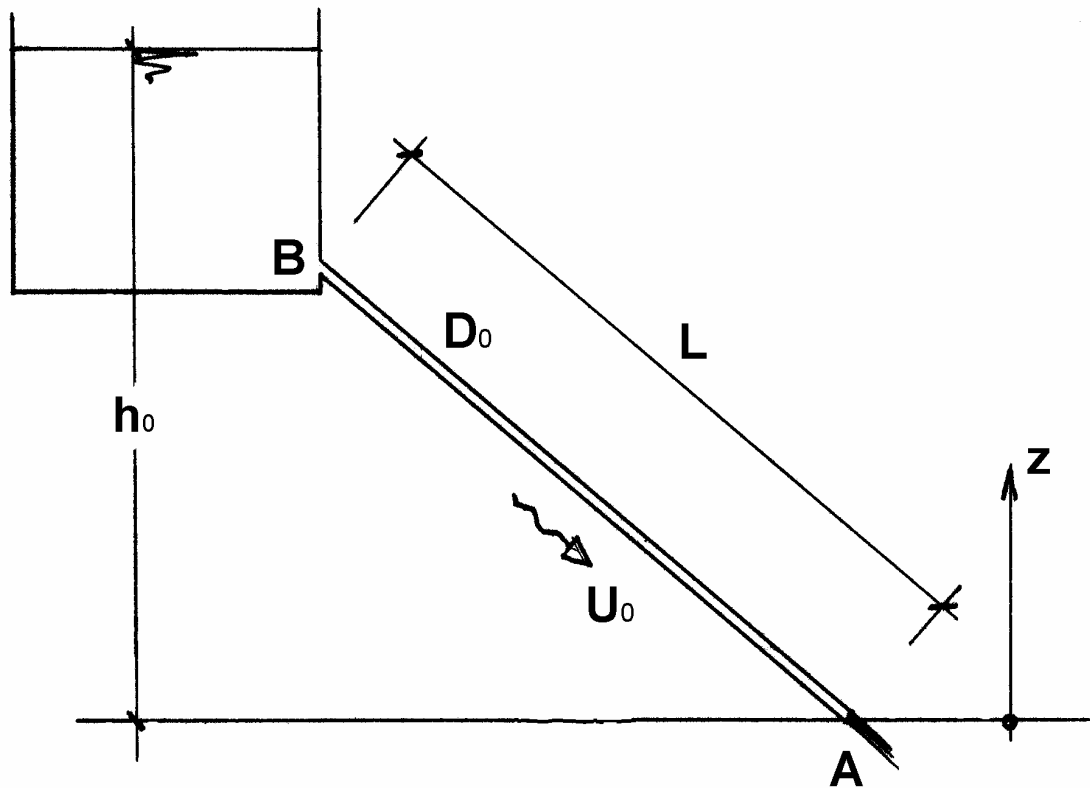


La presenza delle dissipazioni induce un'attenuazione delle oscillazioni e il fenomeno non è più periodico. L'attenuazione è tanto maggiore quanto più grande risulta il termine

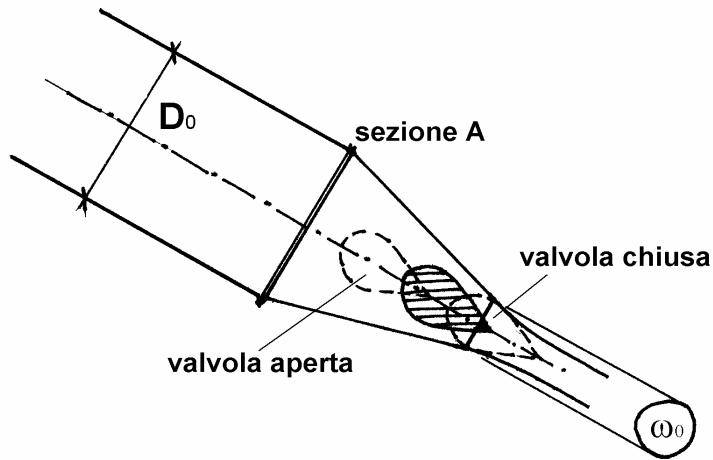
$$\frac{S}{2\Omega L} \left[\frac{\lambda L}{D} + 1.5 \right]$$

Per valori elevati delle dissipazioni si può avere una lenta discesa di z a partire da z_0 senza che il livello nel serbatoio ① assuma valori negativi.

