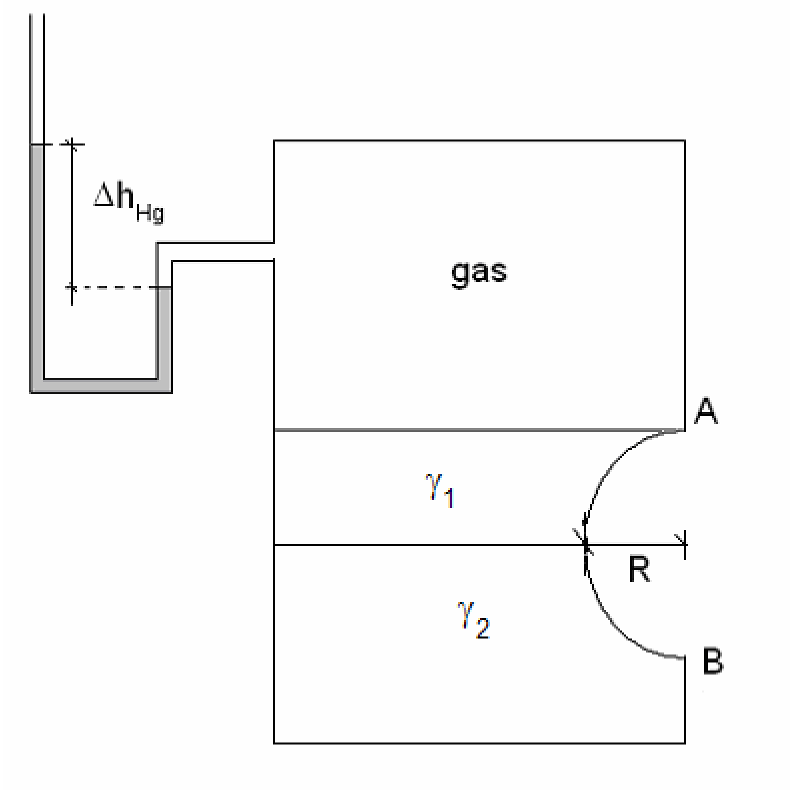
ESEMPIO 1

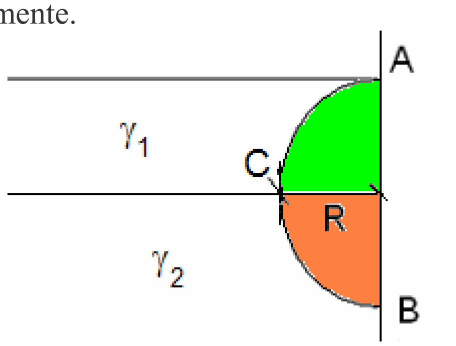
Determinare la spinta su AB di profondità unitaria (modulo, direzione e verso).
Dati: R=0.2 m, Δh_{Hg}= 0.05 m, γ_1=800 kgf/m^3, γ_2=1000 kgf/m^3, γ_{Hg}=13000 kgf/m^3

R.= 3265.1 N, θ=9.8°



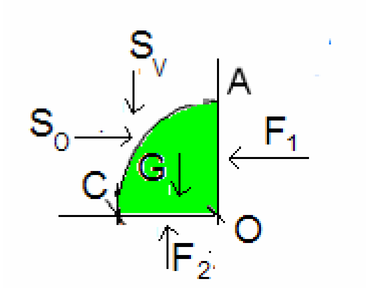
Soluzione.

- Utilizzando superfici piane e la superficie gobba in esame, isolare un volume di fluido fittizio. In questo caso la spinta su AB ha due contributi associati ai 2 diversi fluidi che agiscono su AB. Si considerano quindi separatamente i contributi dei fluidi 1 e 2 su AB. Indicato con C il punto della superficie AB corrispondente all'interfaccia tra i due fluidi, si valutano le spinte su AC e CB separatamente.



SPINTA SU AC:

- Determinare le forze che agiscono dall'esterno sul volume.
  In particolare, facendo riferimento alla figura, si hanno F_1; F_2, G con S_o e S_v *(ancora ignote)*.

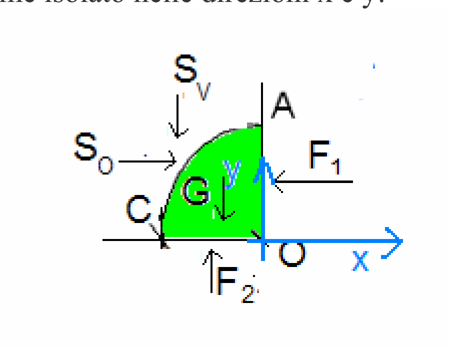


- F_1 è pari alla spinta del fluido sulla superficie piana AO.
  Per calcolarla, serve il valore della pressione alla quota del baricentro di AO, essa è una superficie rettangolare per cui il suo baricentro si trova ad una profondità pari a R/2 rispetto la superficie libera.
  $p_{GAO}=p_{GAS}+\gamma_1 R/2 = \gamma_{Hg}\,\Delta h_{Hg} + \gamma_1 R/2=7161.3$ Pa
  Il modulo di F_1 è:
  $F_1= p_{GAO}\,S= p_{GAO}\,L\,R = 1432.26$ N

