

**Università degli Studi di Genova**

---

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali  
Corso di Laurea Magistrale in Fisica Teorica

Tesi di Laurea Magistrale

**METODI ASINTOTICI RINORMALIZZATI PER LA STABILITA'  
LINEARE DI FLUIDI NON NEWTONIANI**

Candidato:

**Simone Boi**

Matricola 3163315

Relatori:

**Prof. Pierantonio Zanghì**

**Prof. Andrea Mazzino**

**Prof. Jan Pralits**

Correlatore:

**Prof. Renzo Collina**

---

**Anno Accademico 2011-2012**



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1 L'analisi di stabilità lineare dei flussi piani, paralleli e incompressibili</b>	<b>11</b>
1.1 Linearizzazione e stabilità . . . . .	11
1.2 I modi normali nei flussi piani . . . . .	14
1.3 Il caso newtoniano . . . . .	15
1.3.1 Le equazioni di stabilità lineare . . . . .	15
1.3.2 Il teorema di Squire . . . . .	17
1.3.3 Un esempio di applicazione: il problema di Benàrd e i moti convettivi . . . . .	18
1.4 Il caso euleriano . . . . .	25
1.4.1 Ruolo del termine advettivo nella stabilità . . . . .	26
1.4.2 Criteri di Rayleigh e Fjortoft . . . . .	27
1.5 Casi non newtoniani . . . . .	30
1.5.1 Le equazioni di stabilità lineare per fluidi shear-thinning di Carreau-Bird . . . . .	30
1.5.2 Le equazioni di stabilità lineare per fluidi shear-thickening . . . . .	33
<b>2 Il flusso di Kolmogorov</b>	<b>35</b>
2.1 L'algoritmo numerico per la stabilità lineare . . . . .	36
2.2 Richiami e risultati noti: la stabilità lineare nel caso newtoniano. Verifiche numeriche.	39
2.3 La stabilità lineare in casi non newtoniani . . . . .	43
2.3.1 Shear-thickening . . . . .	43
2.3.2 Shear-thinning . . . . .	46
<b>3 La rinormalizzazione a scale multiple</b>	<b>53</b>
3.1 Multiscala per equazioni differenziali ordinarie . . . . .	53
3.1.1 Termini secolari e teoria delle perturbazioni . . . . .	53
3.1.2 Utilizzo delle scale multiple . . . . .	55
3.2 Multiscala per equazioni differenziali alle derivate parziali . . . . .	62
3.2.1 Posizione del problema e condizione di risolubilità . . . . .	62
3.2.2 Equazione del calore . . . . .	65
3.2.3 Turbolenza dello scalare passivo . . . . .	69
3.2.4 Viscosità vestita e stabilità lineare del flusso di Kolmogorov newtoniano . . . . .	73

<b>4</b>	<b>Le scale multiple per il flusso di Kolmogorov in casi non newtoniani</b>	<b>79</b>
4.1	Caso shear-thickening . . . . .	84
4.2	Caso shear-thinning . . . . .	86
	<b>Conclusioni e possibili sviluppi</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Le equazioni di Navier-Stokes</b>	<b>93</b>
A.1	Le equazioni del moto . . . . .	93
A.2	Le variabili adimensionali . . . . .	96
<b>B</b>	<b>Fluidi non newtoniani</b>	<b>99</b>
B.1	I fluidi shear-thinning . . . . .	99
B.2	I fluidi shear-thickening . . . . .	101
B.3	I fluidi viscoplastici . . . . .	101
B.4	I fluidi viscoelastici e i fluidi polimerici . . . . .	102
B.5	I fluidi tissotropici e antitissotropici . . . . .	105
	<b>Bibliografia</b>	<b>109</b>

# Introduzione

Molti liquidi organici e inorganici a bassa massa molecolare, soluzioni di sali con non elevata massa molecolare, sali e metalli fusi e gas esibiscono caratteristiche proprie dei fluidi newtoniani: a temperatura e pressione costanti, se sottoposti a un flusso creato da puro sforzo di taglio, ovvero un flusso dove non avvengono compressioni, il tensore degli sforzi è proporzionale al tensore velocità di deformazione, e la costante di proporzionalità è la viscosità. Questi fluidi sono detti newtoniani seppur le nozioni di flusso e viscosità sono antecedenti a Newton [53]. Per molti liquidi, la viscosità decresce con la temperatura e cresce con la pressione. Per i gas, essa aumenta invece in entrambi i casi. In generale, maggiore è la viscosità di una sostanza, più resistenza essa pone al flusso, e quindi ad esempio più potenza è necessario erogare con eventuali pompe. La seguente tabella mostra valori tipici della viscosità di comuni fluidi [54].