CASO 2: FLUIDO COMPRIMIBILE

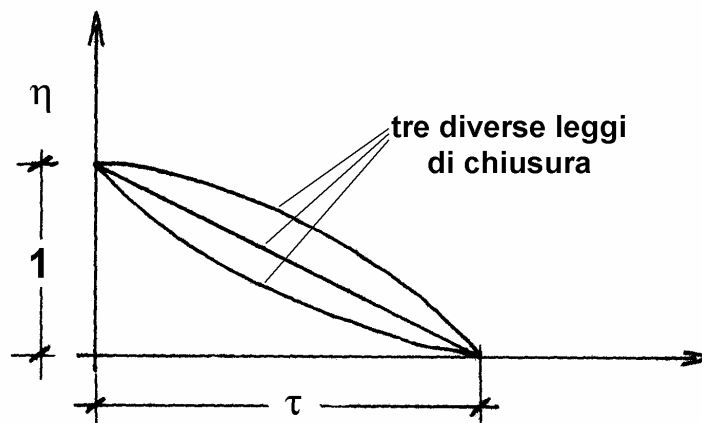


Consideriamo ora l'impianto in figura, costituito da un serbatoio, una condotta e una valvola posta nella sezione terminale della condotta (sezione A). Quando la valvola posta in A è completamente aperta e il moto è a regime, il fluido defluisce con una velocità media U_0 . Essendo D_0 il diametro della condotta, la portata Q_0 è pari a $U_0 \pi D_0^2 / 4$. Assumiamo che il carico cinetico, pari a $U_0^2 / 2g$ sia trascurabile rispetto a h_0 . Ciò accade quando la condotta termina con un restringimento (vedi figura) e la velocità del getto uscente dalla condotta è molto maggiore della velocità all'interno della condotta.



Poniamoci il problema di studiare cosa succede quando la valvola posta in A si chiude in un tempo τ , detto tempo di chiusura. In tale intervallo temporale la sezione di efflusso passa dal valore ω_0 (vedi figura) a zero con una legge che è detta legge di chiusura

$$\eta(t) = \frac{\omega(t)}{\omega_0}$$



Nonostante $U_0^2/2g$ sia trascurabile rispetto a h_0 , la velocità U_0 è spesso elevata e quindi elevata è l'inerzia del fluido. Se il tempo di chiusura τ è piccolo, sono necessarie forze e quindi pressioni elevate per fermare il fluido. In tale situazione la comprimibilità del fluido non può essere trascurata così come non possono essere trascurate le variazioni della sezione della condotta che si modifica essendo il materiale della condotta dotato di elasticità. Per studiare ciò che accade è quindi necessario fare riferimento alle equazioni delle correnti in forma completa

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - j$$

$$\frac{\partial(\rho\Omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U\Omega)}{\partial s} = 0$$

Esse vengono comunque semplificate introducendo alcune ipotesi. In primo luogo il fluido può essere ipotizzato ideale. Infatti essendo $U_0^2/2g$ molto minore di h_0 il termine j può essere trascurato nell'equazione del moto che diviene

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$$

Il fluido è supposto inoltre barotropico, si assume cioè che la densità dipenda solo dalla pressione

$$\rho = \rho(p)$$

Le ultime ipotesi riguardano la natura della soluzione che si suppone di tipo propagatorio, cioè tale che

$$F(s, t) = F(s + cdt, t + dt)$$

con c costante dimensionale ($[c] = LT^{-1}$)

Essendo

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial s} ds$$

risulta $dF = 0$ se $ds = cdt$. Quindi

$$\frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial s} cdt = 0 \Rightarrow c = -\frac{\partial F/\partial t}{\partial F/\partial s}$$

Si assume infine che

$$|c| \gg U$$

Ciò implica che

$$\frac{|c|}{U} = \frac{|\partial F / \partial t|}{|U \partial F / \partial s|} \gg 1$$

Segue dunque che

$$\left| \frac{\partial F}{\partial t} \right| \gg \left| U \frac{\partial F}{\partial s} \right|$$

Le ipotesi che la soluzione sia propagatoria e che $|c| \gg U$ non possono essere verificate in questo momento, esse saranno controllate una volta che la soluzione sarà determinata.

L'equazione del moto conduce a

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[h + \frac{U^2}{2g} \right] = - \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{1}{g} U \frac{\partial U}{\partial s} = - \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$$

Tuttavia $U \frac{\partial U}{\partial s}$, risulta per le ipotesi fatte, molto minore di $\frac{\partial U}{\partial t}$ essendo $|c| \gg U$ e quindi

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial s} = - \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}}$$

Essa costituisce la prima delle equazioni semplificate del fenomeno in esame denominato “COLPO D’ARIETE”. La seconda equazione deriva dall’equazione di continuità che conduce a

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho U \frac{\partial \Omega}{\partial s} + \rho \Omega \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial \rho}{\partial s} U \Omega &= 0 \\ \Downarrow \\ \rho \left[\frac{\partial \Omega}{\partial t} + U \frac{\partial \Omega}{\partial s} \right] + \Omega \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial s} \right] + \rho \Omega \frac{\partial U}{\partial s} &= 0 \end{aligned}$$

Per le ragioni precedentemente esposte i secondi termini all’interno delle parentesi quadre sono trascurabili rispetto ai primi e conseguentemente possono essere trascurati

$$\rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \Omega \frac{\partial U}{\partial s} = 0$$

Ora le variazioni nel tempo della densità e della sezione devono essere legate alle variazioni della pressione che a loro volta sono legate alle variazioni di h . Si ha infatti

