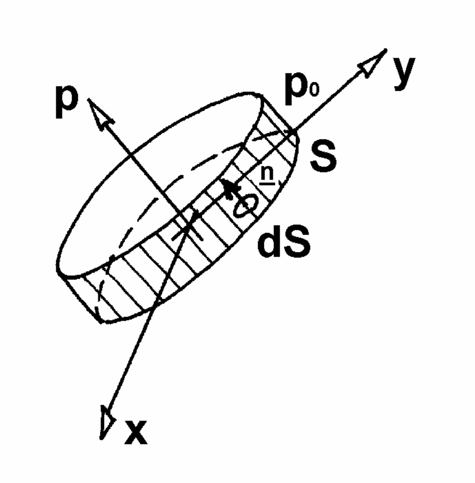
Lezione 8

LA SPINTA ESERCITATA DA UN FLUIDO SU UNA SUPERFICIE PIANA

- In primo luogo mostriamo (come assunto precedentemente nella LEZIONE 7) che la spinta su una superficie piana S prodotta da una distribuzione di pressione costante p_0 è una forza $\underline{F}$ ortogonale alla superficie stessa diretta verso la superficie e di modulo pari al valore della pressione per l'area della superficie.



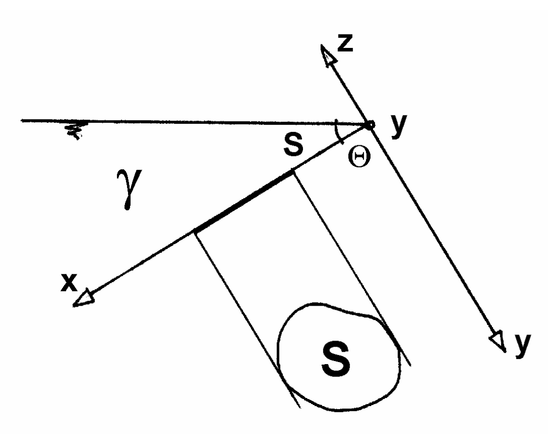
Per quanto esposto nella LEZIONE 2 e nella LEZIONE 3 si ha

$$\underline{F} = \int_S - p\underline{n}\, dS$$

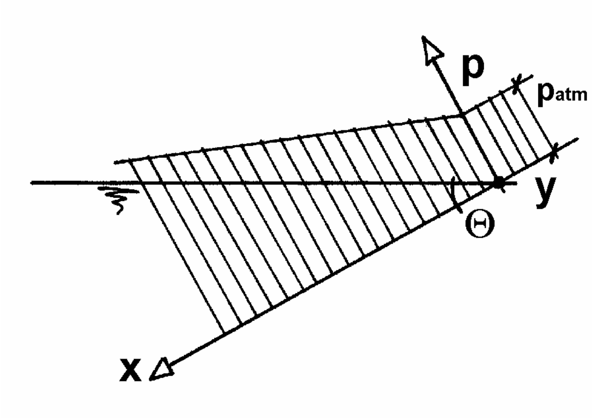
Nella situazione in esame $p = p_0$ e $\underline{n}$ sono costanti. Segue dunque

$$\underline{F} = -p_0 \underline{n} \int_S dS = -\underline{n} p_0 S$$

La forza $\underline{F}$ è quindi diretta come $\underline{n}$, ha verso opposto e il suo modulo è pari a $p_0 S$.



- Consideriamo ora il problema illustrato in figura dove a sinistra del piano (x, y) è presente un liquido di peso specifico γ. Al di sopra del liquido e a destra della superficie è presente aria supposta a pressione costante pari alla pressione atmosferica p_{atm}. Nel disegno è anche raffigurato il piano (x, y) ribaltato sul foglio in modo tale da visualizzare la superficie S in esso contenuta.



Si voglia determinare la forza esercitata dal liquido sulla superficie.

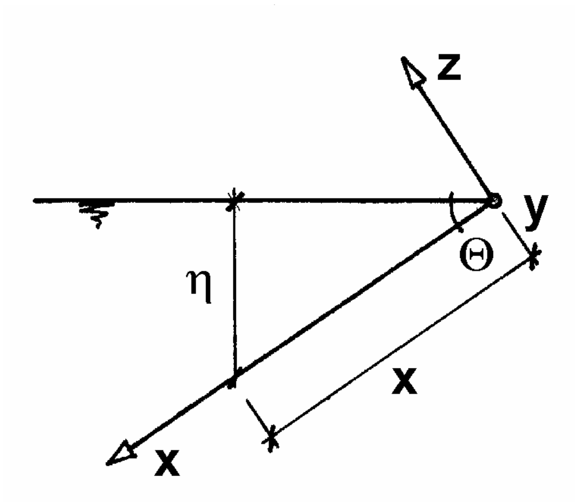
Nella figura accanto è rappresentato l'andamento della pressione sul piano (x, y). Da quanto esposto nella LEZIONE 4 e nella LEZIONE 5 emerge che

$$p = p_{atm} + \gamma\, x sen\theta.$$

Volendo determinare la forza esercitata dal liquido sulla superficie S, è necessario determinare

$$\underline{F} = \int_S -p\underline{n}\, dS = \int_S -\left(p_{atm} + \gamma x \operatorname{sen}\theta\right)\underline{n} dS$$

