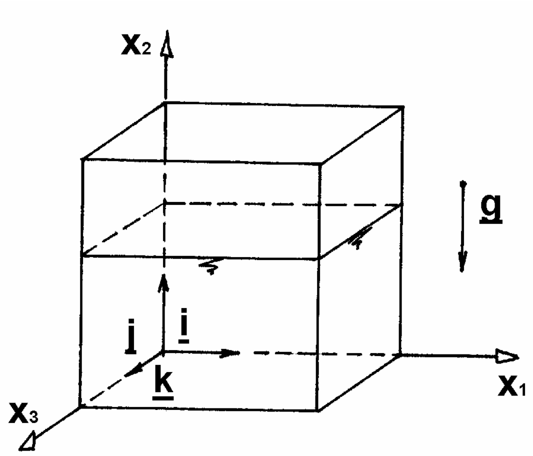
Lezione 4

FLUIDI IN QUIETE: LA DISTRIBUZIONE DI PRESSIONE IN UN FLUIDO A DENSITA' COSTANTE SOGGETTO AL CAMPO DI FORZE GRAVITAZIONALE

- In molte circostanze, discusse nella LEZIONE 5, la densità di un fluido può essere considerata costante. Qualora il campo di forze sia quello gravitazionale, è possibile integrare facilmente l'equazione puntuale della statica e ottenere la distribuzione spaziale della pressione.

Esempio:

Consideriamo il fluido, all'interno del contenitore in figura, supposto di densità costante ρ. Il campo di forze sia quello gravitazionale e l'accelerazione $\underline{g}$ sia diretta verticalmente verso il basso, l'equazione puntuale della statica porge



$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = -\rho g \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0$$

e impone quindi che la pressione non dipenda né da x_1 né da x_3: la pressione è costante su un piano orizzontale.

La seconda equazione si trasforma in un'equazione alle derivate ordinarie che può essere facilmente integrata

$$\frac{dp}{dx_2} = -\rho g$$

$$\Downarrow$$

$$p = -\rho g x_2 + c_1 = -\gamma x_2 + c_1$$

La pressione aumenta linearmente all'aumentare della profondità. Il valore della costante c_1 può essere determinato solo se è nota la pressione in un punto. Il prodotto $\gamma = \rho g$ è detto peso specifico e le sue dimensioni sono quelle di una forza divisa per un volume

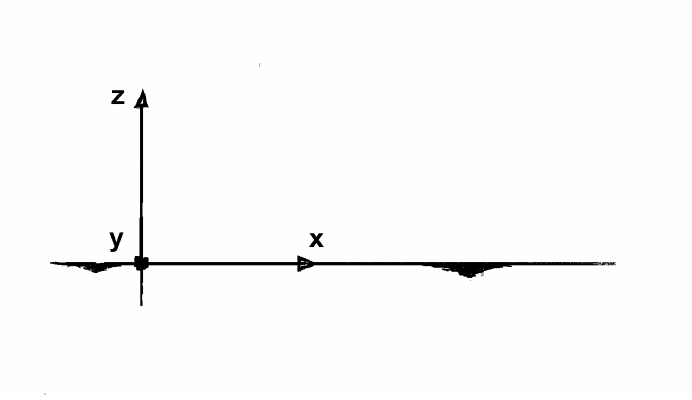
$$[\gamma] = ML^{-3}LT^{-2} = ML^{-2}T^{-2}$$

L'unità di misura è il Nm^{-3}. Nell'ingegneria viene talvolta utilizzato il chilogrammo forza su metro cubo.

$$1Kg_f m^{-3} = 9.81 Nm^{-3}$$

•Con riferimento agli assi in figura, denotiamo con p_0 la pressione nel piano $z = 0$ che risulta essere l'interfaccia fra due fluidi. Non consideriamo per il momento il fluido sovrastante, che possiamo pensare essere aria, e focalizziamo l'attenzione su quello sottostante di peso specifico γ. Al fine di analizzare un caso reale possiamo pensare quest'ultimo come acqua. Si ha dunque

$$p = p_0 - \gamma z$$



Essendo ρ (NOTA 1)[1] pari a $1000 Kg/m^3$ ed essendo p_0 pari alla pressione atmosferica cioè circa $1,013 \ 10^5 Pa$, l'andamento della pressione è quello riportato in figura.