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(z + \int \frac{dp}{\gamma} \right)$$

Tuttavia la quota z della condotta non varia nel tempo e sapendo che $\gamma = \gamma(p)$, si ha

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t}$$

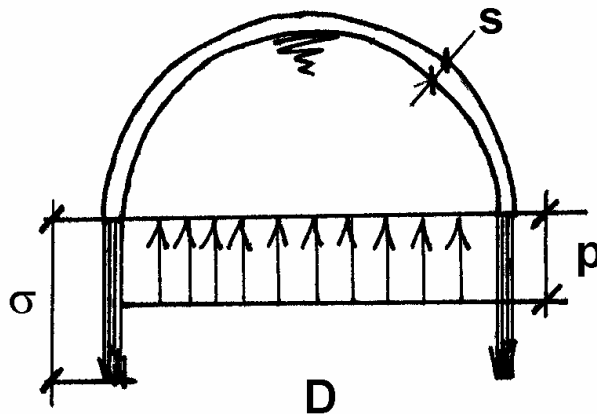
L'equazione di stato (LEZIONE 5) per un fluido barotropico impone

$$\epsilon = \frac{dp}{d\rho/\rho}$$

Segue quindi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon} \gamma \frac{\partial h}{\partial t}$$

Imponendo l'equilibrio alla traslazione verticale di mezza condotta soggetta alle forze che l'esterno



esercita su di essa, risulta (trascurando il peso del fluido)

$$pD = 2\sigma s$$

essendo s lo spessore della condotta e σ la tensione all'interno del materiale con cui essa è stata realizzata.

E' evidente dunque che variazioni di pressioni comportano variazioni della tensione σ che a loro volta sono legate alla deformazione della sezione attraverso il modulo di elasticità E del materiale della condotta. Risulta

$$E = \frac{d\sigma}{dD/D} \quad \frac{dp}{d\sigma} = \frac{2s}{D}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{E}{D} dD = \frac{D}{2s} dp$$

Tenendo inoltre conto che

$$\Omega = \frac{\pi D^2}{4}, \quad \frac{d\Omega}{dD} = \frac{\pi D}{2}, \quad \frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{\pi D}{2} \frac{4dD}{\pi D^2} = \frac{2dD}{D}$$

segue

$$\frac{E}{2} \frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{Ddp}{2s} \Rightarrow \frac{d\Omega}{dp} = \frac{\Omega D}{Es}$$

Infine

$$\boxed{\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{d\Omega}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\Omega D}{Es} \gamma \frac{\partial h}{\partial t}}$$

L'equazione di continuità diviene dunque

$$\rho \frac{\Omega D}{Es} \gamma \frac{\partial h}{\partial t} + \Omega \frac{\rho}{\epsilon} \gamma \frac{\partial h}{\partial t} + \rho \Omega \frac{\partial U}{\partial s} = 0$$

$$\left[\rho \frac{D}{Es} + \frac{\rho}{\epsilon} \right] \frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial s}$$

$$\frac{\rho}{\epsilon} \left[\frac{\epsilon D}{Es} + 1 \right] \frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial s}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{1}{g} \frac{\epsilon/\rho}{\left[1 + \frac{\epsilon D}{Es} \right]} \frac{\partial U}{\partial s} = - \frac{a^2}{g} \frac{\partial U}{\partial s}$$

avendo introdotto la costante

$$a = \sqrt{\frac{\epsilon/\rho}{\left[1 + \frac{\epsilon D}{Es} \right]}}$$

le equazioni che governano il moto vario nella condotta possono essere scritte nella forma

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$$

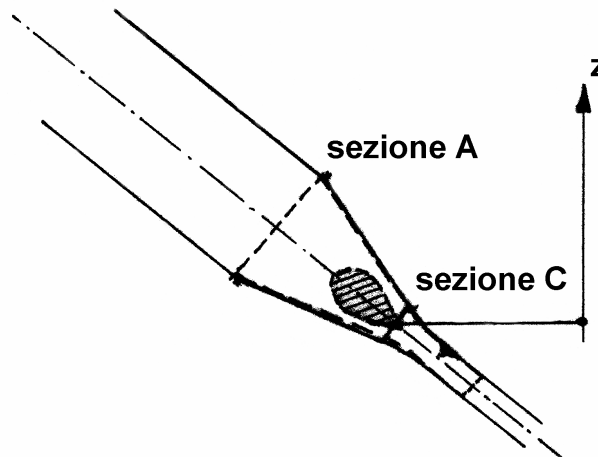
$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{a^2}{g} \frac{\partial U}{\partial s}$$

e costituiscono le cosiddette equazioni semplificate del “colpo d’ariete” perché vedremo nel seguito che durante il transitorio si possono manifestare notevoli sovrappressioni che possono danneggiare la condotta stessa. La soluzione delle equazioni può essere determinata solo dopo aver specificato le condizioni al contorno. Nel problema in esame, nella sezione immediatamente a valle del serbatoio si ha:

Sezione B $h = h_0$

Infatti avendo trascurato il carico cinetico rispetto ad h_0 e le perdite di carico, si può affermare che $h \cong H \cong h_0$.

