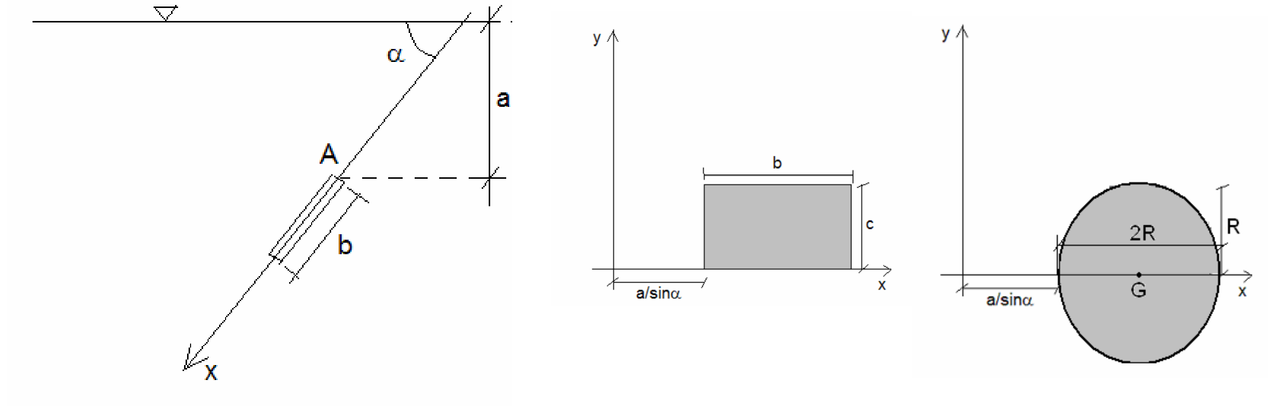
## ESEMPIO 1

1) Calcolare modulo direzione e verso della spinta risultante sul rettangolo b × c.
2) Se la superficie rettangolare fosse incernierata in A, calcolare il momento necessario a tenerla in equilibrio.
3) Se la superficie rettangolare venisse sostituita da un cerchio di raggio R=0.25 m, quali sarebbero la spinta ed il momento rispetto A.

**Dati:** a=0.2 m, b=0.5 m, c=0.3 m, $\alpha$=30°, $\gamma$= 9810 N/m$^3$




**Soluzione.**

**METODO 1.**

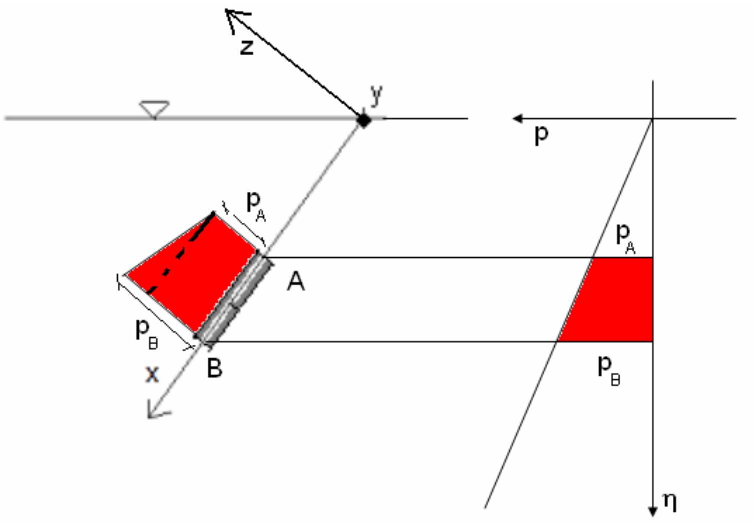
1) Direzione di F normale alla superficie.
   Verso di F dalla regione occupata dal fluido verso l'esterno.
   Calcolo il modulo come $|F| = p_G S = \rho g \eta_G S$, il baricentro di S ha coordinate $x_G$=a/sen$\alpha$+b/2=0.65 m, $y_G$=c/2=0.15, a noi interessa $\eta_G = x_G$ sen$\alpha$=a+b/2 sen$\alpha$= 0.325 m. Da cui |F|=$\gamma$ (a+bsen$\alpha$/2)bc= 478.2 N.
   Calcolo il punto d'applicazione di G, $x_C=x_G+\dfrac{J_{yGyG}}{Sx_G}= \; x_G+\dfrac{b^3c}{12bcx_G}= \; x_G \; +\dfrac{b^2}{12x_G}=$ 0.65+0.032=0.682 m; $\qquad y_C=y_G+\dfrac{J_{yGxG}}{Sx_G}$=0.15 +0 m=0.15 m.
2) Il modulo del momento e' |M|=|F|b, dove b è il braccio di F rispetto A, ovvero, b=$x_C$-$x_A$=0.682-0.4=0.282 m, da cui |M|= 134.8 Nm, antiorario.
3) La direzione di F è ancora normale alla superficie, ed il verso di F è dalla regione occupata dal fluido verso l'esterno. Calcolo il modulo come $|F| = p_G S = \rho g \eta_G S$, il baricentro di S ha coordinate $x_G$=a/sen$\alpha$+R=0.65 m, $y_G$=0m, a noi interessa $\eta_G = x_G$ sen$\alpha$=a+R sen$\alpha$= 0.325 m. Da cui |F|=$\gamma$ (a+Rsen$\alpha$)$\pi$R$^2$= 625.7 N. Calcolo il punto d'applicazione di G, $x_C=x_G+\dfrac{J_{yGyG}}{Sx_G}=x_G+\dfrac{\pi R^4}{4\pi R^2 x_G}=x_G+\dfrac{R^2}{4x_G}=$ 0.65+0.024=0.674 m; $\quad y_C=y_G+\dfrac{J_{yGxG}}{Sx_G}$=0 +0 m=0 m. Il modulo del momento e' |M|=|F|b, dove b è il braccio di F rispetto A, ovvero, b=$x_C$-$x_A$=0.674-0.4= 0.274 m, da cui |M|= 171.4 Nm (antiorario).

