Lezione 14

I PRINCIPI DELLA MECCANICA DEI FLUIDI

- Il moto dei fluidi è controllato da alcuni principi fondamentali della fisica. Enunceremo nel seguito:

- il principio di conservazione della massa
- il principio della quantità di moto
- il principio del momento della quantità di moto

che verranno utilizzati nel corso

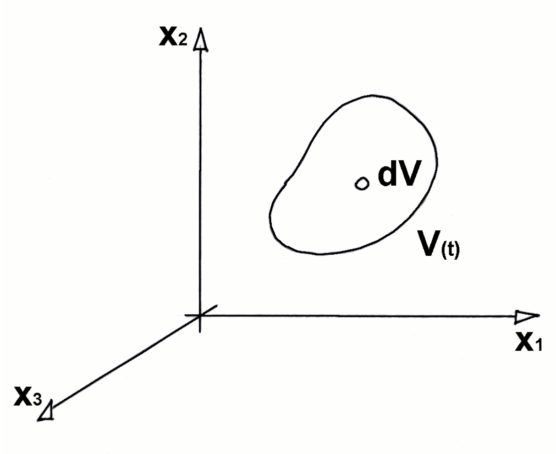
- IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA
  "La massa associata ad un volume materiale di fluido è costante nel tempo"

- IL PRINCIPIO DELLA QUANTITA' DI MOTO
  "La derivata rispetto al tempo della quantità di moto di un volume materiale di fluido è uguale alla risultante delle forze che l'esterno esercita sul volume di fluido"

- IL PRINCIPIO DEL MOMENTO DELLA QUANTITA' DI MOTO
  "La derivata rispetto al tempo del momento della quantità di moto di un volume materiale di fluido è uguale al momento risultante delle forze che l'esterno esercita sul volume di fluido"

- Vediamo ora a quali equazioni conducono i principi enunciati precedentemente

IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA



Dalla definizione stessa di densità, la massa infinitesima associata al volume infinitesimo dV è

$$\rho dV$$

La massa del volume materiale $V(t)$ è dunque fornita dalla somma dei contributi derivanti da tutti i volumi infinitesimi che compongono $V(t)$. Si ha dunque

$$M\ (t) = \int_{V(t)} \rho dV$$

e il principio di conservazione della massa impone la costanza di M

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho dV = 0}$$

Utilizzando il teorema del trasporto si può anche scrivere

$$\boxed{\int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}\ dV_0 + \int_{S_0} \rho\left(\underline{v}\cdot\underline{n}\right)\ dS_0 = 0}$$

Per quanto esposto nella LEZIONE 13 la quantità

$$\int_{S_0} \rho\left(\underline{v}\cdot\underline{n}\right) dS_0$$

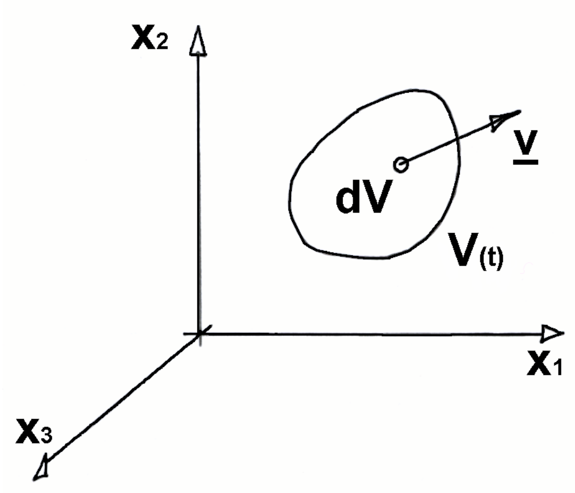
rappresenta la massa di fluido che attraversa la superficie S_0 nell'unità di tempo. Tale quantità è detta "portata massica". Il principio della conservazione della massa impone che

$$\int_{S_0} \rho\left(\underline{v}\cdot\underline{n}\right) dS_0 = -\int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_0$$

In altre parole la portata massica deve uguagliare la derivata temporale della massa contenuta all'interno di V_0 cambiata di segno.

