

# Meccanica dei Fluidi

Jan Pralits

Department of Civil, Chemical and Environmental Engineering  
University of Genoa, Italy  
jan.pralits@unige.it

2014

**Fondamenti di meccanica dei continui (80939/6CFU)**  
**Ing. Biomedica III anno**

**Fisica tecnica e meccanica dei fluidi (81193/6CFU)**  
**Ing. Chimica II anno**

## Orario e Info

### Fondamenti dei meccanica dei continui (80939/6CFU) Ing. Biomedica III

- 24 ore con J. Pralits (Mecc. dei Fluidi)
- 24 ore con M. Capurro (Mecc. dei Solidi)

### Fisica tecnica e meccanica dei fluidi (81193/6CFU) Ing. Chimica II

- 24 ore con J. Pralits (Mecc. dei Fluidi)
- 24 ore con A. Stocchino (Mecc. dei Fluidi)

### Lecture notes

[www.dicca.unige.it/jpralits/teaching.html](http://www.dicca.unige.it/jpralits/teaching.html)

### Contact

jan.pralits@unige.it

Corso	Aula	Lun	Mar	Mer	Gio	Ven
Fondamenti dei Meccanica dei Continui 80939/6CFU (Ing. Biomedica III)	E3	14-17				
	E1					11-13
Fisica Tecnica e Meccanica dei Fluidi 81193/6CFU (Ing. Chimica II)	C1	14-17			14-16	

# Contenuto

- **Corso** : Meccanica dei Fluidi
- **Ore** : 24h
- **Contenuto** :
  - Introduzione, definizioni, concetti...
  - Idrostatica
  - Equazione di stato
  - Interfaccia e l'effetto capillare
  - Analisi dimensional, theorema  $\pi$
  - Fluidi in movimento, principi
  - Correnti fluidi
  - Sistemi impianti, perdite
  - Theorema di Bernoulli
- **Esame** : Prova intermedia + finale
- **Refs** : Lecture notes

## La descrizione microscopica

La descrizione di un fluido (in quiete o in moto) da un punto di vista **macroscopico** consiste nella rappresentazione delle proprietà del fluido attraverso funzioni del punto nello **spazio** oltre che del **tempo**.

$$f(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

Ai fondamenti della descrizione macroscopica c'è, però, la descrizione di un fluido in base alle proprietà meccaniche delle **single molecole** che lo compongono: si parla in questo caso di descrizione **microscopica**.

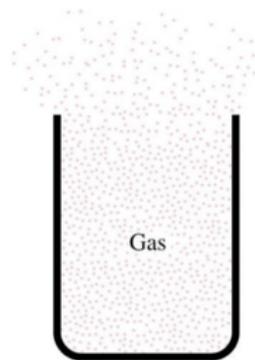
Però, possiamo **tener conto di ogni** molecola ?

Ciò vuol dire che dal moto di un gran numero di molecole devono emergere dei **comportamenti collettivi** che prescindono dalla esatta posizione e velocità di ciascuna molecola.

I due livelli, **macroscopico** e **microscopico** sono uniti da un legame di tipo **statistico**, o **probabilistico**.

In un sistema costituito da  $N$  molecole, una particolare molecola, indicata con il suffisso  $i$ , si caratterizza anzitutto mediante la sua massa  $m_i$ , ed energia potenziale  $e_{pot}$ .

Le equazioni che secondo la meccanica classica governano il moto delle molecole sono le equazioni di Newton, che descrivono la molecola  $i$ -esima mediante la sua posizione  $\mathbf{x}_i$  e velocità  $\mathbf{v}_i$ .



## Le equazioni di bilancio

Per un sistema meccanico isolato qualsiasi, insieme di punti materiali, sono valide **le leggi di conservazione delle grandezze meccaniche microscopiche** **massa**, **quantità di moto** ed **energia**.

$$\sum_{i=1}^N m_i = \mathcal{M} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \mathcal{Q} \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^N \left( m_i \frac{v_i^2}{2} + e_i^{pot} \right) = \mathcal{E} \quad (4)$$

Ciò comporta che in un sistema non isolato, ma composto da un gran numero di particelle, queste grandezze anche se non più costanti **varieranno lentamente**, e tanto più lentamente quanto più grande è il numero delle particelle.

