



**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI GENOVA**

Scuola Politecnica

Dipartimento di Informatica, Bioingegneria, Robotica e Ingegneria dei  
Sistemi

**Tesi triennale in Ingegneria Biomedica**

**STUDIO DELL'ASSETTO DI EQUILIBRIO DI UN FLUIDO  
TAMPONANTE NELLA CAMERA VITREA**

*-Relatore:*

Prof. Jan Pralits

*-Correlatore:*

Prof. Rodolfo Repetto

*-Il candidato:*

Giovanni Velotta

19 Settembre 2014

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Anatomia dell'occhio umano . . . . .	1
1.2	Il distacco della retina . . . . .	4
1.3	Miopia come fattore scatenante . . . . .	6
1.4	Trattamenti clinici del distacco della retina . . . . .	7
1.5	Sostituti dell'umor vitreo . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Metodi</b>	<b>12</b>
2.1	Modello matematico: l'idrostatica . . . . .	12
2.1.1	Curvatura . . . . .	14
2.1.2	L'equazione di Laplace-Young . . . . .	15
2.1.3	Interfacce simmetriche rispetto agli assi . . . . .	16
2.1.4	Caso sferico . . . . .	17
2.1.5	L'algoritmo di bisezione . . . . .	19
2.2	Approccio numerico . . . . .	21
2.2.1	Presentazione di <i>OpenFOAM</i> <sup>©</sup> . . . . .	23
2.2.2	Struttura dei solvers e delle utilities in <i>OpenFOAM</i> <sup>©</sup> . . . . .	25
2.2.3	Struttura di un caso in <i>OpenFOAM</i> <sup>©</sup> . . . . .	26
2.2.4	Comandi principali e definizione della geometria e della mesh di lavoro	27
<b>3</b>	<b>Risultati</b>	<b>29</b>
3.1	Parametri e mesh . . . . .	29
3.2	Confronto della soluzione analitica e numerica . . . . .	32
3.3	Sviluppi futuri . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Conclusione</b>	<b>37</b>

# Elenco delle figure

1.1	L'anatomia dell'occhio umano . . . . .	1
1.2	Processo visivo sano . . . . .	2
1.3	Strati cellulari nella retina . . . . .	3
1.4	Processo di distacco del vitreo e della retina . . . . .	4
1.5	Occhio miope . . . . .	6
1.6	Fotocoagulazione laser . . . . .	7
2.1	a) definizione della normale uscente dal volume di controllo $V$ e superficie $\delta V$ ; b) volume infinitesimo di una particella nel sistema di riferimento $(x, y, z)$ . . . . .	12
2.2	Esempio di dominio sferico . . . . .	15
2.3	Caso di un menisco simmetrico rispetto agli assi . . . . .	16
2.4	Geometria del caso sferico . . . . .	18
2.5	Algoritmo di bisezione . . . . .	20
2.6	Processo di convergenza dell'algoritmo di bisezione . . . . .	20
2.7	Architettura <i>OpenFOAM</i> <sup>©</sup> . . . . .	25
2.8	Struttura delle directories di un solver . . . . .	25
2.9	Struttura delle directories di una utility . . . . .	26
2.10	Struttura di una case directory . . . . .	27
3.1	L'interfaccia prima dell'elaborazione . . . . .	30
3.2	Interfaccia computata per un valore dell'angolo di contatto di 15 gradi e griglia (300X600) . . . . .	31
3.3	Interfaccia computata per un valore dell'angolo di contatto di 45 gradi e griglia (100X200) con la rappresentazione della griglia stessa . . . . .	31
3.4	Confronto nel caso dell'angolo di contatto di 15 gradi . . . . .	32
3.5	Confronto nel caso dell'angolo di contatto di 45 gradi . . . . .	34
3.6	Dettagli sul punto di contatto . . . . .	35
4.1	Grafico dell'errore relativo per un angolo di 15 gradi . . . . .	38
4.2	Grafico dell'errore relativo per un angolo di 45 gradi . . . . .	38

# Elenco delle tabelle

1.1	Proprietà fisiche di mezzi tamponanti in commercio . . . . .	10
-----	--	----

*"La vittoria della ragione non può essere che la vittoria di coloro che ragionano."*

**[Bertolt Brecht - Vita di Galileo]**

## Sommario

L'occhio umano è uno dei cinque organi di senso e ci permette di ottenere informazioni sul mondo circostante, ovvero gli stimoli provenienti da esso, attraverso il processo chiamato *visione*. Questo è il meccanismo attraverso il quale la luce riflessa degli oggetti presenti nell'ambiente viene trasformata in immagine mentale.

La retina gioca un ruolo fondamentale nel permettere all'occhio di svolgere la sua funzione in maniera fisiologica: a seguito di lesioni o di movimenti saccadici l'umor vitreo, contenuto in una camera di forma quasi sferica, può penetrare tra il tessuto sottostante la retina, la coroide, e la retina stessa, inducendone il distacco e di conseguenza il venir meno della sua funzione, provocando un offuscamento della vista e in alcuni casi gravi persino la cecità.

Esistono interventi chirurgici che prevedono la totale sostituzione dell'umor vitreo con una sostanza, detta *tampone*, che permette di mantenere la retina attaccata al suo sito.

In questo elaborato di tesi si vuole focalizzare l'attenzione sullo studio di un modello teorico per predire il comportamento all'interfaccia acqua-tampone retinico per poter determinare il legame tra l'effettiva copertura della retina da parte del tampone iniettato e la forma che assume il tampone stesso all'interno della camera vitrea in relazione al suo volume d'iniezione. Vengono a tal proposito svolte alcune simulazioni su un dominio bidimensionale aperto (detto *box*) per testare il software scritto appositamente per svolgere il calcolo dell'interfaccia. L'intenzione futura è quella di estendere le simulazioni, cambiando la geometria del caso di studio, a domini che maggiormente rispecchiano il caso reale di un occhio umano, come ad esempio un dominio bidimensionale circolare, un dominio tridimensionale sferico e infine un dominio tridimensionale ellissoidale: Atchison e al. hanno infatti dimostrato in un loro studio che in generale gli occhi presentano una geometria sferica schiacciata ai poli.

L'esito delle simulazioni decreta l'affidabilità del software di calcolo numerico che presenta un minimo errore delle soluzioni rispetto alla nota soluzione analitica disponibile per il caso del menisco simmetrico rispetto agli assi.

## Abstract

Eyes are the organs responsible for providing information about the surrounding world through a physiological process called *vision*. This is the process thanks to which the light reflected by the objects in the environment is converted into a mental image.

The retina plays a lead role in supporting the proper fulfillment of this process: if the retinal layer is wounded, the vitreous humour contained in a nearly spherical chamber can penetrate between the choroid and the retina itself, inducing her detachment and the partial or total loss of the sense of sight.

The vitreous humour can be replaced surgically with an artificial fluid named *tamponade* which allows the retina to be restored in her original position, i.e. after the detachment.

In this work I focused on the study of a theoretical model to predict the interface between vitreous humour and a tamponade in an equilibrium state. This is to determine the real portion of retina covered by the tamponade, which is related to the volume of tamponade injected.

Several experiments have been done for this purpose, using a dedicated code, considering a flat box, which is the simplest case of study. The aim is to extend the simulations to other domains such as circular or spherical ones, which are comparable to the realistic geometry of an eye. Atchison et al. showed that both emmetropic and myopic eyes are oblate in shape, for this reason it could be appropriate to try the simulations considering an ellipsoidal geometry.

The results of the simulations show that the code used for the numerical approach is reliable compared to the known analytical solution as it is affected by a small error.

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Anatomia dell'occhio umano

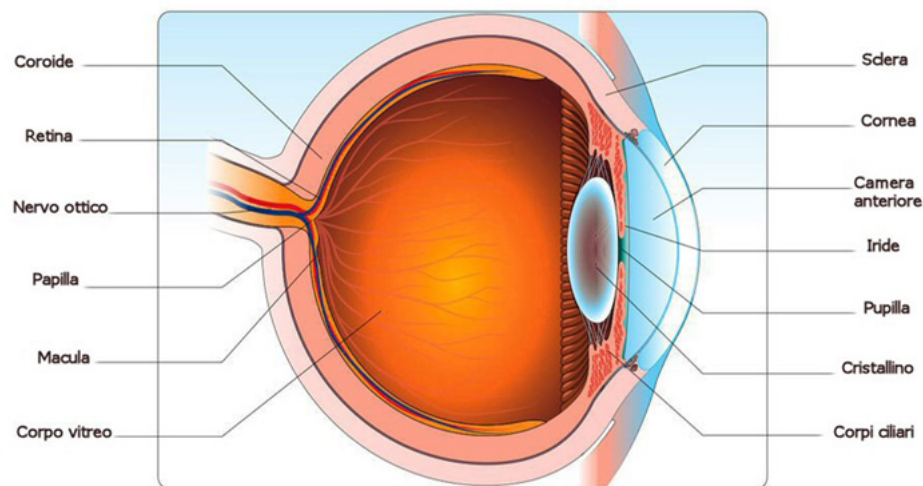


Figura 1.1: L'anatomia dell'occhio umano

L'occhio umano è l'organo sensoriale che ci permette di osservare il mondo che ci circonda, permettendoci di compiere le più diverse attività nel corso della nostra vita. Gli occhi ci permettono di captare le forme, i colori e le dimensioni degli oggetti catturando la luce che questi riflettono o emettono. In assenza di luce infatti il senso della vista diminuisce o viene meno. L'occhio umano, così come una macchina fotografica, è costituito da un insieme di lenti che hanno il compito di mettere a fuoco e proiettare le immagini sulla retina. Sfruttando l'analogia con la fotocamera, la retina rappresenta allora la pellicola che cattura l'immagine proveniente dal mondo circostante e la converte in impulsi elettrici



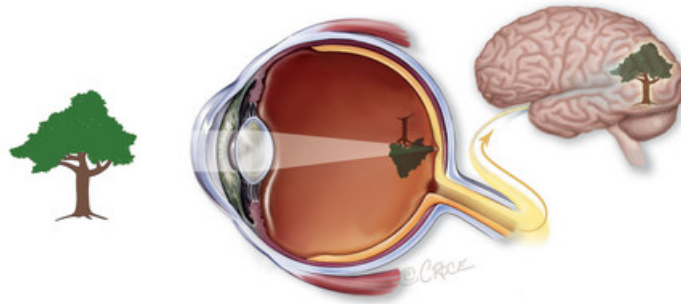


Figura 1.2: Processo visivo sano

grazie alle sue cellule fotosensibili, i coni e i bastoncelli, e la invia attraverso le vie nervose ai centri encefalici deputati alla sua elaborazione.

L'occhio, altrimenti chiamato bulbo oculare per la sua forma approssimativamente sferica, essendo formato da due porzioni di sfera giustapposti aventi diverso raggio di curvatura, è composto nella sua parte esterna da uno spesso tessuto connettivo di colore bianco chiamato sclera. Questa circonda l'occhio in ogni sua parte eccetto quella frontale e gli conferisce forma e rigidità. Alla sclera si attaccano i sei muscoli che consentono di muovere l'occhio nelle diverse direzioni.

Nella parte frontale dell'occhio è presente la congiuntiva, un sottile e trasparente strato di tessuto elastico. La porzione di congiuntiva che include la sclera e l'interno delle palpebre costituisce quello che viene conosciuto come il "bianco dell'occhio". Lo scopo dello strato congiuntivale è quello di proteggere l'occhio da batteri e da corpi estranei.

Nella parte anteriore dell'occhio, sempre coperta dalla congiuntiva, la sclera lascia lo spazio ad uno strato trasparente di fibre di collagene detto cornea. La cornea è la più potente lente dell'occhio e per garantirne la totale trasparenza essa è priva di vasi sanguigni. Il suo scopo è quello di mettere a fuoco la luce, grazie alle sue proprietà di rifrazione, nel momento in cui essa penetra nell'occhio.

Subito dietro alla cornea si trova l'iride, ovvero la parte che dona ad ogni occhio il suo caratteristico colore. L'iride è caratterizzata da un diaframma, detto pupilla, che analogamente a quello di una macchina fotografica può stringersi o allargarsi regolando la quantità di luce che entra nell'occhio.

Lo spazio compreso tra il settore sferico corneale e la pupilla, indicato come camera anteriore, è riempito di un liquido trasparente simile all'acqua chiamato umor acqueo che

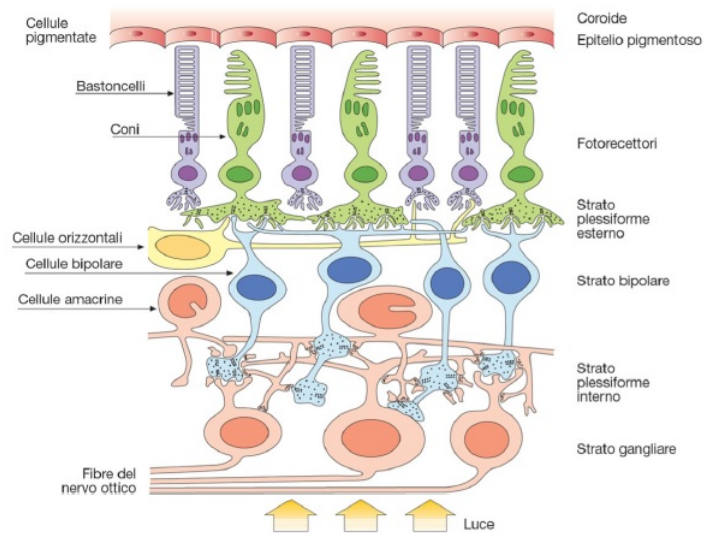


Figura 1.3: Strati cellulari nella retina

ha il compito di nutrire la cornea e il cristallino, entrambi strutture non vascolarizzate.