Tenendo conto che $\underline{n}$ è costante, la forza $\underline{F}$ può essere scomposta facilmente in due parti



$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = -\underline{n} p_{atm} S - \underline{n}\int_S \gamma x \operatorname{sen}\,\theta\; dS$$

La forza $\underline{F}_1 = -\underline{n} p_{atm} S$ è esattamente bilanciata da una forza uguale e contraria esercitata dall'aria sulla superficie. Per questo motivo il problema di determinare $\underline{F}$ viene trasformato nella determinazione di $\underline{F}_2$

$$\underline{F}_2 = \int_S -\left(p - p_{atm}\right)\underline{n} dS$$

La pressione p diminuita dalla pressione atmosferica è detta pressione relativa p_r .

- Considerando che l'uso della pressione relativa è più diffuso di quello della pressione assoluta, nella rimanente parte di questa lezione e nelle lezioni seguenti indicheremo con p la pressione relativa e con $\underline{F}$ la forza da essa indotta.

- Dalla relazione

$$\underline{F} = -\underline{n}\int_S \gamma x \,\text{sen}\;\theta dS$$

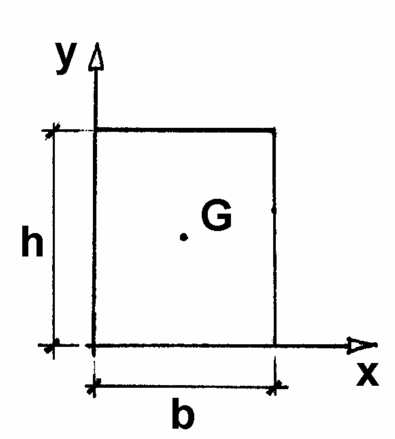
emerge chiaramente che la forza $\underline{F}$ è ortogonale alla superficie (la direzione di $\underline{F}$ coincide con quella di $\underline{n}$) è diretta dal liquido verso la superficie e ha intensità F pari a

$$\int_S \gamma x sen\;\theta dS = \gamma sen\;\theta \int_S xdS = \gamma sen\;\theta x_G S = p_G S \quad \text{(NOTA 1)}$$

ove con il pedice G si sono indicate quantità riferite al baricentro G della superficie. Da quanto ricavato emerge inoltre che l'intensità della forza esercitata dal liquido sulla superficie può essere ricavata moltiplicando l'area della superficie per il valore della pressione (relativa) nel baricentro della superficie stessa.

•Nel seguito ricaviamo le coordinate x_G, y_G del baricentro di alcune semplici superfici piane

1) Rettangolo



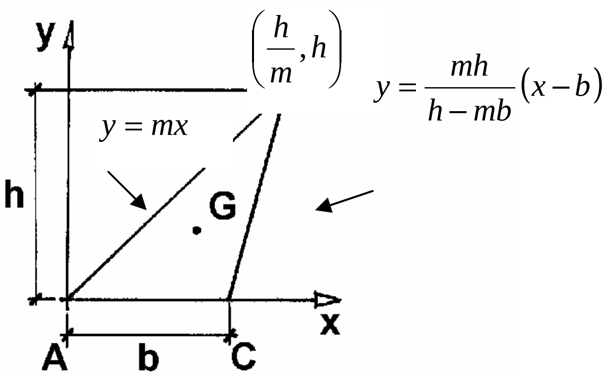
$$x_G = \frac{1}{S}\int_S xdS = \frac{1}{bh}\int_0^h\left(\int_0^b xdx\right)dy = \frac{h\frac{1}{2}b^2}{bh} = \frac{b}{2}$$

$$y_G = \frac{1}{S}\int_S ydS = \frac{1}{bh}\int_0^b\left(\int_0^h ydy\right)dx = \frac{b\frac{1}{2}h^2}{bh} = \frac{h}{2}$$

2) Triangolo

[1] NOTA 1

$\int_S xdS$ è detto momento statico della superficie S rispetto all'asse y. Si ha quindi $\int xdS = x_G S$ essendo x_G la coordinata x del baricentro della superficie S.



