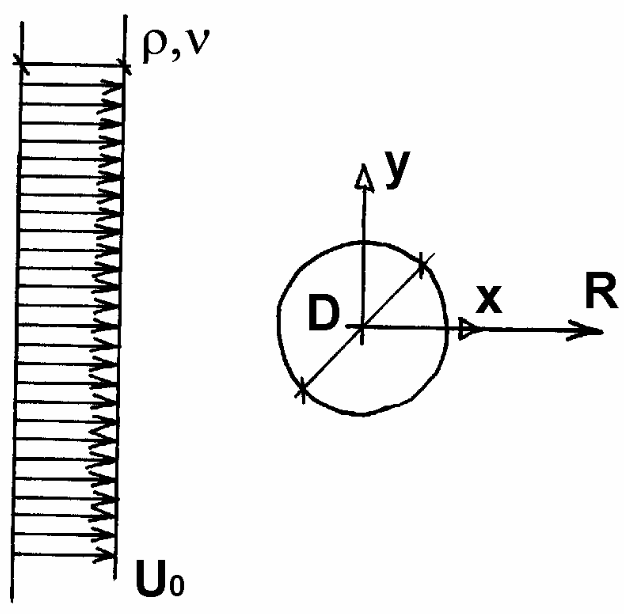
Lezione 11

ANALISI DIMENSIONALE E TEOREMA DI BUCKINGHAM

- I problemi a cui siamo interessati e i problemi della fisica in generale, sono caratterizzati dalla ricerca della dipendenza di una grandezza fisica Q_0 dalle altre grandezze fisiche $Q_1, Q_2, ..., Q_N$ coinvolte nel fenomeno in esame. In altre parole si vuole determinare la funzione f che lega Q_0 a $Q_1, Q_2, ..., Q_N$

$$Q_0 = f\left(Q_1, Q_2, ..., Q_N\right)$$

Un esempio tipico in idrodinamica è la ricerca della resistenza (forza nella direzione del moto) incontrata da un corpo (per esempio una sfera) che avanza in fluido fermo. Utilizzando un sistema di riferimento solidale con il corpo (vedi figura), il problema è costituito dalla valutazione di R (modulo di $\underline{R}$).



E' evidente che il valore di R sarà influenzato

- dalle caratteristiche del fluido (nel caso in esame dalla densità ρ e dalla viscosità cinematica ν)
- dalle dimensioni della sfera (il diametro D)
- dalla velocità con cui il fluido investe la sfera (U_0)

Si cercherà quindi di valutare la funzione f tale che

$$R = f(\rho, \nu, D, U_0)$$

E' evidente che la funzione f di cui sopra è un caso particolare di quella scritta inizialmente

$$Q_0 = f(Q_1, Q_2, ..., Q_N)$$

con

$$Q_0 = R, \quad N = 4, \quad Q_1 = \rho, \quad Q_2 = \nu, \quad Q_3 = D, \quad Q_4 = U_0$$

Alcune volte è possibile risolvere il problema in esame risolvendo le equazioni che governano il fenomeno. In tal caso è possibile fornire un'espressione analitica di f. In altri casi ciò non è possibile e il legame fra $Q_1, Q_2, ..., Q_N$ può essere cercato solo attraverso esperienze di laboratorio. Se il valore di N è elevato il numero di esperimenti da eseguire risulta estremamente alto. In tale situazione è utile il teorema di Buckingham, detto anche teorema Π.

- Teorema Π

  Il teorema Π stabilisce che la relazione

  $$Q_0 = f(Q_1, Q_2, ..., Q_N)$$

  fra $N+1$ grandezze fisiche può essere trasformata in una nuova relazione fra $N+1-M$ numeri adimensionali

  $$\Pi_0 = \overline{f}(\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_{N-M})$$

essendo M (NOTA 1) il numero massimo di grandezze dimensionalmente indipendenti che può essere individuato all'interno delle $N+1$ grandezze $Q_{0,}Q_1,...,Q_N$ e Π_i numeri adimensionali.

Dimostrazione:

Si voglia trasformare la relazione

$$Q_0 = f(Q_1, Q_2, ..., Q_N)$$

- Si scelga il massimo numero M di grandezze dimensionalmente indipendenti.

  Non si perde di generalità se si suppone che le grandezze scelte siano $Q_{1,}Q_2,...,Q_M$.