Nel dettaglio, il cristallino è una lente biconvessa, formata soprattutto da collagene ed epitelio, che controlla la messa a fuoco della luce sulla retina attraverso il meccanismo di accomodazione, ovvero la capacità di modificare continuamente la propria forma per migliorare il processo visivo. Lo stretto spazio compreso tra l'iride e il cristallino è chiamato camera posteriore, che insieme alla camera anteriore costituisce la cavità anteriore.

Posteriormente al cristallino si apre la cavità posteriore, o vitrea, uno spazio riempito da un fluido simile a gel detto umor vitreo che contribuisce a mantenere la forma dell'occhio e facilita il passaggio della luce. La cavità posteriore è avvolta in due strati di tessuto: la corioide e la retina. La corioide è uno strato sottile di tessuto vascolarizzato che separa la retina dalla sclera. Esso è molto pigmentato e per questo assorbe la luce che non viene captata dai fotorecettori ed evita così fenomeni di riflessione. La retina, che costituisce la superficie interna del corpo vitreo, agisce come una pellicola registrando in che modo i fotoni interagiscono con essa e ricreando l'immagine esterna che viene trasmessa ai nuclei talamici attraverso il nervo ottico e successivamente alla corteccia visiva per l'elaborazione (vedasi Figura 1.2, pagina 8) .

Nel processo visivo dunque è la retina a giocare un ruolo fondamentale nel permettere all'occhio di svolgere la sua funzione in maniera fisiologica. La retina è costituita da diversi strati di cellule: i fotorecettori costituiscono l'ultimo strato che viene raggiunto dalla luce (Figura 1.3). La luce che passa attraverso il cristallino viene diretta in una particolare

zona della retina detta macula lutea in cui le cellule degli strati più esterni lasciano una depressione affinché la luce possa colpire direttamente i fotorecettori. L'informazione viene trasmessa dagli strati cellulari intermedi alle cellule gangliari gli assoni delle quali formano il nervo ottico, il fascio nervoso deputato al trasporto degli impulsi elettrici alla corteccia cerebrale.

## 1.2 Il distacco della retina

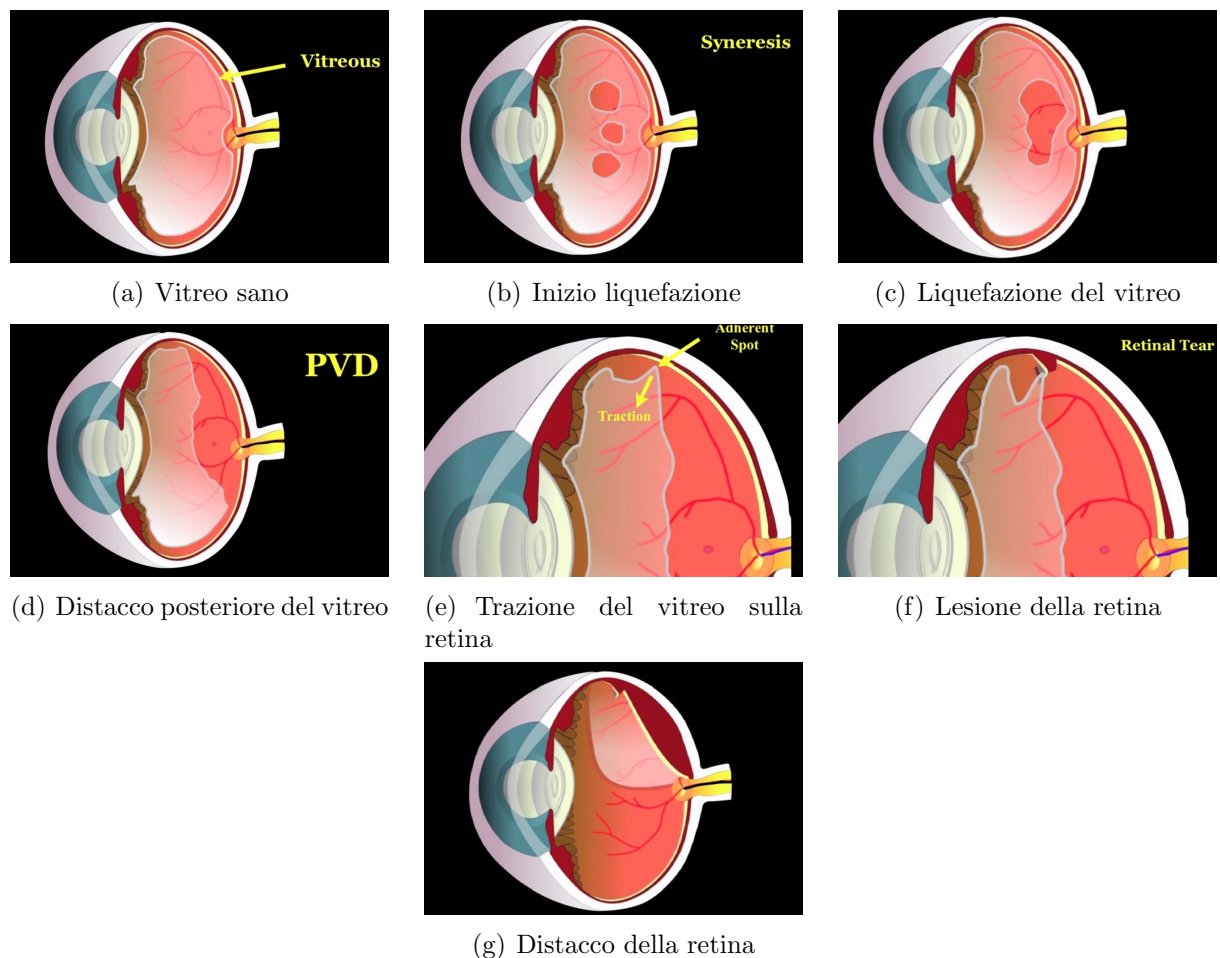


Figura 1.4: Processo di distacco del vitreo e della retina

Le importanti e complesse funzioni di questo sistema dipendono prepotentemente da fattori biomeccanici. Nella cavità vitrea infatti l'umor vitreo è attaccato alla retina (a) e con l'invecchiamento questo fluido simile a gel può progressivamente liquefarsi (b), in quanto le molecole di acido ialuronico rilasciano le loro molecole d'acqua, e di conseguenza ritirarsi diminuendo di volume (c) e staccandosi dalla retina (processo conosciuto come distacco posteriore dell'umor vitreo, PVD (d)). E' risaputo che in un età compresa tra i 14

e i 18 anni l'umor vitreo è liquido solo per il 20%, salendo anche sopra il 50% nei soggetti tra gli 80 e i 90 anni [3]. Quando l'umor vitreo si stacca, tira a se lo strato cellulare della retina (e) e il soggetto che ne è affetto nota delle luci intermittenti o dei punti luminosi nel suo campo visivo. Solitamente la riduzione dell'umor vitreo non comporta alcun problema, ma nel 25%-30% dei soggetti in cui ciò accade [11] l'umor vitreo tira così forte da provocare delle ferite nella retina in uno o più punti, con il rischio di perdita della vista (f).

In seguito, l'umor vitreo liquefatto penetra attraverso la ferita e si posiziona tra la retina e lo strato epiteliale della coroide a cui essa è fisiologicamente attaccata. Questo processo porta ad un sollevamento della parete retinica che si stacca dalla coroide (g).

La retina non può funzionare correttamente se si separa dall'epitelio vascolarizzato della coroide poichè viene meno il trasporto di ossigeno e nutrienti da quest'ultima verso le cellule della retina, causandone la morte e la conseguente perdita della vista se non trattata prontamente con interventi chirurgici.

Queste lacerazioni della retina possono essere attribuite anche ai rapidi movimenti angolari che compiono gli occhi, conosciuti come saccadi [9]: i movimenti più veloci e quindi potenzialmente più dannosi avvengono quando l'umor vitreo è in percentuale più liquido [11]. Inoltre anche alcune malattie degli occhi, traumi alla testa, diabete o persino la miopia possono contribuire a ricreare la combinazione di eventi che porta al distacco della retina.

Il distacco posteriore dell'umor vitreo (PVD) può manifestarsi anche in assenza di distacco retinico e i sintomi più eloquenti sono la sensazione di vedere flash di luce e la presenza di corpi mobili vitreali, detti *floaters*, costituiti da ammassi di fibre di collagene. Essi vengono percepiti dal soggetto come punti, granelli o linee di luce che fluttuano nel campo visivo e sono maggiormente percepibili quando si osserva uno sfondo luminoso ed omogeneo o quando si hanno gli occhi chiusi. In presenza di uno o più di questi sintomi, nonostante non ci sia la certezza della presenza di un distacco retinico, è meglio consultare un esperto.

Alcune volte invece il distacco retinico non è preceduto da alcun sintomo: il primo segnale potrebbe essere direttamente la presenza di un'ombra che attraversa il campo

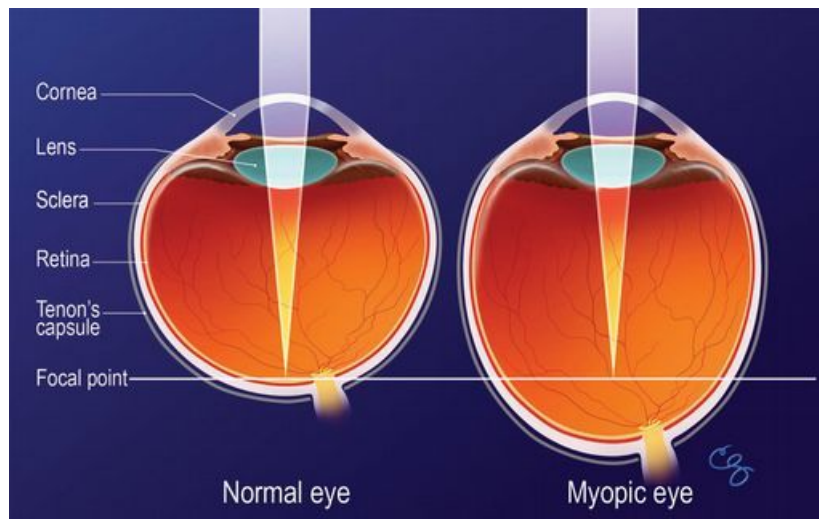


Figura 1.5: Occhio miope

visivo o l'improvvisa perdita della vista nelle aree periferiche dell'occhio.

Per la diagnosi del distacco retinico l'esperto farà uso dell'oftalmoscopio, uno strumento clinico in grado di esaminare la parete caudale dell'occhio in modo non invasivo per permettere di rintracciare i floaters o direttamente le lesioni a livello della retina.

### 1.3 Miopia come fattore scatenante

Tra le cause che possono determinare l'insorgenza di un distacco retinico la miopia riveste un ruolo fondamentale. La miopia è un difetto della vista a causa della quale la visione da lontano diminuisce mentre quella da vicino rimane invariata. La gravità della miopia è misurata in diottrie (il reciproco della lunghezza focale), dove diottrie negative corrispondono alla miopia mentre quelle positive all'ipermetropia: più un occhio è miope e maggiori sono le diottrie di miopia.

Le cause dell'insorgenza di una condizione miope sono principalmente geometriche:

- bulbo oculare più lungo del normale;
- curvatura della cornea e del cristallino maggiore della norma;
- aumento del potere refrattivo del cristallino.

Come si può vedere nella Figura 1.5 la visione da lontano è alterata in quanto questi difetti fanno sì che le immagini non siano messe a fuoco sulla macula lutea, ossia sulla retina, bensì davanti ad essa.

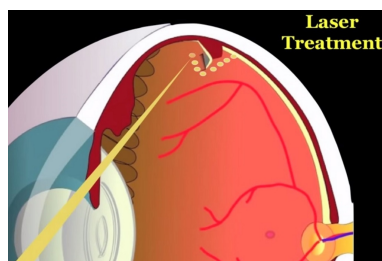


Figura 1.6: Fotocoagulazione laser

E' stato studiato che i soggetti miopi, rispetto a quelli emmetropi, sono più a rischio per quanto riguarda lo sviluppo della condizione patologica che implica il distacco della retina: il rischio si quadruplica per diottrie comprese tra -1 e -3, mentre è fino a dieci volte più elevato per diottrie maggiori di -3 [5].

## 1.4 Trattamenti clinici del distacco della retina

L'unica via per riattaccare la retina e per prevenire o curare la perdita della vista è la chirurgia. Infatti, da quando il distacco della retina è stato dichiarato incurabile nei primi anni del ventesimo secolo [12], la chirurgia ha fatto passi da gigante nel trattamento di questa patologia. Le tecniche chirurgiche più comuni sono:

- *Retinopessia pneumatica.* Questa tecnica chirurgica prevede l'iniezione di un gas espandibile nel centro della cavità posteriore dell'occhio in modo da creare una bolla che, espandendosi, sia in grado di drenare il liquido che si era infiltrato nella zona subretinica spingendo il lembo della ferita contro la parete dell'occhio, promuovendo la rimarginazione del tessuto. Il chirurgo spesso affianca a questa procedura trattamenti laser o di crioterapia come supporto alla cicatrizzazione della ferita.
- *Cerchiaggio sclerale.* Il cerchiaggio sclerale, come suggerisce il nome stesso, è una tecnica che consiste nel suturare una banda di silicone flessibile intorno alla parete esterna del bulbo oculare. In questo modo la parete dell'occhio viene spinta verso l'interno e la trazione che si crea a livello della retina previene il peggioramento delle sue ferite e favorisce il riaccollamento della retina alla parete interna.
- *Fotocoagulazione laser.* Un fascio di luce viaggia attraverso l'occhio e cicatrizza il

tessuto intorno alla ferita sulla retina (vedi Figura 1.6 ): le cicatrici impediscono ad ulteriore vitreo liquefatto di infiltrarsi dietro alla retina.