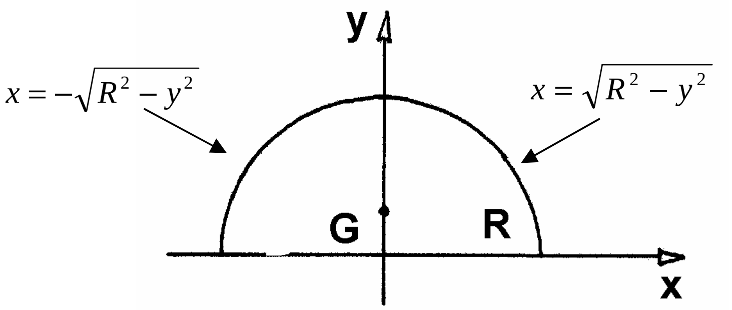
$$y_G = \frac{1}{S}\int_S y dS = \frac{2}{bh}\int_0^h \int_{y/m}^{y\frac{(h-mb)}{mh}+b} ydx \ \ dy$$

$$y_G = \frac{2}{bh}\int_0^h y\left[b + y\left(\frac{h-mb}{mh} - \frac{1}{m}\right)\right]dy = \frac{2}{bh}\left[b\frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3}\frac{(h-mb-h}{mh}\right.$$

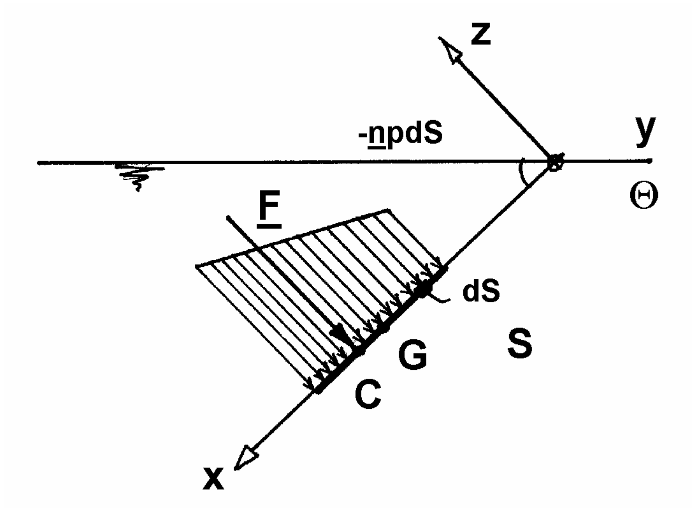
<u>La coordinata y_G non dipende dal valore di m !</u>

Ripetendo il calcolo ruotando il triangolo è facilmente verificabile che il baricentro G dista dalla base sempre un terzo dell'altezza qualunque lato sia scelto come base.

3) Semicerchio



$$y_G = \frac{1}{S}\int_S y dS = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} y\ dxdy = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R 2y\sqrt{R^2-y^2}dy = \frac{2}{\pi R^2}\left[-\frac{2}{3}\left(R^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R = \frac{4}{3\pi}R$$



- Nota la direzione, il verso e il modulo della forza $\underline{F}$, per risolvere completamente il problema è necessario determinare la retta di applicazione di $\underline{F}$. La forza $\underline{F}$ deve essere infatti equivalente alla somma delle forze infinitesime $-\underline{n}pdS$ esercitate dal fluido sulle superfici infinitesime dS che compongono S. $\underline{F}$ sarà equivalente se avrà la stessa risultante e lo stesso momento rispetto ad un qualsiasi polo. Indicando con C il punto di incontro della retta di applicazione di $\underline{F}$ con la superficie S si deve avere

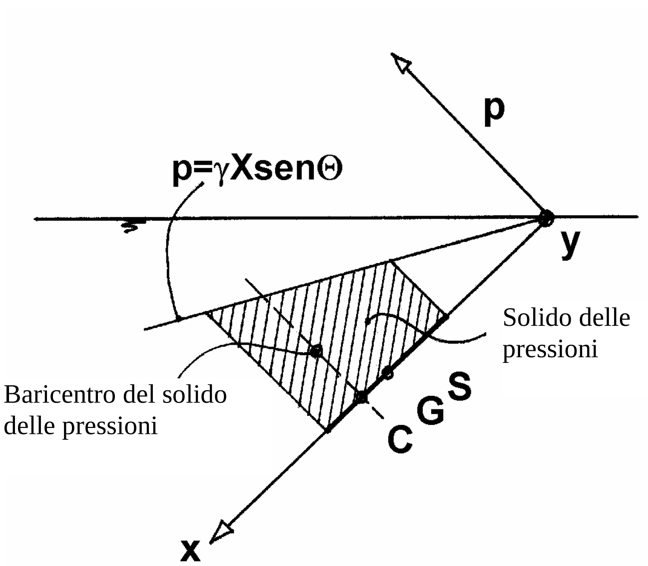
$$Fx_C = \int_S pxdS \qquad\qquad Fy_C = \int_S pydS$$

essendo (x_C, y_C) le coordinate del punto C detto "centro di spinta".

