# Lezione 24
# IL TEOREMA DI BERNOULLI

- Nella LEZIONE 23 abbiamo dedotto il teorema di Bernoulli per le correnti fluide, partendo dall'equazione del moto valida in tali circostanze. Il carico totale

$$H = z + \int \frac{dp}{\gamma} + \frac{\underline{v}\underline{v}}{2g}$$

  è definito anche in un moto tridimensionale e rappresenta comunque l'energia meccanica posseduta dal fluido per unità di peso.

- Partendo dalle equazioni tridimensionali che esprimono il principio della quantità di moto per un fluido stokesiano (equazioni di Navier – Stokes) è possibile dimostrare il teorema di Bernoulli nel caso generale. Non siamo in grado di effettuare tale dimostrazione nell'ambito di questo corso, perché ciò presuppone lo studio del moto tridimensionale dei fluidi che verrà effettuato nei corsi della laurea specialistica.

  Tuttavia, vista la sua importanza, considerato che il teorema di Bernoulli nella forma generale presenta stretta analogia con quello valido per le correnti e tenendo presente che la soluzione di alcuni problemi che affronteremo nella LEZIONE 25 richiede la sua conoscenza, enunceremo qui il teorema di Bernoulli nella forma generale elencando le ipotesi che devono essere verificate per la sua validità.

  Ipotesi:

1) <u>Fluido ideale</u>

   Per fluido ideale si intende un fluido privo di viscosità, tale quindi che la tensione da esso esercitata sia sempre normale alla superficie considerata

$$\underline{t} = -p\underline{n}$$

   In natura non esiste un fluido ideale, in quanto tutti i fluidi hanno una viscosità dinamica $\mu$ diversa da zero e esercitano anche tensioni tangenti alla superficie considerata.

Tuttavia in moti accelerati, caratterizzati da alti valori del numero di Reynolds e con contorni rigidi limitati, il comportamento dei fluidi reali può essere assimilato a quello dei fluidi ideali.

2) Moto stazionario

Spesso nei problemi si analizzano le situazioni di regime quando tutte le grandezze caratterizzanti il moto sono indipendenti dal tempo.

3) Campo di forze conservativo (NOTA 1)

Spesso nei problemi ingegneristici, il campo di forze che deve essere considerato è quello gravitazionale che è un particolare campo di forze conservativo tale che

$$\varphi = -gz$$

essendo $z$ un asse verticale diretto verso l'alto.

4) Fluido barotropico

Un fluido si dice barotropico quando la densità $\rho$ risulta funzione solo della pressione $p$. Dovrebbe essere evidente che un fluido a densità costante è in particolare fluido barotropico.

Quando le quattro ipotesi sopra elencate sono verificate il carico totale

$$H = -\frac{\varphi}{g} + \int \frac{dp}{\gamma} + \frac{\underline{v} \cdot \underline{v}}{2g}$$

si mantiene costante lungo una linea di corrente.

Ricordiamo che le linee di corrente sono definite dalla proprietà di essere tangenti (quindi parallele) al vettore velocità in ogni punto. La loro equazione in forma differenziale è dunque

$$d\underline{x} \times \underline{v} = 0$$

essendo $d\underline{x}$ l'elemento infinitesimo della linea di corrente (vedi LEZIONE 13).

Se il moto è stazionario le traiettorie delle particelle fluide, definite dall'equazione parametrica

$$d\underline{x} = \underline{v}dt$$

coincidono con le linee di corrente. Emerge quindi che il carico totale $H$ si mantiene costante anche lungo le traiettorie.

---

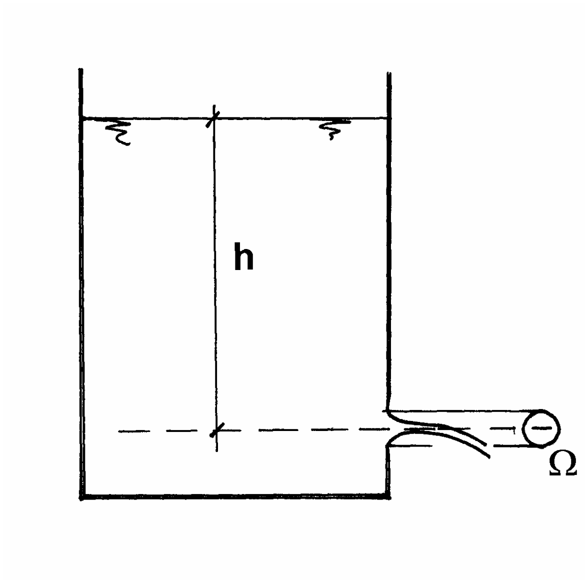
NOTA 1

Ricordiamo che un campo di forze si dice conservativo quando ammette una funzione potenziale $\varphi$ tale che

