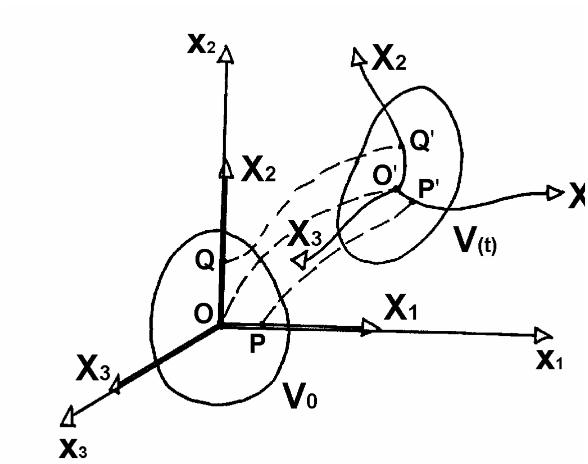
Lezione 13

DESCRIZIONE DEL MOTO DEI FLUIDI



- Consideriamo un volume di fluido $V(t)$ in movimento che all'istante iniziale $t = 0$ occupa la regione V_0.

Sia (x_1, x_2, x_3) un sistema cartesiano di riferimento fisso nello spazio e (X_1, X_2, X_3) un secondo sistema di riferimento inizialmente coincidente con (x_1, x_2, x_3) ma che si deforma nel tempo essendo solidale con il fluido.

- Una qualunque grandezza F del fluido (ad esempio la densità ρ) può essere descritta fornendo la funzione f_1

$$F = f_1(X_1, X_2, X_3, t)$$

o fornendo la funzione f_2

$$F = f_2(x_1, x_2, x_3, t)$$

Nel primo caso (descrizione lagrangiana), fissando i valori di X_1, X_2, X_3, si ottiene una funzione che descrive la variazione di F di una particolare particella fluida al variare del tempo sapendo che quella particella fluida occuperà posizioni diverse nello spazio al trascorrere del tempo.

Nel secondo caso (descrizione euleriana), fissando i valori di x_1, x_2, x_3, si ottiene una funzione che descrive la variazione di F in un punto dello spazio che al variare del tempo sarà occupato da particelle diverse.

Le funzioni f_1 e f_2 sono chiaramente diverse e sono legate fra di loro dal moto del fluido. In particolare nota la funzione f_2 è possibile ricavare f_1 se sono note le funzioni

$$x_1 = \varphi_1(X_1, X_2, X_3, t)$$
$$x_2 = \varphi_2(X_1, X_2, X_3, t)$$
$$x_3 = \varphi_3(X_1, X_2, X_3, t)$$

queste ultime descrivono il moto delle particelle fluide. In particolare fissato il valore di X_1, X_2, X_3 le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ descrivono la traiettoria di una particella fluida. Siccome una particella fluida non può occupare due posizioni diverse allo stesso tempo e due particelle fluide non possono occupare la stessa posizione, le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono invertibili e in particolare si possono ottenere le funzioni

$$X_1 = \Phi_1(x_1, x_2, x_3, t)$$
$$X_2 = \Phi_2(x_1, x_2, x_3, t)$$
$$X_3 = \Phi_3(x_1, x_2, x_3, t)$$

Le funzioni Φ_1, Φ_2, Φ_3 consentono a loro volta di determinare f_2 nota la funzione f_1.

Essendo f_1 diversa da f_2, è evidente che la derivata di f_1 rispetto al tempo sarà diversa dalla derivata parziale rispetto al tempo di f_2

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} \neq \frac{\partial f_2}{\partial t}$$

In particolare $\partial f_1 / \partial t$ descrive come cambia nel tempo la grandezza F di una particella fluida che si muove nello spazio. La funzione $\partial f_2 / \partial t$ descrive invece come varia F in un punto dello spazio che al trascorrere del tempo sarà occupato da particelle fluide diverse.

Per descrivere il moto dei fluidi si usa in generale un approccio euleriano, cioè si assegna o si ricerca la funzione

$$F = f_2(x_1, x_2, x_3, t)$$

e si indica con $\frac{\partial F}{\partial t}$ la funzione $\frac{\partial f_2}{\partial t}$.