- F_2 è la spinta del fluido sulla superficie piana CO.
  Per calcolarla, serve il valore della pressione alla quota del baricentro di CO, essa è una superficie orizzontale per cui il suo baricentro si trova ad una profondità pari a R rispetto la superficie libera.
  $p_{GCO}=p_{GAS}+\gamma_1 R = \gamma_{Hg}\,\Delta h_{Hg} +\gamma_1 R =7946.1$ Pa
  Il modulo di F_2 è:
  $F_2= p_{GCO}\,S= p_{GCO}\,L\,R = 1589.2$ N

- G è pari al peso del fluido contenuto nel volume isolato, ovvero
  $G= \gamma_1 R^2 \pi/4\, L = 246.42$ N

- Dopo aver introdotto un sistema di assi cartesiano, si calcolano S_o ed S_v imponendo l'equilibrio delle forze agenti sul volume isolato nelle direzioni x e y:



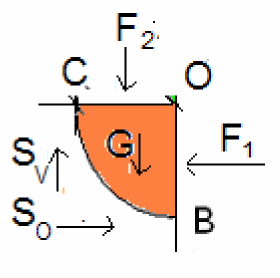
lungo x) $S_o-F_1=0 \rightarrow S_o=F_1=1432.26$ N
lungo y) $-S_v+F_2-G=0 \rightarrow S_v=F_2-G=1342.8$ N

- Si calcolano ora le componenti S_x e S_y della spinta del fluido su AC. Coerentemente alla scelta degli assi, risulta:
  $F_{xAC}=S_x=S_O=1432.26$ N
  $F_{yAC}=S_y=-S_V= -1342.8$ N

SPINTA SU BC:

- Determinare le forze che agiscono dall'esterno sul volume.

In particolare, facendo riferimento alla figura, si hanno F_1; F_2 e G con S_o e S_v *(ancora ignote)*.

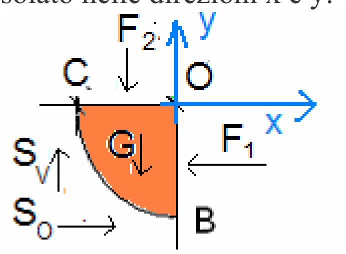


- F_1 è pari alla spinta del fluido sulla superficie piana BO.
  Per calcolarla, serve il valore della pressione alla quota del baricentro di BO, essa è una superficie rettangolare per cui il suo baricentro si trova ad una profondità pari a R/2 rispetto la superficie libera.
  $p_{GOB}=p_C+\gamma_2 R/2 = \gamma_{Hg}\,\Delta h_{Hg} + \gamma_1\,R+\gamma_2\,R/2 = 8927.1$ Pa
  Il modulo di F_1 è:
  $F_1= p_{GBO}\,S= p_{GBO}\,L\,R = 1785.42$ N

- F_2 è la spinta del fluido sulla superficie piana CO.
  Per calcolarla, serve il valore della pressione alla quota del baricentro di CO, essa è una superficie orizzontale per cui il suo baricentro si trova ad una profondità pari a R rispetto la superficie libera.
  $p_{GCO}=p_C = \gamma_{Hg}\,\Delta h_{Hg} + \gamma_1\,R = 7946.1$ Pa
  Il modulo di F_2 è:
  $F_2= p_{GCO}\,S= p_{GCO}\,L\,R = 1589.2$ N

- G è pari al peso del fluido contenuto nel volume isolato, ovvero
  $G= \gamma_2\,R^2\,\pi/4\,L = 308$ N

➢ Dopo aver introdotto un sistema di assi cartesiano, si calcolano S_o ed S_v imponendo l'equilibrio delle forze agenti sul volume isolato nelle direzioni x e y:



lungo x) $S_o-F_1=0 \rightarrow S_o=F_1=1785.42$ N
lungo y) $S_v-F_2-G=0 \rightarrow S_v=F_2+G=1897.2$ N

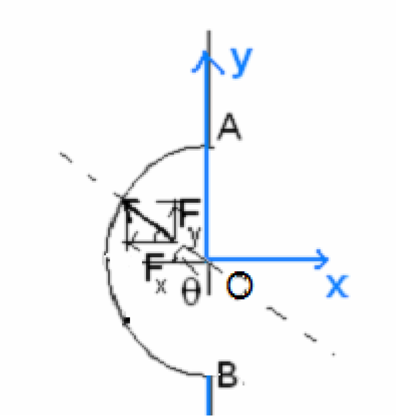
➢ Si calcolano ora le componenti S_x e S_y della spinta del fluido su BC. Coerentemente alla scelta degli assi, risulta:
$F_{xBC}=S_x=S_O=1785.42$ N
$F_{yBC}=S_y=S_V= 1897.2$ N N

➢ Si calcola ora la spinta totale:
$\underline{F}_{TOT}=\underline{F}_{AC}+\underline{F}_{CB}$
$F_{TOTx}= F_{xAC}+F_{xCB}=1432.26$ N $+\mathit{1785.42}$ N $=3217.7$ N
$F_{TOTy}= F_{yAC}+F_{yCB}==-1342.8$ N $+1897.3$ N$=554.5$ N
Il modulo di F sarà dunque:

$|\underline{F}_{TOT}|=F_{TOT}=\sqrt{F_{TOTx}^2+F_{TOTy}^2}=3265.1$ N

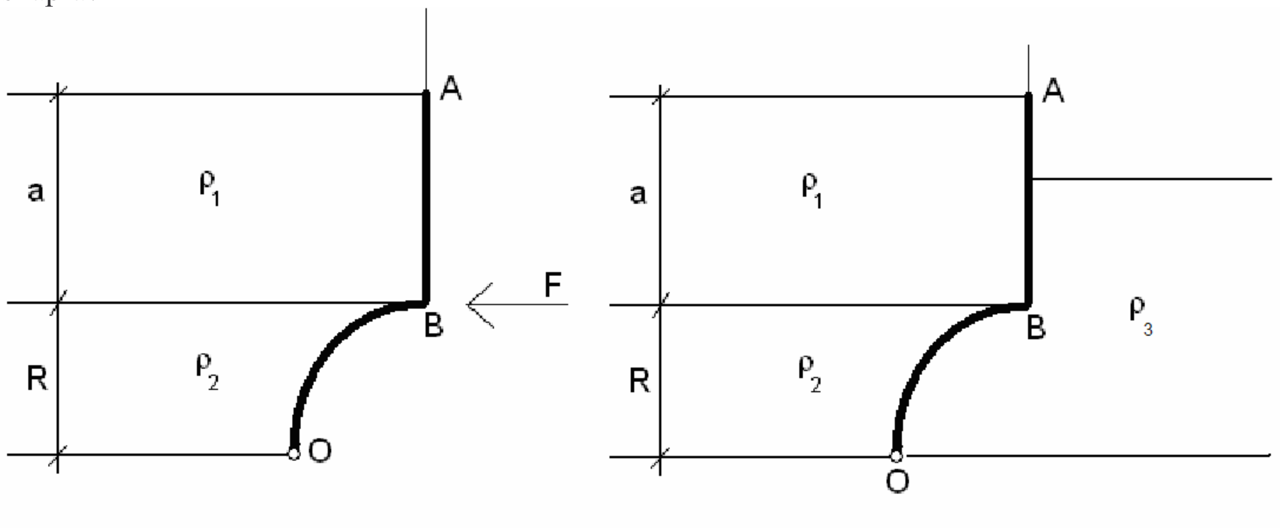
La direzione di F_{TOT} sarà normale alla superficie. In particolare, essendo la superficie circolare, la retta d'applicazione di F_{TOT} è passante per il centro O ed inclinata di un angolo $\theta=arctg\left(\frac{|F_{TOTy}|}{|F_{TOTx}|}\right)=9.8°$ rispetto l'asse x.

Il verso di F_{TOT} va dalla regione occupata dal fluido verso l'esterno.



ESERCIZIO 1

a) Valutare il momento necessario a mantenere in equilibrio lo sportello ABO supposto di larghezza unitaria.
b) Calcolare l'intensità di F perché la paratoia rimanga in equilibrio.
Dati: ρ_1=850 kg/m^3, ρ_2=1000 kg/m^3, a=0.2 m, R=0.25 m.
c) Supponendo che la paratoia ABO incernierata in O separi il serbatoio di sinistra da un altro serbatoio in cui vi sia un fluido (ρ_3=1300 kg/m^3) in contatto con l'atmosfera. Di quanto si deve riempire al massimo il serbatoio di sinistra, rispetto al suo fondo, prima che lo sportello si apra?



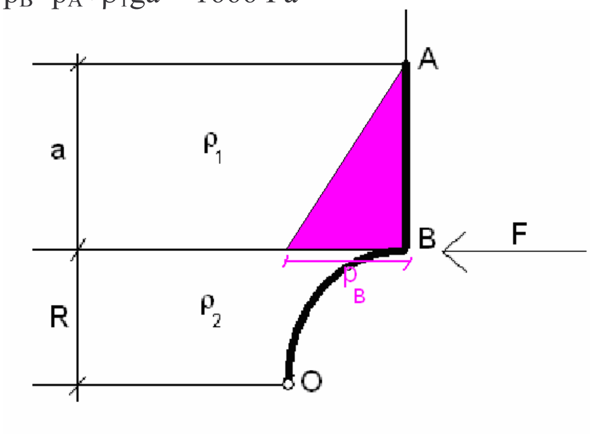
R. a) 189.3 Nm antiorario; b) 757 N; c) 0.38 m.

Soluzione.

a) La superficie ABO è costituita da una parete piana verticale e da una superficie circolare. Valuto le spinte sulle due parti della superficie separatamente.