In particolare se la densità del fluido è costante, essendo inoltre V_0 costante, la portata massica associata a S_0 deve annullarsi. Tanto fluido entra in V_0, tanto deve uscire, non essendo possibile che il fluido si accumuli in V_0 per variazioni di densità.

IL PRINCIPIO DELLA QUANTITA' DI MOTO



Come discusso nel punto precedente la massa infinitesima associata al volume dV risulta pari a

$$\rho dV$$

La quantità di moto della massa ρdV sarà

$$\rho \underline{v} dV$$

Si noti che la quantità di moto è una grandezza vettoriale la cui direzione e verso coincidono con quelli di $\underline{v}$. La quantità di moto del volume $V(t)$ sarà dunque fornita da

$$\int_V \rho \underline{v} dV$$

Il principio della quantità di moto impone dunque

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho \underline{v} dV = \int_{V(t)} \rho \underline{f} dV + \int_{S(t)} \underline{t} dS}$$

dove le forze che l'esterno esercita su V sono state suddivise in forze di massa e forze di superficie (vedi LEZIONE 2). Utilizzando il teorema del trasporto si può anche scrivere

$$\boxed{\int_{V_0} \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} dV_0 + \int_{S_0} \rho \underline{v}(\underline{v}\cdot\underline{n})\, dS_0 = \int_{V_0} \rho \underline{f} dV_0 + \int_{S_0} \underline{t} dS_0}$$

o in forma compatta

$$\boxed{\underline{I} + \underline{M} = \underline{G} + \underline{\Pi}}$$

Dove

$\underline{I} = \int_{V_0} \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} dV_0$ è il termine di inerzia locale

$\underline{M} = \int_{S_0} \rho \underline{v}(\underline{v}\cdot\underline{n})\, dS_0$ è il flusso di quantità di moto attraverso S_0

$\underline{G} = \int_{V_0} \rho \underline{f} dV_0$ è la risultante delle forze di massa sul volume V_0. Nel caso di campo di forze gravitazionali $\underline{G}$ corrisponde al peso di V_0

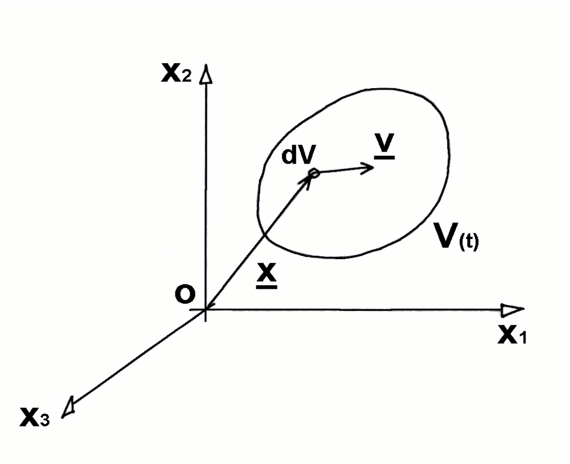
$\underline{\Pi} = \int_{S_0} \underline{t} dS_0$ è la risultante delle forze di superficie sulla superficie S_0

Si noti che spesso il termine $\underline{M}$ viene suddiviso in due contributi

$$\boxed{\underline{M} = \underline{M}_u - \underline{M}_i}$$

dividendo la superficie S_0 in due parti. Nella prima $\underline{v} \cdot \underline{n}$ è positivo e il fluido esce da V_0, nella seconda $\underline{v} \cdot \underline{n}$ è negativo e il fluido entra in V_0. $\underline{M}_u$ rappresenta quindi il flusso di quantità di moto in uscita mentre $\underline{M}_i$ quello in ingresso. Resta da sottolineare che sia $\underline{M}_u$ che $\underline{M}_i$ sono quantità vettoriali la cui direzione è coincidente con quella della velocità $\underline{v}$. Segue che $-\underline{M}_i$ è un vettore opposto a $\underline{M}_i$.