**METODO 2**

1) Direzione di F normale alla superficie.
   Verso di F dalla regione occupata dal fluido verso l'esterno.
   Calcolo il modulo di F come volume del solido delle pressioni:
   - Tracciata la distribuzione di pressione, si calcolino le pressioni nei punti più significativi della superficie.

     $p_A = \gamma\eta_A = \gamma a = 1962$ Pa

     $p_B = \gamma\eta_B = \gamma(a + b\sin\alpha) = 4414.5$ Pa



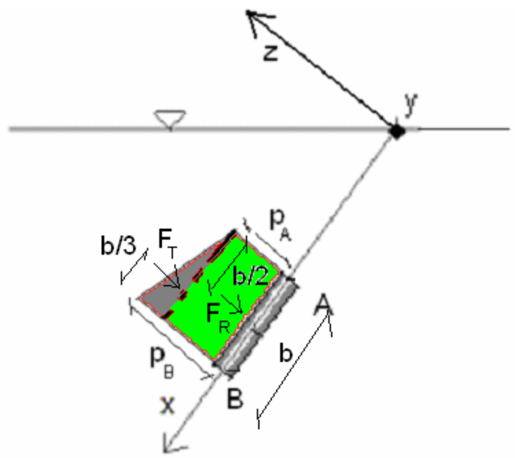

   - Individuato il solido delle pressioni, lo si scomponga in parti di cui sia semplice calcolarne il volume ed il baricentro. I volumi dei solidi individuati sono:

     $\left|F\right| = |F_R| + |F_T| = V_R + V_T$ ,

     $V_R = p_A bc = \gamma\eta_A bc = \gamma abc = 294.3$ N

     $VT = (p_B - p_A)bc/2 = \gamma b^2 c\sin\alpha/2 = 183.9$ N

     |F|=478.2 N




     Le coordinate dei baricentri (dei volumi trovati) rispetto il punto A sono:
     $b_R$= b/2=0.25 m; $b_T$= 2b/3=0.334 m.

   - L'equilibrio dei momenti meccanici rispetto ad A impone:

     $|F|\ b_F = |F|_R\ b_R + |F|_T\ b_T$ da cui

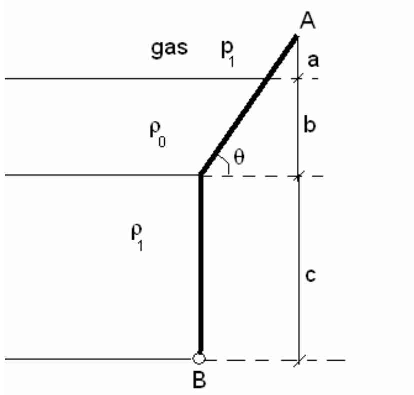
     $b_F=(|F|_R\ b_R + |F|_T\ b_T)/\ (|F|_R + |F|_T)$= (294.3 0.25+ 183.9 0.334)/ 478.2 =
     =134. 8 Nm/478.2N= 0.28 m.