Certi concetti della fisica richiedono tuttavia la valutazione di $\frac{\partial f_1}{\partial t}$ che indicheremo con $\frac{dF}{dt}$.

$\frac{\partial F}{\partial t}$ *è detta derivata locale.*

$\frac{dF}{dt}$ *è detta derivata totale o materiale o sostanziale.*

Considerando che spesso è necessario valutare $\frac{dF}{dt}$ e che F è usualmente assegnata come funzione di x_1, x_2, x_3, t è necessario individuare una semplice procedura per valutare $\frac{\partial f_1}{\partial t}$ nota f_2.

Considerando che $f_1(x_1, x_2, x_3, t)$ è uguale a

$$f_2\left(\varphi_1(X_1, X_2, X_3, t), \varphi_2(X_1, X_2, X_3, t), \varphi_3(X_1, X_2, X_3, t), t\right)$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[f_2\left(\varphi_1(X_1, X_2, X_3, t), \varphi_2(X_1, X_2, X_3, t), \varphi_3(X_1, X_2, X_3, t), t\right)\right]_{\underline{X}} =$$

$$= \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi_3}{\partial t}$$

Notando che $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial t}$ sono le tre componenti della velocità delle particelle fluide, dalla formula precedente si ottiene

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + v_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial F}{\partial x_3}$$

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla F}$$

La derivata materiale è dunque fornita dalla somma della derivata locale più il cosidetto termine convettivo pari al prodotto scalare fra le velocità e il gradiente di F . (NOTA 1)

NOTA 1

- Assegnata la funzione scalare $F(x_1, x_2, x_3, t)$, il gradiente di F , indicato con ∇F , è un vettore le cui componenti sono così definite

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3} \right)$$

- Assegnata la funzione vettoriale $\underline{F}(x_1, x_2, x_3, t)$ che corrisponde a tre funzioni scalari $\underline{F} = (F_1(\underline{x}, t), F_2(\underline{x}, t), F_3(\underline{x}, t))$, la divergenza di $\underline{F}$, indicata con $\nabla \cdot \underline{F}$, è uno scalare così definito

$$\nabla \cdot \underline{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$$

Il rotore di $\underline{F}$, indicato con $\nabla \times \underline{F}$, è un vettore così definito

$$\nabla \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \underline{i}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) - \underline{j}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \right) + \underline{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

- Assegnati due vettori $\underline{a}, \underline{b}$ $(\underline{a} = (a_1, a_2, a_3), \underline{b} = (b_1, b_2, b_3))$ il prodotto scalare è così definito

$$c = \underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

il prodotto vettoriale è così definito

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \underline{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \underline{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \underline{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

ALCUNE GRANDEZZE CINEMATICHE

- Utilizzando un approccio euleriano, il moto di un fluido viene descritto assegnando il vettore velocità $\underline{v}$ come funzione di $\underline{x}$ e del tempo t:

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t)$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{aligned} v_1 &= v_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ v_2 &= v_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ v_3 &= v_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{aligned}$$

- Il calcolo dell'accelerazione $\underline{a}$ può essere semplicemente eseguito valutando la derivata materiale di $\underline{v}$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} \Rightarrow a_1 = \frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3}$$

$$a_2 = \frac{dv_2}{dt} = \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3}$$

$$a_3 = \frac{dv_3}{dt} = \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla)\underline{v}$$

dove $$\nabla \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

- Le traiettorie, che sono un concetto tipicamente lagrangiano, possono essere calcolate integrando l'equazione

$$d\,\underline{x} = \underline{v}(\underline{x}, t)\,dt$$

note le posizioni iniziali delle particelle fluide.