- *Crioterapia.* La crioterapia prevede che un esperto utilizzi una sonda per congelare e chiudere la ferita sulla retina.
- *Vitrectomia.* La vitrectomia prevede la rimozione totale o parziale del vitreo dall'occhio attraverso l'inserzione di strumenti micro-chirurgici di altissima precisione nella cavità posteriore. Il vitreo viene tagliato e rimosso poichè causa della forza di trazione che strappa o distacca la retina. Dopo la rimozione del vitreo esso è spesso sostituito con un mezzo agente da tampone che spinge la retina di nuovo contro la parete interna dell'occhio. Come segnalato da Sebag e al., questa operazione chirurgica non garantisce mai la rimozione completa del vitreo [10], con la conseguente presenza di uno strato residuo di vitreo liquefatto ai margini della cavità posteriore. Quando questa cavità viene riempita con il mezzo tamponante, si viene a creare un'interfaccia vitreo-tampone, oggetto di studio di questo elaborato.

La vitrectomia, a differenza di altre tecniche, non modifica la geometria del bulbo oculare; ci sono tuttavia numerosi rischi collegati all'esecuzione di questa procedura:

- Aumento della pressione intraoculare;
- Infezione;
- Insorgenza di edema corneale nel periodo post-operatorio, seguito da visione offuscata;
- Sanguinamento all'interno dell'occhio;
- Insorgenza di cataratta in soggetti sopra i 50 anni di età.

Non vi è un criterio univoco per la scelta di quale tecnica applicare nei casi specifici ma bisogna tener conto di diversi elementi quali la zona affetta e la forma del distacco. Spesso viene scelto di applicare una combinazione delle tecniche descritte [12], anche in base a quali fattori possono rendere l'operazione di più difficile esecuzione (e.g. glaucoma, infezione dell'occhio, sanguinamento).

## 1.5 Sostituti dell'umor vitreo

Procedure chirurgiche a livello del bulbo oculare come la vitrectomia includono la sostituzione dell'umor vitreo con mezzi fluidi detti tamponanti. L'uso di mezzi tamponanti si basa sul concetto che le bolle di gas/fluido all'interno della cavità posteriore bloccano il flusso di vitreo liquefatto attraverso la ferita sulla retina. Questi tamponi devono generalmente soddisfare alcune caratteristiche che li rendono adatti o meno ad essere introdotti nella cavità posteriore dell'occhio. Si possono classificare in base alla loro composizione chimica, alla loro funzione nel trattamento delle patologie e al tempo di permanenza nell'ambiente intraoculare. Si definiscono infatti tamponi a breve termine i mezzi fluidi che risiedono nella camera vitrea per un periodo di tempo limitato e sufficiente per permettere alla retina di riposizionarsi, mentre si definiscono tamponi a lungo termine quelli che al contrario rimangono nella camera vitrea per un tempo più lungo.

- Classificazione secondo la composizione chimica:
  - Sostituzione con vitreo naturale
  - Sostituzione con vitrei artificiali
    - \* Gas
      - Aria
      - Perfluorocarburi
    - \* Liquidi
      - Soluzioni acquose
      - Oli di silicone
      - Perfluorocarburi liquidi
    - \* Gel
      - Polimeri semisintetici
      - Polimeri sintetici
- Classificazione secondo la funzione:
  - Brevi procedure interne: gas e perfluorocarburi liquidi;



Tabella 1.1: Proprietà fisiche di mezzi tamponanti in commercio

	Density, $\rho$	Surface Tension, $\sigma$ (dyne/cm)	Viscosity, $\mu$ (Poise)	Contact Angle, $\theta$ (Degrees)	Bond Numer $B_0$
<i>Gas/water</i>	0	70	0	$30.74 \pm 4.24$	14.27
<i>Oxane1300/water</i>	0.98	44	1300	$16.17 \pm 1.23$	0.6
<i>OxaneHD/water</i>	1.02	40	3300	$20 \pm 1.88$	0.5

- Tamponamenti a lungo termine: oli di silicone;
- Sostituzioni permanenti: non ancora disponibili;
- Aiuto nel rilascio di farmaci intravitreali: hydrogels polimerici [13].

I requisiti che un mezzo tamponante deve soddisfare sono molteplici. Deve essere trasparente, incolore e con densità e indice rifrattivo paragonabili a quelli del vitreo naturale; deve essere inoltre sterilizzabile, chimicamente e biologicamente inerte, non tossico, compatibile con i tessuti e con il vitreo residuo e non biodegradabile per garantirne la presenza per il tempo desiderato. Deve avere proprietà viscoelastiche tali da assicurare la corretta adesione della retina alla coroide, proprietà fisiche come un'elevata tensione superficiale per garantire il corretto effetto tamponante e proprietà di trasporto necessarie a convogliare metaboliti e proteine all'interno della camera vitrea. Inoltre deve essere preferibilmente iniettabile attraverso piccoli strumenti chirurgici.

Nessuno dei mezzi fin qui descritti possiede tutte le caratteristiche del tampone ideale, tuttavia gli hydrogels polimerici sono possibili futuri candidati in quanto sono in fase di sperimentazione animale [6]. I mezzi che al momento sono più adatti sono gli oli di silicone in quanto essi possiedono un'elevata tensione superficiale (rispetto al fluido residuo e alla retina) garantendo la chiusura della ferita e un basso peso specifico che permette loro di galleggiare sul fluido residuo e tornare utili in caso di ferite nella zona superiore della cavità vitrea.

Tuttavia la loro natura idrofobica li porta ad instaurare un debole contatto con la retina, che non gli permette di riempire la cavità in modo appropriato, e la loro permanenza nella cavità posteriore può creare un'emulsione, ovvero la combinazione di due liquidi che sono difficilmente miscibili.

La Tabella 1.1 mostra le proprietà fisiche di un gas e di due oli di silicone (Oxane 1300 e Oxane HD) che sono stati usati per predire il comportamento all'interfaccia di tali tamponi [4]. I dati della Tabella 1.1 sono stati ricavati da misure su un analogo

fisico dell'occhio umano. L'angolo di contatto è un parametro importante in quanto indica l'effettiva superficie di contatto che il mezzo tamponante ha con la retina: gli oli di silicone, per le loro proprietà fisiche, forniscono una superficie di contatto più piccola rispetto a quella dei gas, ma rimangono in contatto con la retina finchè non vengono rimossi [4].

# Capitolo 2

## Metodi

### 2.1 Modello matematico: l'idrostatica

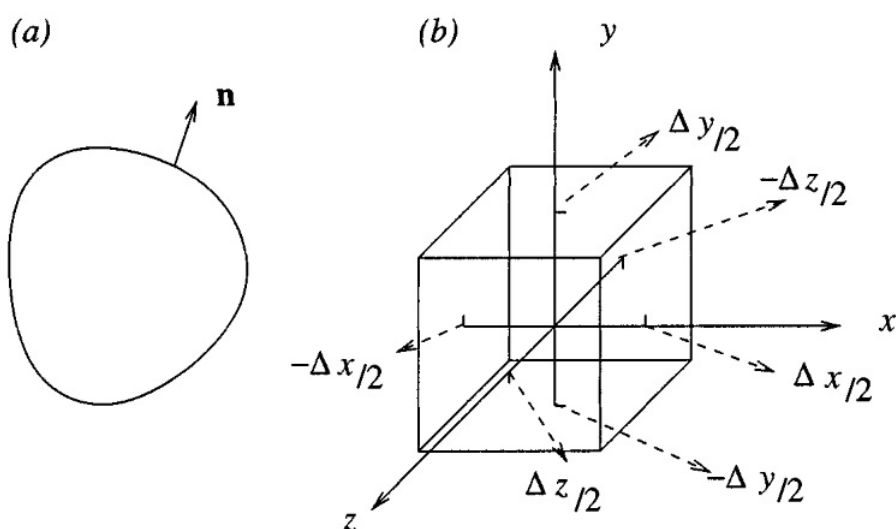


Figura 2.1: a) definizione della normale uscente dal volume di controllo  $V$  e superficie  $\delta V$ ; b) volume infinitesimo di una particella nel sistema di riferimento  $(x, y, z)$

Quando un fluido si trova allo stato di quiete le velocità macroscopiche sono nulle e le uniche forze che si sviluppano sono descritte in termini del campo di pressione che si instaura in risposta a una forza di volume. Nell'idrostatica si studiano le forze esercitate da un liquido sulle pareti di un corpo e le forze che agiscono su corpi immersi in un liquido e tramite esse è possibile computare la forma delle interfacce che si instaurano tra due liquidi immiscibili all'equilibrio. Se consideriamo un campione di fluido in stato di quiete (vedasi figura Figura 2.1), su di esso possono agire due tipi di forze: le forze di volume,

dovute all'azione gravitatoria o ad altri campi di forza a lungo raggio, e le forze di superficie, dovute alla trazione superficiale  $\mathbf{f}$ .

- Forze di volume:

$$\mathbf{F}^{\mathbf{V}} = \int_V \rho \mathbf{g} dV = \gamma V \quad (2.1)$$

se  $\rho$  e  $\mathbf{g}$  sono costanti;

- Forze di superficie:

$$\mathbf{F}^{\mathbf{S}} = \int_{\delta V} \mathbf{f} dS \quad (2.2)$$

Poichè in assenza di movimento la trazione che agisce sulla superficie dipende dalla sola pressione possiamo introdurre il versore  $\mathbf{n}$  (vedasi figura 7.a) normale alla superficie ottenendo  $\mathbf{f} = -p\mathbf{n}$ , dove il segno meno indica che la pressione tende a far collassare il fluido verso l'interno mentre il versore normale ha verso uscente dalla superficie.

La definizione di equilibrio implica che la somma delle forze esercitate sul fluido campione sia nulla:

$$\mathbf{F}^{\mathbf{V}} + \mathbf{F}^{\mathbf{S}} = \int_V \rho \mathbf{g} dV - \int_{\delta V} p \mathbf{n} dS = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

L'equazione 2.3 è un'equazione di equilibrio vettoriale, scomponibile quindi in tre equazioni di equilibrio scalari sapendo che  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$  e  $\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z)$ .

Per un campione di fluido molto piccolo, poichè la variazione di densità sul volume e la variazione di pressione tra ogni lato opposto può essere trascurata (figura 7.b), si dimostra, utilizzando il teorema di Gauss, che la 2.3 può essere scritta anche in forma compatta come segue [8]:

$$\rho \mathbf{g} = \nabla p \quad (2.4)$$

dove  $\nabla p$  è il gradiente pressorio.

In termini fisici la 2.4 esprime l'equilibrio tra la forza di gravità e la forza dovuta alla pressione; da essa si ricava l'andamento della pressione in funzione della coordinata spaziale per un fluido incompressibile (ossia avente densità costante):

$$p = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} + c \quad (2.5)$$

Si dimostra inoltre che, assumendo che la tensione superficiale  $\gamma$  sia uniforme, il salto di pressione tra i due fluidi è:

$$p^{(2)} - p^{(1)} = \gamma 2\kappa_m \quad (2.6)$$

dove  $\kappa_m$  è la curvatura media dell'interfaccia nel caso tridimensionale [8].

### 2.1.1 Curvatura

Consideriamo una superficie tridimensionale descritta dall'equazione  $f(x) = z - h(x, y) = 0$ . Sia  $\mathbf{n}$  il vettore unitario normale alla superficie; la curvatura media  $\kappa$  della superficie si può esprimere come divergenza del vettore unitario  $\mathbf{n}$ :

$$\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n} \quad (2.7)$$

In coordinate cartesiane abbiamo che:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{(-h_x, -h_y, 1)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}} \quad (2.8)$$

dove i pedici indicano le derivate parziali (e.g.  $h_x = \partial h / \partial x$ ).

