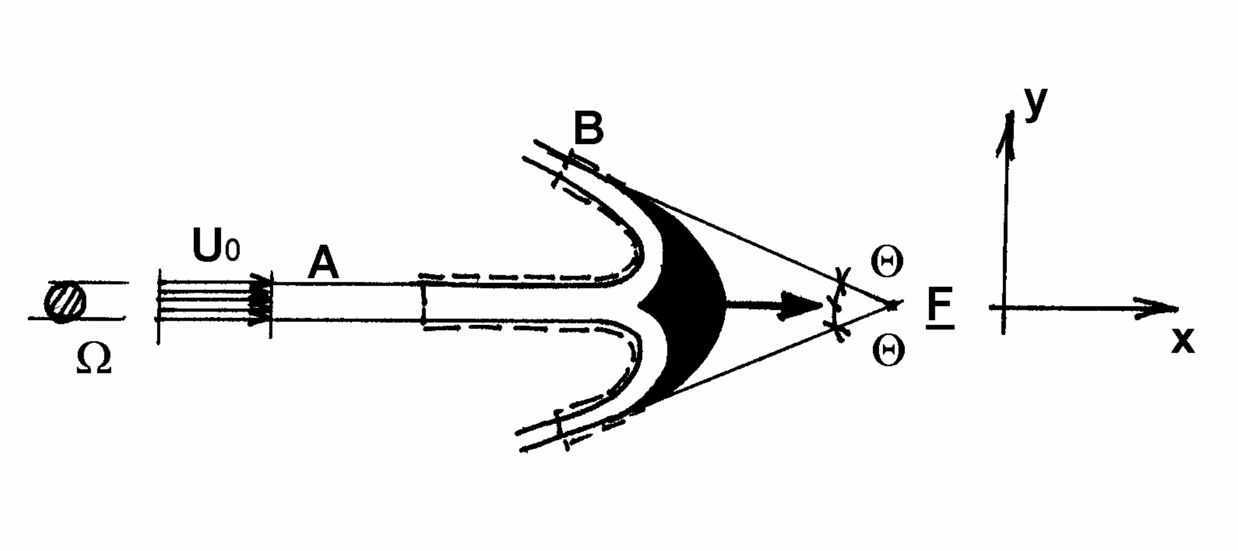
Lezione 25
TEORIA DELLE TURBINE PELTON

Nella LEZIONE 14 abbiamo visto che un getto, che urta una parete piana ferma, esercita su di essa una forza F

$$F = \rho \Omega U_0^2$$

Se la geometria della parete è diversa, diverso è il valore di F. Consideriamo ad esempio la



situazione in figura

In primo luogo osserviamo che la velocità del fluido che si allontana dalla superficie dopo averla urtata è pari ad U_0. Tale risultato è facilmente ottenibile dal teorema di Bernoulli (si assuma fluido ideale , densità costante, campo di forze gravitazionali con $\underline{g}$ diretta lungo l'asse z, moto stazionario e si applichi il teorema di Bernoulli uguagliando i carichi totali del punto A e del punto B). Per determinare la forza $\underline{F}$ esercitata dal getto è necessario applicare il principio della quantità di moto nella sua forma integrale al volume delimitato dalla linea tratteggiata in figura. Considerando la proiezione dell'equazione nella direzione x, si ottiene

$$I_x + M_{ux} - M_{ix} = G_x + \Pi_x$$

Come discusso nella LEZIONE 14 si ha

$$I_x = 0, G_x = 0, \Pi_x = -F_x, M_{ix} = \rho\Omega U_0^2$$

Nel caso in esame, inoltre, M_{ux} è diverso da zero. Per valutare M_{ux} è necessario notare che la sezione dei getti che abbandonano la superficie deve essere pari a $\Omega/2$.

Per la conservazione della massa deve infatti risultare

$$U_0\Omega = 2U_B\Omega_B$$

Inoltre $U_B = U_0$ e quindi $\Omega_B = \Omega/2$.

Tenendo conto che i getti che abbandonano la superficie hanno un'inclinazione θ rispetto al semiasse negativo x, è facile valutare M_{ux} che risulterà

$$M_{ux} = -2\rho U_B^2\Omega_B \cos\theta = -\rho\Omega U_0^2 \cos\theta$$

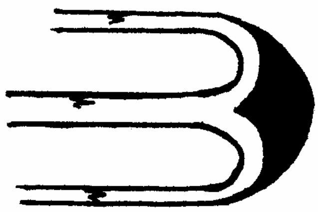
Segue infine

$$F_x = \rho U_0^2\Omega(1+\cos\theta)$$

e anche

$$F_x = \rho Q U_0 (1+\cos\theta)$$

essendo $Q = U_0\Omega$ la portata del getto.



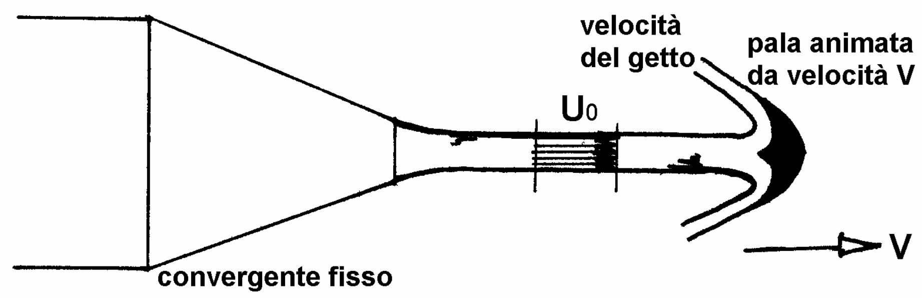
In particolare se $\theta = 0$ (vedi figura) la forza F_x risulta doppia rispetto a quella determinata nella LEZIONE 14 quando $\theta = \pi/2$.