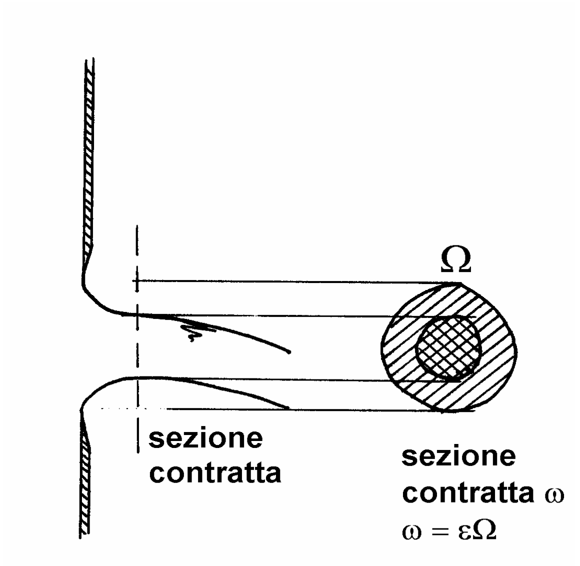
$$\underline{f} = \nabla\varphi$$

# EFFLUSSO DA LUCI – APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI BERNOULLI

Consideriamo il serbatoio in figura dove, alla profondità $h$, è praticato un foro circolare di sezione




$\Omega$. Supponiamo che la superficie libera $S$ del serbatoio sia molto maggiore di $\Omega$ in modo tale da poter assumere che le variazioni del pelo libero siano lente nel tempo e quindi il moto generato dall'efflusso attraverso il foro sia praticamente stazionario. Il campo di forze cui è soggetto il fluido sia quello gravitazionale. Inoltre la densità del fluido sia costante. All'interno del serbatoio, lontano dal foro, il fluido è praticamente fermo e gli effetti viscosi sono trascurabili. In prossimità del foro, il moto è accelerato e ad alti numeri di Reynolds . E' possibile dunque assumere ideale il comportamento del fluido e applicare il teorema di Bernoulli. Consideriamo un'asse $z$ rivolto verso l'alto con




origine in corrispondenza del livello del foro. Il carico totale in un qualunque punto all'interno del serbatoio e lontano dal foro vale $h$. Invero il carico cinetico è nullo perché il fluido è praticamente fermo e il carico piezometrico risulta quindi costante. Il getto avrà una geometria simile a quella illustrata nel disegno. Il getto ha una sezione inferiore a quella del foro perché il fluido che si trova in prossimità della parete non esce con una traiettoria ortogonale alla parete stessa bensì con una che inizialmente è tangente alla parete. Le traiettorie delle particelle fluide vicine alla parete, che inizialmente si muovono parallelamente a essa, non possono infatti presentare un punto angoloso. L'area del getto, in quella che si definisce sezione contratta dove le traiettorie delle particelle fluide sono fra di loro parallele e ortogonali alla parete del serbatoio, vale

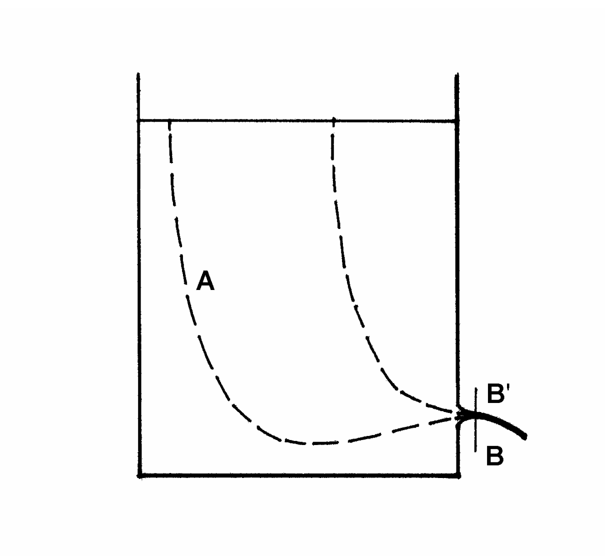
$$\omega = C_C \Omega$$

ove $C_C$ è il cosidetto coefficiente di contrazione che misure sperimentali mostrano essere circa 0.6. Considerato che le ipotesi del teorema di Bernoulli sono verificate, applichiamolo lungo una qualunque linea di corrente passante per un generico punto $B$ della sezione contratta. Si avrà