- Le linee di corrente sono definite come quelle linee che in ogni punto sono tangenti, al vettore velocità. Esse si ricavano integrando l'equazione

$$d\,\underline{x} \times \underline{v}\left(\underline{x}, t\right) = 0$$

LA DERIVATA MATERIALE DI UNA GRANDEZZA INTEGRATA SU UN VOLUME MATERIALE

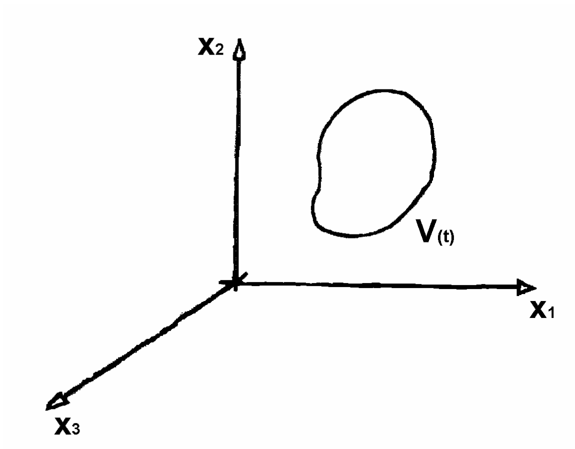
- Nello studio del moto dei fluidi è spesso necessario calcolare l'integrale di una certa grandezza F su un volume materiale di fluido, cioè un volume di fluido costituito sempre dalle stesse particelle fluide. In alcuni casi è necessario valutare la derivata materiale (fatta cioè seguendo il moto della massa fluida) di tale quantità. In altre parole è necessario valutare

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} F dV .$$

Per esempio la massa M associata a un volume materiale di fluido (in movimento) è:

$$M = \int_{V(t)} \rho dV .$$

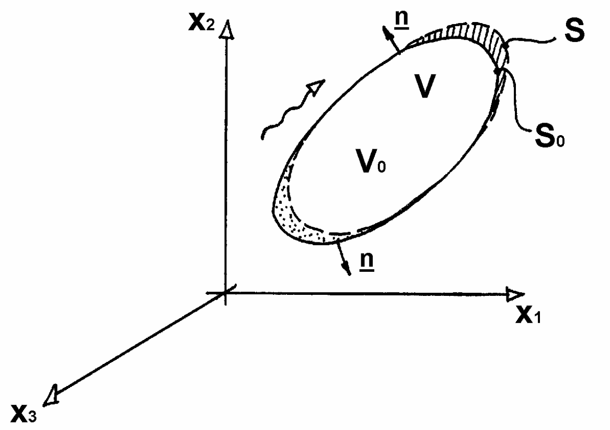
Infatti dalla definizione stessa di densità, la massa infinitesima associata a un volume infinitesimo dV sarà ρdV. Per determinare la massa contenuta in V è necessario sommare tutti i contributi e quindi integrare su tutto il volume $V(t)$. Il principio di conservazione della massa impone poi che la massa M associata al volume $V(t)$ di fluido in movimento rimanga costante.