SPINTA su AB)

Con riferimento alla figura, la distribuzione di pressione su AB risulta descritta da:
$p_A=p_{atm}=0$ Pa
$p_B=p_A+\rho_1 ga=$ 1666 Pa

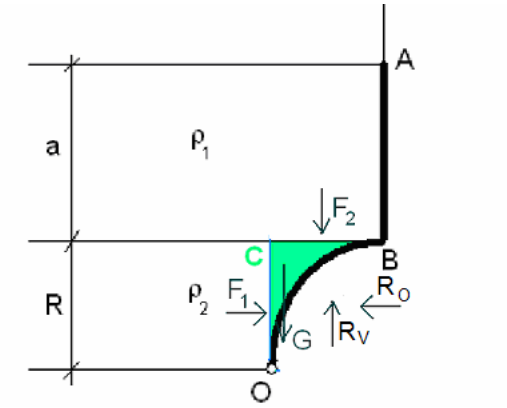


La distribuzione delle pressioni è triangolare. Risulterà dunque:
$|F_{AB}|=V_1= p_B\, a\, L/2 =166.6$ N *(L=larghezza contenitore=1 m)*

Inoltre la forza è applicata ad una distanza da O pari a,
b_{AB}= R +a/3= 0.3167m

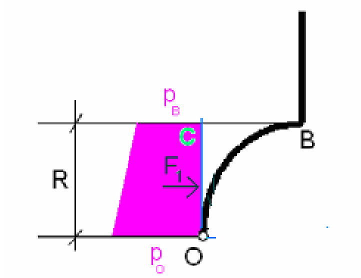
SPINTA su BO)

- Utilizzando superfici piane e la superficie gobba in esame, isolare un volume di fluido e determinare le forze che il fluido all'esterno del volume esercita sulle superfici piane.

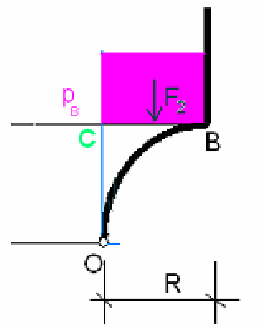


In particolare, facendo riferimento alla figura, si hanno F_1; F_2; G con R_O e R_V *(ancora incognite*).

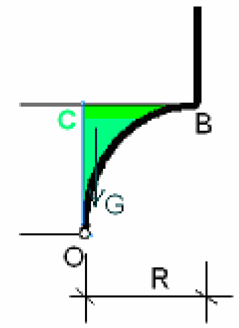
- F_1 è pari alla spinta del fluido sulla superficie piana verticale CO.
Per calcolarla devo costruire il solido delle pressioni riferito alla superficie CO.
Servono i valori delle pressioni in O e C:
p_C= p_B =1666 Pa
p_O= p_C + ρ_2 g R=4118.5 Pa
Il modulo di F_1 è pari al volume del solido delle pressioni su CO
F_1=(p_C+p_O) R/2 L = 723 N
(L=larghezza paratoia=1m)
NOTA: In questo caso è conveniente calcolare direttamente il volume associato al trapezio anziché la somma del triangolo e rettangolo, perché non serve il punto d'applicazione di F_1



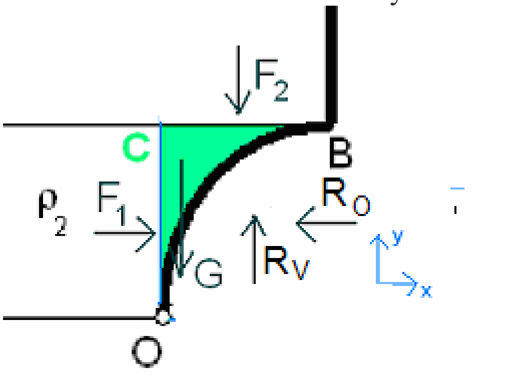
- F_2 è pari alla spinta del fluido sulla superficie piana orizzontale BC.
Per calcolarla devo costruire il solido delle pressioni riferito alla superficie BC. Essendo BC orizzontale, la pressione su BC è costante e pari a p_B
p_B= 1666 Pa
Il modulo di F_2 è pari al volume di un prisma a base rettangolare:
F_2=p_B R L =416.5 N



- G è pari al peso del fluido contenuto nel volume isolato, ovvero
G=ρ g R^2 (1-π/4) L = 131.82 N

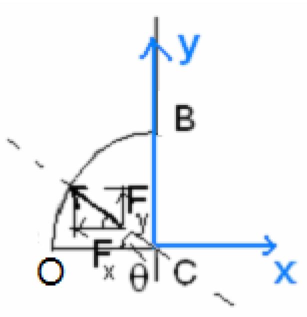


- Dopo aver introdotto un sistema di assi cartesiano, si calcolano R_o ed R_v imponendo l'equilibrio delle forze agenti sul volume isolato nelle direzioni x e y:

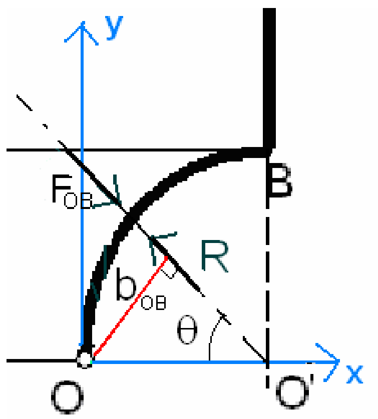


lungo x) $-R_O+F_1=0$ → $R_O=F_1=723$ N
lungo y) $R_V-F_2-G=0$ → $R_y=G+F_2=131.82$ N + 416.5 N = 548.32 N