$$H_A = H_B$$

essendo $A$ un punto all'interno del serbatoio. Per i motivi discussi precedentemente

$$H_A = h$$




indipendentemente dall'esatta forma della linea di corrente e dall'esatta posizione del punto $A$. E' facile vedere che

$$H_B = v_B^2 / 2g$$

Infatti il valore di $z_B$ è trascurabile rispetto a $h$ e la pressione relativa $p_B$ è nulla (in un getto la pressione è costante sulla generica sezione e pari a quella atmosferica). Si ha quindi

$$h = v_B^2 / 2g$$

da cui

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

La velocità $\sqrt{2gh}$ è detta "velocità torricelliana". La portata uscente dal serbatoio risulta dunque

$$Q = C_C \Omega \sqrt{2gh}$$

Volendo valutare il tempo necessario affinchè $h$ passi dal valore $h_1$ al valore $h_2$ è necessario imporre un bilancio di massa. Semplici considerazioni sul volume di fluido che attraversa la sezione contratta impongono

$$Qdt = -dhS$$

essendo $S$ l'area della superficie libera del serbatoio. Segue

$$-\,dhS = C_C\Omega\sqrt{2gh}\,dt$$

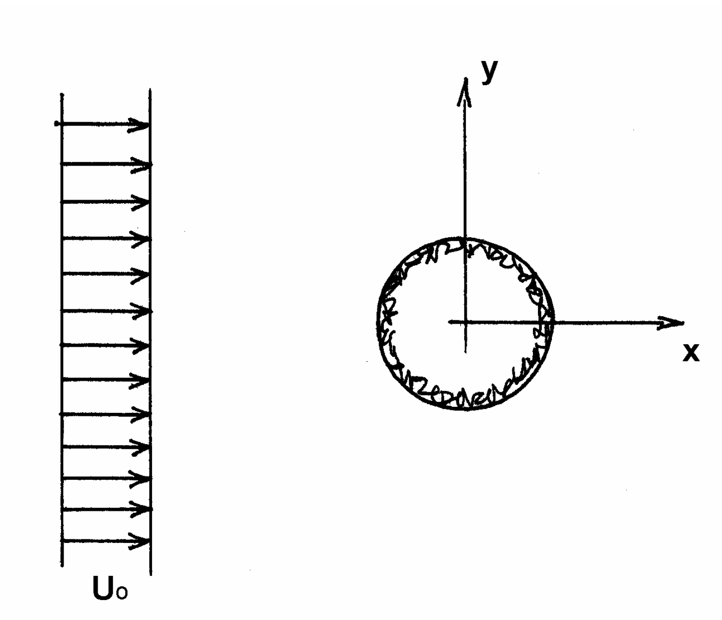
$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{C_C\Omega\sqrt{2g}}{S}dt$$

$$2\sqrt{h_2} - 2\sqrt{h_1} = -\frac{C_C\Omega\sqrt{2g}}{S}\left(t_2 - t_1\right)$$

$$\Delta t = \left(t_2 - t_1\right) = -\frac{2S}{C_C\Omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1}\right)$$

## PRESSIONE DI RISTAGNO – APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI BERNOULLI

Consideriamo un corpo (ad esempio un cilindro) che si muove con velocità costante $U_0$ all'interno di un fluido fermo. Analizziamo il problema utilizzando un sistema di riferimento solidale con il corpo, trasformando quindi il problema in quello di un oggetto fermo investito da un fluido che lontano dal corpo è animato da una velocità costante pari a $U_0$.