Sapendo che la divergenza di un vettore  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  è  $\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = u_x + u_y + u_z$  possiamo calcolare la divergenza del versore  $\mathbf{n}$ :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{n} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{-h_x}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{-h_y}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}} \right] \\ &= \frac{-h_{xx}\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1} + h_x \cdot \frac{h_x h_{xx} + h_y h_{xy}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}} - h_{yy}\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1} + h_y \cdot \frac{h_x h_{xy} + h_y h_{yy}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}} \\ &= \frac{-h_{xx}(h_x^2 + h_y^2 + 1) + h_x(h_x h_{xx} + h_y h_{xy}) - h_{yy}(h_x^2 + h_y^2 + 1) + h_y(h_x h_{xy} + h_y h_{yy})}{(h_x^2 + h_y^2 + 1)^{3/2}} \\ &= \frac{-(h_{xx} + h_{yy}) - (h_{xx}h_y^2 + h_{yy}h_x^2) + 2h_x h_y h_{xy}}{(h_x^2 + h_y^2 + 1)^{3/2}} \end{aligned}$$

Nel particolare caso di una superficie bidimensionale espressa dall'equazione  $z = h(x)$

l'equazione precedente si riduce a:

$$\nabla \cdot \mathbf{n} = -\frac{h_{xx}}{(h_x^2 + 1)^{3/2}} = \kappa \quad (2.9)$$

L'equazione 2.9 rappresenta dunque la curvatura media  $\kappa$  per una superficie bidimensionale e si può esprimere come segue:

$$\kappa = \frac{1}{f'} \frac{d}{dx} \frac{1}{(1 + f'^2)^{1/2}} \quad (2.10)$$

### 2.1.2 L'equazione di Laplace-Young

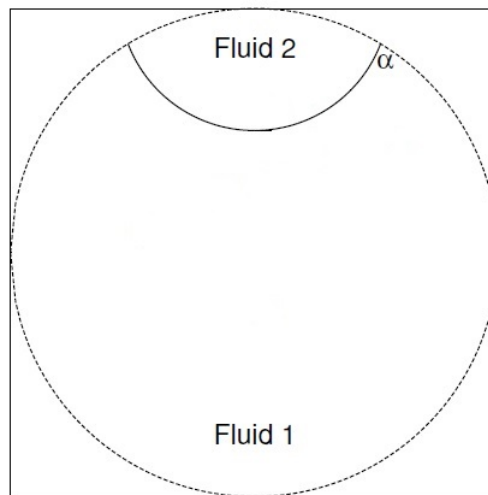


Figura 2.2: Esempio di dominio sferico

Consideriamo un dominio sferico avente raggio  $R$  riempito con due fluidi sovrapposti: acqua (1) e olio di silicone (2), vedasi Figura 2.2. L'obiettivo è quello di determinare la forma che avrà l'interfaccia tra questi due fluidi. La linea di incontro di due fluidi e una superficie solida viene chiamata linea di contatto e l'angolo che si forma tra la parete solida e la tangente al fluido sottostante passante per il punto di contatto è detto *angolo di contatto* ( $\alpha$  in Figura 2.2).

Per fare ciò si utilizza l'equazione di Laplace-Young che lega la curvatura dell'interfaccia con le proprietà fisiche dei due fluidi considerati. Per ottenere questa relazione sostituiamo la distribuzione delle pressioni per i due fluidi

$$p^{(1)} = -\rho_1 g x + c_1, \quad p^{(2)} = -\rho_2 g x + c_2 \quad (2.11)$$

nell'equazione 2.6 ottenendo:

$$-\rho_2 g x + c_2 + \rho_1 g x + c_1 = \gamma 2\kappa \quad (2.12)$$

Riarrangiando si ottiene l'equazione di Laplace-Young che governa la forma dell'interfaccia nel caso idrostatico:

$$2\kappa_m = -\frac{\Delta\rho g}{\gamma} x_I + B = -\frac{x_I}{l^2} + B \quad (2.13)$$

dove  $\Delta\rho$  è la differenza delle densità dei due fluidi  $\rho_2 - \rho_1$ ,  $g$  è l'accelerazione di gravità,  $\gamma$  è la tensione superficiale del sistema olio di silicone-acqua,  $x_I$  rappresenta la funzione che descrive l'interfaccia tra i due fluidi e  $B = \frac{(c_2 - c_1)}{\gamma}$  è la costante uguale al valore della curvatura dell'interfaccia nell'origine. Infine,  $l = \left(\frac{\gamma}{\Delta\rho g}\right)^{1/2}$  è la lunghezza capillare. La forma dell'interfaccia deve soddisfare matematicamente l'equazione 2.13 e la condizione sull'angolo di contatto, che viene determinato sperimentalmente.

### 2.1.3 Interfacce simmetriche rispetto agli assi

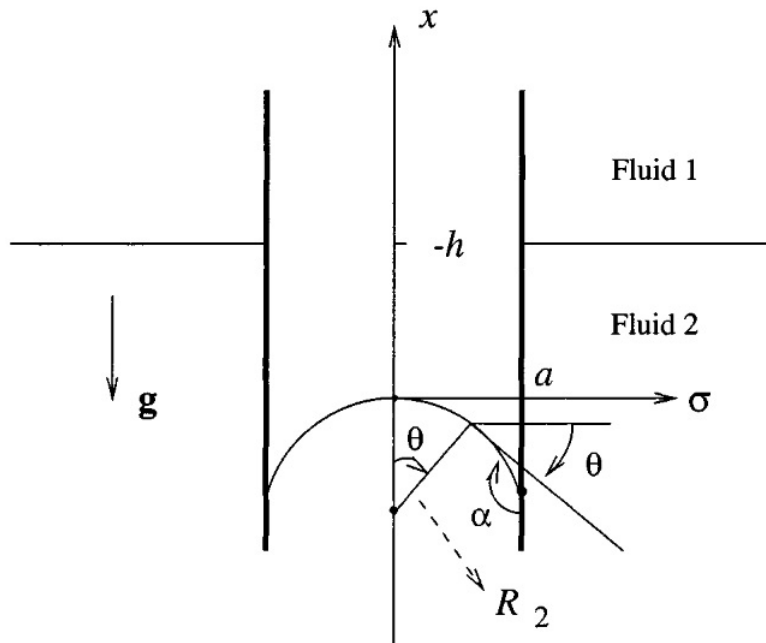


Figura 2.3: Caso di un menisco simmetrico rispetto agli assi

Se si introduce l'angolo di inclinazione dell'interfaccia  $\theta$  si può operare la sostituzione  $\tan \theta = f'$  e l'equazione 2.10 diventa:

$$\kappa = \frac{1}{f'} \frac{d|\cos \theta|}{d\sigma} \quad (2.14)$$

Consideriamo il caso di un menisco in un capillare verticale e simmetrico rispetto agli assi (tridimensionale); come si vedrà più avanti il calcolo dell'interfaccia non dipende dalla geometria delle pareti del contenitore in cui sono presenti i due liquidi e questo permetterà di fare i calcoli per il caso che più si avvicina al modello ideale dell'occhio umano, quello sferico.

Riprendendo la curvatura media  $\kappa_m = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$  dell'equazione 2.13, si può notare che essa è data da due contributi di curvatura:  $\kappa_1$  è la curvatura che assume l'interfaccia nel piano  $\sigma x$  mentre  $\kappa_2$  è il contributo dovuto alla curvatura dell'interfaccia nel piano ortogonale a quello della curvatura  $\kappa_1$  (si veda Figura 2.3). La curvatura  $\kappa_1$ , come è stato dimostrato nella sezione 2.1.1, è:

$$\kappa_1 = -\frac{f''}{(f'^2 + 1)^{3/2}} = \frac{1}{f'} \frac{d}{d\sigma} \frac{1}{(1 + f'^2)^{1/2}} = \frac{1}{\tan \theta} \frac{d|\cos \theta|}{d\sigma} \quad (2.15)$$

Si può dimostrare che la curvatura  $\kappa_2$  è data dalla seguente relazione [8]:

$$\kappa_2 = \frac{1}{R_2} = -\frac{f'}{\sigma(1 + f'^2)^{1/2}} = -\frac{\sin \theta}{\sigma} \quad (2.16)$$

dove  $\theta$  è l'angolo di inclinazione dell'interfaccia ed  $f' = \tan \theta$ .

Combinando la 2.15 e la 2.16 otteniamo:

$$2\kappa_m = \kappa_1 + \kappa_2 = \frac{1}{\tan \theta} \frac{d|\cos \theta|}{d\sigma} - \frac{\sin \theta}{\sigma} = -\cos \theta \frac{d\theta}{d\sigma} - \frac{\sin \theta}{\sigma} \quad (2.17)$$

#### 2.1.4 Caso sferico

Ora che abbiamo una relazione per la curvatura media (equazione 2.17) si può passare alla trattazione del caso sferico. E' conveniente usare una rappresentazione parametrica per modellare la forma dell'interfaccia. La forma parametrica è data in termini dell'angolo di



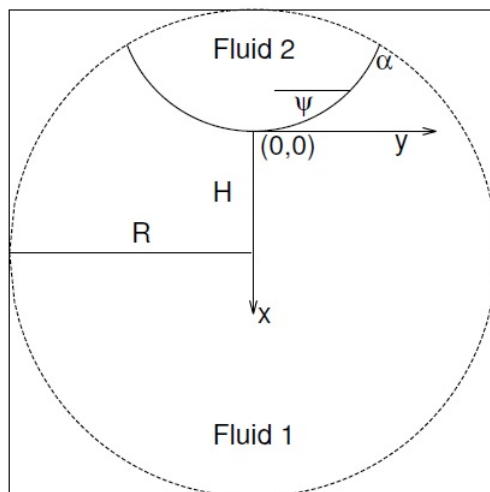


Figura 2.4: Geometria del caso sferico

inclinazione  $\psi$ :

$$x = x(\psi); \quad y = y(\psi) \quad (2.18)$$

dove

$$-\tan \psi = \frac{dx}{dy} \quad (2.19)$$

Nel sistema di riferimento mostrato in Figura 2.4 la 2.17 diventa:

$$2\kappa_m = -\frac{1}{\tan \psi} \frac{d|\cos \psi|}{dy} + \frac{\sin \psi}{y} \quad (2.20)$$

Combinando la 2.20 con la 2.19 e la 2.18 otteniamo:

$$2\kappa_m = \cos \psi \frac{d\psi}{dy} + \frac{\sin \psi}{y} \quad (2.21)$$

Si può combinare quest'ultima equazione con l'equazione di Laplace-Young 2.13 per ottenere:

$$\frac{dy}{d\psi} = -\frac{\cos \psi}{Q} \quad (2.22)$$

$$\text{con } Q = \frac{\sin \psi}{y} - \frac{\Delta \rho g}{\gamma} x_I - B.$$

Per trovare anche la seconda equazione differenziale che determina il problema consi-

deriamo che  $\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dy} = -\tan \psi$ . Da questa condizione otteniamo che:

$$\frac{dx}{d\psi} = \frac{\sin \psi}{Q} \quad (2.23)$$

Le equazioni 2.22 e 2.23 insieme costituiscono il sistema di equazioni differenziali che determinano il problema, che, come si può vedere dalla figura Figura 2.4, ha le seguenti condizioni iniziali:

$$x(0) = 0; \quad y(0) = 0 \quad (2.24)$$

Per evitare la divisione per zero nel primo step di integrazione dovuto alle condizioni iniziali si regolarizzano le equazioni usando l'espansione in serie di Taylor intorno a  $\psi = 0$ :

$$y(\psi) = y(0) + \psi y_\psi(0) + O(\psi^2) \quad (2.25a)$$

$$\sin \psi = \psi + O(\psi^3) \quad (2.25b)$$

$$\cos \psi = 1 + O(\psi^2) \quad (2.25c)$$

Sostituendo le equazioni 2.25 nell'espressione della curvatura 2.21 troviamo i valori delle equazioni differenziali nell'origine:

$$\frac{dx}{d\psi} = 0 \quad (2.26a)$$

$$\frac{dy}{d\psi} = \frac{2}{B} \quad (2.26b)$$

Poichè la costante B non è nota è necessario procedere al calcolo attraverso un metodo iterativo.

### 2.1.5 L'algoritmo di bisezione

Poichè la costante B è inizialmente non nota bisogna procedere al calcolo dell'interfaccia attraverso un metodo iterativo. In questo caso viene utilizzato il metodo di bisezione, il significato del quale è mostrato nella Figura 2.5: si inizia ipotizzando due diversi valori di B e calcolando dopo ogni integrazione il valore dell'angolo di contatto (indicato in questo caso come  $\alpha_{current}$ ). Lo scopo è quello di minimizzare la differenza tra l'angolo di contatto

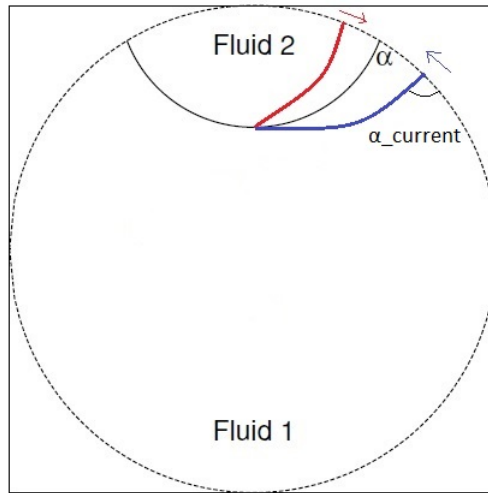


Figura 2.5: Algoritmo di bisezione

attuale  $\alpha$  e quello ottenuto dopo l'integrazione  $\alpha_{current}$ , ossia partiamo dalle due interfacce rossa e blu in Figura 2.5 e ci avviciniamo a quella teorica fino a quando

$$f(B) = |\alpha - \alpha_{current}| = 0 \quad (2.27)$$

Si tratta quindi di un processo di convergenza che si può schematizzare come segue:

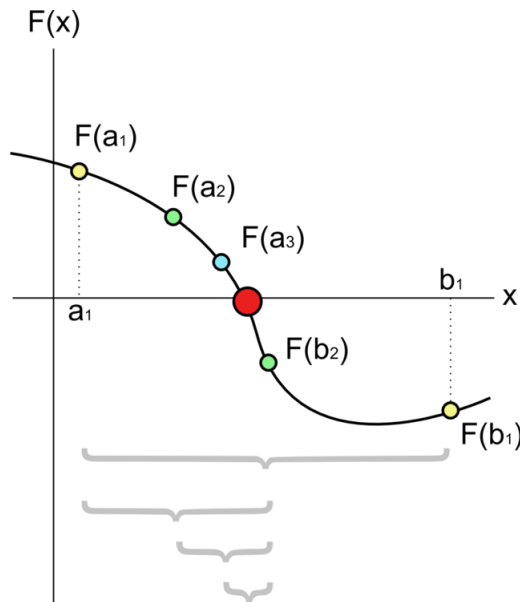


Figura 2.6: Processo di convergenza dell'algoritmo di bisezione

bisogna trovare il valore di  $B$  tale per cui otteniamo la radice della funzione  $f$ . Per prima cosa si fissano due punti  $a_1$  e  $b_1$  tali che  $\text{sign}(F(a_1) \cdot F(b_1)) = -1$ , si determina il punto  $c = (a_1 + b_1)/2$ , si calcola  $f(c)$  e si controlla la convergenza: se  $f(c)$  è uguale a zero o  $(b_1 - a_1)/2 < \text{tol}$  allora la radice è  $B = c$ , dove  $\text{tol}$  è l'errore ammesso per il calcolo della

radice. Se una delle due condizioni precedenti non è verificata si itera il procedimento ricalcolando gli estremi dell'intervallo da considerare come segue:

- if  $sign(f(c)) == sign(f(a_1))$  allora  $a_2 := c$   
altrimenti  $b_2 := c$

e dopo la riassegnazione degli estremi si riparte calcolando un nuovo punto  $c$  come già detto, fino a che le condizioni non sono verificate.