- Si calcolano ora le componenti R_x e R_y della reazione su AB alla spinta del fluido. Coerentemente alla scelta degli assi, risulta:
  $R_x=-R_O=-723$ N
  $R_y=R_V=548.32$ N
  Essendo R la reazione della parete BO alla spinta del fluido su di essa, la spinta del fluido sulla parete BO sara' $\underline{F}=-\underline{R}$, ovvero avrà componenti $F_{OB}=(723$ N, -548 N).
  La direzione di F_{OB} sarà normale alla superficie. In particolare, essendo la superficie circolare, la retta d'applicazione di F_{OB} è passante per il centro C ed inclinata di un angolo $\theta = arctg\left(\frac{|F_{OBy}|}{|F_{OBx}|}\right) = 37°$ rispetto l'asse x.
  Verso di F_{OB} va dalla regione occupata dal fluido verso l'esterno.
  Inoltre la forza è applicata ad una distanza da O pari a,
  $b_{OB}=R\sin\theta=0.15$ m.



  Il modulo del momento M (orario) esercitato dal fluido sulla superficie OBA risulterà quindi:
  $|M|=F_{OB}\,b_{OB}+F_{AB}\,b_{AB}=136.5+52.76=189.3$ Nm
  Il modulo del momento necessario a mantenere la superficie OBA in equilibrio sarà pertanto apri a 189.3 Nm, ma antiorario.



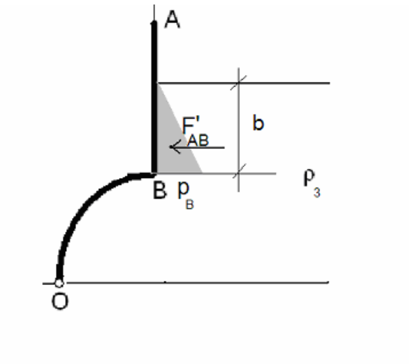
b) Per calcolare l'intensità di F perché la paratoia rimanga in equilibrio, s'impone l'equilibrio dei momenti rispetto ad O:
$F\,R=|M|$ da cui $F=|M|/R=757.2$ N

c) Valuto il momento, rispetto a O, esercitato sullo sportello dal fluido nel serbatoio di destra. Sia b (ancora incognita la quota della superficie libera del fluido rispetto il punto B). Analogamente a quanto fatto per il serbatoio di sinistra, si valutano le spinte sulle due parti AB e OB della superficie ABO separatamente.

SPINTA su AB)

Con riferimento alla figura, la distribuzione di pressione risulta descritta da:

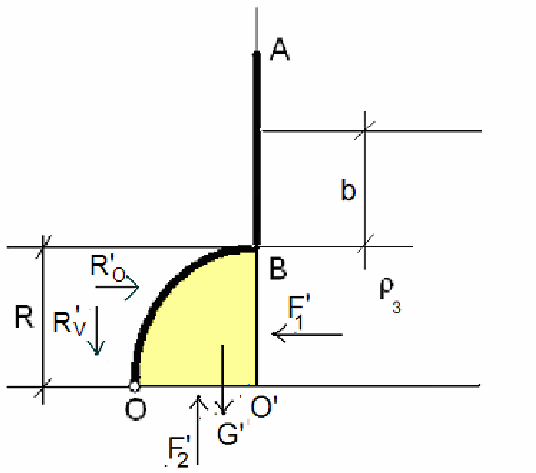
$p_A = p_{atm} = 0$ Pa
$p_B = p_A + \rho_3\, g\, x = \rho_3\, g\, b$



La distribuzione delle pressioni è triangolare, per cui,
$|F'_{AB}| = V_1 = p_B\ b\ L/2 = \rho_3\, g\, b^2/2\ L$ *(L=larghezza contenitore=1 m)*
Inoltre la forza è applicata ad una distanza da O pari a,
$b'_{AB} = R + b/3$

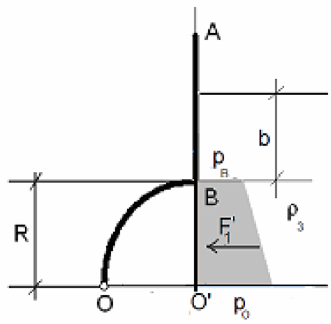
SPINTA su BO)

- Utilizzando superfici piane e la superficie gobba in esame, isolare un volume di fluido e determinare le forze che agiscono all'esterno del volume.

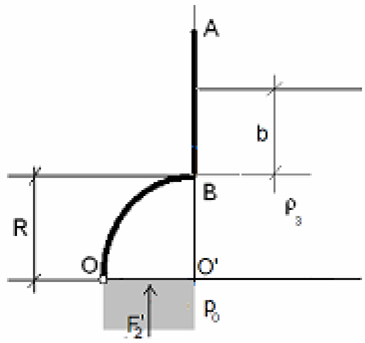


In particolare, facendo riferimento alla figura, si hanno F'_1; F'_2, G' con R'_O ed R'_V *(ancora incognite)*.