IL PRINCIPIO DEL MOMENTO DELLA QUANTITA' DI MOTO



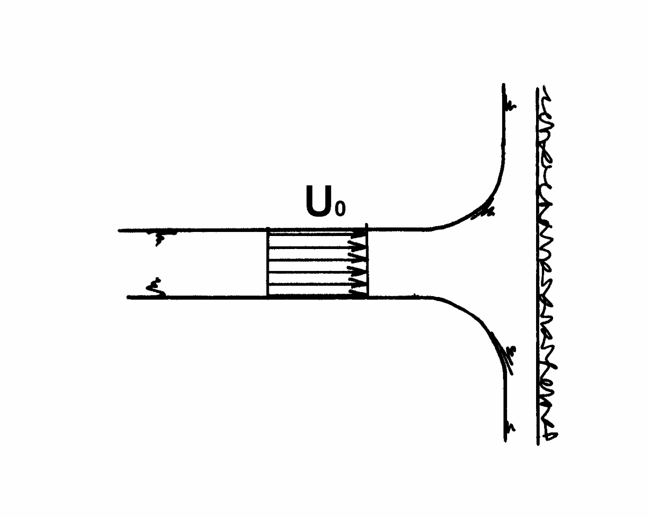
Procedendo come nei punti precedenti, il principio del momento della quantità di moto fornisce

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \underline{x} \times (\rho \underline{v}) dV = \int_{V(t)} \underline{x} \times \left(\rho \underline{f}\right) dV + \int_{S(t)} \underline{x} \times \underline{t}\, dS}$$

o applicando il teorema del trasporto

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t}\left[\underline{x} \times (\rho \underline{v})\right] dV_0 + \int_{S_0} \left(\underline{x} \times \rho \underline{v}\right)\left(\underline{v} \cdot \underline{n}\right) dS_0 = \\ &= \int_{V_0} \underline{x} \times \left(\rho \underline{f}\right) dV_0 + \int_{S_0} \underline{x} \times \underline{t} \quad dS_0 \end{aligned}}$$

- Per concludere questa lezione illustriamo due semplici applicazioni del principio della quantità di moto in forma integrale che dimostra la capacità della relativa equazione di consentire la soluzione di problemi anche complessi.

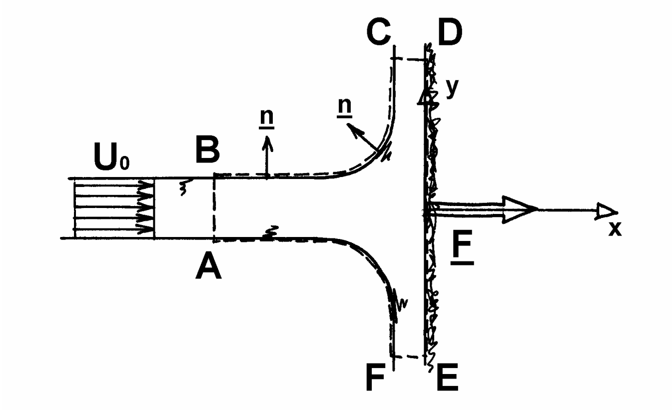


Si consideri un getto che orizzontalmente va a urtare una superficie verticale. Siano U_0 e Ω la velocità del fluido nel getto e la sezione di quest'ultimo (vedi figura). Si cerchi la forza $\underline{F}$ che il getto esercita sulla superficie.

Soluzione: il problema può essere risolto utilizzando l'equazione del principio della quantità di moto in forma integrale

$$\underline{I} + \underline{M}_u - \underline{M}_i = \underline{G} + \underline{\Pi}.$$

Per procedere è necessario in primo luogo individuare il volume V_0. E' evidente che l'equazione precedente vale qualunque volume si scelga, ma una scelta opportuna consente la soluzione del problema mentre altre scelte non conducono a utili espressioni. Per risolvere il problema in esame



consideriamo il volume (detto il controllo) tratteggiato in figura e introduciamo un sistema (x, y, z) di riferimento. Notiamo inoltre che per la simmetria del problema la forza $\underline{F}$ sarà diretta lungo l'asse x. E' conveniente quindi proiettare l'equazione del principio della quantità di moto lungo la direzione x

$$I_x + M_{ux} - M_{ix} = G_x + \Pi_x$$

Assumendo il problema stazionario il termine

$$I_x = \int_{V_0} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} dV_0$$

sarà nullo. Si noti che $\underline{v}$ è stato espresso come *(u,v,w)*.