Questa osservazione è la base per **l'identificazione dei parametri macroscopici** che caratterizzano il movimento collettivo di un fluido proprio nelle grandezze meccaniche che, se il sistema fosse isolato, sarebbero **conservate**.

## Volume di controllo e medie statistiche

Per rendere quantitativa l'analisi occorre identificare in qualche modo parti diverse del fluido.

L'unica possibilità è quella di identificare a priori un volume (**volume di controllo**) geometricamente definito, e **far riferimento alla massa, energia e quantità di moto** delle molecole che, in un dato istante, si trovano nel volume dato.

Occorre inoltre ragionare su **quantità medie in senso statistico**.

Si può immaginare di effettuare un gran numero di **esperimenti identici nei vincoli esterni** e poi fare la **media**.

**Le grandezze** medie così ottenute hanno l'importante caratteristica di essere **additive** rispetto al volume.

Ne consegue che queste **grandezze** possono essere rappresentate come **integrali**.

Per un volume infinitesimo  $d\mathcal{V}$ , abbiamo:

$$d\mathcal{M} = \rho d\mathcal{V} \quad \text{massa} \quad (5)$$

$$d\mathcal{Q} = \mathbf{Q} d\mathcal{V} \quad \text{quantità di moto} \quad (6)$$

$$d\mathcal{E} = E d\mathcal{V} \quad \text{energia} \quad (7)$$

dove  $\rho$ ,  $\mathbf{Q}$  e  $E$  sono **densità** di **massa**, **quantità di moto** ed **energia**

# I flussi

Le grandezze massa, quantità di moto ed energia costituiscono gli **invarianti** meccanici **additivi** in quanto grandezze, additive rispetto al volume, che **se il volume dato fosse isolato resterebbero costanti**.

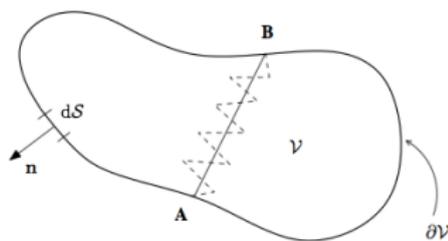
Una **variazione** di una grandezza deve essere attribuita ad una **interazione con l'esterno**:

- **localmente** attraverso la **superficie** (flusso)
- a **distanza** per intervento di **campi di forza** (gravità, campo elettrico)

È possibile rendere tale concetto quantitativo scrivendo delle **equazioni di bilancio**, che collegano le variazioni temporali degli invarianti meccanici nel volume  $\mathcal{V}$  al loro flusso attraverso la superficie  $\partial\mathcal{V}$ .

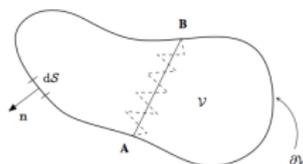
**Flusso**: come mostrato in figura associabile alla superficie di separazione, con la proprietà fondamentale che il flusso da una parte all'altra è uguale ed opposto a quello dalla seconda alla prima.

- **Indipendentemente** dalla scelta della superficie di separazione.
- Il flusso totale di una **grandezza additiva**.
- Scrivibile come **integrale** di superficie di una opportuna densità di flusso.



## Flusso di una grandezza scalare I

Il flusso totale di una generica grandezza scalare  $f$  attraverso una porzione di contorno come **AB non deve dipendere dall'effettiva area** della superficie ma solo da quella delle **sue proiezioni** sui piani coordinati.