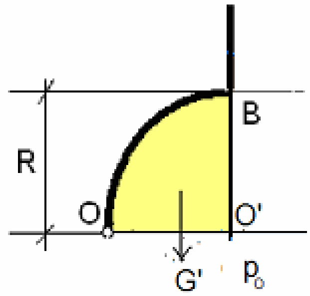
- F'_1 è pari alla spinta del fluido sulla superficie fittizia piana verticale O'B.
  Per calcolarla devo costruire il solido delle pressioni riferito alla superficie O'B.
  Servono i valori delle pressioni in B e O':
  $p_B = \rho_3\, g\, b$
  $p_{O'} = p_O = p_B + \rho_3\, g\, R = \rho_3\, g\, (R+b)$
  Il modulo di F_1 è :
  $F'_1 = (p_{O'} + p_B)\, R/2\ L = \rho_3\, g\, (R+2b)\, R/2\ L$
  (L=larghezza paratoia=1m)



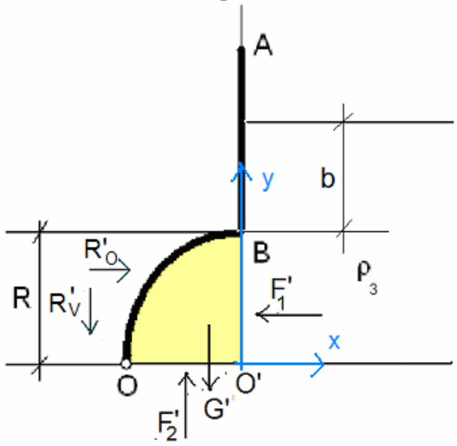
- F_2 è pari alla reazione della superficie piana orizzontale OO’ alla spinta del fluido su OO’.
  Per calcolarla devo costruire il solido delle pressioni riferito alla superficie OO’. Essendo OO’ orizzontale, la pressione su OO’ è costante e pari a p_O
  $p_O = \rho_3\, g\, (R+b)$
  Il modulo di F_2 è pari al volume di un prisma a base rettangolare:
  $F'_2 = p_O\, R\, L = \rho_3\, g\, (R+b) R L$



- G’ è pari al peso del fluido contenuto nel volume isolato, ovvero
  $G' = \rho\, g\, R^2\, (\pi/4)\, L$



➢ Dopo aver introdotto un sistema di assi cartesiano, si calcolano R_o ed R_v imponendo l’equilibrio delle forze agenti sul volume isolato nelle direzioni x e y:

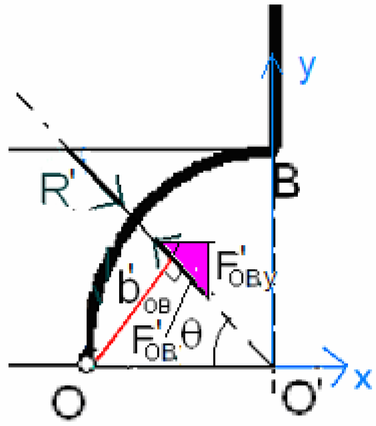


lungo x) $\quad R'_O - F'_1 = 0 \quad \rightarrow \quad R'_O = F'_1 = \rho_3\, g\, (R+2b)\, R/2\, L$

lungo y) $\quad -R'_V + F'_2 - G' = 0 \quad \rightarrow \quad R'_V = -G' + F'_2 = -\rho_3\, g\, R^2\, (\pi/4)\, L + \rho_3\, g\, (R+b) R L$

➢ Si calcolano ora le componenti R'_x e R'_y della reazione su OB alla spinta del fluido. Coerentemente alla scelta degli assi, risulta:
$R'_x = R'_O = \rho_3\, g\, (R+2b)\, R/2\, L$
$R'_y = -R'_V = \rho_3\, g\, R^2\, (\pi/4)\, L - \rho_3\, g\, (R+b) R L$
Essendo R’ la reazione della parete BO alla spinta del fluido su di essa, la spinta del fluido sulla parete BO sara’ $F'_{OB} = -R'$, ovvero avrà componenti $F'_{OB} = (-\rho_3\, g\, R(R+2b)L/2,\ \rho_3\, g\, L\, R[R\,(1-\pi/4) + b]\,)$.
Il modulo di F'_{OB} risulta pertanto $|F'_{OB}| = \sqrt{F'^2_{OBx} + F'^2_{OBy}}$
La direzione di F'_{OB} sarà normale alla superficie. In particolare, essendo la superficie circolare, la retta d’applicazione di F_{OB} è passante per il centro O’ ed inclinata di un angolo $\theta = arctg\left(\frac{|F'_{OBy}|}{|F'_{OBx}|}\right)$ rispetto l’asse x.

Verso di F'_{OB} va dalla regione occupata dal fluido verso l'esterno.
Inoltre la forza è applicata ad una distanza da O pari a, b'_{OB}= R sinθ che può essere anche espresso come $b'_{OB}=R \frac{F'_{OBy}}{|F'_{OB}|}$, notando che $\sin\theta = \frac{F'_{OBy}}{|F'_{OB}|}$.



