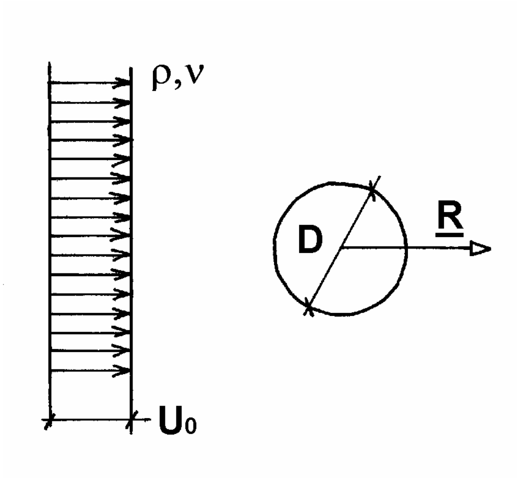
Lezione 12

SIMILITUDINE E MODELLI

Consideriamo nuovamente il problema descritto nella LEZIONE 11: un fluido di densità ρ e viscosità cinematica ν investe una sfera di diametro D con una velocità U_0



La forza che il fluido esercita sulla sfera nella direzione del moto risulta esprimibile nella forma (vedi teorema Π)

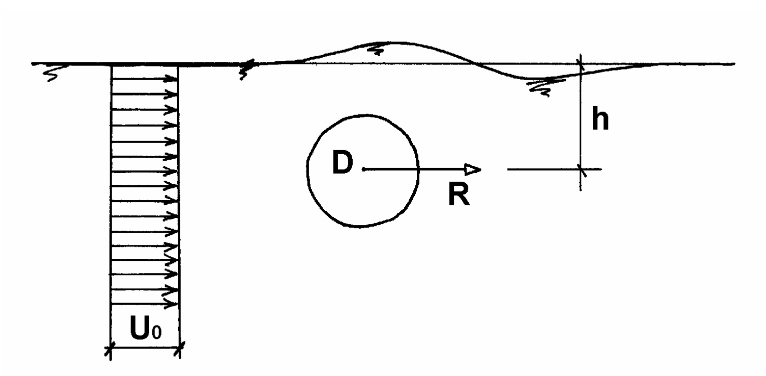
$$R = \rho U_0^2 D^2 \bar{f}\left(\frac{U_0 D}{\nu}\right)$$

che spesso viene riscritta nella forma

$$R = \frac{\rho}{2} U_0^2 \pi \frac{D^2}{4} C_D\left(\frac{U_0 D}{\nu}\right)$$

ove $C_D = \frac{8}{\pi}\bar{f}$ è detto coefficiente di resistenza e risulta evidentemente funzione di Reynolds.

- Emerge chiaramente che per conoscere R è necessario conoscere il valore di C_D per il valore del numero di Reynolds caratteristico del problema.
  Se ad esempio pensiamo la sfera come l'approssimazione di una batisfera investita da una corrente oceanica di intensità pari a $0.2\, m/s$ e supponiamo che D sia pari a 2 m, il numero di Reynolds risulterà pari a
  $$Re = \frac{2 \times 0.2}{10^{-6}} = 4 \times 10^5$$
  Nel caso in esame dovremo dunque valutare C_D per tale valore di *Re*. Ciò però non comporta la misura della forza esercitata sulla batisfera $(D = 2m)$ da una corrente di $0.2\, m/s$. E' infatti possibile misurare C_D utilizzando "un modello", cioè una sfera molto più piccola, a patto di aumentare U_0 in modo tale che il numero di Reynolds rimanga inalterato. Indicati con il pedice *m* le grandezze relative al modello deve risultare
  $$\frac{U_0 D}{v} = \frac{U_{0m} D_m}{v_m}$$
  Utilizzando nel modello, come di solito avviene, lo stesso fluido del problema originale si ha
  $$\frac{U_{0m}}{U_0} = \frac{D}{D_m}$$
  Tale risultato indica che se il rapporto D_m/D è pari a $1/10$, il rapporto U_{0m}/U_0 dovrà essere pari a 10. Il valore ricercato di C_D sarà dunque pari a $8\, R_m / \left(\pi \rho U_{om}^2 D_m^2 \right)$
- Consideriamo ora un problema lievemente diverso:
  la batisfera si trova in prossimità della superficie libera a una profondità pari a h