<b>sostanza</b>	<b>viscosità (Pa·s)</b>
aria	$10^{-5}$
acqua	$10^{-3}$
alcol etilico	$1.2 \cdot 10^{-3}$
mercurio	$1.5 \cdot 10^{-3}$
glicol etilenico	$20 \cdot 10^{-3}$
olio d'oliva	0.1
glicerolo 100%	1.5
miele	10
sciroppo di glucosio	100
bitume	$10^8$
vetro fuso	$10^{12}$

Scendendo nella tabella, si può notare che la viscosità aumenta di diversi ordini di grandezza, e si può osservare allora come la viscosità può raggiungere anche valori estremamente elevati. Un solido può esser visto come un fluido con viscosità tendente all'infinito: allora dai dati della tabella emerge come il confine tra solido e liquido non sia sempre così ben marcato. La dinamica dei fluidi newtoniani, attraverso le equazioni di Navier-Stokes, è stato comunque, almeno dal punto di vista teorico, un problema ben posto e chiuso da circa 300 anni, tralasciando la difficoltà oggettiva nel risolvere questi complicati sistemi di equazioni differenziali, anche se molti problemi riguardanti flussi con reazioni chimiche o con più fasi, oppure riguardanti la turbolenza, rimangono tuttora aperti.

Durante gli ultimi 50-60 anni, si è notato sempre più il fatto che parecchie sostanze di rilevanza nelle applicazioni industriali, specialmente di natura multifasica, come ad esempio schiu-

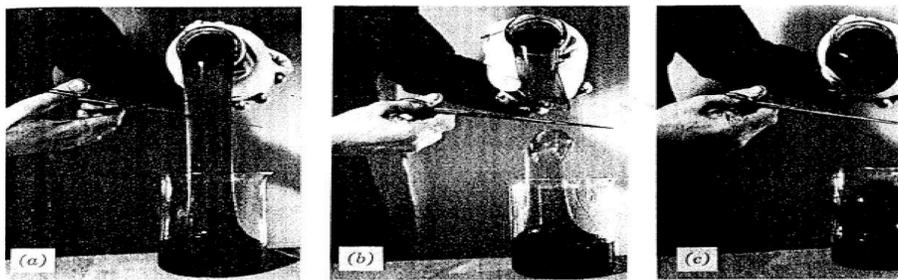
me, emulsioni, dispersioni e sospensioni, malte fluide, soluzioni polimeriche sia artificiali che naturali, o comunque in generale sostanze polimeriche fuse, non rispettano il legame di linearità omogenea tra sforzi viscosi e velocità di deformazione nei flussi sottoposti a puro sforzo di taglio. Questi fluidi quindi sono stati denominati non newtoniani, non lineari, complessi o reologicamente complessi. La seguente tabella contiene una lista rappresentativa dei fluidi che esibiscono differenti tipi di comportamento e in maniera più o meno accentuata fenomeni non newtoniani nei flussi [54]. Ovviamente, in questa sede ci riferiamo a materiali incompressibili e isotropi, che rappresentano comunque un'ampissima categoria nonché la quasi totalità di questo tipo di fluidi. La quantità di sostanze non newtoniane e la varietà di tipologie di comportamento che esibiscono, comunque, sono talmente estese che si potrebbe dire che il caso newtoniano, seppur il più semplice, rappresenta un'eccezione.