## 2.2 Approccio numerico

La tecnica che permette lo studio dei problemi di fluidodinamica mediante l'utilizzo del calcolatore è detta CFD, o *Computational Fluid Dynamics*. Il principale utilizzo della CFD è quello di risolvere le equazioni costitutive del moto dei fluidi e quelle ad esse associate: la risoluzione analitica di tali espressioni è infatti possibile solamente per geometrie semplici o evidenti simmetrie, mentre risulta più complicato per casi reali, in cui è necessario un approccio di tipo numerico.

Esistono vari metodi numerici per la discretizzazione delle equazioni della fluidodinamica, per esempio:

- FDM, o Metodo alle Differenze Finite;
- FEM, o Metodo agli Elementi Finiti;
- FVM, o Metodo ai Volumi finiti.

Il Metodo alle Differenze Finite (FDM) fu il primo adottato nell'ambito della fluidodinamica ed è attualmente usato solo in codici specializzati, mentre il Metodo agli Elementi Finiti (FEM) viene generalmente utilizzato nell'analisi strutturale. Il Metodo ai Volumi Finiti è l'approccio standard in uso in molti dei codici commerciali per la CFD: in questo metodo le equazioni vengono risolte in un volume di controllo discreto detto *cella*.

Il software utilizzato ai fini di questa tesi, *OpenFOAM*<sup>©</sup>, è a licenza pubblica e gratuita ed elabora le equazioni proprio attraverso il metodo dei Volumi Finiti.

La finalità della CFD è quella di discretizzare i casi presi in esami, ossia di passare da un dominio continuo ad uno discreto. Il processo di discretizzazione ha lo scopo di

trasformare un set di equazioni differenziali alle derivate parziali (le equazioni 2.22 e 2.23 in questo caso) in un corrispondente sistema di equazioni algebriche discrete che vengono risolte per punti, ossia in determinati istanti di tempo e in determinate posizioni spaziali. Il software che computa queste informazioni ha accesso alle condizioni iniziali e alle condizioni al contorno fornite dall'utente in modo che vengano rispettate in corso di elaborazione.

Il Metodo ai Volumi Finiti si basa sulla discretizzazione della forma integrale delle equazioni di governo su ogni volume di controllo in cui il dominio è suddiviso; le grandezze coinvolte nel calcolo sono pertanto conservate a livello discreto. Tale metodo è applicabile sia a casi stazionari sia a casi transitori e i volumi di controllo in cui è suddiviso il dominio possono essere di forma arbitraria: le variabili vengono calcolate sul baricentro di tale volume di controllo.

Il processo di discretizzazione, che prescinde dalla scelta del metodo numerico, consta di due fasi:

1. discretizzazione del dominio di calcolo;
2. discretizzazione delle equazioni di governo.

La discretizzazione del dominio (*mesh generation stage*) è la fase in cui viene prodotta la mesh su cui le equazioni di governo discrete verranno risolte e, di conseguenza, vengono localizzati i punti di spazio e tempo in cui la soluzione verrà calcolata. Tale procedura è composta da due parti:

1. discretizzazione nel tempo;
2. discretizzazione nello spazio.

La discretizzazione nel tempo consiste nello stabilire la grandezza dell'intervallo temporale di calcolo (time step), conoscendo il dominio temporale di calcolo ossia la durata complessiva dell'elaborazione.

La discretizzazione nello spazio consiste invece in una suddivisione del campione continuo in un numero finito di volumi di controllo.

## 2.2.1 Presentazione di *OpenFOAM*®

*OpenFOAM*® è un software open source sviluppato da OpenCFD Ltd. e ESI Group e distribuito a titolo gratuito dalla *OpenFOAM*® Foundation.

FOAM è l'acronimo di *Field Operation And Manipulation*: tale dicitura si riferisce alla capacità di questo software di consentire la risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali mediante il FVM (Metodo dei Volumi Finiti) tramite la gestione di strutture specializzate di dati costituite da campi scalari, vettoriali e tensoriali.

Più che un software vero e proprio *OpenFOAM*® è da considerarsi come una libreria di codici eseguibili scritti in linguaggio C++, definiti *applications*, distinguibili in due categorie:

- solvers;
- utilities.

I *solvers* sono deputati alla risoluzione di specifici problemi della meccanica dei continui (Field Operation) mentre le *utilities* hanno il compito di manipolare le strutture dati nel *pre* e *post-processing* (Field Manipulation).

Poichè il linguaggio degli eseguibili è il C++, *OpenFOAM*® assimila alcune delle caratteristiche della programmazione orientata agli oggetti (*object-oriented*): ciò consente di aggiungere o rimuovere parti del programma con relativa semplicità. In un linguaggio di tipo procedurale, non *object-oriented*, la programmazione ruota intorno ad una struttura gerarchica di funzioni che vengono richiamate da un programma principale, detto *main*, interfacciandosi tra di loro per scambiarsi i dati. Questo è il concetto della *subroutine*. In un linguaggio di programmazione orientato agli oggetti invece i dati e le funzioni vengono raccolti in singole entità dette *classi*, ovvero modelli astratti dotati di proprietà e procedure che rispecchiano ciò che è stato dichiarato nelle rispettive classi. Le tre caratteristiche principali di un linguaggio *object-oriented* sono:

- *Incapsulamento*: caratteristica grazie alla quale chi usa un oggetto vede i dati filtrati dall'oggetto stesso ma resta all'oscuro dei metodi con cui essi sono manipolati, poichè proprietà e procedure della classe sono nettamente separate;

- *Polimorfismo*: il client, ossia l'utilizzatore delle classi, può servirsi di oggetti di classi diverse ma dotati della stessa comune interfaccia: lo stesso codice può essere quindi utilizzato con classi diverse, portando a risultati diversi a seconda del contesto di utilizzo;
- *Ereditarietà*: si possono derivare classi da quelle già esistenti in modo tale che gli oggetti delle nuove classi ereditino le proprietà degli oggetti della classe madre.

L'ereditarietà permette di eseguire aggiunte o modifiche alla classe preesistente e di riutilizzare o ampliare i programmi già esistenti. Non è infine necessario conoscere il codice sorgente delle classi madre per poterle utilizzare.

Il sistema sintattico che permette all'utente di implementare le equazioni costitutive dei problemi in *OpenFOAM*<sup>©</sup> è detto *equation mimicking*: questa sintassi consente di scrivere le equazioni nel codice simulandone la scrittura matematica. Ad esempio:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{U} \mathbf{U} - \nabla \cdot \mu \nabla \mathbf{U} = -\nabla p \quad (2.28)$$

la quale rappresenta la forma vettoriale dell'equazione di Navier-Stokes, si può esprimere in codice come segue:

```
solve
(
    fvm::ddt(rho, U)
  + fvm::div(rho, U, U)
  - fvm::laplacian(mu, U)
  ==
  - fvc::grad(p)
);
```

dove *fvm* (*finiteVolumeMethod*) e *fvc* (*finiteVolumeCalculus*) sono classi di funzioni,  $\rho$  è la densità del fluido considerato,  $U$  la sua velocità,  $\mu$  la sua viscosità e  $p$  la pressione, il gradiente della quale rappresenta appunto la forza dovuta alla pressione.

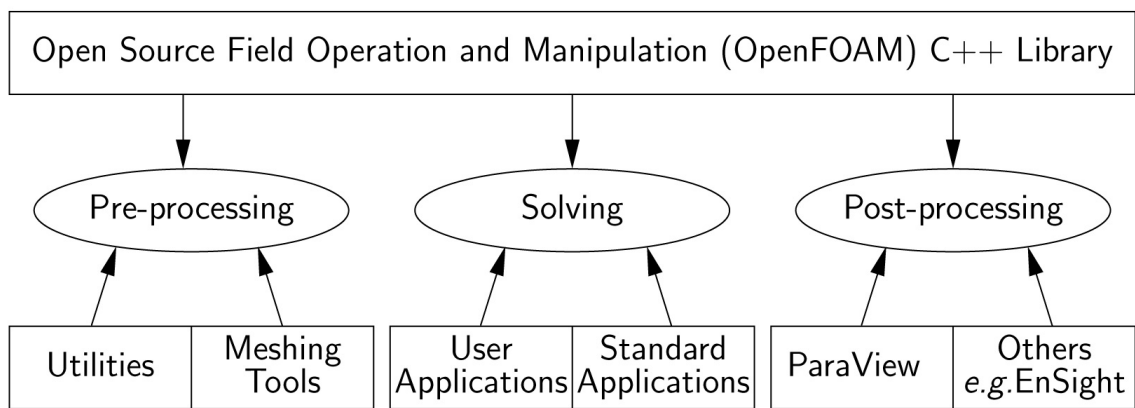


Figura 2.7: Architettura *OpenFOAM*<sup>©</sup>

La figura Figura 2.7 mostra l'architettura di base di *OpenFOAM*<sup>©</sup>; questo software si interfaccia nella fase di post-processing con programmi di terze parti come Paraview grazie alla utility *paraFoam*.

### 2.2.2 Struttura dei solvers e delle utilities in *OpenFOAM*<sup>©</sup>

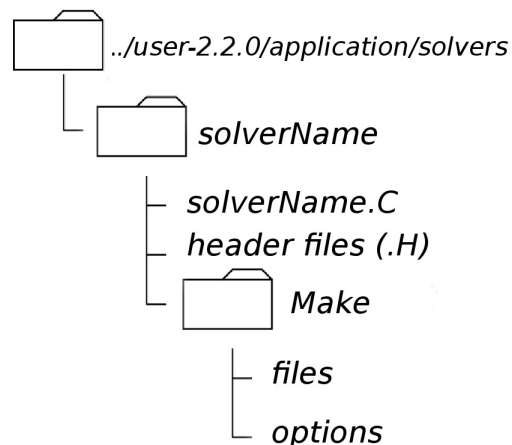


Figura 2.8: Struttura delle directories di un solver

La directory *applications*, contenuta nella cartella di installazione di *OpenFOAM*<sup>©</sup>, contiene i solvers e le utilities.

Il file **solverName.C**, collocato nella cartella *solverName* come si può vedere in Figura 2.8, contiene il codice del solutore (o *source code*) mentre negli *header files*, aventi estensione **.H**, sono contenute le dichiarazioni delle variabili, le equazioni espresse in *equation mimicking* e i comandi di inizializzazione della soluzione.

La directory *Make* contiene invece i files nei quali sono specificati il nome del solver, la directory di destinazione e output e l'elenco di tutti i file sorgente utilizzati; nella cartella



options invece sono indicate le directories in cui vengono collocati files e libraries che il solver andrà a richiamare.

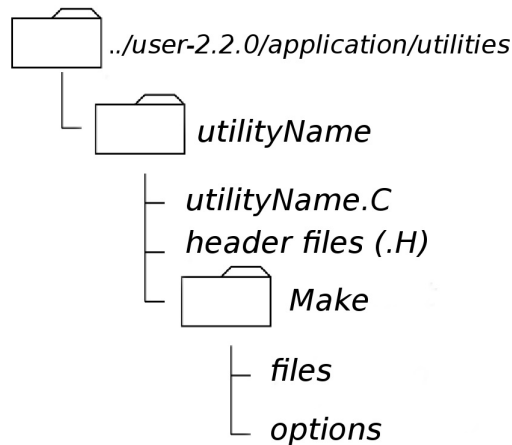


Figura 2.9: Struttura delle directories di una utility

La directory che contiene la generica utility *utilityName* è organizzata in modo molto simile a quella contenente un generico solver ed è mostrata in Figura 2.9.

Il file **utilityName.C** contiene il codice sorgente mentre gli *header files* contengono le informazioni necessarie per la compilazione della utility. Anche in questo caso la cartella *Make* contiene le dictionaries files e options già descritte precedentemente.