La condizione al contorno nella sezione terminale della condotta può essere ottenuta applicando il



teorema di Bernoulli fra la sezione A e la sezione del getto immediatamente a valle della sezione contratta (sezione C).

$$h_A + \frac{U_A^2}{2g} = h_C + \frac{U_C^2}{2g}$$

Nella sezione C la pressione relativa è nulla. Inoltre la quota z può essere trascurata rispetto al carico h_A così come il carico cinetico $U_A^2/2g$. Segue dunque

$$U_C = \sqrt{2gh_A}$$

Il principio di conservazione della massa impone inoltre

$$U_A \Omega_A = U_C \omega_C = \sqrt{2gh_A} C_C \omega(t)$$

essendo C_C il coefficiente di contrazione che lega la sezione contratta alla sezione di efflusso del fluido al termine del tratto convergente. La relazione precedente deve valere a qualunque tempo e in particolare anche all'istante iniziale.

$$U_{A0} \Omega_{A0} = \sqrt{2gh_{A0}} C_{C0} \omega_0$$

Segue quindi

$$\frac{U_A}{U_{A0}} = \sqrt{\frac{h_A}{h_{A0}}} \frac{\omega(t)}{\omega_0}$$

avendo assunto $\Omega_{A0} = \Omega_A = \Omega_0$ e $C_C = C_{C0}$. Quindi nella Sezione A

$$\frac{U}{U_0} = \eta(t) \sqrt{\frac{h}{h_0}}$$

Riassumendo e introducendo un asse x diretto dalla sezione A verso la sezione B con origine nella sezione A, si ha

$$\begin{aligned}
 &\bullet \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} \\
 &\bullet \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{a^2}{g} \frac{\partial U}{\partial x} \\
 &\bullet h = h_0 \quad \text{in } x = L \quad \forall t \quad (\text{NOTA 2}) \\
 &\bullet \frac{U}{U_0} = \eta(t) \sqrt{\frac{h}{h_0}} \quad \text{in } x = 0 \quad \forall t \\
 &\bullet h = h_0 \text{ e } U = U_0 \quad t \leq 0 \quad \forall x
 \end{aligned}$$

La soluzione del problema formulato precedentemente dipende dalla forma della funzione $\eta(t)$ cioè dalla legge di chiusura. Tuttavia è possibile stabilire alcune sue proprietà generali.

In primo luogo notiamo che h e U soddisfano la stessa equazione che ha forma

$$\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0}$$

Ciò può essere facilmente verificato per h , derivando la prima equazione per x , moltiplicandola per a^2 e sottraendo la seconda equazione derivata rispetto al tempo. In modo analogo è possibile verificare che la medesima equazione è soddisfatta da U . Le due funzioni incognite dunque sono caratterizzate dalla medesima dipendenza spazio – temporale.

Per determinare tale dipendenza introduciamo le due nuove variabili indipendenti

$$\xi_1 = t - \frac{x}{a} \quad ; \quad \xi_2 = t + \frac{x}{a}$$

NOTA 2

La costante a introdotta nell'equazione del moto ha le dimensioni di una velocità. E' possibile dimostrare che essa corrisponde alla velocità del suono nella condotta. Nelle condotte in acciaio il valore di a si aggira attorno a 1000 m/s mentre in un fluido indefinito $a \cong 1400 \text{ m/s}$.

Notiamo inoltre che

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2} \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{a} \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \frac{1}{a} \frac{\partial F}{\partial \xi_2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_2^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1^2} - \frac{2}{a^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_2^2}$$

Sostituendo tali espressioni nell'equazione iniziale si ha

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_2^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_2^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = 0$$

Tale equazione, detta equazione di D'Alembert o equazione della corda vibrante, ha come soluzione generale

$$F = f_1(\xi_1) + f_2(\xi_2)$$

essendo f_1 e f_2 funzioni opportune.

Ricordando le espressioni di ξ_1 e ξ_2 si ha

$$F = f_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

E' quindi facile verificare che sia f_1 che f_2 verificano la definizione di funzioni propagatorie con $c = a$ e $c = -a$ rispettivamente. Infatti

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial t} dt + \frac{\partial f_1}{\partial x} c dt = \frac{df_1}{d\xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} dt + \frac{df_1}{d\xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} a dt = \frac{df_1}{d\xi_1} dt \left(1 - \frac{a}{a}\right) = 0$$

$$df_2 = \frac{\partial f_2}{\partial t} dt + \frac{\partial f_2}{\partial x} c dt = \frac{df_2}{d\xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} dt - \frac{df_2}{d\xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} a dt = \frac{df_2}{d\xi_2} dt \left(1 - \frac{a}{a}\right) = 0$$

Inoltre essendo $|c| = |a|$ e sapendo che l'ordine di a è pari a 10^3 m/s è possibile verificare che $|c| \gg U$, considerato che la velocità del fluido nella condotta è in generale dell'ordine di 1 m/s .