Pur potendo generare forze notevoli, in questa situazione il getto non è in grado di compiere alcun lavoro. La potenza associata al getto (vedi LEZIONE 15)

$$P_d = \gamma Q H = \rho\Omega\frac{U_0^3}{2}$$

non riesce quindi a essere sfruttata.

Al fine di far fare del lavoro al getto e quindi di sfruttare in parte l'energia posseduta dal getto è necessario fare in modo che la superficie (nel seguito anche pala) si muova. Si denoti con V la



velocità della pala rispetto al convergente che genera il getto.

Quest'ultimo abbia una velocità U_0 rispetto al convergente. Applicando il principio della quantità di moto adottando un sistema di riferimento solidale con la pala (sistema inerziale perché in moto con velocità costante) si ottiene

$$F = \rho\Omega\left(U_0 - V\right)^2\left(1 + \cos\theta\right)$$

La forza è inferiore a quella che si ha per la pala ferma poiché il termine $\left(U_0 - V\right)^2$ sostituisce il termine U_0^2

Tenendo conto che

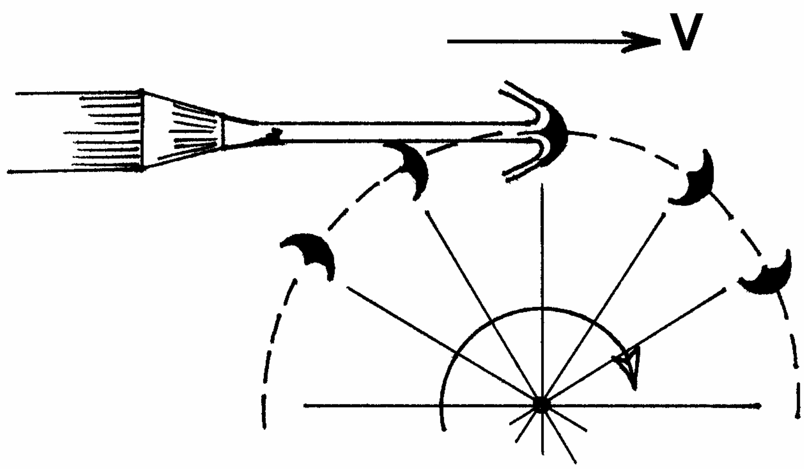
$$U_0^2\Omega = QU_0$$
$$(U_0 - V)^2\Omega = \tilde{Q}(U_0 - V) \quad \text{ove} \quad \tilde{Q} = (U_0 - V)\Omega$$

si può capire che la forza F per la pala in movimento è inferiore a quella relativa alla pala ferma per due motivi.

Il primo è legato al fatto che la velocità di impatto passa da U_0 a $\left(U_0 - V\right)$.

Il secondo motivo è dovuto al fatto che per la pala in movimento non tutta la portata Q viene utilizzata, ma una parte di essa (per la precisione ΩV) viene utilizzata per allungare il getto. Questa portata può essere recuperata utilizzando una sequenza di pale: quando una pala si allontana troppo

dal convergente ne subentra un'altra in posizione più vicina al convergente. Il fluido compreso fra la prima pala e la nuova pala andrà comunque a urtare la prima pala non andando sprecato.
La situazione descritta sinteticamente nelle righe precedenti può essere ottenuta montando le pale su



una ruota

Intuitivamente si può arrivare al risultato

$$F = \rho U_0 \Omega (U_0 - V)(1 + \cos\theta)$$

essendo F la forza sull'insieme delle pale (ruota). Il lavoro fatto dal getto sulla ruota nell'unità di tempo (potenza ceduta dal getto alla ruota) può essere valutato con l'espressione

$$P_U = FV = \rho U_0 \Omega V (U_0 - V)(1 + \cos\theta)$$

Può essere utile valutare quale è la velocità V che rende massima la potenza P_U. Essa può essere calcolata trovando i valori di V che annullano dP_U/dV

$$\frac{dP_U}{dV} = \rho U_0 \Omega (1 + \cos\theta)[U_0 - V - V]$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dP_U}{dV} = 0 \quad per \quad V = \frac{U_0}{2}$$

Segue

$$\left(P_U\right)_{\max} = \rho U_0 \Omega \frac{U_0^2}{4}\left(1+\cos\theta\right) = \rho\Omega\frac{U_0^3}{4}\left(1+\cos\theta\right)$$

In tal caso il rendimento della ruota, rapporto fra la potenza utilizzata e quella disponibile, risulta

$$\eta = \frac{\left(P_U\right)_{\max}}{P_d} = \frac{\cancel{\rho\Omega U_0^3}\left(1+\cos\theta\right)2}{4\cancel{\rho\Omega U_0^3}} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

E' evidente che quando θ si avvicina a 0, il valore di η si avvicina ad 1. Nel caso reale η è uguale a circa $0.95 \div 0.97$. Infatti valori di θ nulli non possono essere realizzati in quanto, per $\theta = 0$, i getti in uscita interferirebbero con la pala seguente. Inoltre bisogna tener conto che gli effetti viscosi, per quanto piccoli, non sono nulli e quindi la velocità dei getti che lasciano la singola pala è inferiore (anche se di poco) rispetto alla velocità dei getti in arrivo.

La macchina idraulica, il cui funzionamento è stato descritto in forma semplice e sintetica nelle righe precedenti, è detta turbina Pelton.