Questo si può scrivere

$$\iint_{\partial V} (J_{f1} dx_2 dx_3 + J_{f2} dx_1 dx_3 + J_{f3} dx_1 dx_2) = \quad (8)$$

$$\iint_{\partial V} (J_{f1} n_1 dS + J_{f2} n_2 dS + J_{f3} n_3 dS) = \quad (9)$$

$$\iint_{\partial V} \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{n} dS \quad (10)$$

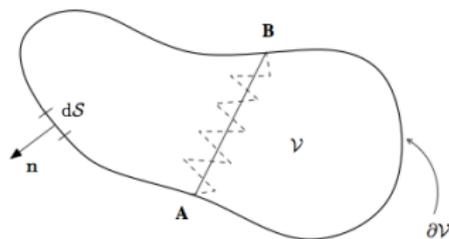
dove  $dx_2 dx_3$ ,  $dx_1 dx_3$  e  $dx_1 dx_2$  costituiscono le componenti di un vettore, che ha per modulo l'area della superficie infinitesima  $dS$  e per direzione quella della normale  $\mathbf{n}$  alla superficie stessa.

## Flusso di una grandezza scalare II

Possiamo in definitiva scrivere lequazione di bilancio

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} f d\mathcal{V} = - \iint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{n} dS \quad (11)$$

in cui il **segno meno** viene dalla convenzione. L'aumento nellunità di tempo della grandezza  $f$  totale contenuta nel volume di controllo  $\mathcal{V}$  deve uguagliare il flusso totale entrante nel volume stesso, uguale ed opposto al flusso totale uscente.



## Flusso di una grandezza vettoriale

Si scrive

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{f} d\mathcal{V} = - \iint_{\partial\mathcal{V}} \mathbb{J}_f \cdot \mathbf{n} dS \quad (12)$$

Basta ricordarsi che la trasformazione lineare di  $\mathbf{n}dS$  in un vettore si esprime tramite il prodotto scalare per un un tensore doppio (vedere l'appendice).

Come si vede ora tale proprietà è del tutto generale e si applica al flusso di qualsiasi grandezza conservata.

## Le equazioni di bilancio in forma differenziale

Applicando il teorema di **Gauss**

$$\iint_S \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{J}_f d\mathcal{V} \quad (13)$$

Il bilanci per una grandezza scalare

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} f d\mathcal{V} = - \iint_S \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{n} dS \quad (14)$$

si può ora scrivere

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_f \right) d\mathcal{V} \quad (15)$$

Se la grandezza fisica  $f$  sia rappresentabile con una funzione **continua**, gli integrando devono essere uguali in ogni punto. Si può, per una grandezza scalare, scrivere

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_f = 0 \quad (16)$$

e per una grandezza vettoriale

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbb{J}_f = 0 \quad (17)$$

## Le equazioni di bilancio per un fluido

Particolarizzando l'equazione di bilancio alla densità di massa, di quantità di moto e di energia di un fluido, si possono scrivere le seguenti equazioni differenziali:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_\rho = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbb{J}_Q = \mathbf{F} \quad (19)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_E = L \quad (20)$$

dove

- $\mathbf{F}$  è una forza per unità di volume. Es:  $\mathbf{F} = \rho \mathbf{g}$ , con  $\mathbf{g}$  accelerazione di gravità.
- $L$  è il lavoro per unità di volume. Es:  $L = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{g}$ , nel caso di forza di gravità.
- Sono **5 equazioni**. Ora bisogna legare, sotto opportune ipotesi, i flussi di massa, quantità di moto ed energia alle rispettive densità.

## Fluido in quiete

Un fluido di composizione molecolare definita che sia rimasto isolato ed in stato di quiete da un tempo abbastanza lungo per trovarsi in equilibrio termodinamico può essere compiutamente descritto dal punto di vista macroscopico mediante **due sole variabili**, per esempio la **pressione** e **temperatura**.

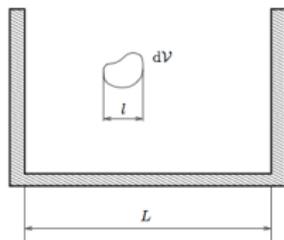
- la massa è costante nel tempo
- l'energia è costante nel tempo
- la quantità di moto è nulla

## Fluido in moto

Si immagina cioè (si veda la figura) di poter suddividere l'intero campo di moto in regioni, di volume  $\partial\mathcal{V}$ , caratterizzate da una **scala spaziale / sufficientemente piccola** per permettere di affermare che la distribuzione di probabilità microscopica, pur variando da un volume all'altro, sia prossima all'equilibrio termodinamico all'interno di ciascuno preso singolarmente.