Notiamo che la funzione $f_1(f_2)$ si propaga, non cambiando la sua forma, nella direzione positiva (negativa) dell'asse x con velocità $a(-a)$.

A questo punto tutte le ipotesi formulate inizialmente risultano verificate.

Concludendo si ha

$$h = h_0 + f_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

$$U = U_0 + g_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + g_2\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

L'introduzione delle costanti h_0 e U_0 è possibile essendo le funzioni f_1, f_2, g_1, g_2 arbitrarie.

Le funzioni f_1, f_2, g_1, g_2 sono legate fra di loro, come è possibile mostrare considerando le equazioni iniziali

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$$

⇓

$$-\frac{1}{a} \frac{df_1}{d\xi_1} + \frac{1}{a} \frac{df_2}{d\xi_2} = \frac{1}{g} \frac{dg_1}{d\xi_1} + \frac{1}{g} \frac{dg_2}{d\xi_2}$$

Dovendo tale equazione essere verificata qualunque valore assunto da ξ_1 e ξ_2 emerge

$$g_1 = -\frac{g}{a} f_1 \quad ; \quad g_2 = \frac{g}{a} f_2$$

Dunque

$$U = U_0 - \frac{g}{a} \left[f_1\left(t - \frac{x}{a}\right) - f_2\left(t + \frac{x}{a}\right) \right]$$

Inizialmente essendo $h = h_0$ e $U = U_0$, le funzioni fra f_1 e f_2 sono entrambe nulle. Non appena inizia la manovra di chiusura, nella sezione A la condizione al contorno fa sì che h e U si modifichino. Ciò può avvenire solo se f_1 e f_2 assumono valori diversi da zero. I valori di f_2 generati in A non sono qui di interesse perché f_2 si propaga nella direzione negativa dell'asse x e quindi i valori generati in A non vanno a interessare la condotta, definita da valori di x tali che $0 < x < L$. La funzione f_1 una volta generata in A, si propaga all'interno della condotta verso B dove giunge dopo un tempo pari a L/a .

In B, i valori di f_1 diversi da zero, che arrivano provenienti da A, tenderebbero a far assumere ad h valori diversi da h_0 . Tuttavia la condizione al contorno impone $h = h_0$ e dunque in B, per t maggiori di L/a , si generano valori di f_2 diversi da zero ed in particolari uguali a $-f_1$. Tali valori non nulli di f_2 , generati in B, si propagano verso A con velocità $-a$ e giungono in A solo dopo un

tempo $\theta = 2L/a$ dall'inizio della manovra di chiusura. Il tempo che un'onda che viaggia con velocità a impiega a percorrere la distanza $2L$ è detto “durata di fase”.

Nella sezione A per tutti i tempi t minori di θ , il valore di f_2 è nullo e si ha

$$h = h_0 + f_1 \left(t - \frac{x}{a} \right)$$

$$U = U_0 - \frac{g}{a} f_1 \left(t - \frac{x}{a} \right)$$

Quindi eliminando f_1 si ottiene

$$h - h_0 = \frac{a}{g} (U_0 - U)$$

Se il tempo di chiusura τ è inferiore a θ , in A per $\tau < t < \theta$ si ha $U = 0$ e quindi

$$h - h_0 = \frac{a}{g} U_0$$

Il valore aU_0/g è il sovraccarico che si manifesta in A, in occasione di una chiusura che avviene in un tempo τ minore di θ (chiusura brusca), e che ha una durata pari a $\theta - \tau$. E' possibile poi dimostrare che tale sovraccarico è il massimo sovraccarico possibile. E' possibile ricavare la massima sovrappressione dalla conoscenza del legame fra p e h .

$$p_{\max} - p_0 = \rho a U_0$$

Tenendo presente che $a \cong 1000m/s$, $\rho = 1000Kg/m^3$ e U_0 può raggiungere valori di $10m/s$, è facile vedere che le sovrappressioni che si possono generare possono causare la rottura della condotta stessa.

Per valori di t maggiori di θ , f_2 assume valori diversi da zero anche in A e non è più possibile ricavare h e U in modo semplice. Spesso è necessario ricorrere a metodi numerici che, tuttavia, utilizzano una forma diversa delle equazioni che verrà ricavata nel seguito.

LE EQUAZIONI LUNGO LE CURVE CARATTERISTICHE

Partiamo dalle equazioni semplificate del colpo d'ariete

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{a^2}{g} \frac{\partial U}{\partial x}$$

e moltiplichiamo la prima equazione per una costante Δ e sommiamo la seconda equazione

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \Delta \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\Delta}{g} \left[\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{a^2}{\Delta} \frac{\partial U}{\partial x} \right]$$

Se $\Delta = dx/dt$ il termine di sinistra diviene dh/dt .

Se $a^2/\Delta = dx/dt$ anche il termine fra parentesi quadre diviene la derivata di U rispetto al tempo.