- Si individui il monomio $Q_1^{\alpha_0}\ Q_2^{\beta_0}\ Q_3^{\gamma_0} \dots Q_M^{\omega_0}$ che abbia le stesse dimensioni di Q_0.

  Dalla definizione di M e di grandezze dimensionalmente indipendenti i valori $\alpha_0, \beta_0, \gamma_{0,} ..., \omega_0$ non sono tutti nulli.

- Si divida la relazione di partenza sia a destra che a sinistra per $Q_1^{\alpha_0}\ Q_2^{\beta_0}\ Q_3^{\gamma_0} \dots Q_M^{\omega_0}$. Si avrà

$$\frac{Q_0}{Q_1^{\alpha_0} Q_2^{\beta_0} \dots Q_M^{\omega_0}} = \Pi_0 = f_0(Q_1, Q_2, ..., Q_N)$$

  E' evidente che il termine a sinistra della relazione precedente è un rapporto adimensionale.

- Si individui il monomio $Q_1^{\alpha_{M+1}}\ Q_2^{\beta_{M+1}} \dots Q_M^{\omega_{M+1}}$ che abbia le stesse dimensioni di $Q_{.M+1}$

- Laddove nella funzione f_0 (evidentemente diversa da f) compare Q_{M+1} si sostituisca

$$\frac{Q_{M+1}}{Q_1^{\alpha_{M+1}} Q_2^{\beta_{M+1}} \dots Q_M^{\omega_{M+1}}} Q_1^{\alpha_{M+1}} Q_2^{\beta_{M+1}} \dots Q_M^{\omega_{M+1}} = \Pi_{M+1}\ Q_1^{\alpha_{M+1}} Q_2^{\beta_{M+1}} \dots Q_M^{\omega_{M+1}}$$

  segue dunque

$$\Pi_0 = f_1(Q_1, Q_2, ..., Q_M, \Pi_{M+1}, Q_{M+2}, ..., Q_N)$$

---

[1] NOTA 1

- M grandezze si dicono dimensionalmente indipendenti se il monomio

$$Q_1^{\alpha}\ Q_2^{\beta}\ Q_3^{\gamma} \dots Q_M^{\omega}$$

  avente dimensioni nulle, implica

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad ..., \quad \omega = 0$$

  Se esistono valori $\alpha, \beta, ..., \omega$ diversi da zero e tali che il monomio

$$Q_1^{\alpha}\ Q_2^{\beta}\ Q_3^{\gamma} \dots Q_M^{\omega}$$

  ha dimensioni nulle, allora le M grandezze sono dimensionalmente dipendenti.

- Il valore massimo di M dipende dalla natura del fenomeno. In particolare se il fenomeno è geometrico $M = 1$, se il fenomeno è cinematico $M = 2$, se il fenomeno è di natura dinamica $M = 3$ e così via.

- Si ripeta il punto precedente per $Q_{M+2}, Q_{M+3}, ..., Q_N$ per giungere alla relazione

$$\Pi_0 = f_{N-M}\left(Q_1, Q_2, ..., Q_M, \Pi_{M+1}, \Pi_{M+2}, ..., \Pi_N\right)$$

- Cambiando l'unità di misura della sola Q_1 (procedura possibile essendo $Q_1, Q_2, ..., Q_M$ grandezze dimensionalmente indipendenti), i valori di $\Pi_0, \Pi_{M+1}, \Pi_{M+2}, ..., \Pi_N$ non cambiano essendo Π_i numeri adimensionali. Neanche i valori di $Q_2, Q_3, ..., Q_M$ cambiano non essendo variate le loro unità di misura. Segue quindi che la funzione f_{N-M} non può dipendere esplicitamente da Q_1.
- Cambiando l'unità di misura Q_2 e seguendo il ragionamento esposto al punto precedente si conclude che f_{N-M} non può dipendere esplicitamente da Q_2.
- Analogalmente si può concludere che f_{N-M} non dipende esplicitamente da $Q_3, Q_4, ..., Q_M$
- E' possibile quindi concludere che

$$Q_0 = f_0\left(Q_1, Q_2, ..., Q_N\right)$$

si trasforma in

$$\Pi_0 = \overline{f}\left(\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_{N-M}\right)$$

come si voleva dimostrare.

- L'utilità del teorema Π emerge chiaramente applicandolo all'esempio considerato precedentemente.

$$R = f\left(\rho, v, D, U_0\right)$$

Essendo il problema di natura dinamica $M = 3$.

Scegliamo ρ, U_0, D come grandezze dimensionalmente indipendenti.

