Lezione 23

FLUIDI IDEALI E TEOREMA DI BERNOULLI PER LE CORRENTI

L'equazione del moto delle correnti stabilisce che

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} - j$$

cioè le variazioni di H lungo l'ascissa curvilinea s sono causate da accellerazioni o decelerazioni del moto e dalla resistenza che le pareti oppongono al deflusso del fluido.

Nel caso, estremamente frequente, di moto stazionario si ha

$$\frac{dH}{ds} = -j = -\frac{\tau}{\gamma R_i}$$

cioè il carico totale varia solo per effetto della resistenza esercitata dal contorno della corrente. <u>Si noti che il carico totale diminuisce sempre nella direzione del moto.</u>

Tutti i fluidi sono caratterizzati da una viscosità che può essere più o meno elevata ma che comunque è sempre presente. Ciò implica che τ è sempre diversa da zero e che quindi anche j è sempre non nulla. Tuttavia quando il tratto di condotta oggetto di indagine è relativamente breve, le perdite di carico subite dal fluido possono essere trascurate rispetto al carico stesso. In tale situazione si può assumere che il moto del fluido soddisfi l'equazione

$$\frac{dH}{ds} = 0$$

Tale equazione risulta quindi valida nelle ipotesi che qui ricordiamo

1) Perdite di carico trascurabili
2) Moto stazionario
3) Campo di forze gravitazionali
4) Fluido barotropico $(\rho = \rho(p))$

Sotto tali ipotesi il carico totale H rimane costante lungo s. Tale risultato è noto come teorema di Bernoulli per le correnti. Originariamente il risultato fu ottenuto nell'ipotesi di fluido ideale $(\mu = 0)$ e di campo di forze conservativo (non necessariamente gravitazionale).
Se il fluido è barotropico

$$H = z + \int \frac{dp}{\gamma(p)} + \frac{U^2}{2g}$$

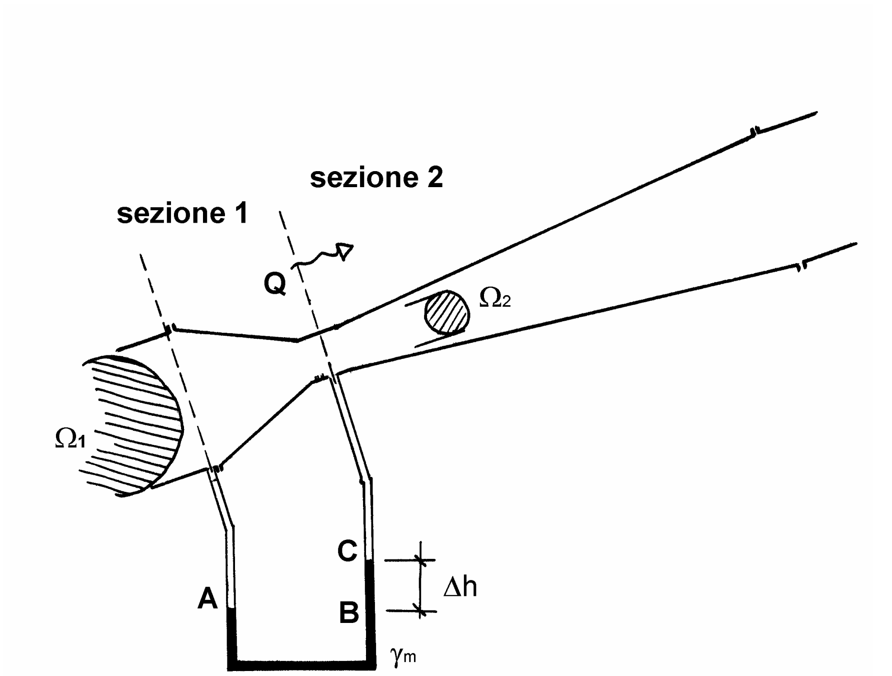
Se il fluido è a densità costante

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g}$$

Si noti che il fatto che H sia costante non implica la costanza dell'energia potenziale o di quella di pressione o dell'energia cinetica: è la loro somma che si mantiene costante. Il fluido può ad esempio aumentare la sua energia cinetica a scapito di quella potenziale o di quella di pressione e viceversa.