Occorre che **le proprietà macroscopiche del fluido** da cui la distribuzione di probabilità dipende (densità di massa, quantità di moto ed energia) **varino poco su di una scala di lunghezza /** caratteristica per il ristabilimento dell'equilibrio molecolare.

Occorre altresì che **i tempi caratteristici** dell'evoluzione del fluido **siano lunghi** rispetto a quelli necessari perchè la distribuzione statistica di probabilità si riporti all'equilibrio.



## Lipotesi del continuo

La schematizzazione con una lunghezza  $l$  (che prende il nome di ipotesi del **continuo**) è applicabile solo quando  $l$  è molto inferiore alla scala caratteristica  $L$  del moto del fluido ( $l \ll L$ ).

La scala di lunghezza  $l$ , indicata come **cammino libero medio** ed il rapporto  $l/L$  prende il nome di **numero di Knudsen**, e l'**ipotesi del continuo applicabile quando questo numero è minore di 0.01**.

In condizioni di equilibrio termodinamico locale tutte le grandezze macroscopiche, compreso i flussi, dipendono unicamente dai valori puntuali delle grandezze meccaniche conservate  $\rho$ ,  $\mathbf{Q}$  e  $E$ . I flussi si possono scrivere:

$$\mathbf{J}_\rho(\rho, \mathbf{Q}, E), \quad \mathbb{J}_Q(\rho, \mathbf{Q}, E), \quad \mathbf{J}_E(\rho, \mathbf{Q}, E) \quad (21)$$

La forma funzionale può essere arbitraria, ma deve rispettare la necessaria **invarianza** della descrizione matematica di un qualunque sistema fisico rispetto alla scelta del **sistema di riferimento**.

## Il flusso di massa

Come diretta conseguenza della sua definizione microscopica (che qui non abbiamo dato, ma che si riduce a  $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i$ ), il flusso di massa che compare nella (18) è uguale alla densità di quantità di moto  $\mathbf{Q}$ :

$$\mathbf{J}_\rho = \mathbf{Q} \quad (22)$$

È spesso comodo, per la quantità di moto come per le altre proprietà termodinamiche, fare riferimento a grandezze specifiche per **unità di massa**. La quantità di moto per unità di massa ha le dimensioni di una **velocità**, ed è quella che si definisce **velocità di massa**  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{Q}}{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (23)$$

Questa definizione consente di scrivere il flusso di massa in funzione della velocità di massa, come  $\mathbf{J}_\rho = \rho \mathbf{V}$ . L'equazione di bilancio della massa in forma differenziale diviene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (24)$$

## Invarianza rispetto a trasformazioni galileane I

Si può verificare che l'equazione mantiene la stessa forma al variare il sistema di riferimento. Introduciamo un nuovo sistema di assi  $\mathbf{x}'$ , definito da una terna di riferimento inerziale in moto alla velocità costante  $\mathbf{V}_0$  rispetto alla terna fissa  $\mathbf{x}$ .

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{V}_0 t' \\ t = t' \end{cases} \quad (25)$$

La legge di trasformazione delle derivate è:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} = \frac{\partial t}{\partial \mathbf{x}'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \quad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t'} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla \quad (27)$$

utilizzando  $\nabla = \nabla'$ . La derivata temporale si scrive ora:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} = \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla' \rho' \quad (28)$$

La densità è uno scalare che non cambia con il sistema di riferimento,  $\rho' = \rho$ . L'espressione per  $\partial \rho' / \partial t = \partial \rho / \partial t$  può essere sostituita nell'equazione di conservazione della massa (24):

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} - \mathbf{V}_0 \cdot \nabla' \rho' = -\nabla \cdot \mathbf{Q} \quad (29)$$

## Invarianza rispetto a trasformazioni galileane II

Le velocità delle molecole nei due sistemi di riferimento sono legate dalla relazione

