Lezione 3

FLUIDI IN QUIETE

- Come illustrato nella LEZIONE 2, la tensione $\underline{t}$ all'interno di un continuo (fluido) dipende non solo dalla posizione individuata dal vettore $\underline{x}$ e dal tempo t (non confondere $\underline{t}$ con t) ma anche dall'orientamento della superficie infinitesima dS' presa in esame.

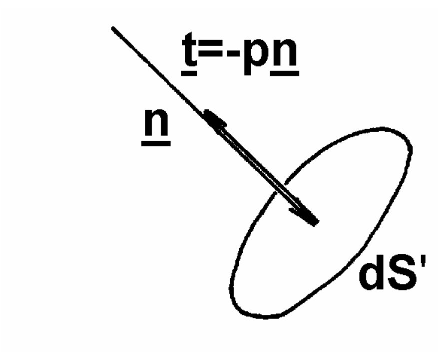
  In generale

$$\underline{t} = \underline{t}\left(\underline{x}, t, \underline{n}\right)$$

- Nei fluidi in quiete, tuttavia, la tensione assume una forma particolarmente semplice (ASSIOMA DI EULERO). In particolare $\underline{t}$ risulta sempre ortogonale alla superficie in considerazione e diretta verso la superficie.

$$\underline{t} = -p\underline{n}$$

La quantità scalare p si dice pressione



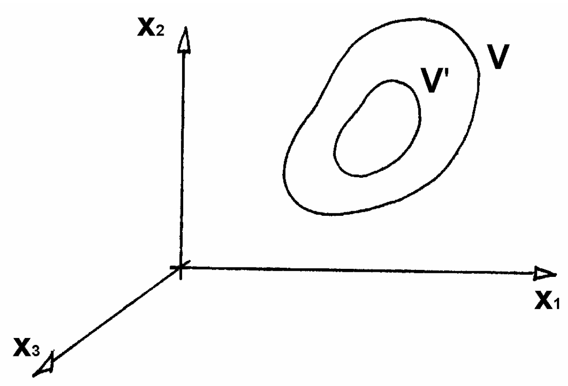
- Le dimensioni della pressione p sono uguali a quelle della tensione $\left([p] = ML^{-1}T^{-2}\right)$ così come le unità di misura (si ricordi che la normale è dimensionale).

- La pressione p in generale dipende dalla posizione $\underline{x}$ e dal tempo t (non confondere $\underline{t}$ con t)

$$p = p(\underline{x}, t)$$

L'EQUAZIONE INTEGRALE DELLA STATICA

- Consideriamo un volume di fluido V e una sua porzione arbitraria $V^{'}$. Per il principio della quantità di moto (la derivata della quantità di moto di una massa in movimento rispetto al tempo è uguale alla risultante delle forze esercitate sulla massa dall'esterno), la risultante delle forze che l'esterno esercita su $V^{'}$ deve annullarsi. Infatti in un fluido in quiete la quantità di moto è sempre nulla, essendo nulla la velocità. Per quanto esposto nella LEZIONE 2, la risultante $\underline{R}$ delle forze esercitate dall'esterno su $V^{'}$ sarà



$$\underline{R} = \int_{S^{'}} \underline{t}\, dS^{'} + \int_{V^{'}} \rho\, \underline{f} dV^{'}$$

o, tenendo conto che $\underline{t} = -p\underline{n}$

$$\underline{R} = -\int_{S^{'}} p\underline{n}\, dS^{'} + \int_{V^{'}} \rho \underline{f} dV^{'}$$

Deve quindi risultare

$$\underline{R} = 0 \text{ oppure } \boxed{\int_{S^{'}} p\ \underline{n}\ dS^{'} = \int_{V^{'}} \rho\ \ \underline{f} dV^{'}}$$

L'equazione precedente è detta equazione integrale della statica e deve valere qualunque volume $V^{'}$.

L'EQUAZIONE PUNTUALE DELLA STATICA

L'equazione della statica in forma integrale può essere trasformata utilizzando il teorema del gradiente[1] che porge

$$\int_{S'} p\underline{n}dS' = \int_{V'} \nabla p dV'$$

si ottiene quindi

$$\int_{V'} \left(\nabla p - \rho \underline{f}\right) dV = 0$$

Considerando che l'equazione della statica in forma integrale vale qualunque porzione V' di V si consideri, l'equazione precedente può essere soddisfatta solo se si annulla la funzione integranda; se cioè

$$\nabla p = \rho \underline{f}$$

L'equazione precedente, detta equazione puntuale della statica, è un'equazione vettoriale che corrisponde a tre equazioni scalari

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \rho f_1 \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = \rho f_2 \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho f_3$$

Essa descrive come cambia nello spazio la pressione p. Tale equazione può essere integrata una volta noto il campo di forze $\underline{f}$ e l'equazione di stato che lega la densità allo stato del fluido.

[1] Questo risultato segue banalmente osservando che $p\underline{n} = p\mathbf{I}.\underline{n}$ (dove **I** è la matrice identità) e applicando il teorema di Gauss (detto anche teorema della divergenza) al tensore p**I:**

$$\int_S (p\mathbf{I}) \cdot \underline{n} dS = \int_V \nabla \cdot (p\mathbf{I}) dV = \int_V \nabla p dV \ .$$