   Rispetto l'origine degli assi x,y,z il punto d'applicazione di F è $x_F$= $b_F$+a/sinα=0.68m

2) Il modulo del momento è $|M|=|F|b_F$ (oppure $F|_R\ b_R + |F|_T\ b_T$), dove $b_F$ è il braccio di F rispetto A, da cui |M|= 134.8 Nm (antiorario).

## ESERCIZIO 1

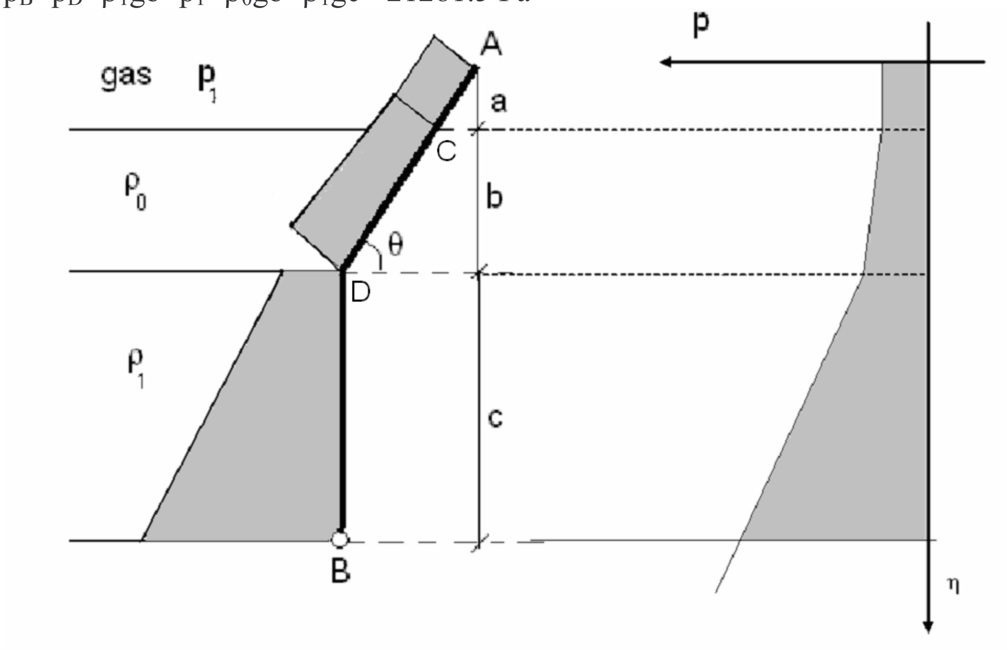
Data la paratoia incernierata in B, calcolare il momento da applicare in B per mantenere in equilibrio la paratoia (supposta di larghezza unitaria).
Dati: a=0.5 m, b=0.5m, c=0.75 m, $\rho_0$=800 kg/m$^3$, $\rho_1$=1000 kg/m$^3$, $p_1=10^4$ N/m$^2$(relativa), $\theta$=45°
R. 23177 Nm



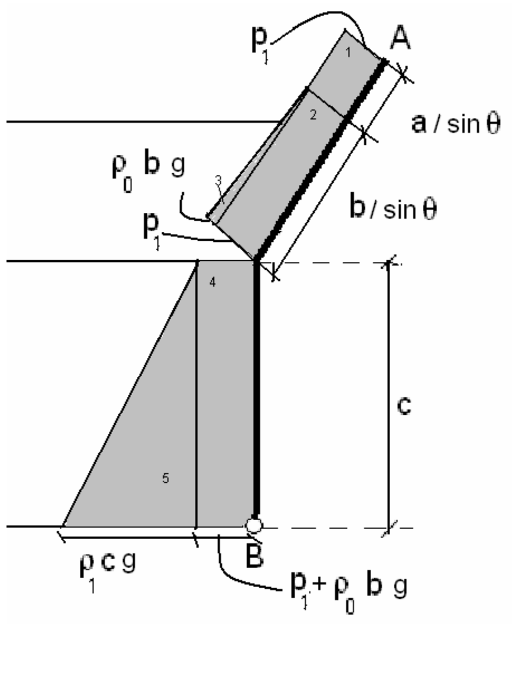

**Soluzione**.

Con riferimento agli assi in figura, la distribuzione di pressione risulta descritta da:

$p_A=p_1$=10000 Pa
$p_C=p_1$=10000 Pa
$p_D=p_1+\rho_0 gb$= 13924 Pa
$p_B=p_D+\rho_1 gb=p_1+\rho_0 gb+\rho_1 gc$= 21281.5 Pa



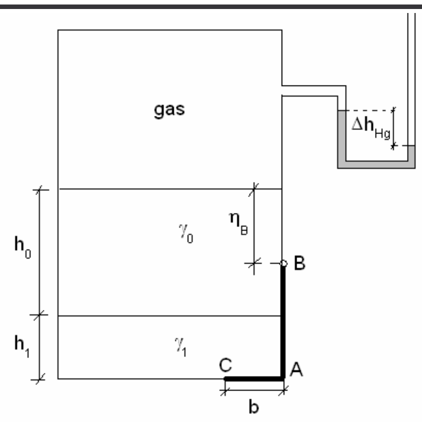

E' conveniente scomporre il solido delle pressioni come indicato in figura. Risulterà dunque:
$|F|=V_1+V_2+V_3+V_4+V_5$=23177 N
$V_1= p_1\, a/\sin\theta\, L$=7074 N *(L=larghezza paratoia=1m)*
$V_2= p_1\, b/\sin\theta\, L$=7074 N
$V_3= (\rho_0 gb)\, b/\sin\theta\, L/2=\rho_0 gb^2/\sin\theta\, L/2$= 1388 N
$V_4= (p_1+\rho_0 gb)\, c\, L$=10443 N
$V_5= (\rho_1 gc)\, c/2\, L=\rho_1 gc^2/2\, L$=2759 N
Inoltre le varie forze sono applicate ad una distanza da B pari a
$b_1= c \sin\theta +(a/2+b)/\sin\theta$=1.59 m
$b_2= c \sin\theta +b/(2\sin\theta)$=0.88 m
$b_3= c \sin\theta +b/(3\sin\theta)$= 0.76 m
$b_4= c/2$= 0.375 m
$b_5= c/3$ =0.25 m
Il modulo di *M (orario)*risulterà quindi
$|M|= V_1 b_1 +V_2 b_2 +V_3 b_3 +V_4 b_4 + V_5 b_5$= 11256 + 6252 +1063+3916+690 = 23177 Nm



## ESERCIZIO 2

Calcolare il momento rispetto a B per tenere chiusa la paratoia BAC di larghezza unitaria.
$\Delta h_{Hg}$=0.15 m, $\eta_B$=0.5 m, $h_0$=1m, $h_1$=1.2m, b=0.5 m, $\gamma_0$=9015 N/m3, $\gamma_1$=9810 N/m2, $\gamma_{Hg}$=133400 N/m3

R. 6803 Nm



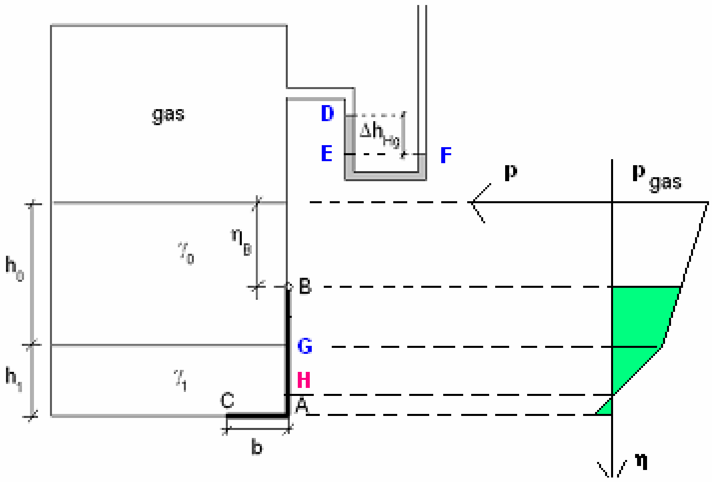

**Soluzione.**

Con riferimento alla figura la pressione nel gas è pari alla pressione nel punto D, $p_D$=$p_E$-$\gamma_{Hg}$ $\Delta h_{Hg}$. La pressione nel punto E a sua volta è uguale alla pressione nel punto F (pressione atmosferica). Ragionando in termini di pressioni relative si ha dunque