### 2.2.3 Struttura di un caso in *OpenFOAM*®

L'organizzazione della generica *case directory* deve contenere un numero minimo di *directories* e di *dictionaries* come indicato in Figura 2.10: la cartella *system* contiene le dictionaries di controllo e funzionamento di utilities e solvers; le dictionaries che di default devo essere incluse in un caso di *OpenFOAM*® sono:

- **controlDict**: contiene i parametri di data output, le costanti temporali quali il tempo di inizio/fine e il passo di avanzamento oltre che i parametri per il controllo del lancio dell'applicazione;
- **fvSchemes**: contiene l'indicazione degli schemi di integrazione nello spazio e nel tempo utili allo svolgimento della simulazione;
- **fvSolution**: contiene la definizione dei solutori utilizzati per risolvere le equazioni di simulazione, le tolleranze di calcolo e algoritmi di controllo.

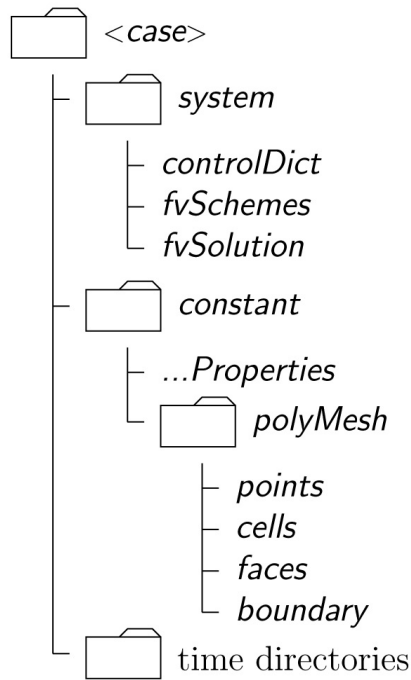


Figura 2.10: Struttura di una case directory

In questa cartella possono essere contenute anche dictionaries relative alla fase di pre-processing, come *setFields* e *decomposePar*.

La cartella *constant* include nella sottocartella *polyMesh* le proprietà della mesh usata nella simulazione, le proprietà fisiche dei fluidi esaminati e le costanti di calcolo per il lancio dei solutori.

Le *time directories* comprendono specifici files di particolari campi; il nome di ogni directory temporale è dato dal tempo della simulazione nel quale il dato viene scritto (la directory 0 conterrà quindi le condizioni iniziali e quelle al contorno per inizializzare il problema).

## 2.2.4 Comandi principali e definizione della geometria e della mesh di lavoro

Di seguito i comandi principali utilizzati per gestire le simulazioni:

- **foamCleanTutorials**: comando per la cancellazione delle azioni effettuate fino a quel punto;
- **setFields**: comando che permette di leggere i dati del caso ([alpha.water.org](http://alpha.water.org)) e separare le fasi (nel caso specifico di questa tesi, le fasi di acqua e olio);

- **blockMesh**: crea mesh parametriche mediante la definizione di punti, blocchi, lati e superfici; si basa sulla decomposizione del dominio di lavoro in un set di uno o più blocchi tridimensionali per ognuno dei quali è possibile definire la discretizzazione della mesh, ossia il numero di volumi in cui verrà suddiviso;
- **blockMeshDict**: dictionary che, una volta compilata, genera la mesh;
- **checkMesh**: comando per la valutazione della bontà della mesh attraverso considerazioni su *skewness*, non-ortogonalità e altri possibili difetti;
- **decomposePar**: comando per la decomposizione del dominio di lavoro (fasi e mesh) per permettere che vengano elaborati parallelamente da più processori;
- **interFoam**: comando per girare il codice;
- **reconstructPar**: comando successivo a *decomposePar* utile a ricostruire la mesh e le fasi del caso di studio;
- **paraFoam**: comando di post-processing che permette di usare programmi terzi come Paraview per visualizzare il risultato della compilazione della mesh;
- **runThisCase**: raccoglie il set di comandi da utilizzare per girare un singolo caso.

Le geometrie di riferimento del caso sono la box e la sfera e sono state costruite grazie a tools delle librerie di *OpenFOAM*®. La definizione dei blocchi avviene tramite la definizione dei vertici, da un vettore che rappresenta il numero di celle richiesto per ogni direzione e dal tipo di grading desiderato lungo ciascuna direzione.

# Capitolo 3

## Risultati

Come si è potuto vedere nelle precedenti sezioni, la trattazione matematica del menisco simmetrico rispetto agli assi e il caso sferico forniscono il set di equazioni differenziali:

$$\frac{dy}{d\psi} = -\frac{\cos \psi}{Q} \quad (3.1)$$

$$\frac{dx}{d\psi} = \frac{\sin \psi}{Q} \quad (3.2)$$

ove  $Q = \frac{\sin \psi}{y} - \frac{\Delta \rho g}{\gamma} x_I - B$ . E' necessario procedere attraverso un metodo iterativo in quanto la costante B è inizialmente non nota e in mancanza di una soluzione analitica è necessario utilizzare il calcolo numerico assistito dal calcolatore.

### 3.1 Parametri e mesh

Le soluzioni sono ottenute usando 16 processori che lavorano in parallelo grazie ai comandi di *OpenFOAM*<sup>©</sup> *decomposePar* e *reconstructPar* che permettono rispettivamente di decomporre il dominio di lavoro prima dell'esecuzione del codice e di ricostruirlo nella fase successiva all'elaborazione. Il solutore è *interFoam* e in ogni calcolo l'interfaccia tra i due fluidi considerati è inizialmente piatta (orizzontale rispetto all'asse x, vedere Figura 3.1): per ottenere una corretta elaborazione dell'interfaccia bisogna fissare:

- l'angolo di contatto;
- le densità dei fluidi;

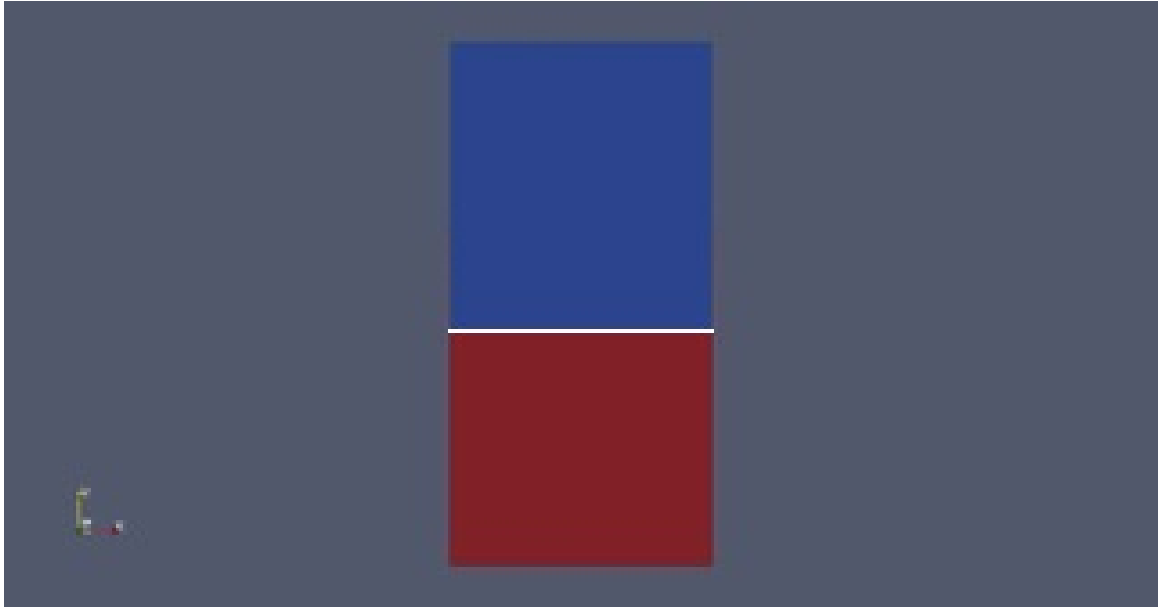


Figura 3.1: L'interfaccia prima dell'elaborazione

- le viscosità dei fluidi;
- la tensione superficiale.

Sono state fatte delle prove usando due diversi valori dell'angolo di contatto (15 e 45 gradi). La densità del fluido superiore (in blu in Figura 3.1) è stata impostata a  $980 \frac{kg}{m^3}$  e rappresenta quindi un olio di silicone, mentre la densità del fluido inferiore (in rosso in Figura 3.1) è stata settata a  $1000 \frac{kg}{m^3}$  ed è la parte della geometria che simula il comportamento dell'acqua. La tensione superficiale è stata fissata ad un valore di  $0.0707106 \frac{kg}{s^2}$  mentre la viscosità è stata cambiata più volte a seconda dei casi da girare, ossia al variare dell'angolo di contatto e della densità di punti della griglia. Infatti è stata impostata la viscosità secondo il seguente schema:

- caso angolo 15 gradi:
  - viscosità pari a  $10^{-4} \frac{m^2}{s}$  per le griglie (100X200) e (200X400);
  - viscosità pari a  $2 \cdot 10^{-4} \frac{m^2}{s}$  per la griglia (300X600);
- caso angolo 45 gradi:
  - viscosità pari a  $0.5 \cdot 10^{-4} \frac{m^2}{s}$  per la griglia (100X200);
  - viscosità pari a  $10^{-4} \frac{m^2}{s}$  per la griglia (200X400).

ove la notazione  $(AXB)$  fa riferimento al numero di punti della griglia considerata, ossia  $A$  sull'asse  $x$  e  $B$  sull'asse  $y$ .

Di seguito sono riportate due immagini che rappresentano l'intero dominio di due diverse soluzioni con raffigurata anche la griglia utilizzata:

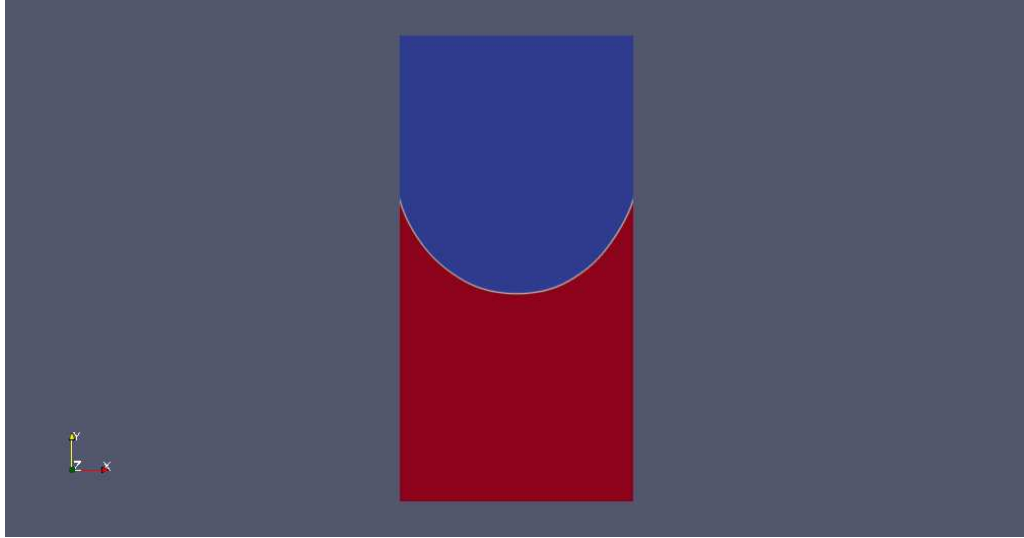


Figura 3.2: Interfaccia computata per un valore dell'angolo di contatto di 15 gradi e griglia  $(300 \times 600)$

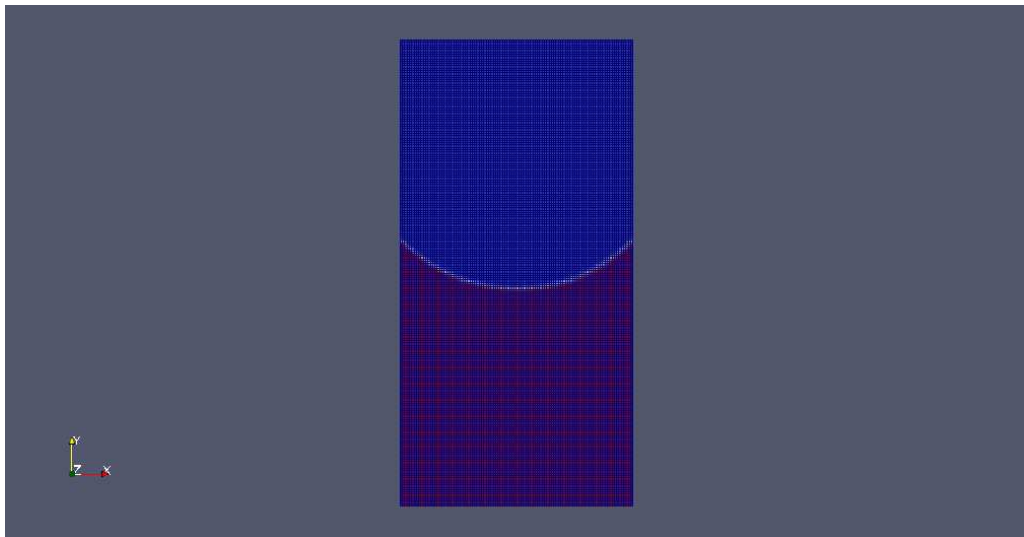


Figura 3.3: Interfaccia computata per un valore dell'angolo di contatto di 45 gradi e griglia  $(100 \times 200)$  con la rappresentazione della griglia stessa

In tutte le prove effettuate il dominio di lavoro è una box bidimensionale avente 4 pareti (riprende quindi la trattazione analitica del menisco simmetrico rispetto agli assi) e la griglia è uniforme per quanto riguarda la sua risoluzione sull'asse x e sull'asse y ( $dx=dy$ ), ossia ciò che varia è il numero di punti sui diversi assi ma non la loro dimensione.