Si ha dunque

$$dh = \frac{\Delta}{g} dU$$

Ciò è possibile se e solo se

$$\Delta = \frac{a^2}{\Delta}$$

se cioè

$$\Delta = \pm a$$

e quindi se

$$\frac{dx}{dt} = \pm a$$

L'equazione $dh = \frac{\Delta}{g} dU$ o $dh = \pm \frac{a}{g} dU$ può essere facilmente integrata fornendo

$$h - h_0 = \pm \frac{a}{g} (U - U_0)$$

Tali relazioni fra h e U hanno però validità solo quando sono soddisfatte le equazioni

$$dx = \pm a dt$$

che conducono a

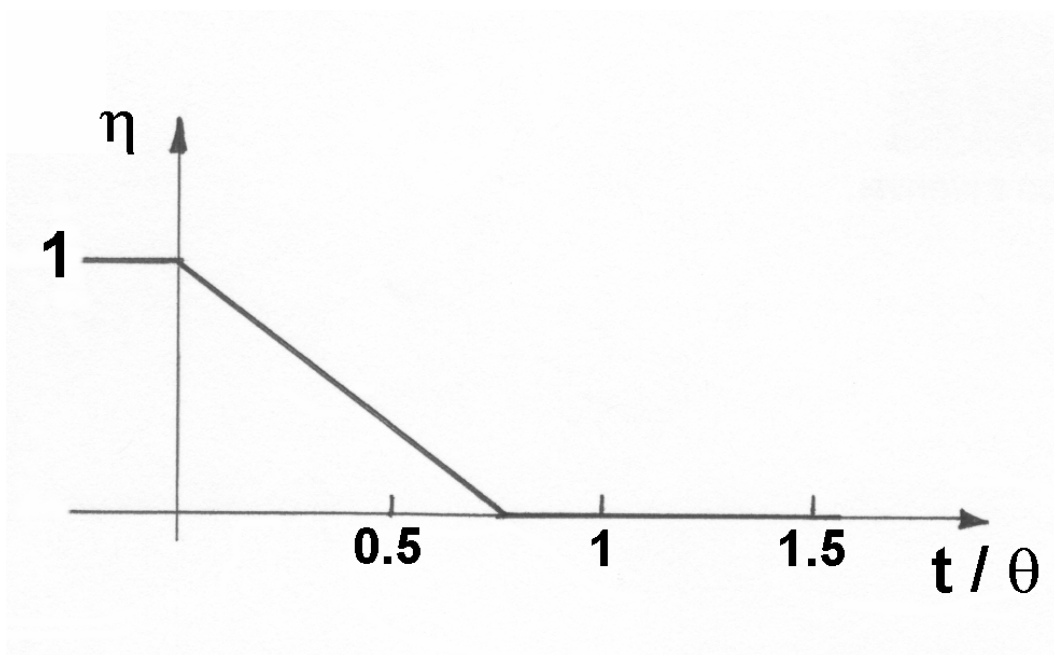
$$x = \pm at + \text{costante}$$

In altre parole solo un osservatore che si muove con velocità $+a(-a)$ cioè con legge $x = +at + cost (x = -at + cost)$ nel piano orario vedrà il carico h e la velocità U legate dalla relazione $h - h_0 = (a/g)(U - U_0) (h - h_0 = -(a/g)(U - U_0))$.

Le curve (rette) del piano orario definite da $x = \pm at + cost$ sono dette curve caratteristiche e le equazioni $h - h_0 = \pm \frac{a}{g}(U - U_0)$ valgono solo lungo tali curve.

Un semplice metodo (grafico) per determinare il valore di h e U nelle sezioni A e B è quello di analizzare il fenomeno nel piano (U, h) .

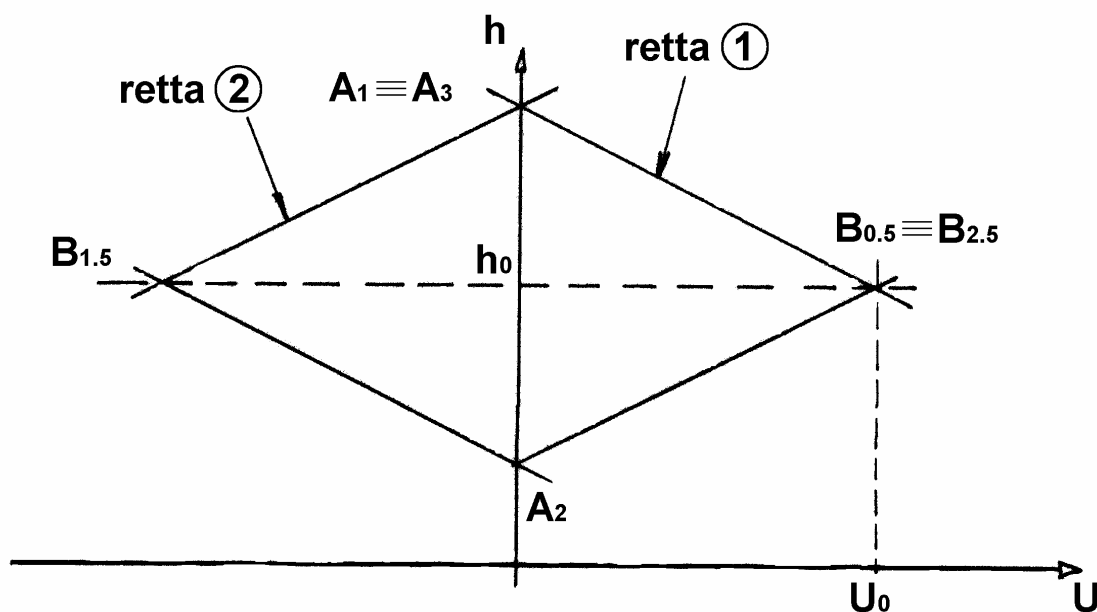
Per esempio consideriamo una chiusura brusca, con legge di chiusura rappresentata in figura