<ul style="list-style-type: none"> <li>- Colle (es. colla da tappezzeria)</li> <li>- Bevande alcoliche (birre, liquori)</li> <li>- Liquami e concimi animali</li> <li>- Fluidi biologici (sangue, muchi, liquido sinoviale , saliva)</li> <li>- Malte e paste di cemento</li> <li>- Malta di gesso</li> <li>- Cioccolati</li> <li>- Malte con carbone</li> <li>- Cosmetici e prodotti per l'igiene (smalti per unghie, lozioni, creme, rossetti, shampoo, creme e schiume da barba, dentifrici, etc.)</li> <li>- Prodotti e scarti caseari (es. formaggi, burro, yogurt, panna, siero di latte)</li> <li>- Fanghi e melme</li> <li>- Schiuma antincendio</li> <li>- Acque di scolo e fognarie</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Generi alimentari (purè o concentrati di frutta e verdura, salse, condimenti per insalata, maionese, marmellate, gelati, zuppe, impasti per torte, impasti per pane, bianco d'uovo)</li> <li>- Grassi e oli lubrificanti</li> <li>- Sospensioni minerali</li> <li>- Magma, lava, roccia fusa</li> <li>- Tinte, smalti e lucidanti</li> <li>- Sospensioni di polpa di cellulosa</li> <li>- Malte di lignite o torba</li> <li>- Plastiche, gomme, polimeri fusi o in soluzione</li> <li>- Inchiostri e colori da stampa</li> <li>- Prodotti farmaceutici (es. creme, schiume, sospensioni)</li> <li>- Sabbia bagnata delle spiagge</li> <li>- Greggio ceroso</li> </ul>
--	--

In tutti i casi si tratta di sostanze chimicamente complesse: soluzioni di polimeri o molecole complesse, miscele di idrocarburi, sistemi multifase in cui particelle liquide, gassose o anche solide si trovano disperse in un liquido. Come si vede dalla tabella, si tratta di sostanze con cui si ha a che fare anche abbastanza facilmente e, soprattutto, molto utilizzate nell'ambito industriale chimico, farmacologico o alimentare. E' quindi evidente l'importanza di sviluppare dei modelli che descrivano le fenomenologie peculiari di questi liquidi e permettano di comprendere a fondo le proprietà in modo da poterne sfruttare eventuali caratteristiche anche al fine di eventuali ottimizzazioni in processi d'interesse. Numerosi modelli reologici per descrivere queste sostanze sono stati proposti; tuttavia le proprietà di molti di essi non sono conosciute, poiché si tratta di questio-

ni molto attuali e l'analisi delle proprietà delle equazioni del moto che ne seguono è complessa ed è tuttora in corso.

Questi fluidi sono caratterizzati comunque da particolari e numerosi fenomeni che assolutamente non sarebbero possibili in fluidi newtoniani. Ad esempio, il recupero elastico (fig. a), fenomeno nel quale un fluido (es. soluzione di sapone e alluminio [55]) viene versato da un recipiente in condizioni stazionarie e una volta tagliato il flusso, la parte superiore al taglio rimbalza dentro il recipiente. Nell'effetto Kaye (fig. b), invece, caratteristico di fluidi in cui la viscosità diminuisce con la velocità di deformazione (pseudoplastici o shear-thinning), del fluido in moto scivola via in un filamento su dell'altro in quiete per via dell'alto gradiente di velocità all'interfaccia di contatto. Inoltre, vi è l'effetto Weissenberg (fig. c), in cui se viene miscelato del fluido con una sbarra rotante velocemente su sé stessa si assiste alla risalita del fluido lungo di essa, al contrario del caso newtoniano dove il fluido verrebbe respinto per via della forza centrifuga. Come ultimo esempio citiamo l'effetto Barus (fig. d), dove un flusso che esce da un tubo con una certa sezione, acquista nelle vicinanze una sezione crescente con la distanza dall'orifizio fino anche a diverse volte l'area di quest'ultimo.



(a)



(b)



(c)



(d)