### 3.2 Confronto della soluzione analitica e numerica

Per poter utilizzare questo *solver* per geometrie per le quali non è possibile trovare una soluzione analitica è necessario testare il suo corretto funzionamento. A tal proposito sono state effettuate delle prove con il fine di paragonarle alla soluzione analitica nota nel caso del menisco simmetrico agli assi.

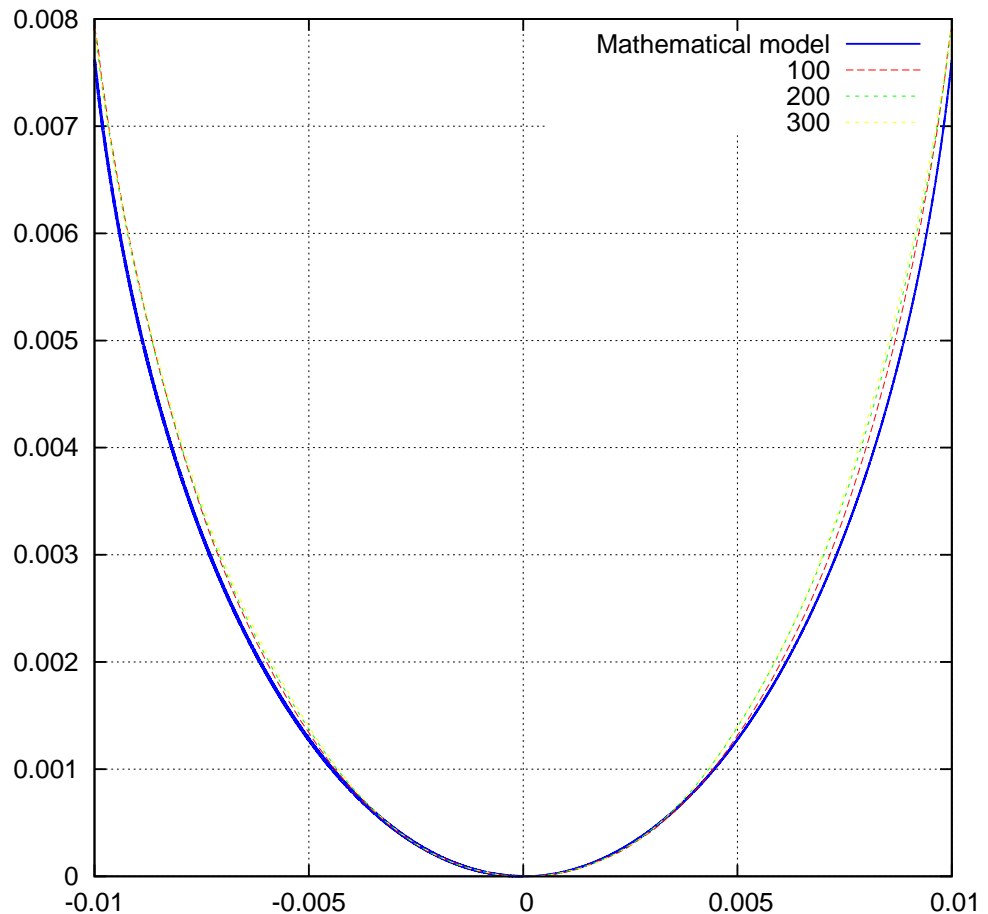


Figura 3.4: Confronto nel caso dell'angolo di contatto di 15 gradi

Per poter paragonare le soluzioni numeriche con quella analitica è fondamentale che l'interfaccia sia stazionaria, ossia che non oscilli più nel tempo. Per garantire ciò bisogna scegliere una viscosità alta per evitare instabilità. Però, se la viscosità è troppo alta, è

necessario un tempo maggiore per trovare la soluzione. Quindi, sia per motivi temporali sia per garantire la bontà delle prove effettuate è necessario trovare una viscosità adatta a assicurare la stabilizzazione dell'interfaccia in un tempo non troppo lungo.

Le figure 3.4 e 3.5 mostrano l'interfaccia ottenuta numericamente con diverse risoluzioni paragonata alla soluzione analitica nota.

Nella Figura 3.4 è mostrato il confronto tra la soluzione analitica (in blu) e le soluzioni ottenute per un angolo di contatto di 15 gradi e tre differenti griglie di punti: (100X200), (200X400), (300X600) indicate rispettivamente con una linea tratteggiata rossa, verde e gialla. La soluzione dovrebbe essere sempre più precisa all'aumentare del numero dei punti della mesh, a scapito del tempo totale impiegato dal codice per terminare l'elaborazione.

Anche in questo caso la prova viene effettuata su una box bidimensionale; la distanza tra le due pareti orizzontali è stata fissata a 0.02  $m$  e tutte le soluzioni sono state centrate rispetto al sistema mostrato in Figura 3.4. L'altezza del grafico è stata fissata indicativamente a 0.008  $m$  per comprendere in maniera chiara e leggibile il punto più basso e quello più alto raggiunto dalle interfacce. Bisogna notare perciò che la forma delle interfacce mostrate nella figura è solo indicativa; il reale profilo, in questo caso, è quello mostrato in Figura 3.2.

La Figura 3.5 mostra invece un confronto tra la soluzione matematica (in blu) e le soluzioni ottenute attraverso il metodo numerico per un angolo di contatto di 45 gradi e due diverse griglie di punti: (100X200), (200X400) rispettivamente tratteggiate in rosso e verde.

Anche in questo caso la box bidimensionale ha larghezza ideale impostata a 0.02  $m$  mentre l'altezza, a differenza del caso mostrato in Figura 3.4, a 0.0045  $m$ : questo perchè, come si può vedere nelle figure 3.2 e 3.3, l'interfaccia con angolo di contatto di 45 gradi rispetto alle pareti verticali è ovviamente più piatta rispetto a quella con angolo di contatto di 15 gradi.

Il reale profilo dell'interfaccia in questo caso è quello mostrato in Figura 3.3.

Come si può qualitativamente vedere, in entrambi i casi le soluzioni fornite dal solver numerico si avvicinano di molto alla soluzione analitica, anche se, a parità di griglia, le soluzioni per l'angolo di contatto di 45 gradi sono più precise. Ciò può essere dovuto alla



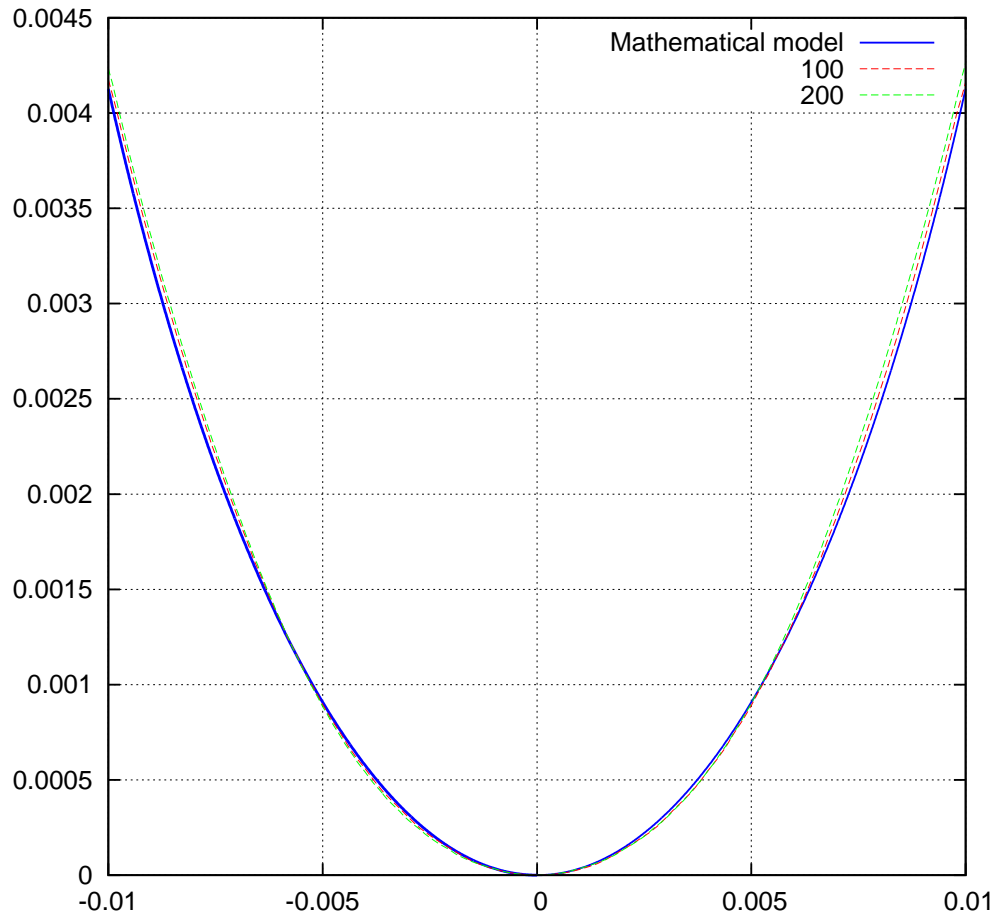
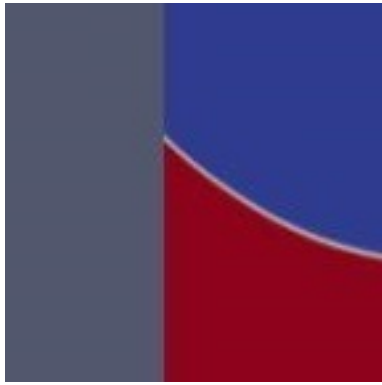


Figura 3.5: Confronto nel caso dell'angolo di contatto di 45 gradi

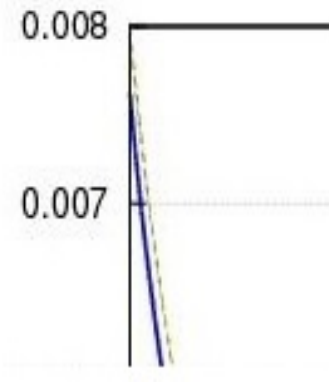
diversa impostazione della viscosità, la quale nel caso della griglia (100X200) e angolo di contatto 45 gradi è la metà di quella del caso dell'angolo di contatto 15 gradi e stessa griglia; questa ipotesi però viene smentita subito in quanto per la griglia (200X400), sia nel caso di angolo di 15 gradi sia nel caso di angolo di 45 gradi, il profilo dell'interfaccia si comporta in maniera analoga ai rispettivi casi con griglie diverse.

Si può dunque concludere in prima battuta che per angoli di contatto più elevati la soluzione è più precisa.

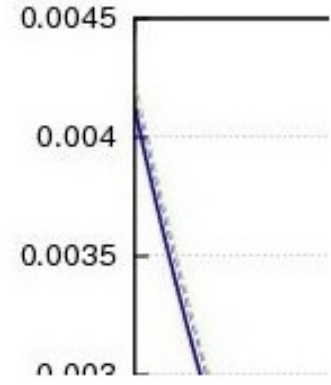
Le figure nella pagina seguente mostrano, a dimostrazione di quanto appena detto, una visione locale del punto di contatto nei diversi casi.



(a) Punto di contatto nel caso dell'angolo di contatto di 45 gradi



(b) Punto di contatto delle diverse soluzioni per un angolo di contatto di 15 gradi



(c) Punto di contatto delle diverse soluzioni per un angolo di contatto di 45 gradi

Figura 3.6: Dettagli sul punto di contatto

### 3.3 Sviluppi futuri

Dopo che si è provata l'effettiva affidabilità di elaborazione del solutore discusso nelle sezioni precedenti si può procedere con la trattazione di altri specifici casi.

- Dal caso del dominio bidimensionale a quattro pareti (box) si può passare all'analisi e allo svolgimento di prove su domini bidimensionali a profilo circolare e successivamente su domini tridimensionali sferici, avvicinandosi progressivamente al caso reale dell'occhio umano.
- Dopo aver testato l'affidabilità del solver nel caso di geometrie curve prive di pareti si può trattare il caso di geometrie ellissoidali, che modellizzano bene la geometria di un occhio affetto da miopia. Atchison e al. hanno infatti scannerizzato attraverso la tecnica MRI le immagini di 88 occhi [1] che erano stati precedentemente raggruppati secondo il loro grado di miopia: dalle immagini ricavate sono state misurate l'altezza, la larghezza e la lunghezza degli occhi, che denotavano una buona corrispondenza con una geometria ellittica [2]. E' stato dimostrato infatti che sia gli occhi emmetropi sia quelli miopi hanno un grado di schiacciamento ai poli ma con l'aumentare delle diottrie di miopia il bulbo oculare si allarga in ogni direzione soprattutto in quella antero-posteriore, con la conseguenza che il suo asse antero-posteriore è più lungo rispetto agli altri e la sua forma può essere ricondotta a quella di un'ellissoide. Nel loro secondo studio Atchison e al. hanno calcolato, attraverso la regressione lineare,

come variano, al variare delle diottrie, i raggi oculari che possono essere utilizzati nella formula che descrive un'ellisse:

$$\frac{x^2}{R_x^2} + \frac{y^2}{R_y^2} + \frac{z^2}{R_z^2} = 1 \quad (3.3)$$

con

$$R_x = 11.40 + 0.04D, \quad R_y = 11.18 + 0.09D, \quad R_z = 10.04 + 0.16D, \quad (mm)$$

dove l'asse x rappresenta la larghezza (asse laterale), l'asse y l'altezza (asse superiore-inferiore) e l'asse z la lunghezza (asse antero-posteriore).