Il modulo del momento M (antiorario) esercitato dal fluido nel serbatoio di destra sulla superficie OBA risulterà quindi:

$|M'| = |F'_{OB}| b'_{OB} + F'_{AB}\, b'_{AB} = |F'_{OB}|\, R \frac{F'_{OBy}}{|F'_{OB}|} + F'_{AB}\, b'_{AB} = R$

$F'_{OBy} + F'_{AB}\, b'_{AB} = \rho_3\, g\, L\, R^2[R\,(1-\pi/4) + b] + \rho_3\, g\, b^2/2\, L(R$ $+b/3)$

- Per calcolare il livello b tale che la paratoia si mantenga chiusa impongo l'equilibrio dei momenti, rispetto ad O, esercitato dai fluidi a sinistra e a destra di OBA.
  $\rho_3\, g\, L\, R^2[R\,(1-\pi/4) + b] + \rho_3\, g\, b^2/2\, L(R + b/3) = |M|$
  $\rho_3\, g\, L\, (R^2[R\,(1-\pi/4) + b] + b^2/2\,(R + b/3)) = |M|$
  $R^3\,(1-\pi/4) + R^2 b + R b^2/2 + b^3/6 = |M|/(\rho_3\, g\, L)$
  $b^3/6 + b^2 R/2 + b\, R^2 + R^3\,(1-\pi/4) = |M|/(\rho_3\, g\, L)$
  $0.1666b^3 + 0.125\, b^2 + 0.0625\, b + 0.00336 = 0.015$
  $0.1666b^3 + 0.125\, b^2 + 0.0625\, b = 0.01164$
  soluzione metodo iterativo: b=0.13 m

METODO NEWTON - RAPHSON

Condizione iniziale Y_0 = 0.5
Errore massimo ε = 1.00E-03

$$f(Y) = 0 \longrightarrow Y_{n+1} = Y_n - \frac{f(Y_n)}{f'(Y_n)}$$

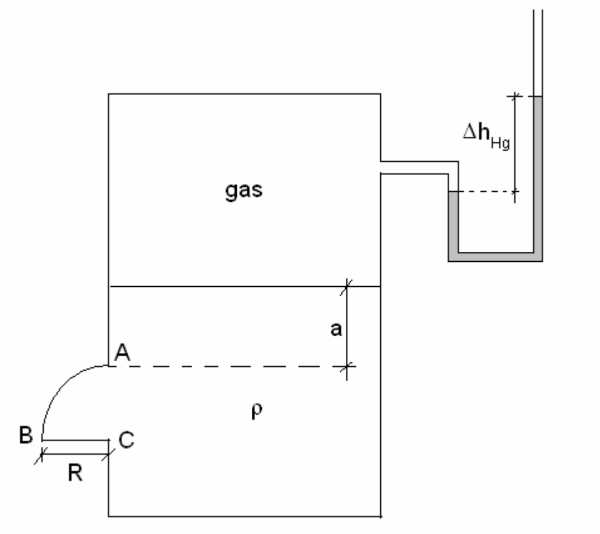
n	Yn	f(Yn)	f'(Yn)	ε	
0	0.500	0.07	0.31		
1	0.271	- 4.439	2.22	4.59E-01	avanti...
2	2.270	11.245	17.47	7.39E+00	avanti...
3	1.627	2.557	9.94	2.84E-01	avanti...
4	1.369	0.306	7.62	1.58E-01	avanti...
5	1.329	0.007	7.30	2.93E-02	avanti...
6	1.328	0.000	7.29	6.75E-04	avanti...
7	**1.328**	0.000	7.29	3.32E-07	avanti...
8	1.328	-	7.29	7.97E-14	avanti...
9	1.328	-	7.29	0.00E+00	avanti...
10	1.328	-	7.29	0.00E+00	avanti...

Pertanto il serbatoio di destra si deve riempire 0.13+R=0.38 m rispetto al suo fondo perché lo sportello non si apra.

ESERCIZIO 2

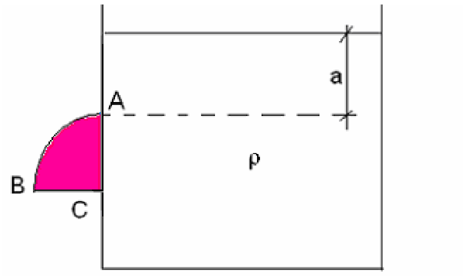
Determinare la spinta su AB (modulo, direzione e verso).
Dati: $a=0.2$ m, $R=0.5$ m, $\Delta h_{Hg}= 0.07$ m, $\rho=1000$ kg/m^3, $L=0.8$ m (larghezza contenitore), $\rho_{Hg}=13600$ kg/m^3

R.= 7395 N, $\theta=42°$

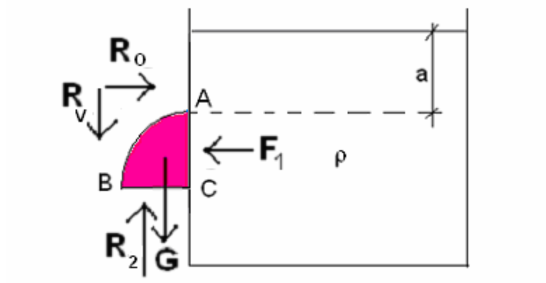


Soluzione.