Gli ultimi due in particolare sono caratteristici della famiglia dei fluidi viscoelastici polimerici. Questi ultimi sono stati oggetto della maggior attenzione finora, in quanto presentano diverse utili proprietà di interesse applicativo[39]. Innanzitutto, una formidabile conseguenza della viscoelasticità è la riduzione della resistenza al flusso[34]: l'aggiunta di una piccola concentrazione (poche decine di p.p.m. in massa) di lunghe catene di polimeri in acqua provoca una diminuzione dell'80% della potenza necessaria a mantenere in moto un flusso in un tubo. Un esempio diretto di applicazione di questo effetto è dato dagli idranti dei vigili del fuoco, che operando nell'acqua la suddetta aggiunta riescono ad avere un getto di maggior potenza e gittata. La comprensione di questo effetto, nonostante i molti studi al riguardo, è tutt'oggi incompleta. Recentemente [56] è stato mostrato comunque che tale effetto è legato alle proprietà di stabilità del flusso. L'analisi di

stabilità è uno studio molto importante in fluidodinamica e per i sistemi dinamici in generale [11], appunto perché da essa dipendono le caratteristiche fisiche di un fluido mostrate a seconda del flusso e delle condizioni in cui si trova, e questo appena citato ne è un esempio. Come vedremo, l'analisi di stabilità è l'analogo di studiare nella meccanica analitica il tipo di equilibrio (stabile, instabile o indifferente) della posizione di un punto materiale, di un sistema di punti o in generale di punti e/o corpi rigidi, in un'energia potenziale causata da un campo di forze esterne o interne, con la differenza che qui lo spazio delle fasi non è costituito da un numero discreto di coordinate ma da *campi*.

Un'altra proprietà che si ottiene dall'aggiunta di polimeri solubili in acqua è un forte aumento dell'efficienza con cui il calore si trasferisce in presenza di differenze di temperatura tra regioni diverse del fluido.

Di interesse più grande tuttavia in questo momento, è la possibilità che danno i fluidi polimerici di ottenere quella che viene detta turbolenza elastica, cioè, fatto apparentemente paradossale, turbolenza per numeri di Reynolds  $\rightarrow 0$ . La turbolenza idrodinamica è infatti un regime che per i fluidi newtoniani è in genere incontrato ad altissimi numeri di Reynolds. Anche su questo fatto l'analisi di stabilità ci verrà in aiuto: regioni dello spazio delle fasi che risultano instabili per ogni  $Re > 0$ , sono quelle che danno origine al comportamento caotico per  $Re$  arbitrariamente piccoli dovuti alla dinamica del sistema. Per questa ragione, chiameremo *instabilità elastiche* quelle che si formano in regioni per ogni  $Re > 0$ , mentre negli altri casi le chiameremo *idrodinamiche*, per il fatto che son tutte quelle caratteristiche dell'acqua e degli altri fluidi newtoniani.

Le instabilità a piccoli numeri  $Re$  hanno notevole interesse applicativo, e sono tutt'ora un fenomeno misterioso. Un esempio in cui sono fondamentali sono i flussi in microcanali (tubi di sezione fino all'ordine di  $100\mu m$ ), molto importanti in chimica e biochimica[57]. I flussi microscopici sono in genere sempre laminari. Difatti, essendo il numero di Reynolds definito come  $\frac{UL}{\mu}$ , dove  $\mu$  è la viscosità cinematica e  $U$  e  $L$  sono velocità e lunghezza tipiche del flusso, avere un diametro del condotto di qualche decina di micron fa sì che  $Re$  sia sempre molto piccolo e quindi mai ci si trovi nel regime turbolento, poiché le velocità richieste necessiterebbero di gradienti di pressione enormi alle estremità del tubo. Questo è importante se all'interno del microcanale si vogliono far mischiare due fluidi ad esempio per avere delle reazioni chimiche: senza moto caotico, l'unico meccanismo di mescolamento è quello diffusivo, che però è molto inefficiente: per l'albumina del siero bovino (coeff. di diffusione  $D \approx 3 \cdot 10^{-7} cm^2/s$  in acqua), il tempo tipico di diffusione  $L^2/D$  in un microcanale di diametro qualche decina di micron è dell'ordine di  $\approx 100s$ . Aggiungendo polimeri, si può ottenere turbolenza anche a  $Re$  arbitrariamente bassi e tramite il moto caotico il miscelamento è molto più efficiente e rapido.

Alla luce di tutto ciò, è chiaro quindi quanto possa esser utile conoscere a fondo le caratteristiche di questo tipo di turbolenza per sfruttarle al meglio, e cercare eventualmente quali sono le proprietà del fluido che possono causarle, oppure se esistono altri materiali oltre quelli polimerici in grado di mostrare questo fenomeno.