Le formule precedenti, insieme alla relazione

$$F = \int pdS$$

precedentemente ricavata, evidenziano un importante risultato: le coordinate x_C, y_C coincidono con le coordinate del baricentro del cosidetto solido delle pressioni, cioè di un solido, nello spazio (x, y, p), individuato dall'intersezione delle superfici $p = 0$ e $p = \gamma x \,\mathrm{sen}\,\theta$ con un cilindro a generatrici parallele all'asse p e con una direttrice coincidente con il contorno di S (vedi figura). E' importante anche notare che il valore di F coincide con il volume del solido delle pressioni.



- I risultati illustrati precedentemente suggeriscono una procedura semplice e rapida per il calcolo della forza $\underline{F}$ e della sua retta di applicazione

1) Nello spazio (x, y, p), con il piano (x, y) contenente la superficie S e l'asse p a esso ortogonale, tracciare l'andamento di $p(x, y)$.
2) Individuare il solido delle pressioni.
3) Scomporre il solido delle pressioni in parti di cui sia semplice valutare il volume e la posizione del baricentro.
4) Valutare il volume V_i $(i = 1,2,..., N)$ delle N parti così individuate.
5) Valutare le coordinate (x_{ci}, y_{ci}) dei baricentri degli N volumi.
6) Calcolare la forza $\underline{F}$

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{N} \left(-V_i \underline{n}\right)$$

7) Calcolare le coordinate (x_c, y_c) del centro di spinta

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} (V_i x_{ci})}{\sum_{i=1}^{N} V_i} \quad ; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} (V_i y_{ci})}{\sum_{i=1}^{N} V_i}$$

•Consideriamo le relazioni già ottenute e discusse

$$Fx_C = \int_S pxdS \qquad\qquad Fy_C = \int pydS$$

Discende

$$x_C = \frac{\int_S pxdS}{F} = \frac{\int_S pxdS}{\int_S pdS} = \frac{\int_S \gamma x^2 \operatorname{sen}\theta dS}{\int_S \gamma x \operatorname{sen}\theta dS} = \frac{\int_S x^2 dS}{\int_S xdS} = \frac{\int_S x^2 dS}{x_G S}$$

La quantità $\int_S x^2 dS$ è il momento d'inerzia della superficie S rispetto all'asse y e viene indicato con J_{yy}. E' inoltre noto che $J_{yy} = J_{y_G y_G} + S x_G^2$, essendo $J_{y_G y_G}$ il momento d'inerzia rispetto ad un asse parallelo all'asse y e passante per il baricentro G. Segue

$$x_C = \frac{J_{yy}}{x_G S} = \frac{Sx_G^2 + J_{y_G y_G}}{x_G S} = x_G + \frac{J_{y_G y_G}}{x_G S}$$

Tale risultato mostra in particolare che il centro di spinta è sempre a una profondità maggiore o al più uguale al baricentro.

In modo analogo si mostra che

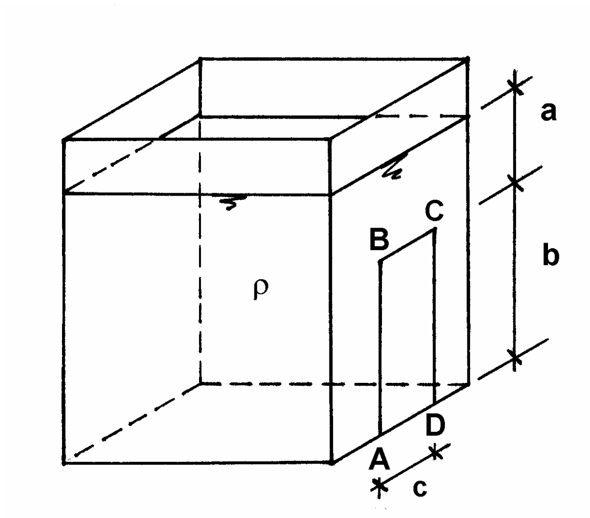
$$y_C = \frac{\int_S pydS}{\int pdS} = \frac{\int \gamma xy \operatorname{sen}\theta dS}{\int \gamma x \operatorname{sen}\theta dS} = \frac{\int xydS}{\int xdS} = \frac{J_{xy}}{x_G S} = y_G + \frac{J_{x_G y_G}}{x_G S}$$

essendo J_{xy} e $J_{x_G y_G}$ i momenti centrifughi della superficie S rispetto agli assi x, y e ad assi a essi paralleli passanti per il baricentro G di S.