La pressione raddoppia ad una profondità di circa 10m mentre diviene $3p_0$ a una profondità di circa 20m e così via. Dal

[1] NOTA 1
La densità ρ dell'acqua, che in generale dipende dalla pressione e dalla temperatura (vedi LEZIONE 5), in molti casi può essere assunta costante e pari a 1000 Kg/m^3. Il peso specifico γ risulta quindi pari a 9810 N/m^3. Talvolta γ viene espresso in chilogrammi forza su metro cubo. In questo caso si ha $\gamma = 1000 Kg_f / m^3$

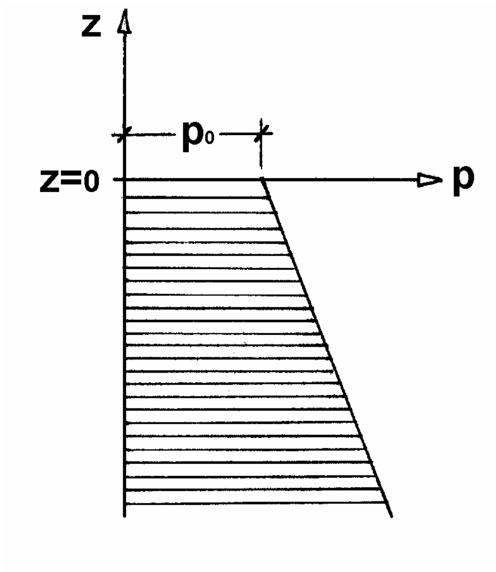


grafico risulta evidente quanto già detto in precedenza e sintetizzato dalla formula: la pressione aumenta in modo lineare con la profondità. La distribuzione della pressione in un fluido incomprimibile in quiete è idrostatica.

- Per motivi che saranno chiari nel seguito, introduciamo la quantità

$$h = z + \frac{p}{\gamma}$$

detta carico piezometrico. Le dimensioni del carico piezometrico sono quelle di una lunghezza

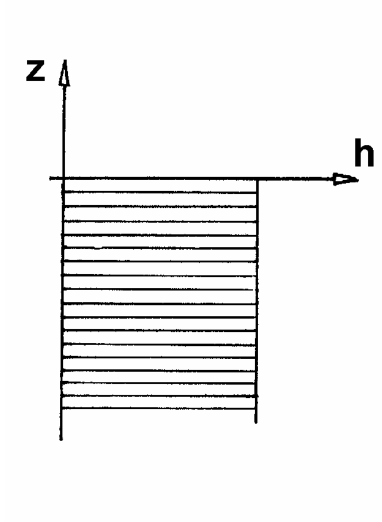
$$[\mathrm{h}] = \mathrm{L}$$

e quindi la sua unità di misura è il metro (m).

In un fluido in quiete *h* risulta costante

Si ha infatti

$$\mathrm{h} = \mathrm{z} + \frac{\mathrm{c}_1 - \gamma \mathrm{z}}{\gamma} = \frac{\mathrm{c}_1}{\gamma}$$



Il carico piezometrico h rappresenta l'energia meccanica posseduta dal fluido per unità di peso. Essa si compone di energia potenziale per unità di peso (z) ed energia di pressione per unità di peso (p/γ).

- L'equazione della statica per un fluido a densità costante soggetto al campo di forze gravitazionale

$$\frac{d\,p}{d\,z} = -\rho\, g = -\gamma$$

porge anche

$$p_A - p_B = -\gamma\left(z_A - z_B\right)$$

Cioè la differenza di pressione fra due punti è pari a γ per la differenza di quota. Chiaramente il punto a quota più bassa ha la pressione maggiore.