L'obiettivo di questa tesi quindi sarà quello di studiare in generale come la non newtonianità di un fluido incide sulle proprietà di stabilità del flusso. Per fare ciò, utilizzeremo due modelli tempo-indipendenti, derivanti da una relazione reologica fortemente non lineare, che coprono almeno qualitativamente una vasta classe di fluidi non newtoniani (modello di Carreau-Bird). Utilizzeremo l'analisi di stabilità lineare (cioè il primo contributo dato dalle perturbazioni infinitesime)

intorno a un punto fisso, una soluzione stazionaria delle equazioni del moto, di cui si conosce praticamente tutto nel caso newtoniano, in modo da poter effettuare confronti o generalizzazioni. Assumeremo il fluido, oltre che incompressibile, anche isoterma ovunque, per semplificare il problema e per focalizzare l'attenzione proprio sugli effetti non lineari della relazione sforzi viscosi-velocità di deformazione che è già di per sé abbastanza complessa. In particolare, sceglieremo come punto fisso il flusso di Kolmogorov, un flusso sinusoidale bidimensionale e parallelo. Si tratta di un flusso che solo nel caso newtoniano è stato realizzato anche sperimentalmente, mentre dal punto di vista teorico la sua stabilità è stata studiata nel caso viscoelastico di Oldroyd-B [34], mentre ciò è del tutto nuovo nei casi non newtoniani che saranno affrontati. Del resto, lo studio dei fluidi non newtoniani dal punto di vista delle misure di laboratorio non è nemmeno ancora al punto di avere abbastanza misurazioni su una sostanza da fittare su modelli predefiniti per individuare con precisione i valori dei vari parametri liberi. Tuttavia, l'utilizzo di tale punto fisso ci permetterà, come vedremo approfonditamente nel testo, di utilizzare sia metodi analitici (approcci perturbativi rinormalizzati a scale multiple[18], che hanno come condizione necessaria proprio la periodicità del flusso), sia metodi numerici; comparando i risultati di questi avremo informazioni sul comportamento del fluido variando i parametri liberi, mostrando in quali situazioni il flusso diventa instabile potendo allora dare origine alla turbolenza e, tramite le scale multiple, avallaremo i risultati numerici in maniera esatta ed estenderemo ai casi non newtoniani il fatto che per il flusso di Kolmogorov le perturbazioni che danno instabilità sono quelle trasverse a grande scala rispetto al flusso base. Infine, caratterizzeremo il tipo di instabilità che si origina, scoprendo che nei fluidi non tempo-dipendenti non newtoniani comunque le instabilità sono di tipo idrodinamico, cioè lo stesso del caso newtoniano. In base al confronto con le proprietà di instabilità del modello viscoelastico di Oldroyd-B [34] cercheremo di capire cosa può dare origine ad instabilità a  $Re \rightarrow 0$  e proveremo a generalizzare il modello di Carreau-Bird ad un altro modello tissootropico o antitissotropico e identificare un'altra categoria di fluidi più generale di quelli polimerici che possono dare origine a turbolenza a  $Re \rightarrow 0$ . Questo nuovo modello quindi potrà esser fonte di ispirazione per ulteriori indagini o test futuri, al fine di indagare sia sui materiali che sono in grado di poter presentare questo tipo di turbolenza e in quali condizioni, sia proprio sui meccanismi fisici e le cause che stanno alla base di questo fenomeno ancora praticamente sconosciuto.



# Capitolo 1

## L'analisi di stabilità lineare dei flussi piani, paralleli e incompressibili

### 1.1 Linearizzazione e stabilità

Date le equazioni di Navier-Stokes <sup>1</sup> per un flusso incompressibile:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \rho[\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}] = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{f} \end{cases} \quad (1.1)$$

si consideri una generica soluzione stazionaria (o anche *punto fisso* nella teoria dei sistemi dinamici), cioè in cui le derivate temporali sono nulle per tutti i campi. Nel seguito verrà indicata come *flusso base*.