Resta da sottolineare che le formule precedentemente ricavate sono valide per una distribuzione continua di p e con riferimento ad un sistema di assi coordinati tali che la pressione si annulli nell'origine e lungo tutto l'asse y.

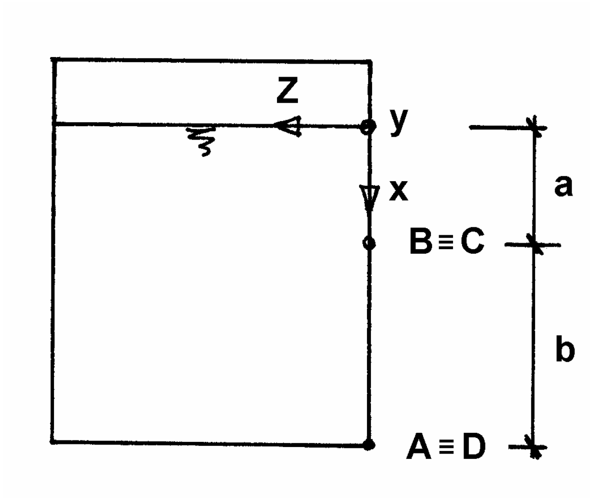
ESERCIZI SULLA DETERMINAZIONE DELLA SPINTA SU UNA SUPERFICIE PIANA

1) Si consideri il serbatoio in figura riempito di un liquido di densità ρ e si determini il momento $\underline{M}$ necessario a mantenere in equilibrio la paratoia ABCD incernierata (e quindi in grado di ruotare ma non traslare) lungo il lato AD. Dati:



a = 0.5m , b = 0.7m , c = 0.2m

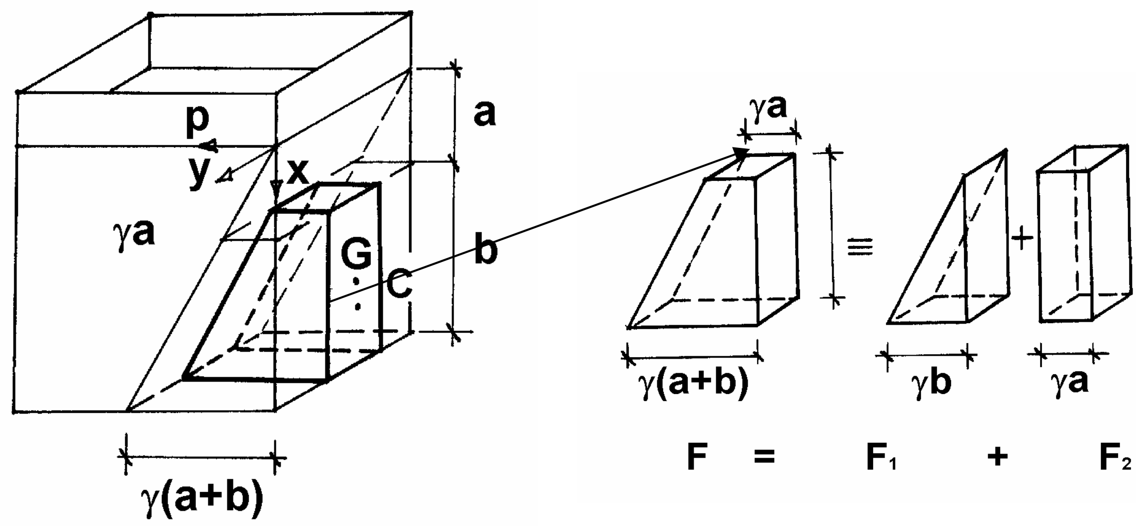
ρ = 1000 Kg/m^3 (acqua)



Soluzione: Si introduca il sistema di riferimento in figura. Si ha

$$p = \rho g x$$

Quindi il solido delle pressioni è quello riportato nella figura seguente insieme a una sua semplice scomposizione.



Emerge quindi che

$$F = F_1 + F_2 = \gamma \frac{b^2 c}{2} + \gamma abc$$

Il risultato ottenuto coincide con la relazione

$$F = p_G S$$

Infatti la pressione nel baricentro G della superficie è pari a

$$p_G = \gamma\left(a + \frac{b}{2}\right)$$

mentre

$$S = bc$$

Segue

$$F = \gamma abc + \gamma \frac{b}{2} bc$$

che coincide con la relazione già trovata.