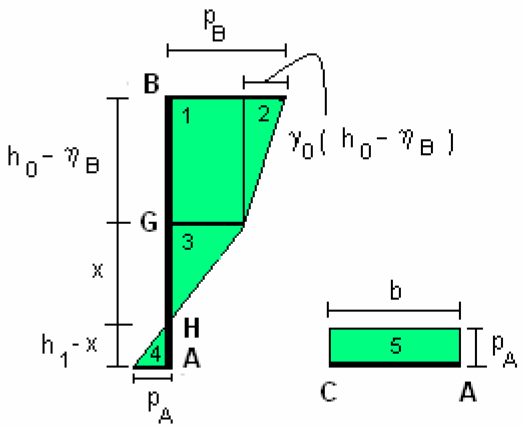
$p_F$=$p_E$=0

$p_D$= $p_{gas}$=$p_E$-$\gamma_{Hg}$ $\Delta h_{Hg}$=-$\gamma_{Hg}$ $\Delta h_{Hg}$=-20010 Pa

$p_B$= $p_{gas}$+$\gamma_0$ $\eta_B$= -15502.5 Pa
$p_G$= $p_{gas}$+$\gamma_0$ $h_0$= -10995 Pa
$p_C$= $p_A$= $p_G$+$\gamma_1$ $h_1$= 777 Pa




Sulle superfici AB e CA, le distribuzioni di pressione saranno quelle a fianco, per cui è conveniente scomporre il solido delle pressioni come indicato in figura.
Risulterà dunque:
$V_1$= $F_1$=$p_G$ ($h_0$-$\eta_B$)L= -5497.5 N
*(L=larghezza paratoia=1m)*
$V_2$= $F_2$=$\gamma_0$ ($h_0$-$\eta_B$)$^2$L/2=-1126.9 N
$V_3$= $F_3$= $p_G$ $x_0$ L/2= -6157.2 N
$V_4$= $F_3$= $p_A$ ($h_1$-$x_0$) L/2= 31.08 N
$V_5$= $F_3$= $p_A$ b L= 388.5 N

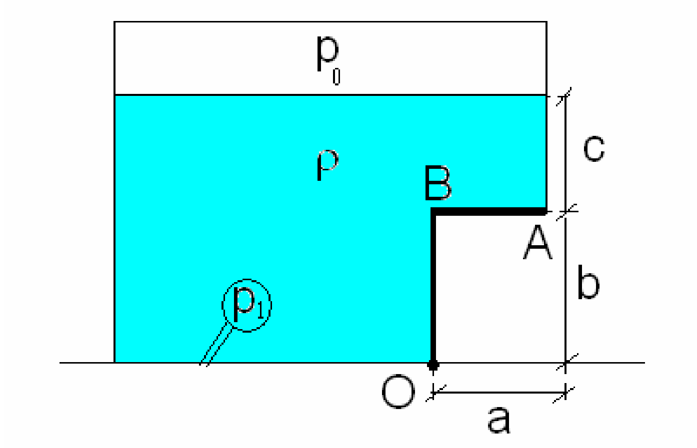



*NOTA: Per il calcolo di $V_3$ e $V_4$ serve la lunghezza $x_0$, che si può calcolare notando che la distribuzione di pressione tra i punti G ed A è: p=$p_G$+x $\gamma_1$ dove x è un asse parallelo ad $\eta$ con origine in G. $x_0$ è la coordinata x in cui si annulla p per cui: 0= $p_G$+$x_0$ $\gamma_1$ da cui $x_0$ = -$p_G$/$\gamma_1$=1.12 m.*

Inoltre le varie forze sono applicate ad una distanza da B pari a
$b_1$= ($h_0$-$\eta_B$)/2=0.25 m
$b_2$= ($h_0$-$\eta_B$)/3=0.177 m
$b_3$=($h_0$-$\eta_B$)+$x_0$/3= 0.874 m
$b_4$=($h_0$-$\eta_B$)+$x_0$+2($h_1$-$x_0$)/3== 1.674 m
$b_5$= b/2= 0.25 m
Il momento risultante *M* è quindi M= $V_1$ $b_1$ +$V_2$ $b_2$ +$V_3$ $b_3$ +$V_4$ $b_4$ +$V_5$ $b_5$ = -1374.375 -191.6-5381.4+53.23+97.125 = -6797 Nm (orario).
Per tenere in equilibrio la paratoia devo esercitare quindi un momento pari a 6797 Nm antiorario!!