Se inoltre assumiamo che l'asse z sia verticale, il vettore $\underline{G}$ sarà parallelo a z e quindi il termine

$$G_x = \int_{V_0} \rho g_x dV_0$$

sarà anch'esso nullo.

Notiamo ora che dalle superfici BC e AF non esce né entra della massa in quanto $\underline{v}$ e $\underline{n}$ sono ortogonali. Si ha un flusso di massa e quindi di quantità di moto solo attraverso AB, CD e EF. In particolare la superficie AB contribuisce a $\underline{M}_i$ mentre le superfici CD e EF contribuiscono a $\underline{M}_u$. Infine, notando che il vettore velocità del fluido in uscita è parallelo all'asse y (è evidente che il fluido che attraversa le superfici CD e EF si muove parallelamente alla superficie rigida), si può concludere che

$$M_{ux} = 0$$

Risulta inoltre

$$M_{ix} = \int_{\Omega} \rho U_0^2 d\Omega = \rho U_0^2 \Omega$$

essendo la velocità del fluido un ingresso pari a U_0 e uniformemente distribuita su Ω.

Come detto precedentemente $\underline{\Pi}$ rappresenta la risultante delle forze di superficie che l'esterno esercita sul fluido contenuto all'interno di V_0. Sulle superfici AB, BC, CD, EF e FA la pressione relativa è nulla e non esistono (o sono trascurabili) le tensioni tangenziali. Segue quindi che $\underline{\Pi}$ è pari a $-\underline{F}$ (principio di azione e reazione) e in particolare