Sapendo che il baricentro di un triangolo si trova a una distanza dalla base pari ad un terzo dell'altezza e che il baricentro di un rettangolo si trova a una distanza dalla base pari a metà dell'altezza è facile verificare che

$$x_C = \left(F_1 x_{C1} + F_2 x_{C2}\right) / F$$

$$\mathrm{x_C} = \left[\frac{\gamma b^2 c}{2}\left(a+\frac{2}{3}b\right)+\gamma abc\left(a+\frac{b}{2}\right)\right]\Big/\left[\gamma\frac{b^2c}{2}+\gamma abc\right] = \left[\frac{b}{2}\left(a+\frac{2}{3}b\right)+a\left(a+\frac{b}{2}\right)\right]\Big/\left[a+\frac{b}{2}\right] =$$
$$= \left[\frac{b}{2}\left(a+\frac{b}{2}+\frac{b}{6}\right)+a\left(a+\frac{b}{2}\right)\right]\Big/\left[a+\frac{b}{2}\right] = \left[\left(a+\frac{b}{2}\right)\left(a+\frac{b}{2}\right)+\frac{b^2}{12}\right]\Big/\left[a+\frac{b}{2}\right] = \left(a+\frac{b}{2}\right)+\frac{b^2/12}{a+\frac{b}{2}}$$

valore di x_C appena determinato coincide con quello ricavabile dalla relazione

$$x_C = x_G + \frac{J_{y_G y_G}}{x_G S}$$

sapendo che il momento d'inerzia di un rettangolo rispetto ad un asse baricentrale è pari a un dodicesimo del prodotto della base con il cubo dell'altezza.

Segue infine che la forza $\underline{F}$ è ortogonale alla superficie (quindi parallela all'asse z),diretta verso la superficie e di intensità pari a

$$F = \left(9.81\times1000\times0.5\times0.7\times0.2+9.81\times1000\times0.35\times0.7\times0.2\right)N = 1167N$$

Il momento da applicare per mantenere in equilibrio la paratoia sarà un vettore diretto lungo l'asse y , nel verso positivo, di modulo pari a

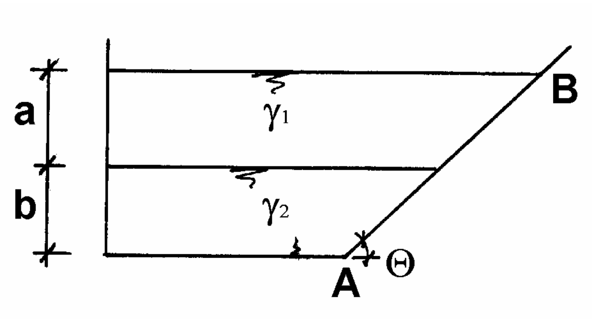
$$M = F\left(a+b-x_C\right) = F\left(\cancel{a}+b-\cancel{a}-\frac{b}{2}-\frac{b^2/12}{a+\frac{b}{2}}\right)$$

E' facile verificare che la quantità precedente coincide con

$$M = \gamma\frac{b^2c}{2}\frac{b}{3}+\gamma abc\frac{b}{2} = \gamma cb^2\left[\frac{b}{6}+\frac{a}{2}\right]$$

Segue quindi $$\mathrm{M} = 9.81\times1000\times0.2\times0.7^2\times\left[\frac{0.7}{6}+\frac{0.5}{2}\right]Nm = 353\,Nm$$

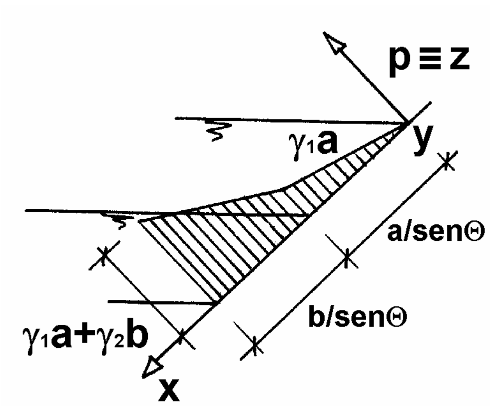
2) Assumendo il problema piano e di larghezza unitaria, calcolare la forza esercitata dai fluidi sulla superficie AB. Siano γ_1 e γ_2 il peso specifico del fluido sovrastante e sottostante rispettivamente.



