Lezione 6

LA DISTRIBUZIONE DI PRESSIONE IN UN GAS PERFETTO A TEMPERATURA COSTANTE SOGGETTO AL CAMPO DI FORZE GRAVITAZIONALE

L'equazione puntuale della statica impone

$$\frac{dp}{dz} = -\rho\, g$$

Utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti a temperatura costante (LEZIONE 5), si ottiene

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p\rho_0}{p_0}\, g$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0}\, dz = -\frac{\gamma_0}{p_0}\, dz$$

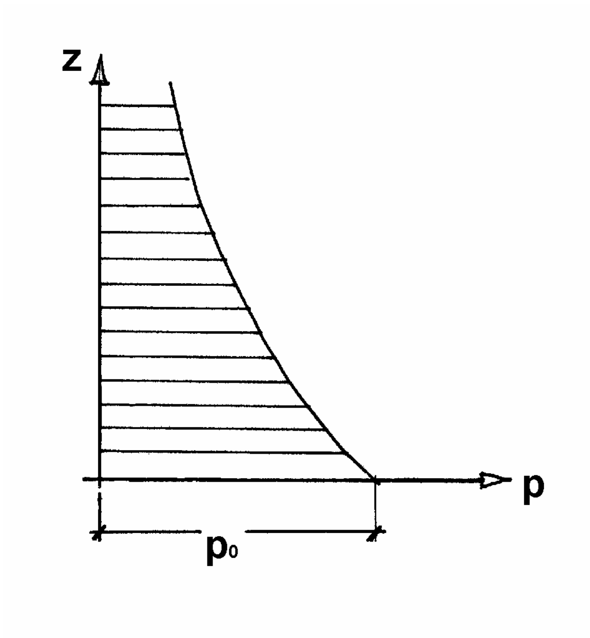
$$\Downarrow$$

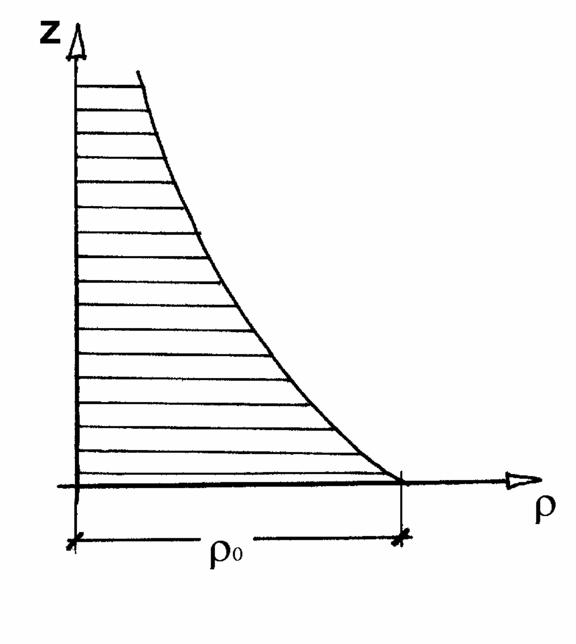
$$\ell n\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{\gamma_0}{p_0}\left(z - z_0\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{p = p_0 e^{-\frac{\gamma_0 (z - z_o)}{p_0}}}$$

Se consideriamo aria a una temperatura di $15^0 C$ e assumiamo p_0 pari a $1,013 \quad 10^5 Pa$ con $z_0 = 0$, il valore di γ_0 risulta pari a $11.2\ N/m^3$. La figura riporta l'andamento di p e di ρ con la quota.





Se tuttavia le variazioni di quota sono modeste (per esempio se $z - z_0$ è inferiore a 100 *m*.), la quantità $\gamma_0 (z - z_0)/ p_0$ risulta molto minore di uno $\left(\gamma_0 (z - z_0)/ p_0 = 1.1 \;\; 10^{-2} \; per \;\; z - z_0 = 100 \text{ m}\right)$ e sia la pressione che la densità possono essere assunte costanti. Infatti per valori piccoli di $\gamma_0 (z - z_0)/ p_0$ si può scrivere $p \cong p_0 \left[1 - \frac{\gamma_0 (z - z_0)}{p_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma (z - z_0)}{p_0} \right)^2 + ... \right]$. Quindi se $(z - z_0)$ è pari a 100 *m* o inferiore, p può essere assunta pari a p_0 con un errore di ordine 10^{-2} o minore. E' per questo motivo che nei problemi che noi affronteremo, in cui le variazioni di quota sono modeste, riterremo la pressione atmosferica costante con la quota.