Analizziamo il fenomeno nel piano (U, h)

Per quanto discusso in precedenza, il punto nel piano (U, h) che rappresenta la situazione in B per qualunque tempo inferiore o uguale a $\theta/2$ è il punto (U_0, h_0) . Indicando con B_n e A_n la situazione nella sezione B e nella sezione A rispettivamente al generico tempo $t = n\theta$, il punto $B_{0.5}$ si troverà in (U_0, h_0) . Un osservatore che si trova in B all'istante $t = 0.5\theta$ e si muove con velocità $-a$ verso A, vi giungerà al tempo $t = \theta$. Durante il movimento l'osservatore vedrà un carico e una velocità legati dalla relazione

$$h - h_0 = -\frac{a}{g}(U - U_0)$$



rappresentata in figura dalla retta ①. E' dunque evidente che il punto A_1 che rappresenta la situazione in A all'istante $t = \theta$ deve trovarsi su tale retta. Dove? La condizione al contorno nella sezione A impone che

$$\frac{U}{U_0} = \eta(t) \sqrt{\frac{h}{h_0}}$$

Fissando il valore di t , tale condizione al contorno rappresenta nel piano (U, h) una curva sulla quale deve trovarsi il punto A al tempo considerato. Nel caso in esame $\tau < \theta$ e per $t = \theta$ η vale zero. La curva che rappresenta la condizione al contorno in A degenera quindi nell'asse h . Il punto A_1 dovendosi trovare contemporaneamente lungo la retta ① e lungo la curva $U = 0$, avrà

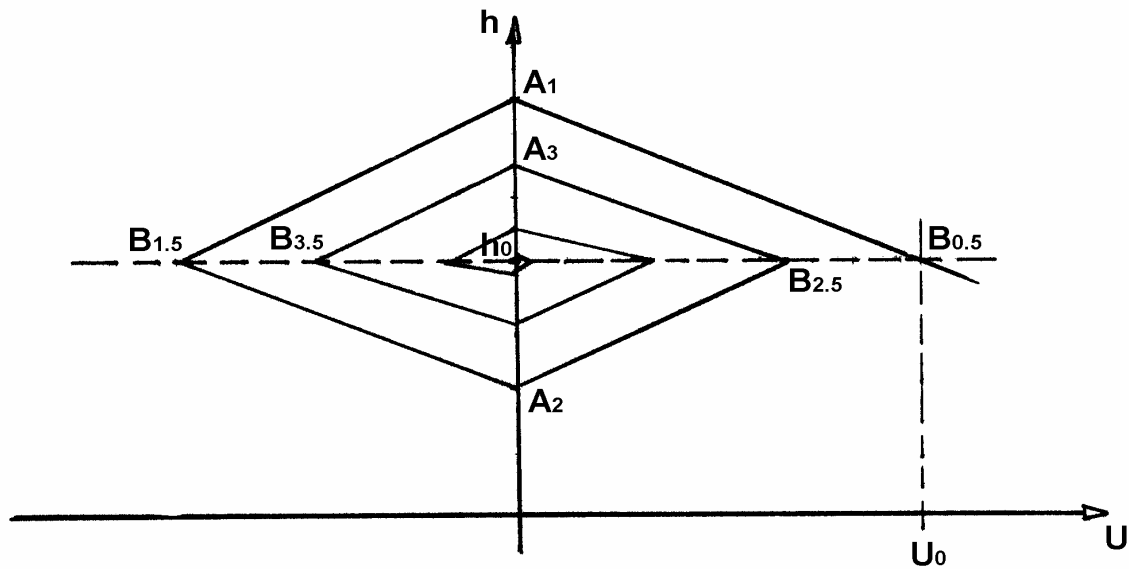
coordinate $\left(O, h_0 + \frac{a}{g}U_0\right)$ (vedi figura). La procedura può essere continuata per esempio per trovare la posizione di $B_{1.5}$. Infatti un osservatore che si trova in A all'istante $t = \theta$ e si muove verso B con velocità a , vi giungerà al tempo $t = 1.5\theta$. Durante il suo movimento vedrà una velocità e un carico legati dalla relazione