Dati: $\gamma_1 = 800\, {}^{Kg_f}\!/_{m^3}; \gamma_2 = 1000\, {}^{Kg_f}\!/_{m^3}$

$$a = 0.5m, b = 0.3m, \theta = {}^{\pi}\!/_{4}$$

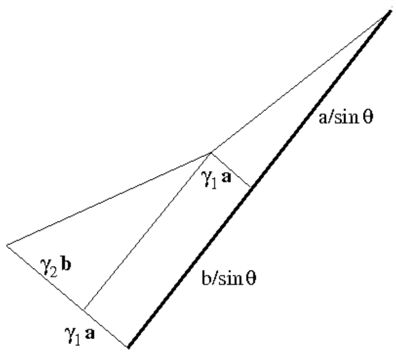
Soluzione: Con riferimento agli assi in figura, la distribuzione di pressione risulta descritta da:



$$\begin{cases} p = \gamma_1 x \operatorname{sen}\theta \quad per\; x \le \dfrac{a}{sin\theta} \\ p = \gamma_1 a + \gamma_2 \left(x - \dfrac{a}{\operatorname{sen}\theta} \right) \operatorname{sen}\theta \quad per\; x \ge \dfrac{a}{\operatorname{sen}\theta} \end{cases}$$

E' conveniente scomporre il solido delle pressioni come indicato in figura. Risulterà dunque

$$F = \gamma_1 \frac{a^2}{2\operatorname{sen}\theta} + \gamma_1 \frac{ab}{sin\theta} + \gamma_2 \frac{b^2}{2\operatorname{sen}\theta}$$



Sostituendo i valori numerici

$$F = \left(800 \times \frac{0.5}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}} \left[\frac{0.5}{2} + 0.3 \right] + 1000 \times \frac{0.3^2}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}} \right) Kg_f = 375 Kg_f$$

Per determinare la retta di azione della forza F, è necessario calcolare la coordinata x_c del centro di spinta. Si calcola quindi dapprima il momento, per unità di larghezza, della distribuzione di forze rispetto all'asse y. Facendo riferimento alla scomposizione del solido delle pressioni illustrata prima, si ha:

$$M = \frac{1}{2}\gamma_1 a \frac{a}{\sin\vartheta}\frac{2}{3}\frac{a}{\sin\vartheta} + \gamma_1 a \frac{b}{\sin\vartheta}\left(\frac{a}{\sin\vartheta} + \frac{1}{2}\frac{b}{\sin\vartheta}\right) + \gamma_2 b \frac{1}{2}\frac{b}{\sin\vartheta}\left(\frac{a}{\sin\vartheta} + \frac{2}{3}\frac{b}{\sin\vartheta}\right) =$$

$$\left(\frac{1}{2}\times 800\times\frac{2}{3}\times\frac{(0.5)^3}{\sin\pi/4} + 800\times 0.5\times\frac{0.3}{\sin\pi/4}\times\left[\frac{0.5}{\sin\pi/4} + \frac{1}{2}\frac{0.3}{\sin\pi/4}\right] + 1000\times\frac{1}{2}\frac{(0.3)^2}{\sin\pi/4}\left[\frac{0.5}{\sin\pi/4} + \frac{2}{3}\frac{0.3}{\sin\pi/4}\right]\right) Kg_f m$$

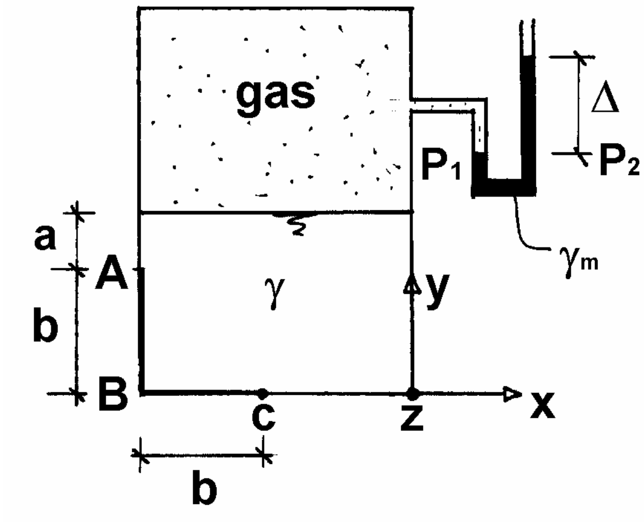
$$= 47\,Kg_f m + 156\,Kg_f m + 63\,Kg_f m \cong 266\,Kg_f m$$

e quindi si impone che M sia uguale al momento della forza risultante F

$$F x_c = M$$

ciò porge:

$$x_c = \frac{M}{F} = \frac{266\,Kg_f m}{375\,Kg_f} \cong 0.71 m$$



3) Assumendo il problema piano e di larghezza unitaria, determinare il momento $\underline{M}$ necessario a mantenere in equilibrio la paratoia ABC incernierata in C. Si trascuri il peso specifico del gas (si assuma quindi costante la sua pressione). La pressione del gas viene misurata attraverso il tubo manometrico contenente il liquido di peso specifico γ_m rilevando il dislivello Δ. Sia γ il peso specifico del liquido all'interno del serbatoio Dati: $\gamma = 1000 \ {Kg_f}/{m^3}$, $\gamma_m = 13000 \ {Kg_f}/{m^3}$