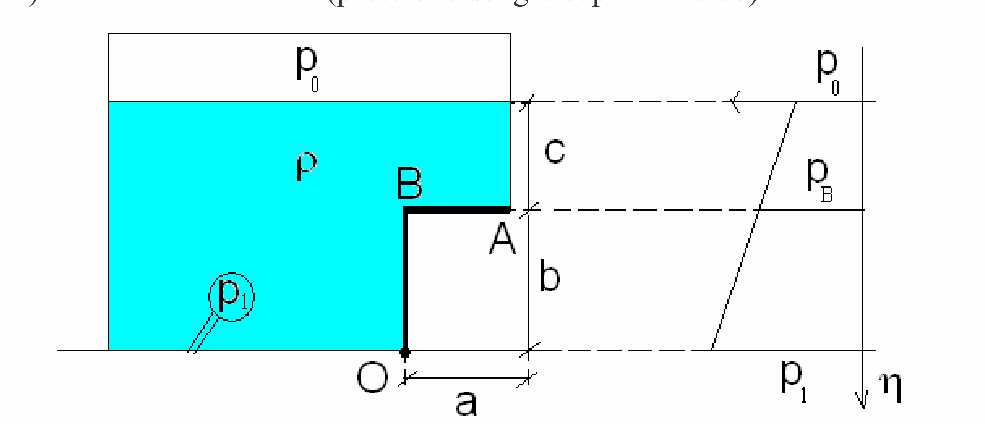
## ESERCIZIO 3

Determinare il momento necessario a tenere in equilibrio la paratoia ABO di profondità unitaria ed incernierata in O. Un manometro fornisce la pressione relativa $p_1$ sul fondo del serbatoio. Valutare inoltre la pressione $p_0$ del gas sopra il fluido, sapendo che a= 0.3 m, b=0.4 m, c=0.35 m, $p_1$=20000 N/m$^2$ e $\rho$=1000 kg/m$^3$.

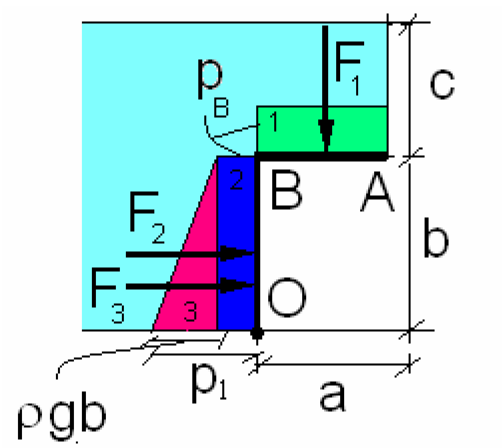



**Soluzione.**
Con riferimento agli assi in figura, la distribuzione di pressione risulta descritta da:

$p_O=p_1$=20000 Pa
$p_B=p_A= p_1-\rho gb$= 16076 Pa
$p_0=p_1-\rho g(b+c)$= 12642.5 Pa (pressione del gas sopra al fluido)




E' conveniente scomporre il solido delle pressioni come indicato in figura. Risulterà dunque:




$V_1= F_1=p_B\, a\, L$= 4822.8 N *(L=profondità paratoia=1m)*
$V_2= F_2=p_B\, b\, L$=6430.4 N
$V_3= F_3= (\rho gb)b\, L/2=\rho gb^2\, L/2$= 784.8 N
Inoltre le varie forze sono applicate ad una distanza da O pari a
$b_1= a/2$=0.15 m
$b_2= b/2$=0.2 m
$b_3=b/3$= 0.13 m
Il modulo di *M* risulterà quindi
$|M|= V_1\, b_1 +V_2\, b_2 +V_3\, b_3$ = 723.4 + 1286 +104.6 = 2114 Nm
NOTA: Sia $F_1$ che $F_2$ ed $F_3$ tendono a far girare la paratoia in senso orario, pertanto il momento d'applicare per tenerla in equilibrio dovrà essere antiorario.