$$\Pi_x = -F_x$$

Si può quindi concludere

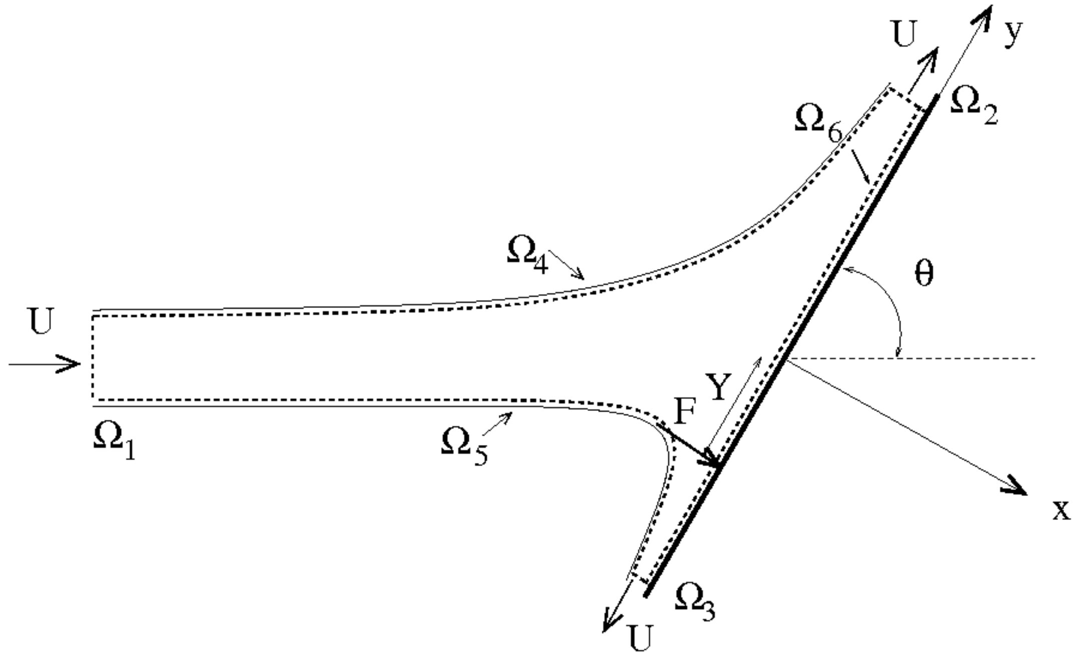
$$-\rho U_0^2 \Omega = -F_x$$

oppure

$$\boxed{F_x = \rho U_0^2 \Omega}$$

Il problema illustrato verrà poi ripreso nel seguito per illustrare come sia possibile estrarre energia dal getto e trasformarla in lavoro.

A causa della particolare simmetria del problema in questo caso è evidente che la retta di azione di F_x passa per l'origine degli assi.



Se la piastra fosse inclinata, dopo aver inserito il sistema di assi illustrato in figura, applicando il principio della quantità di moto al fluido contenuto nel volume tratteggiato e considerando la componente lungo x e ragionando analogamente al caso precedente, si ottiene:

$$F = \rho U^2 \Omega_1 \sin\vartheta$$

mentre la componete lungo y del principio della quantità di moto, unita al principio di conservazione della massa, consente di calcolare Ω_2 e Ω_3:

$$\Omega_2 = \frac{\Omega_1}{2}(1+\cos\vartheta) \quad \Omega_3 = \frac{\Omega_1}{2}(1-\cos\vartheta).$$

E' evidente che in questo caso la retta di azione di F non passa per l'origine degli assi.

La determinazione della retta di azione della forza F richiede l'applicazione del principio del momento della quantità di moto, sempre in riferimento al volume tratteggiato.

Ricordando che il problema è piano, stazionario e che si suppone che la gravità sia diretta lungo z, la componente lungo z dell'equazione che esprime il principio del momento della quantità di moto risulta:

$$\int_{S_0} (\underline{\zeta} \times \rho \underline{v})(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS_0 = \int_{S_0} \underline{\zeta} \times \underline{t}\, dS_0$$

essendo $\underline{\zeta}$ la distanza dell'elemento *dS* dall'origine degli assi e S_0 la superficie del volume di controllo tratteggiato che può essere scomposta nelle superfici Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4, Ω_5 e Ω_6 mostrate in figura.
Si ottiene:

$$\int_{\Omega_1} (\underline{\zeta} \times \rho \underline{v})(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS = 0$$

$$\int_{\Omega_2} (\underline{\zeta} \times \rho \underline{v})(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS = -\rho U^2 \frac{d_2^2}{2}$$

$$\int_{\Omega_3} (\underline{\zeta} \times \rho \underline{v})(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS = \rho U^2 \frac{d_3^2}{2}$$

$$\int_{\Omega_4} (\underline{\zeta} \times \rho \underline{v})(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS = \int_{\Omega_5} (\underline{\zeta} \times \rho \underline{v})(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS = \int_{\Omega_6} (\underline{\zeta} \times \rho \underline{v})(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS = 0$$

Avendo indicato con d_2 e d_3 l'altezza delle superfici Ω_2 e Ω_3 che risultano essere rettangoli di larghezza unitaria.
Essendo le uniche tensioni agenti sul volume di controllo quelle esercitate dalla piastra in risposta alla sollecitazione del fluido si ha:

$$\int_{S_0} \underline{\zeta} \times \underline{t}\, dS_0 = \int_{\Omega_6} \underline{\zeta} \times \underline{t}\, dS_0 = -FY$$

avendo indicato con Y la posizione della retta di azione di $\underline{F}$ e con F, come consuetudine, il modulo della forza $\underline{F}$. Sostituendo le relazioni trovate nel principio del momento della quantità di moto si ottiene:

$$\frac{\rho U^2}{2}\left(d_2^2 - d_3^2\right) = FY$$

da cui

$$Y = \frac{\rho U^2}{2F}\left(d_2^2 - d_3^2\right).$$