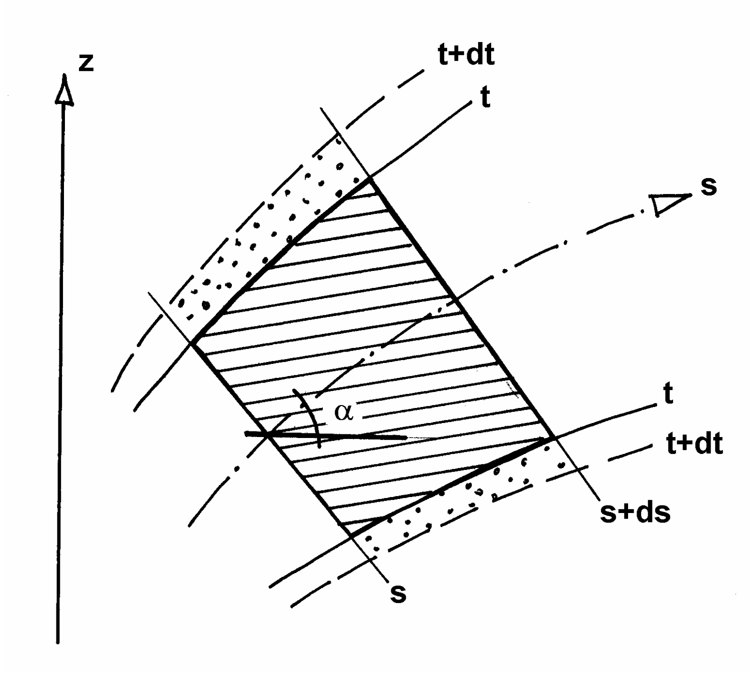
Lezione 17

IL PRINCIPIO DELLA QUANTITA' DI MOTO: L'EQUAZIONE DEL MOTO

- Nella LEZIONE 14 si è visto che il principio della quantità di moto conduce a

$$\int_{V_0} \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} dV_0 + \int_{S_0} \rho \underline{v}(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS_0 = \int_{V_0} \rho \underline{f} dV_0 + \int_{S_0} \underline{t} dS_0$$

Applichiamo l'equazione precedente al volume di controllo V_0 (vedi figura) individuato dal contorno della corrente al tempo t e dalle sezioni poste all'ascissa s e all'ascissa $s+ds$ (volume tratteggiato). La linea tratteggiata sia il contorno della corrente al tempo $t+dt$. Infine l'angolo α denoti l'angolo formato dall'asse della corrente con un piano orizzontale e il campo di forze $\underline{f}$ sia quello gravitazionale.



L'equazione considerata è un'equazione vettoriale. Essendo il vettore velocità parallelo all'ascissa curvilinea s, proiettiamo l'equazione lungo s

$$I_s + M_{us} - M_{is} = G_s + \Pi_s$$

Il termine I_s può essere approssimato dalla relazione

$$I_s = \left[\frac{\partial(\rho U)}{\partial t}\right]_{s,t} (\Omega)_{s,t}\, ds$$

dove $(\Omega)_{s,t}\, ds$, a meno di termini di ordine ds^2, rappresenta il volume V_0. La derivata rispetto al tempo di ρU può essere valutata al tempo t e all'ascissa s comportando ciò un errore in I_s di ordine ds^2 e $dsdt$.

Il fluido entra nel volume di controllo solo attraverso la sezione posta in s. Il flusso di quantità di moto in ingresso, proiettato nella direzione s è quindi

$$M_{is} = (\rho QU)_{s,t}$$

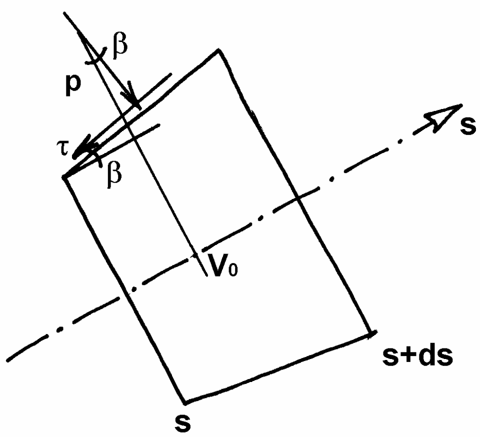
Il flusso di quantità di moto in uscita è dato dalla somma di due termini

$$M_{us} = (\rho QU)_{s+ds,t} + (\rho)_{s,t}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)_{s,t} ds (U)_{s,t}$$

Il primo termine rappresenta il flusso di quantità di moto in uscita dalla sezione caratterizzata dall'ascissa $s+ds$, il secondo è legato al flusso di quantità di moto attraverso la superficie laterale. Invero come discusso nella LEZIONE 16 il termine

$$(\rho)_{s,t}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)_{s,t} ds$$

è il flusso di massa attraverso la superficie laterale del volume di controllo che trascina con se quantità di moto nella direzione s.