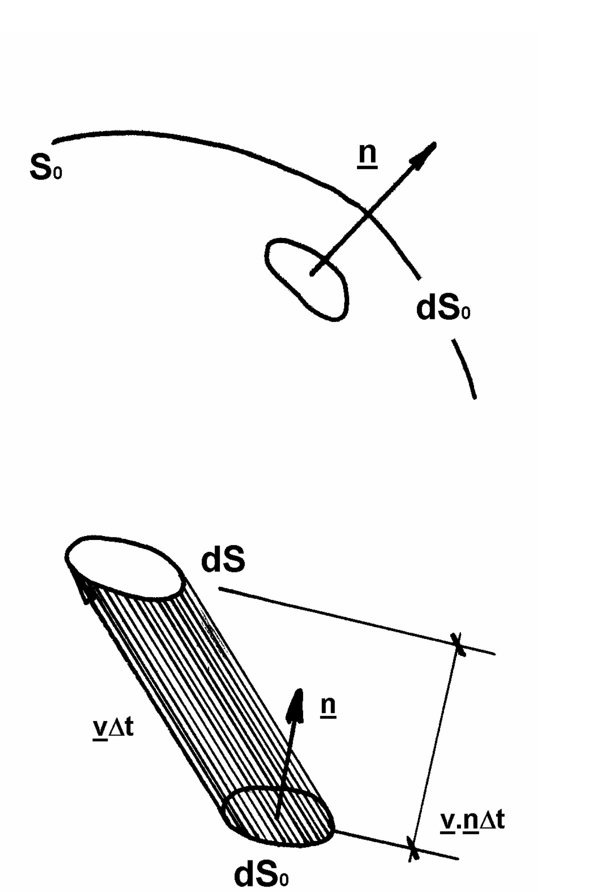
E' necessario dunque imporre

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho dV = 0$$

Tale calcolo risulta difficile da effettuarsi pur essendo nota la funzione $\rho\left(x_1, x_2, x_3, t\right)$, considerato che il volume $V(t)$ è mobile. E' pertanto utile trasformare l'integrale di cui sopra in uno da effettuarsi su un volume fisso nello spazio. Vediamo come ciò è possibile.



- Consideriamo il volume $V(t)$ al tempo t_0 e denotiamolo con V_0. Indichiamo con S_0 la sua frontiera . Consideriamo quindi il volume all'istante $t_0 + \Delta t$ e indichiamolo con V . Sia S la frontiera di V . Il volume V sarà quasi coincidente con V_0, essendo trascorso un tempo piccolo (a rigori infinitesimo) Δt . Rispetto a V_0, il volume V avrà in più il volume tratteggiato e in meno il volume punteggiato. Cerchiamo di quantificare tale differenza. Con riferimento alla figura accanto consideriamo una parte infinitesima di S_0 e denotiamola con dS_0. Sia $\underline{n}$ la normale alla superficie, uscente per convenzione dal volume V_0. Se indichiamo con $\underline{v}$ la velocità del fluido valutata sulla superficie infinitesima dS_0 , dopo un tempo piccolo Δt, la particella fluida che si trovava su dS_0 si sarà spostata nello spazio di una quantità $\underline{v}\Delta t$. Essendo dS_0 una superficie infinitesima si possono trascurare le differenze di velocità fra le diverse particelle fluide che si trovano su dS_0. Il volume di fluido che ha attraversato dS_0 nell'intervallo di tempo Δt e che occuperà il volume delimitato da dS , dS_0 e da una superficie cilindrica con generatrici parallele a $\underline{v}\Delta t$ (vedi figura) sarà dunque



$$dS_0 \left(\underline{v} \cdot \underline{n}\right) \Delta t$$

Tale volume sarà positivo se $\underline{v} \cdot \underline{n}$ è positivo (se cioè il fluido esce da V_0), mentre sarà negativo se $\underline{v} \cdot \underline{n}$ è negativo (se cioè il fluido entra in V_0).

La differenza fra il volume V e il volume V_0 sarà dunque

$$\int_{S_0} \left(\underline{v} \cdot \underline{n} \right) \ \Delta t \quad dS_0$$

Vediamo ora di valutare

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F dV$$

ad un generico tempo t_0. Applichiamo la definizione di derivata

$$\left[\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F dV \right]_{t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_V F\left(t_0 + \Delta t\right) dV - \int_{V_0} F\left(t_0\right) dV_0}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{V_0} F\left(t_0 + \Delta t\right) dV_0 + \int_{S_0} F\left(t_0 + \Delta t\right)\left(\underline{v} \cdot \underline{n}\right) \Delta t dS_0 - \int_{V_0} F\left(t_0\right) dV_0}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{V_0} \left[F\left(t_0\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{t_0} \Delta t \right] dV_0 + \int_{S_0} F\left(t_0 + \Delta t\right)\left(\underline{v} \cdot \underline{n}\right) \Delta t dS_0 - \int_{V_0} F\left(t_0\right) dV_0}{\Delta t} =$$

$$= \int_{V_0} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{t_0} dV_0 + \int_{S_0} F\left(t_0\right)\left(\underline{v} \cdot \underline{n}\right) dS_0$$

Si è quindi dimostrato (dimostrazioni più rigorose sono disponibili nei libri di testo) il teorema del trasporto

$$\left(\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F dV \right)_{t = t_0} = \int_{V_0} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{t = t_0} dV_0 + \int_{S_0} F\left(t_0\right)\left(\underline{v} \cdot \underline{n}\right) \quad dS_0$$

essendo V_0 un volume fisso nello spazio che nell'istante in considerazione coincide con il volume mobile V .