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{V}_0 \quad (30)$$

La legge con cui la densità di quantità di moto  $\mathbf{Q}$  varia si ricava a partire dalla sua definizione microscopica:

$$\frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{i=1}^N m'_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{V}_0) = \mathbf{Q}' + \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{i=1}^N m'_i \mathbf{V}_0 = \mathbf{Q}' + \rho' \mathbf{V}_0 \quad (31)$$

Sostituendo si ottiene:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} = -\nabla' \cdot (\mathbf{Q}' + \rho' \mathbf{V}_0) + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla' \rho' \quad (32)$$

e grazie al fatto che  $\mathbf{V}_0$  è costante:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} = -\nabla' \cdot \mathbf{Q}' - \mathbf{V}_0 \cdot \nabla' \rho' + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla' \rho' \quad (33)$$

da cui, semplificando i due addendi opposti, si ricava infine che:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} = -\nabla' \cdot \mathbf{Q}' \quad (34)$$

Il bilancio è **invariante** rispetto ad una trasformazione inerziale del **sistema di riferimento**.

## Il flusso di quantità di moto I

Possiamo anche trovare la forma di  $\mathbb{J}_Q$  che è invariante rispetto al sistema di riferimento. Iniziamo con il bilancio (19)

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbb{J}_Q = \mathbf{F} \quad (35)$$

Ora bisogna scrivere il bilancio nel sistema  $\mathbf{x}'$ , usare le trasformazioni ed il bilancio di massa. Si arriva a una forma analoga a quella di partenza:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}'}{\partial t'} + \nabla' \cdot (\mathbb{J}_Q - \mathbf{V}_0 \mathbf{Q}' - \mathbf{Q}' \mathbf{V}_0 - \rho' \mathbf{V}_0 \mathbf{V}_0) = \mathbf{F} \quad (36)$$

La necessità dell'invarianza rispetto al riferimento inerziale prescelto richiede quindi che sia:

$$\mathbb{J}'_Q = \mathbb{J}_Q - \mathbf{V}_0 \mathbf{Q}' - \mathbf{Q}' \mathbf{V}_0 - \rho \mathbf{V}_0 \mathbf{V}_0 \quad (37)$$

Questa relazione a cui la dipendenza funzionale  $\mathbb{J}_Q = \mathbb{J}_Q(\rho, \mathbf{Q}, E)$  deve soddisfare al variare del sistema di riferimento. Deve valere per qualsiasi velocità  $\mathbf{V}_0$  costante. Si può allora porre in quel particolare sistema di riferimento in cui in un dato punto dello spazio  $\mathbf{Q}' = 0$ , ovvero nel sistema determinato scegliendo, per il punto in esame,  $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}$ . Alla fine si ottiene:

$$\mathbb{J}'_Q = \mathbb{J}_Q - \rho \mathbf{V} \mathbf{V} \quad (38)$$

Questo è corretto nell'ipotesi di equilibrio locale, che comporta che  $\mathbb{J}_Q$  sia una funzione puntuale delle proprietà del fluido anzichè dipendere dall'intera distribuzione spaziale come più in generale si dovrebbe assumere.

## La pressione

La funzione tensoriale  $\mathbb{J}'_Q(\rho', E')$  inoltre deve restare uguale a se stessa anche dopo una **arbitraria rotazione** del sistema di riferimento, in quanto i fluidi, a differenza dei solidi, **non ammettono alcuna direzione privilegiata**.

Esiste un unico tensore doppio (a meno della moltiplicazione per **un coefficiente scalare**) le cui componenti sono invarianti per rotazione del sistema di riferimento. Indichiamo con la  $p$  la funzione a la definiamo **pressione**:

$$\mathbb{J}'_Q = p(\rho', E')\mathbf{I} \quad (39)$$

Nel caso particolare di fluido in quiete (all'equilibrio termodinamico), la funzione  $p$  così definita coincide con la pressione termodinamica e come tale può essere misurata.

Tenendo conto esplicitamente dell'espressione trovata per il flusso, l'equazione di bilancio per la quantità di moto in forma differenziale diviene:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}\mathbf{V} + p\mathbf{I}) = \mathbf{F} \quad (40)$$