Il termine G_s è facilmente calcolabile e risulta

$$G_s = -(\Omega)_{s,t}\, ds (\rho)_{s,t}\, g \text{ sen } \alpha$$

Resta infine da calcolare Π_s. Sulla sezione caratterizzata dall'ascissa s, la distribuzione della pressione è idrostatica (vedi LEZIONE 15) così come sulla sezione posta in $s+ds$. Le tensioni tangenziali agenti sulle sezioni poste in s e $s+ds$ non forniscono alcun contributo a Π_s.

Sulla superficie laterale, l'esterno esercita una tensione che ha una componente normale alla superficie e una tangente. Entrambe le componenti forniscono un contributo a Π_s. Con riferimento alla figura e denotando con β l'angolo (piccolo) che il contorno forma con l'asse s, si ha

$$\Pi_s = (p\Omega)_{s,t} - (p\Omega)_{s+ds,t} + (p)_{s,t} S_\ell \,\mathrm{sen}\,\beta - (\tau)_{s,t} S_{\ell b} \cos\beta$$

Nell'espressione precedente mentre S_ℓ indica tutta la superficie laterale del volume di controllo, $S_{\ell b}$ è quella parte a contatto con un contorno solido in grado cioè di esercitare una resistenza al moto del fluido. Analizzando la geometria del problema è possibile dedurre che

$$S_\ell \,\mathrm{sen}\,\beta = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial s}\right)_{s,t} ds$$

$$S_{\ell b} = (B)_{s,t}\, ds$$

essendo B la parte del perimetro della generica sezione a contatto con un contorno solido (B è detto perimetro bagnato).

L'equazione della quantità di moto porge dunque

$$\left[\frac{\partial(\rho U)}{\partial t}\right]_{s,t} (\Omega)_{s,t}\, ds + (\rho Q U)_{s+ds,t} + \left(\rho \frac{\partial\Omega}{\partial t} U\right)_{s,t} ds - (\rho Q U)_{s,t} = -$$

$$-(\rho\Omega)_{s,t}\, g \,\mathrm{sen}\,\alpha\, ds + (p\Omega)_{s,t} - (p\Omega)_{s+ds,t} + (p_{s,t})\left(\frac{\partial\Omega}{\partial s}\right)_{s.t} ds - (\tau B)_{s,t}\, ds$$

dove si è anche assunto che β sia così piccolo da poter considerare $\cos\beta \cong 1$

Tenendo conto che

$$(\rho Q U)_{s+ds} = (\rho Q U)_s + \frac{\partial(\rho Q U)}{\partial s} ds + O(ds^2)$$

$$(p\Omega)_{s+ds} = (p\Omega)_s + \frac{\partial(p\Omega)}{\partial s} ds$$

e che il $\mathrm{sen}\,\alpha$ può essere espresso come $\partial z/\partial s$ indicando con z la quota dell'asse della corrente si ha

$$\rho\frac{\partial U}{\partial t}\Omega + \underline{U\frac{\partial \rho}{\partial t}\Omega} + \underline{U\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s}} + \rho Q\frac{\partial U}{\partial s} + \underline{\rho\frac{\partial \Omega}{\partial t}U} = -\gamma\Omega\frac{\partial z}{\partial s} - p\frac{\partial\Omega}{\partial s} - \Omega\frac{\partial p}{\partial s} + p\frac{\partial\Omega}{\partial s} - \tau B$$

essendo tutte le quantità valutate in s al tempo t. Nell'equazione precedente la somma dei termini sottolineati si annulla in forza dell'equazione di continuità.

Segue, dividendo per $\gamma\Omega$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{1}{g}U\frac{\partial U}{\partial s}=-\frac{\partial z}{\partial s}-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s}-\frac{\tau B}{\gamma\Omega}$$

o ancora

$$\frac{\partial z}{\partial s}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{U^2}{2g}\right)=-\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\tau}{\gamma R_i}$$

essendo R_i il raggio idraulico della sezione pari al rapporto fra l'area della sezione ed il perimetro bagnato

$$R_i=\frac{\Omega}{B}$$

Infine per un fluido barotropico (NOTA 1), la cui densità è funzione solo della pressione, è possibile scrivere

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial s}=-\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t}-j}$$

ove $H=z+\int\frac{dp}{\gamma}+\frac{U^2}{2g}$ e $j=\frac{\tau}{\gamma R_i}$

L'equazione precedente costituisce l'equazione del moto di una corrente. Essa ci dice che il carico totale (l'energia per unità di peso del fluido) diminuisce nella direzione del moto a causa del termine $-j$ (j è infatti una quantità sempre positiva) mentre il termine $-\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t}$ può causare variazioni o positive o negative del carico.

Il termine j corrisponde alle perdite di carico per unità di percorso.

NOTA 1

Se il fluido è barotropico, se cioè $\gamma=\gamma(p)$, si ha

$$\frac{\partial}{\partial s}\int\frac{dp}{\gamma}=\frac{d}{dp}\int\frac{dp}{\gamma}\cdot\frac{\partial p}{\partial s}=\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s}$$