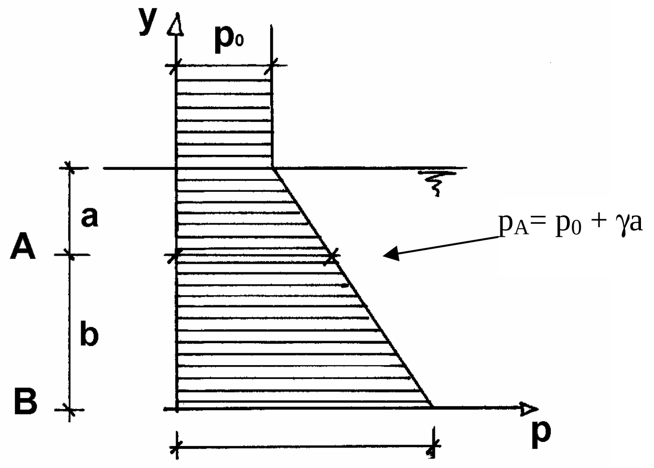
$$\Delta = 5cm, \quad a = 25cm, \quad b = 35cm$$

Soluzione: Il momento $\underline{M}$ è un vettore ortogonale al piano del disegno $(\underline{M} = (0,0,M_z))$ e con una componente M_z negativa. Focalizziamo ora l'attenzione sul calcolo del modulo di $\underline{M}$.

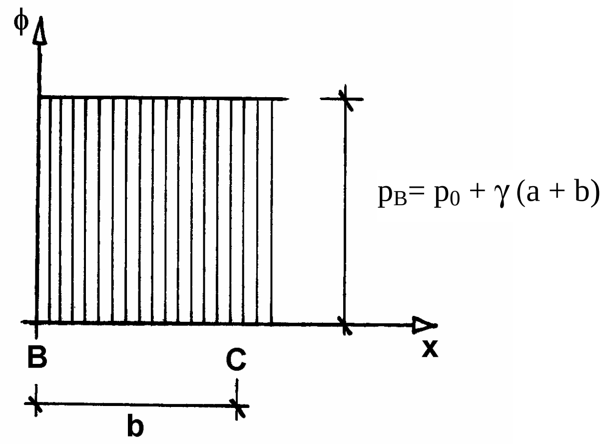
Con riferimento alla figura la pressione p_0 nel gas è pari alla pressione nel punto P_1 che a sua volta è uguale alla pressione nel punto P_2. Si ha dunque

$$p_0 = \gamma_m \Delta$$

Sulla superficie AB la distribuzione di pressione sarà dunque quella qui rappresentata



Sulla superficie BC la distribuzione di pressione sarà



La forza esercitata dal liquido sulla superficie AB sarà dunque orizzontale diretta da destra verso sinistra e pari alla somma di due contributi $F_1 + F_2$

$$F_1 = p_A b = (p_0 + \gamma a) b$$

$$F_2 = (p_B - p_A)\frac{b}{2} = \gamma \frac{b^2}{2}$$

Il primo contributo (F_1) è applicato ad una distanza da B pari a b/2, il secondo (F_2) è applicato ad una distanza da B pari a b/3.

Sulla superficie BC la distribuzione di pressione è costante e quindi il liquido eserciterà una forza diretta verticalmente verso il basso di intensità F_3 tale che

$$F_3 = p_B b = [p_0 + \gamma(a+b)]b$$

Inoltre F_3 è applicata ad una distanza da C pari a $\frac{b}{2}$.

Il modulo di M risulterà quindi

$$M = F_1 \frac{b}{2} + F_2 \frac{b}{3} + F_3 \frac{b}{2} = (p_0 + \gamma a)\frac{b^2}{2} + \gamma \frac{b^3}{6} + [p_0 + \gamma(a+b)]\frac{b^2}{2} = p_0 b^2 + \gamma a b^2 + \gamma \frac{2}{3} b^3 =$$

$$= \left[13000 \times 0.05 \times (0.35)^2 + 1000 \times 0.25 \times (0.35)^2 + 1000 \times \frac{2}{3} \times (0.35)^3\right] Kg_f m = 139 Kg_f m$$