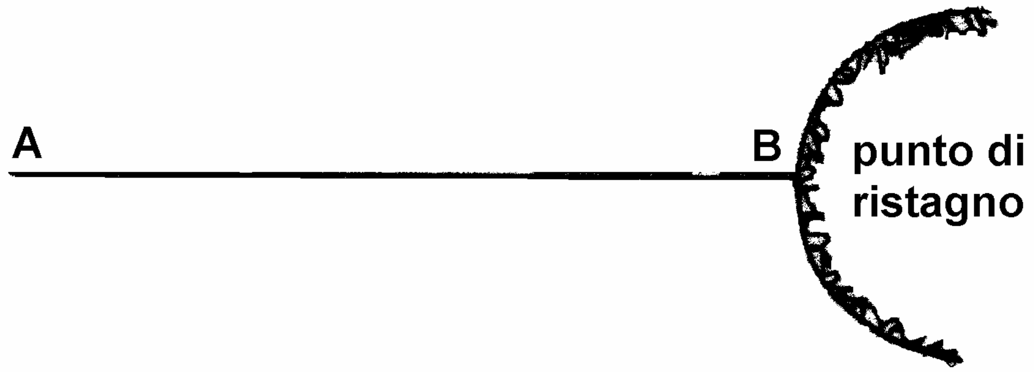
Se ipotizziamo il fluido ideale, la densità costante, il moto stazionario e il campo di forze gravitazionale, sappiamo (teorema di Bernoulli) che

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{|\underline{v}|^2}{2g} = \text{cost}$$

lungo una linea di corrente (l'accelerazione di gravità è qui supposta diretta come l'asse $z$).

E' evidente che sul corpo esisterà un punto (detto punto di ristagno) in cui la velocità è nulla. Nel caso di un cilindro il punto di ristagno è posizionato in $(-R,0)$ essendo $R$ il raggio della sezione del cilindro. Consideriamo ora la linea di corrente che passa per il punto di ristagno (vedi figura) e un punto $A$ lontano dal corpo.

Per il teorema di Bernoulli $H_A = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{|\underline{v}_A|^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{|\underline{v}_B|^2}{2g} = H_B$



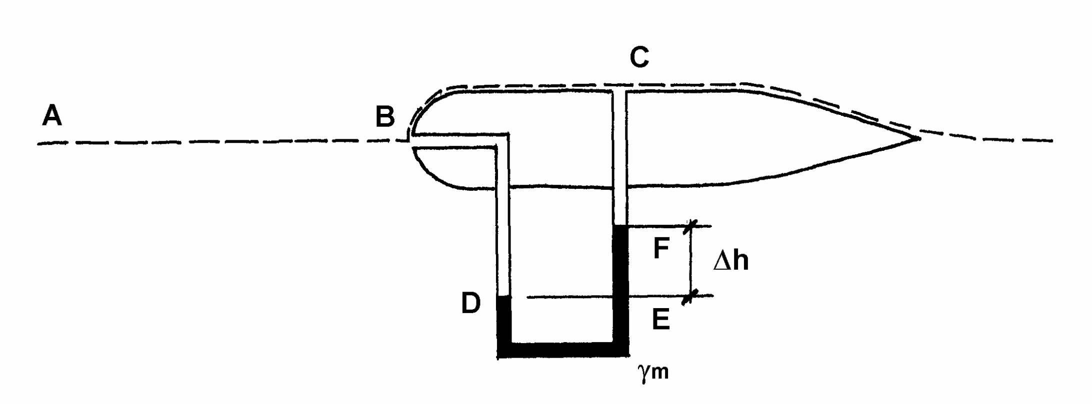

tuttavia $z_A = z_B$ e $|\underline{v}_A| = U_0, |\underline{v}_B| = 0$. Segue dunque

$$p_B - p_A = \frac{\rho}{2} U_0^2$$

La differenza di pressione $p_B - p_A$ è detta pressione di ristagno. Essa cresce con il quadrato della velocità $U_0$ ed è proporzionale alla densità del fluido. Siccome lontano dal corpo, la pressione è pari alla pressione atmosferica, la quantità $\rho U_0^2/2$ è semplicemente la pressione relativa nel punto $B$.

# TUBO DI PITOT

E' evidente che nel problema precedentemente analizzato, la misura della pressione relativa in $B$, consente la valutazione della velocità $U_0$. Nel passato, la misura della velocità $U_0$ veniva effettuata con uno strumento denominato "tubo di Pitot" schematicamente rappresentato in figura.




La velocità nel punto $C$ risulta praticamente quella indisturbata e pari quindi a $U_0$ (la linea tratteggiata rappresenta la linea di corrente passante per $A, B e C$).

Si ha quindi

$$p_B - p_C = \frac{\rho}{2} U_0^2$$

Inoltre

$$p_B - p_C = \Delta h (\gamma_m - \gamma)$$

Segue

$$U_0 = \sqrt{2 g \Delta h \left( \frac{\rho_m - \rho}{\rho} \right)}$$