In primo luogo verifichiamo che ρ, U_0, D siano dimensionalmente indipendenti, cioè che il monomio

$$\rho^{\alpha}\, U_0^{\beta}\, D^{\gamma}$$

con dimensioni nulle implichi $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$. Si ha

$$[\rho] = ML^{-3}; [U_0] = LT^{-1}; [D] = L$$

segue dunque

$$\left[\rho^{\alpha} U_0^{\beta} D^{\gamma}\right] = M^{\alpha} L^{-3\alpha} L^{\beta} T^{-\beta} L^{\gamma}$$

Dunque $\left[\rho^{\alpha} U_0^{\beta} D^{\gamma}\right] = 0$ se e solo se

$$\begin{array}{llll} \alpha & & & = 0 \\ -3\alpha & +\beta & +\gamma & = 0 \\ & -\beta & & = 0 \end{array}$$

Il sistema algebrico lineare precedente è omogeneo e il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero: la soluzione allora è quella identicamente nulla. E' quindi possibile concludere che $\rho, U_0, D,$ sono grandezze dimensionalmente indipendenti

Cerchiamo ora il monomio $\rho^{\alpha}\ U_0^{\ \beta}\ D^{\gamma}$ che ha le stesse dimensioni di R. Sapendo che

$$[R] = MLT^{-2}$$

Si ottiene

$$M^{\alpha} L^{-3\alpha} L^{\beta} T^{-\beta} L^{\gamma} = MLT^{-2}$$

$$\begin{array}{lllll} \alpha = 1 & & & & \alpha = 1 \\ -3\alpha & +\beta & +\gamma & = 1 \quad \Rightarrow & \gamma = 2 \\ -\beta = & -2 & & & \beta = 2 \end{array}$$

Dunque la relazione iniziale può essere scritta nella forma

$$\frac{R}{\rho U_0^2 D^2} = f_1\left(\rho, U_0, D, \nu\right)$$

Cerchiamo ora il monomio $\rho^{\alpha}\ U_0^{\ \beta}\ D^{\gamma}$ che ha le dimensioni di ν. Sapendo che

$$[\nu] = L^2 T^{-1}$$

Si ottiene

$$M^{\alpha} L^{-3\alpha} L^{\beta} T^{-\beta} L^{\gamma} = L^2 T^{-1}$$

$$\begin{array}{lllll} \alpha = 0 & & & & \alpha = 0 \\ -3\alpha & +\beta & +\gamma & = 2 \quad \Rightarrow & \gamma = 1 \\ -\beta = & -1 & & & \beta = 1 \end{array}$$

Si può quindi concludere

$$\frac{R}{\rho U_0^2 D^2} = f_2\left(\frac{\nu}{U_0 D}\right)$$

Per motivi storici invece del numero adimensionale $\frac{\nu}{U_0 D}$ si ritiene che $R/\rho U_0^2 D^2$ dipenda da

$$U_0 D/\nu$$

Dunque

$$\frac{R}{\rho U_0^2 D^2} = \overline{f}\left(\frac{U_0 D}{\nu}\right)$$

Il numero $U_0 D/\nu$ è detto numero di Reynolds e viene usualmente indicato con Re

$$Re = \frac{U_0 D}{\nu}$$

Il numero $R/\rho U_0^2 D^2$ è detto numero di Newton e viene usualmente indicato con Ne

Applicando il teorema Π si è trasformato il problema iniziale, che prevedeva la determinazione della funzione f di 4 variabili indipendenti, nella determinazione della funzione $\overline{f}$ che dipende da una sola variabile indipendente con chiaro e indubbio vantaggio.

IL TEOREMA Π NEI PROBLEMI DI IDRODINAMICA

Nei problemi idrodinamici, oltre al numero di Newton (Ne) e al numero di Reynolds (Re), possono comparire altri numeri adimensionali. I più comuni sono

- Il numero di Froude

$$Fr = \frac{U_0}{\sqrt{gD}}$$

che compare qualora il fenomeno sia influenzato anche dalla accelerazione di gravità

- Il numero di Mach

$$Ma = \frac{U_0}{\sqrt{\in/\rho}}$$

che compare qualora il fenomeno sia influenzato dalla comprimibilità del fluido.

- Il numero di Weber

$$We = \sqrt{\frac{\rho D U_0^2}{\sigma}}$$

che compare qualora il fenomeno sia influenzato dalla tensione superficiale.