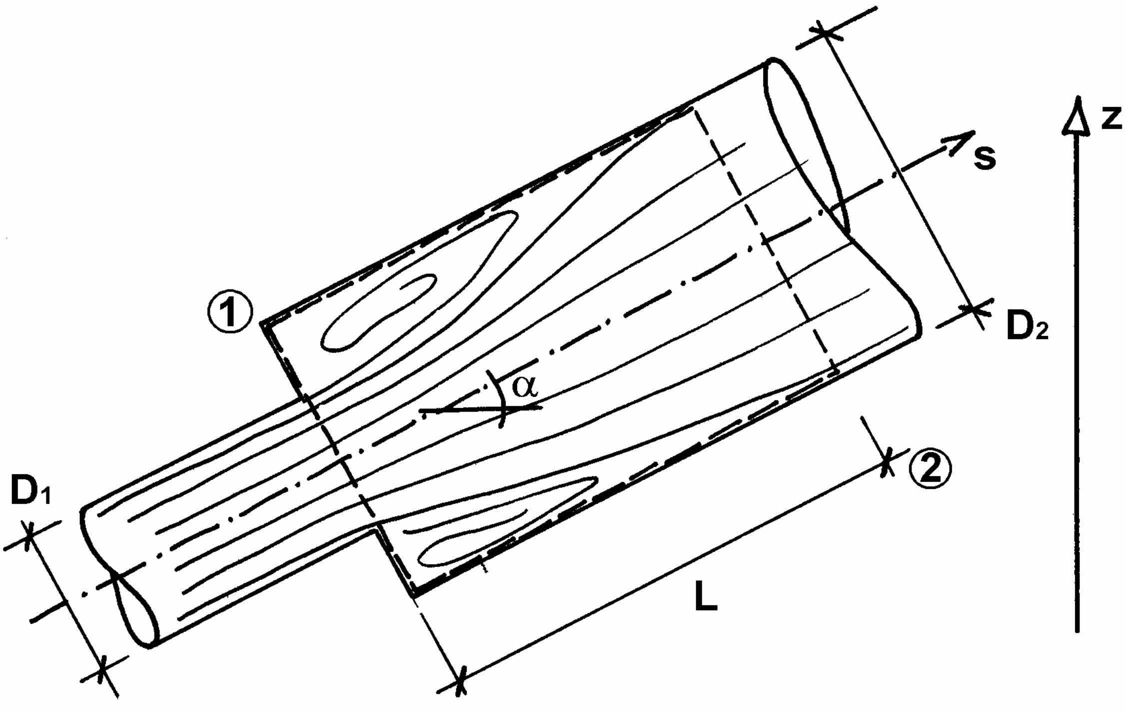
Lezione 20

PERDITE CONCENTRATE DI CARICO DOVUTE A UN BRUSCO ALLARGAMENTO (PERDITE DI BORDA)

In un impianto è possibile che sia presente il passaggio da un diametro D_1 a uno D_2 maggiore. Localmente il moto non è più unidirezionale, generandosi significative componenti di velocità ortogonali all'asse della condotta. Ciò fa si che localmente il moto del fluido non possa essere analizzato con le equazioni delle correnti.



Da un punto di vista qualitativo, uno schizzo del campo di moto è riportato nella figura.

Per legare le caratteristiche della corrente immediatamente a monte dell'allargamento con quelle della corrente a valle è possibile utilizzare il principio della quantità di moto in forma integrale (LEZIONE 14). Sottolineamo che il moto riprende le caratteristiche di una corrente a una distanza dall'allargamento dell'ordine di qualche diametro.

Applichiamo dunque il principio della quantità di moto al volume di riferimento tratteggiato in figura e delimitato dalla sezione ①, immediatamente a valle dell'allargamento, e dalla sezione ② a una distanza L tale che il moto abbia ripreso le caratteristiche di una corrente. Proiettiamo l'equazione lungo direzione s

$$I_s + M_{us} - M_{is} = G_s + \Pi_s$$

Supposto il moto stazionario, $\underline{I}$ e quindi I_s risultano nulli. Sia $\Omega_1 = \pi D_1^2/4$ e $\Omega_2 = \pi D_2^2/4$.