- Sarebbe di notevole interesse clinico e sperimentale svolgere la simulazione descritta nelle sezioni precedenti su un modello di occhio affetto da stafiloma. Come si può vedere nella Figura 1 di [7], lo stafiloma è un'ectasia di una porzione della parete oculare, ovvero una protrusione caudale della parete oculare e del suo contenuto. Esso si verifica più spesso come risposta ad un trauma o ad un'infezione che hanno modificato l'architettura della parete oculare: un'eccessiva pressione nel punto della lesione può spingere la parete dalla sua locazione originaria verso l'esterno dell'occhio. Si è trovato che lo stafiloma può comparire nei casi di miopia avanzata [7].

Nel caso di occhio affetto da stafiloma la geometria del caso di studio può includere sia un profilo circolare/sferico (caso ideale) sia un profilo schiacciato (reale occhio emmetrope o occhio miope) con una sporgenza avente raggio minore del raggio di curvatura della parete su cui si manifesta (Figura 1.C di [7]).

# Capitolo 4

## Conclusione

Quanto è stato detto e ricercato nel presente elaborato di tesi si inserisce in un contesto piuttosto ampio di indagini scientifiche e può essere utile nello studio dell'assetto di equilibrio tra due fluidi immiscibili nella camera vitrea. Con lo studio dell'interfaccia e delle informazioni associate all'angolo di contatto, siamo in grado di prevedere quale sarà la porzione di retina effettivamente coperta, parametro utile ai chirurghi che devono effettuare l'operazione di riparazione della retina. L'effettiva copertura infatti dipende dal volume iniettato, che viene scelto in modo opportuno da permettere di coprire quella determinata parte di retina. Il legame tra volume iniettato, interfaccia e copertura retinica non si nota nel caso di un dominio aperto come la box mostrata in Figura 3.1, bensì è reperibile in un dominio chiuso come quello sferico.

Oggetto di questo lavoro è stato la realizzazione di simulazioni assistite dal calcolatore basate sulle teorie dell'idrostatica, con lo scopo di trovare l'interfaccia tra due fluidi immiscibili, e la valutazione dell'errore che affligge la soluzione numerica in relazione a quella analitica.

Il codice creato da Christina Isakova del Laboratorio di Idraulica "Enrico Marchi" del Dipartimento di Ingegneria Civile, Chimica e Ambientale dell'Università degli Studi di Genova ci ha permesso di analizzare i primi semplici casi di geometrie con l'aiuto del calcolo numerico.

Le figure 4.1 e 4.2 mostrano l'errore, stimato per metà dominio, a cui si va incontro utilizzando il software di calcolo numerico rispetto alla soluzione matematica.

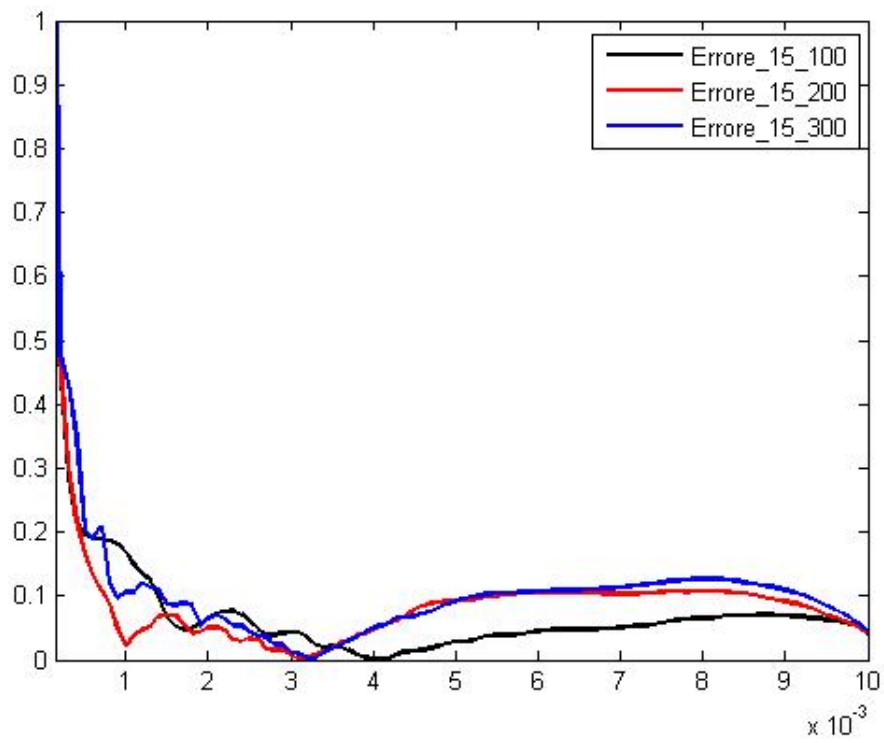


Figura 4.1: Grafico dell'errore relativo per un angolo di 15 gradi

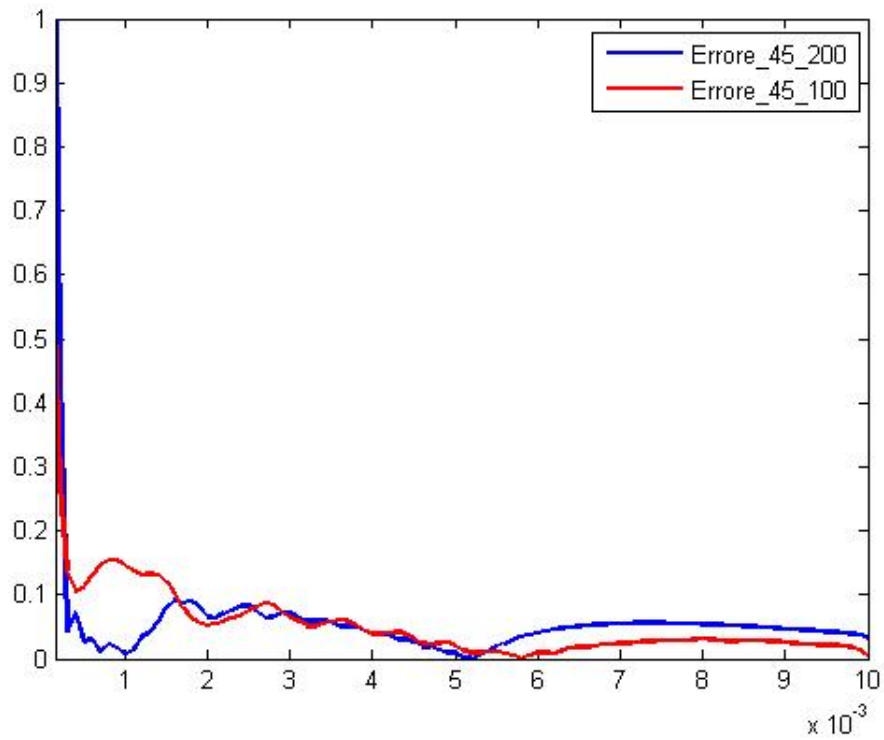


Figura 4.2: Grafico dell'errore relativo per un angolo di 45 gradi

In questo caso l'errore relativo è stato definito come

$$E_r = \frac{|valore_{numerico} - valore_{analitico}|}{valore_{analitico}}.$$

In Figura 4.1 è mostrato l'errore relativo tra la soluzione analitica e le soluzioni numeriche nel caso di un angolo di contatto di 15 gradi: "*Errore\_15\_100*", "*Errore\_15\_200*" ed "*Errore\_15\_300*" sono gli errori relativi per le diverse griglie utilizzate (rispettivamente (100X200), (200X400) e (300X600)).

In Figura 4.2 è mostrato invece l'errore relativo tra la soluzione analitica e le soluzioni numeriche nel caso di un angolo di contatto di 45 gradi: "*Errore\_45\_100*" ed "*Errore\_45\_200*" sono gli errori relativi per le diverse griglie utilizzate (rispettivamente (100X200) e (200X400)).

Si può dunque vedere dalle figure che l'errore nel caso dell'angolo di 45 gradi si mantiene mediamente inferiore rispetto al caso dell'angolo di 15 gradi.

Bisogna notare infine che i valori dell'errore superiori a 0.2 sono dovuti all'errore di arrotondamento vicino allo zero che deriva, per costruzione, dall'errore relativo stesso. L'errore di calcolo è dunque abbastanza piccolo in entrambi i casi e ci permette di poter eseguire ulteriori esperimenti in vari e specifici casi di studio. In prima battuta ci si è posti infatti l'obbiettivo di testare l'affidabilità del software, per poi utilizzarlo per riprodurre casi il più possibile aderenti alla realtà fisica.

Il lavoro svolto richiedeva al candidato l'ottima dimestichezza pratica del software open source *OpenFOAM*<sup>©</sup> e del sistema operativo Linux, che per motivi di tempo non sono stati approfonditi nella loro interezza ma obbligatoriamente lasciati sul piano teorico. La stesura del presente elaborato di tesi richiedeva altresì lo studio di articoli scientifici e delle informazioni in essi contenute con lo scopo di raccogliere i dati già esistenti ed utilizzarli per uno scopo, fino ad oggi, inedito.



# Bibliografia

- [1] D. A. Atchison, C. E. Jones, K. L. Schmid, N. Pritchard, J. M. Pope, W. E. Strugnell, and R. A. Riley. Eye shape in emmetropia and myopia. *Investigative Ophthalmology & Visual Science*, 45:3380–3386, 2004.
- [2] D. A. Atchison, N. Pritchard, K. L. Schmid, D. H. Scott, C. E. Jones, and J. M. Pope. Shape of the retinal surface in emmetropia and myopia. *Investigative Ophthalmology & Visual Science*, 46:2698–2707, 2005.
- [3] P.N. Bishop. Structural macromolecules and supramolecular organisation of the vitreous gel. *Progress in Retinal and Eye Research*, 19:323–344, May 2000.
- [4] Ian Eames, Romesh I. Angunawela, G. William Aylward, Ali Azarbadegan. A Theoretical Model for Predicting Interfacial Relationships of Retinal Tamponades. *Investigative Ophthalmology And Visual Science*, 51(4):2243-7, 2009.
- [5] T. E. D. C. S. Group. Risk factors for idiopathic rhegmatogenous retinal detachment. *The American Journal of Epidemiology*, 137:749–757, 1993.
- [6] T. T. Kleinberg, R. T. Tzekov, L. Stein, N. Ravi, and S. Kaushal. Vitreous substitutes: A comprehensive review. *Survey of Ophthalmology*, 56(4):300–323, 2011.
- [7] K. Ohno-Matsui. Proposed Classification of Posterior Staphylomas Based on Analyses of Eye Shape by Three-Dimensional Magnetic Resonance Imaging and Wide-Field Fundus Imaging. *Elsevier Inc.*, 2014.
- [8] C. Pozrikidis. Fluid Dynamics: Theory, Computation, and Numerical Simulation. *Springer and Verlag*, II ed., 2009.



- [9] R. Repetto, A. Tatone, A. Testa, E. Colangeli. Traction on the retina induced by saccadic eye movements in the presence of posterior vitreous detachment. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 10(2):191–202, 2011.
- [10] J. Sebag. The vitreous: Structure, Function and Pathobiology. *Springer and Verlag*, 1989.
- [11] JH Siggers, CR Ethier. Fluid Mechanics of the Eye. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 44(1):347-372, 2012
- [12] A. Sodhi, L. Leung, D. Do, E. Gower, O. Schein, and J. Handa. Recent trends in the management of rhegmatogenous retinal detachment. *Survey of Ophthalmology*, 53(1):50–67, 2008.
- [13] N.Soman and R.Banerjee. Artificial vitreous replacements. *BJM school of Bioscience and Bioengineering, Biomedical Engineering Division, Indian Institute of Technology*, 2002.

## Ringraziamenti

Se ho raggiunto questo primo importante traguardo lo devo anche a tutte le persone che mi hanno supportato e spronato nel corso di questi anni, per questo a voi vanno i miei ringraziamenti e a voi dedico il mio lavoro.

Desidero innanzitutto ringraziare il Prof. Jan Pralits per avermi seguito costantemente nel corso di questi mesi e il Prof. Rodolfo Repetto che mi ha fornito, fin da subito, il bagaglio delle sue conoscenze.

Un ringraziamento sentito va a Christina Isakova per aver messo a mia disposizione il suo tempo e le sue competenze senza le quali non sarei mai riuscito a portare a termine questo lavoro.

Ringrazio mio padre, mia madre e le mie due sorelle Silvia e Daniela per avermi dato il loro incondizionato appoggio e la serenità indispensabile per poter concludere l'inizio di un così importante percorso. Vi voglio bene.

Grazie agli amici di Imperia e non Mizzi, Paolo, Martina, Pissi e compagnia bella per aver sempre tifato per me.

Grazie ai miei coinquilini Ferra, Fra e Lety con i quali ho condiviso questa prima importante esperienza della convivenza. Mi mancherete.

Ringrazio i miei amici e compagni di corso Davide e Martina con i quali ho trascorso ogni giorno di questi tre anni: senza la vostra presenza non sarebbe stata la stessa cosa!

Un profondo grazie a Walter per esserci sempre stato: sei un vero amico e ti porterò sempre nel cuore.

Grazie di cuore ai miei fantastici contenitori. Senza di voi non ce l'avrei mai fatta.

*Last but not least*, grazie anche a me che non mi arrendo mai.