Analizzando il problema risulta chiaramente che il valore di R sarà influenzato anche dal valore di h e dal valore dell'accelerazione di gravità g. La presenza della sfera in prossimità della superficie libera genera infatti un'onda la cui evoluzione dipende da g

$$R = f\left(\rho, U_0, D, \nu, g, h\right)$$

Applicando il teorema Π si ottiene

$$R = \frac{\rho}{2} U_0^2 \pi \frac{D^2}{4} C_D \left(Re, Fr, \frac{h}{D} \right)$$

essendo

$$Re = \frac{U_0 D}{\nu} \;;\; Fr = \frac{U_0}{\sqrt{gD}}$$

In questo problema per determinare R è necessario valutare C_D per i valori di $Re, Fr, \frac{h}{D}$ propri del problema originale. Vediamo se è possibile utilizzare un modello.

Per semplicità indichiamo $\lambda = \frac{L_m}{L}$ la scala di riduzione delle lunghezze e con $\tau = \frac{T_m}{T}$ la scala di riduzione dei tempi. La scala di riduzione di ogni altra grandezza cinematica deriva dalla conoscenza di λ e τ. Infatti

$$\upsilon = \frac{U_m}{U} = \frac{L_m}{L}\frac{T}{T_m} = \frac{\lambda}{\tau}$$

La scala υ di riduzione delle velocità è pari dunque a $\frac{\lambda}{\tau}$. Similmente è possibile determinare per esempio la scala di riduzione delle accelerazioni. Una corretta modellazione del fenomeno impone che i valori del numero di Reynolds, del numero di Froude e il rapporto h/D del prototipo e del modello risultino uguali. E' evidente che se il modello è ridotto in scala, il rapporto $\frac{h_m}{D_m}$ risulta uguale al rapporto $\frac{h}{D}$.

Vediamo ora cosa emerge imponendo

$$Re = Re_m$$

Utilizzando nel modello lo stesso fluido del prototipo si ha

$$\frac{L^2}{T} = \frac{L_m^2}{T_m} \Rightarrow \tau = \frac{T_m}{T} = \left(\frac{L_m}{L}\right)^2 = \lambda^2$$

Stabilita la scala di riduzione delle lunghezze λ, l'uguaglianza dei numeri di Reynolds del modello e del prototipo determina la scala di riduzione dei tempi τ pari a λ^2 e conseguentemente le scale di riduzione di tutte le altre grandezze cinematiche .

Ad esempio

$$\upsilon = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \lambda^{-1}$$

Vediamo ora cosa segue imponendo

$$Fr = Fr_m$$

$$\frac{L}{T\sqrt{L}} = \frac{L_m}{T_m\sqrt{L_m}} \Rightarrow \tau = \frac{T_m}{T} = \sqrt{\frac{L_m}{L}} = \lambda^{1/2}$$

Stabilita la scala di riduzione delle lunghezze λ, l'uguaglianza dei numeri di Froude del modello e del prototipo determina la scala di riduzione dei tempi τ pari a $\lambda^{1/2}$.

<u>Emerge che utilizzando nel modello lo stesso fluido del prototipo è impossibile mantenere inalterati i valori di tutti i numeri adimensionali che influenzano il fenomeno. E' infatti possibile mantenere inalterato il valore di un solo numero adimensionale.</u>

- Se si mantiene inalterato il numero di Reynolds si effettuerà una "similitudine di Reynolds" . Se viceversa si manterrà inalterato il numero di Froude si effettuerà una "similitudine di Froude".
  In funzione del problema in esame potranno essere considerate similitudine di Mach, Weber,…
  E' evidente che si sceglierà di effettuare una certa similitudine invece di un'altra in funzione dell'importanza degli effetti rappresentati dai diversi numeri.

- Se gli effetti viscosi sono i più rilevanti si sceglierà di effettuare una similitudine di Reynolds
- Se gli effetti gravitazionali sono i più rilevanti si sceglierà di effettuare una similitudine di Froude
- …

- Resta da sottolineare che l'uguaglianza fra il numero di Newton del prototipo e quello del modello fissa la scala di riduzione delle forze

$$Ne = Ne_m$$

Utilizzando nel prototipo e nel modello lo stesso fluido

$$\frac{F}{L^4T^{-2}} = \frac{F_m}{L_m^4T_m^{-2}} \Rightarrow \varphi = \frac{F_m}{F} = \left(\frac{L_m}{L}\right)^4\left(\frac{T_m}{T}\right)^{-2} = \lambda^4\tau^{-2}$$