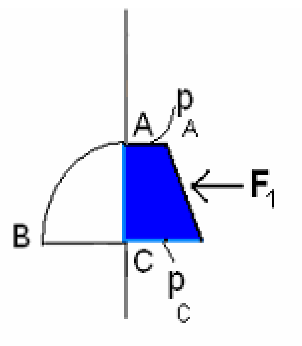
- Utilizzando superfici piane e la superficie gobba in esame, isolare un volume di fluido.



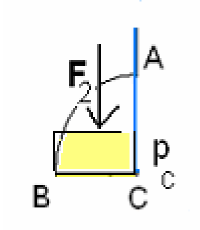
- Determinare le forze che agiscono dall'esterno sul volume.
  In particolare, facendo riferimento alla figura, si hanno F_1; R_2 e G con R_o e R_v *(ancora incognite)*.



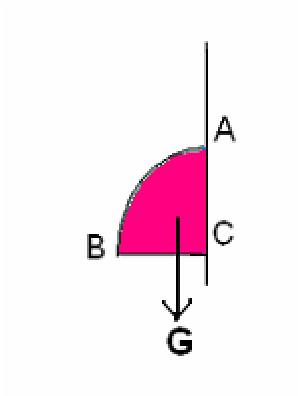
F_1 è pari alla spinta del fluido sulla superficie piana AC.
Per calcolarla devo costruire il solido delle pressioni riferito alla superficie AC.
Servono i valori delle pressioni in A e C:
$p_A=p_{GAS}+\rho ga$ dove $p_{GAS}=\rho_{Hg}\, g\, \Delta h_{Hg}$ da cui $p_A=\rho_{Hg}\, g\, \Delta h_{Hg} +\rho ga=11301$ Pa



$p_C = p_A + \rho\, g\, R = 16206$ Pa
Il modulo di F_1 è pari al volume di un prisma a base trapezia:
$F_1 = (p_C + p_A)\, R/2\, L = 5501.45$ N
(L=larghezza contenitore=0.8 m)

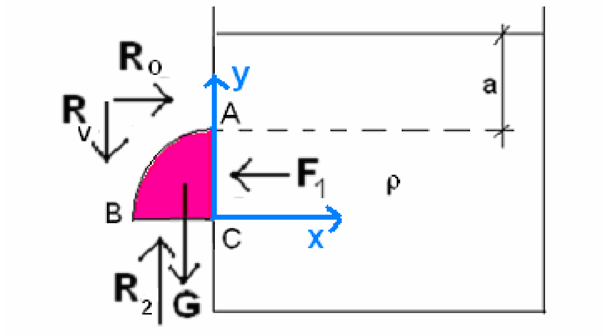


- R_2 è la reazione della superficie piana orizzontale BC alla spinta F_2 del fluido su BC. Per calcolare F_2 devo costruire il solido delle pressioni riferito alla superficie BC. Essendo BC orizzontale, la pressione su BC è costante e pari a p_C
  $p_B = p_C = p_A + \rho\, g\, R = 16206$ Pa
  Il modulo di F_2 è pari al volume di un prisma a base rettangolare:
  $F_2 = p_C\, R\, L = 6482.4$ N
  R_2 è uguale e contraria a F_2, in particolare il modulo di R_2 è pari al modulo di F_2,ovvero $R_2 = 6482.4$ N.



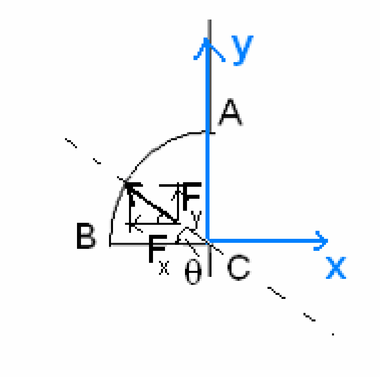
- G è pari al peso del fluido contenuto nel volume isolato, ovvero
  $G = \rho\, g\, (\pi R^2)/4\, L = 1540.6$ N

➢ Dopo aver introdotto un sistema di assi cartesiano, si calcolano R_o ed R_v imponendo l'equilibrio delle forze agenti sul volume isolato nelle direzioni x e y:



lungo x)	$R_o - F_1 = 0$	$\rightarrow$	$R_o = F_1 = 5501.45$ N
lungo y)	$-R_v + R_2 - G = 0$	$\rightarrow$	$R_v = R_2 - G = 6482.4$ N $- 1540.6$ N$= 4941.8$ N

➢ Si calcolano ora le componenti R_x e R_y della reazione su AB alla spinta del fluido. Coerentemente alla scelta degli assi, risulta:
$R_x = R_O = 5501.45$ N
$R_y = -R_V = -4941.8$ N
Essendo R la reazione della parete AB alla spinta del fluido su di essa, la spinta del fluido sulla parete AB sara' $\underline{F} = -\underline{R}$, ovvero avrà componenti F =(-5501.45 N, 4941.8 N).
Il modulo di F risulta pertanto $= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 7395$ N.



La direzione di F sarà normale alla superficie. In particolare, essendo la superficie circolare, la retta d'applicazione di F è passante per il centro C ed inclinata di un angolo $\theta = arctg\left(\frac{|F_y|}{|F_x|}\right) = 42°$ rispetto l'asse x. Il verso di F va dalla regione occupata dal fluido verso l'esterno.