$$h - h_{A1} = \frac{a}{g}(U - U_{A1})$$

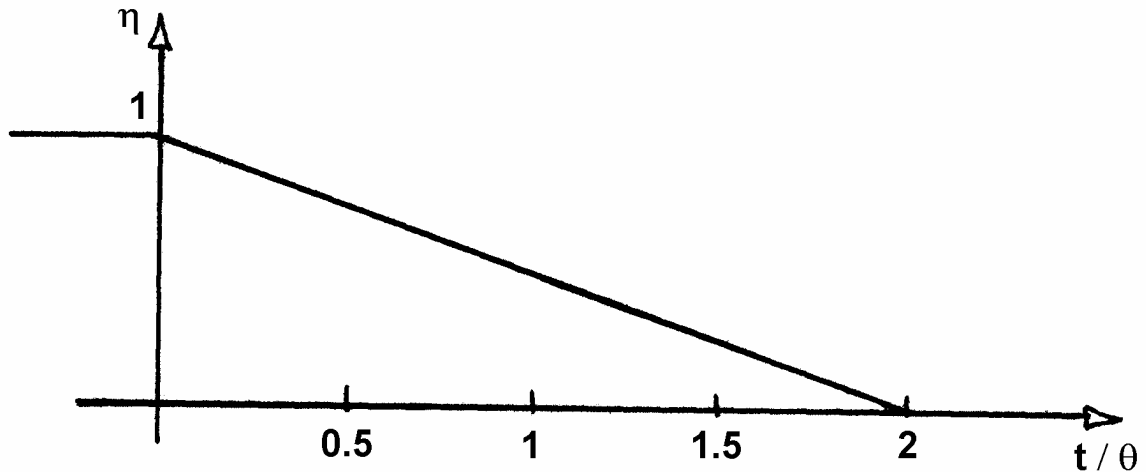
(retta ②). Quindi il punto $B_{1.5}$ dovrà trovarsi lungo tale retta. Inoltre in B, la condizione al contorno impone che $h = h_0$ ed è quindi facile determinare $B_{1.5}$ come intersezione della retta ② e della retta $h = h_0$. Proseguendo nel tempo è poi possibile determinare la posizione di $A_2, B_{2.5}, A_3$ e così via. Si osservi che, dopo che nella sezione A al tempo $t = \theta$ si è prodotto il massimo sovraccarico, al tempo $t = 2\theta$ il carico scende al di sotto di h_0 di una quantità pari a $(aU_0)/g$. Se il valore di $(aU_0)/g$ è elevato e h_0 non è grande, è possibile che la pressione raggiunga il valore della tensione del vapore e che quindi il fluido cavi. In tal caso si formano all'interno della condotta delle bolle che poi implodono quando la pressione aumenta nuovamente.

Avendo trascurato le dissipazioni, lo stato del sistema oscilla con periodo 2θ , infatti $B_{2.5}$ coincide con $B_{0.5}$, A_3 coincide con A_1 e così via.

I risultati ottenuti mostrano che esiste una fase in cui il fluido, inizialmente animato da velocità U_0 , rallenta comprimendosi e trasformando la sua energia cinetica in energia elastica di compressione. Questa fase termina quando il fluido è fermo e la pressione massima. A questo punto il fluido si dilata invertendo la sua velocità che assume valori negativi via via crescenti, mentre la pressione diminuisce. Quando la pressione raggiunge il valore iniziale, la velocità negativa è massima e pari a $-U_0$. A questo punto il fluido rallenta anche se continua a espandersi e quindi ad avere una velocità negativa. La fase di espansione termina quando la pressione raggiunge il valore minimo. In tale situazione $U = 0$. Inizia quindi una fase di compressione legata al fatto che la velocità ritorna positiva. Dopo mezza fase la velocità vale U_0 e la pressione ritorna ad avere il suo valore originario e il fenomeno si ripete identicamente per la mancanza di dissipazioni. Queste ultime causano nella realtà una lenta attenuazione del fenomeno (vedi figura) e al termine del processo si raggiunge una situazione stazionaria descritta da $U = 0$ e $h = h_0$.

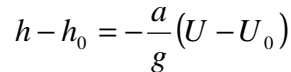


Vediamo ora cosa succede in presenza di una manovra lenta tale che $\tau \gg \theta$. In particolare esaminiamo il caso in cui la funzione η sia quella rappresentata nella figura sottostante



Analizziamo il fenomeno nel piano (U, h)

Come nel caso precedente $B_{0.5} \equiv (U_0, h_0)$ e un osservatore che partendo da B all'istante $t = 0.5\theta$ si muove verso la sezione A, la raggiunge al tempo $t = \theta$ osservando, durante il tragitto, valori di U e h descritti dalla retta ①


$$\frac{U}{U_0} = \eta(\theta) \sqrt{\frac{h}{h_0}}$$
$$h - h_{A1} = \frac{a}{g}(U - U_{A1})$$

Si noti che il sovraccarico che si realizza in A è in questo caso inferiore a $(aU_0)/g$.