Denotando con Q la portata defluente nell'impianto, si ha

$$M_{us} = \rho Q U_2 = \rho \Omega_2 U_2^2$$

$$M_{is} = \rho Q U_1 = \rho \Omega_1 U_1^2$$

Ricordiamo infatti che per il principio di conservazione della massa impone

$$\Omega_1 U_1 = \Omega_2 U_2 = Q = \text{costante}$$

E' facile verificare che

$$G_s = -\gamma \Omega_2 L \,\text{sen}\, \alpha = -\gamma \Omega_2 L \frac{z_2 - z_1}{L} = \gamma \Omega_2 (z_1 - z_2)$$

essendo z_1 e z_2 le quote dei baricentri delle sezioni di ingresso e di uscita del fluido.

Rimane da quantificare Π_s. Sulla sezione ① possiamo assumere che la distribuzione di pressione sia idrostatica in quanto parte della sezione è occupata dalla corrente in arrivo e parte da fluido praticamente fermo. Anche sulla sezione ② è possibile assumere che la distribuzione di pressione sia pari a quella idrostatica. Trascurando le tensioni tangenziali sulla superficie laterale in considerazione del valore modesto di L, si ha

$$\Pi_s = p_1 \Omega_2 - p_2 \Omega_2$$

essendo p_1 e p_2 le pressioni sui baricentri delle sezioni di ingresso e di uscita del fluido.

Si ottiene dunque

$$\rho\Omega_2 U_2^2 - \rho\Omega_1 U_1^2 = \gamma\Omega_2(z_1 - z_2) + p_1\Omega_2 - p_2\Omega_2$$

e dividendo per $\gamma\Omega_2$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma_1} - z_2 - \frac{p_2}{\gamma_2} = h_1 - h_2 = \frac{U_2^2}{g} - \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\frac{U_1^2}{g}$$

Utilizzando quindi la relazione $\Omega_1 U_1 = U_2\Omega_2$ si può ottenere

$$h_1 - h_2 = \frac{U_2^2}{g}\left[1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right] = \frac{U_1^2}{g}\left[\frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} - \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\right]$$

Essendo $\Omega_2 > \Omega_1$, la relazione precedente mostra che $h_2 > h_1$: il carico piezometrico a valle del restringimento è maggiore di quello a monte.

Ricaviamo ora il valore di $H_1 - H_2$. Si ha

$$H_1 - H_2 = h_1 + \frac{U_1^2}{2g} - h_2 - \frac{U_2^2}{2g} = h_1 - h_2 + \frac{U_2^2\Omega_2^2}{2g\Omega_1^2} - \frac{U_2^2}{2g} = \frac{U_2^2}{2g}\left[2 - \frac{2\Omega_2}{\Omega_1} + \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} - 1\right] = \frac{U_2^2}{2g}\left[1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right]^2$$

L'equazione precedente mostra che $H_1 > H_2$, cioè passando attraverso l'allargamento il fluido dissipa dell'energia e l'ammontare dell'energia dissipata è pari a

$$\Delta H_c = \frac{U_2^2}{2g}\left[1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right]^2$$

Tale dissipazione di energia può essere anche quantificata rispetto al carico cinetico di monte

$$\Delta H_c = \frac{U_1^2}{2g}\left[\frac{\Omega_1}{\Omega_2} - 1\right]^2$$

Quest'ultima relazione mostra che quando una condotta sfocia in un serbatoio, la corrente in arrivo dissipa tutta la sua energia cinetica. Infatti lo sbocco di una condotta in un serbatoio può essere pensato come un brusco allargamento con Ω_1/Ω_2 tendente a zero.

Segue

$$\Delta H_c = \frac{U_1^2}{2g}$$