IL VENTURIMETRO E ALTRI MISURATORI DI PORTATA

Il venturimetro è un misuratore di portata che, inserito in una condotta, permette di quantificare la portata che vi scorre attraverso il rilievo di un dislivello fra due superfici libere. Esso è costituito da: un tratto convergente che porta la sezione dal valore Ω_1 della condotta a un valore Ω_2; un breve tratto di sezione costante Ω_2; un lungo tratto divergente che riporta la sezione al valore originario Ω_1. Immediatamente a monte del tratto convergente, tutto intorno alla sezione sono presenti dei fori collegati ad un tubo a U la cui altra estremità è collegata ad altri fori posizionati attorno alla sezione contratta. All'interno del tubo a U (detto tubo manometrico) è presente un fluido (in generale mercurio) di peso specifico elevato



indicato con γ_m. Quando all'interno della condotta defluisce una portata Q, la pressione nella sezione 1 risulta diversa da quella nella sezione 2 e ciò induce un dislivello fra i due rami del tubo a U. La lettura di tale dislivello consente di valutare Q. Vediamo ora come.

Fra la sezione 1 e la sezione 2 il moto del fluido è accelerato, il tratto è molto breve e ciò consente di trascurare le dissipazioni di energia e di supporre quindi il comportamento del fluido "ideale". Il moto è supposto stazionario. Il fluido è soggetto al campo di forze gravitazionale. Supponiamo infine di considerare un fluido a densità costante. Esistono i presupposti per poter applicare il teorema di Bernoulli per le correnti. Segue dunque

$$H_1 = h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{U_2^2}{2g} = H_2$$

L'equazione di continuità porge inoltre

$$U_1\Omega_1 = U_2\Omega_2 = Q \quad e \quad U_1 = \frac{Q}{\Omega_1}\,;U_2 = \frac{Q}{\Omega_2}$$

Si ha quindi

$$\frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2}\right) = h_1 - h_2$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)^2}}\Omega_2\sqrt{2g(h_1 - h_2)} = C_Q\Omega_2\sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

essendo $C_Q = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)^2}}$

Il valore di $h_1 - h_2$ può essere facilmente legato a Δh tenendo conto che la pressione p_A in A è uguale alla pressione p_B in B e che il carico piezometrico nella sezione 1 e nel ramo di sinistra del tubo manometrico è costante così come è costante il carico piezometrico nella sezione 2 e nel ramo di destra del tubo manometrico. La costanza del carico piezometrico nelle sezioni deriva dal fatto che il comportamento del fluido è quello di una corrente mentre la costanza del carico piezometrico nei due rami del tubo manometrico discende dal fatto che ivi il fluido è fermo.

Si ha

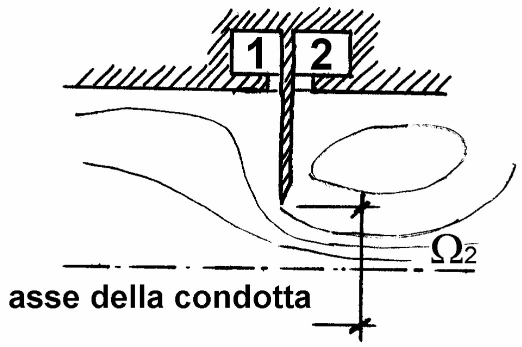
$$h_1 - h_2 = h_A - h_C = \frac{p_A}{\gamma} + z_A - \frac{p_C}{\gamma} - z_C$$

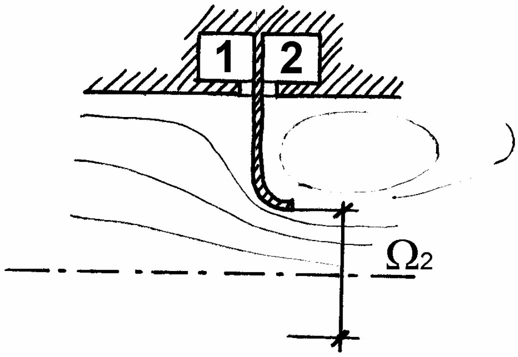
$$h_1 - h_2 = -\Delta h + \frac{1}{\gamma}\left[p_A - \left(p_B - \gamma_m \Delta h\right)\right] = -\Delta h + \frac{\gamma_m}{\gamma}\Delta h = \Delta h\left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1\right)$$

Da cui

$$\boxed{Q = C_Q \Omega_2 \sqrt{2g\Delta h\left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1\right)}}$$

Altri misuratori di portata sono i diaframmi (figura a sinistra) e i boccagli (figura a destra).





Essi si basano sullo stesso principio di funzionamento dei venturimetri e presuppongono la lettura della differenza di pressione fra la sezione 1 immediatamente a monte del diaframma e del boccaglio e la sezione 2 immediatamente a valle.
Si ha

$$Q = C_Q \Omega_2 \sqrt{2g\frac{\Delta p}{\gamma}}$$

essendo Ω_2 la superficie di efflusso del fluido e C_Q un coefficiente che dipende dai dettagli geometrici (per i valori di C_Q si consultino libri di testo o manuali dell'ingegnere).