Si vuole investigare circa la sua *stabilità lineare*, ossia le sue proprietà fisiche sotto piccole perturbazioni e se tale soluzione è osservabile nella realtà. Una soluzione tale che prendendone una molto vicina ad essa l'evoluzione temporale data dalle (1.1) tende ad allontanarla dalla stessa è chiaramente inosservabile nella realtà come soluzione stazionaria, perché si ha sempre una piccola perturbazione o incertezza nei valori delle varie grandezze, così come è impossibile far stare in equilibrio un punto materiale in una posizione di equilibrio instabile. Essa tenderà quindi a transire alla turbolenza, o verso un'altra soluzione.

Il considerare perturbazioni piccole permette la *linearizzazione* delle equazioni, il che ovviamente rende la loro risoluzione affrontabile in maniera più semplice e maneggevole. Questo metodo permette sovente di trarre concrete proprietà fisiche di un problema.

Un esempio di ciò è la propagazione di onde lineari nei fluidi. Consideriamo un fluido newtoniano in quiete a densità e temperatura uniformi  $\rho_0$ ,  $T_0$ . Anche se in presenza di forze di volume esterne, il fatto che il fluido sia in quiete implica facilmente che anche la pressione sia stazionaria. Noi comunque porremo le forze di volume nulle per semplicità. Si vuole studiare il suo comportamento per piccoli moti intorno a questo stato. Per fare ciò si suppone che il fluido sia portato ad un certo istante ad una nuova densità  $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)$ , con  $\tilde{\rho} \ll \rho_0$ , velocità  $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \approx 0$ , pressione  $p = p_0 + \tilde{p}(\mathbf{x}, t)$ , con  $\tilde{p} \ll p_0$ , temperatura  $T = T_0 + \tilde{T}(\mathbf{x}, t)$ , con  $\tilde{T} \ll T_0$ , e per ognuna di queste

---

<sup>1</sup>Per alcuni richiami di fluidodinamica elementare al riguardo vedere l'Appendice A

quantità le derivate successive siano almeno dello stesso ordine di infinitesimo. Dalla (A.3) si vede che, essendo tutte le grandezze costanti nella situazione iniziale, la variazione di entropia nel tempo è composta solo da derivate di perturbazioni e quindi sarà infinitesima: allora per ogni particella fluida di massa  $m$  l'entropia rimane approssimativamente costante durante il moto, che quindi è detto *isoentropico*. Supponiamo per semplicità che per una particella fluida di massa  $m$  il coefficiente di espansione termica  $\alpha = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} |_p = \frac{m}{V} \frac{\partial V}{m \partial T} |_p = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} |_p$  sia nullo. Ciò significa che la temperatura non entra in gioco nel nostro problema, e l'equazione fluidodinamica per la conservazione dell'energia si disaccoppia dalle altre due facendo sì che queste siano sufficienti per la chiusura del problema. Ricordiamo ora che  $\beta = -V \frac{\partial p}{\partial V} |_S$  è il noto *modulo di compressibilità adiabatica*, per una particella fluida di massa  $m$  si ha  $-\frac{m}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} |_S \frac{\partial \rho}{\partial V} = \frac{m}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} |_S \frac{m}{V^2} = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} |_S$ . Allora possiamo scrivere  $\partial_t \rho = \frac{1}{\partial p / \partial \rho} |_S \partial_t p = \frac{\rho}{\beta} \partial_t p \approx \frac{\rho_0}{\beta} \partial_t \tilde{p}$ .

Posto tutto ciò, scriviamo le equazioni di Navier-Stokes inserendo le suddette soluzioni e trascurando i termini di infinitesimo superiori al primo:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho_0 \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = -\partial_t \rho = -\frac{\rho_0}{\beta} \partial_t \tilde{p} \\ \rho [\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}] = \rho_0 \partial_t \tilde{\mathbf{v}} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}} + (\eta + \xi) \nabla (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \end{cases}$$

Dalla prima notiamo subito che  $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\beta} \partial_t \tilde{p}$ . Sottraendo alla seconda l'equazione per la situazione statica iniziale  $\nabla p_0 = 0$  facciamo comparire in essa solo il gradiente della perturbazione  $\tilde{p}$ . Effettuando ora la derivata temporale della prima e la divergenza della seconda si ottiene:

$$\begin{cases} \rho_0 \partial_t \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = -\frac{\rho_0}{\beta} \partial_t^2 \tilde{p} \\ \rho_0 \partial_t \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = -\nabla^2 \tilde{p} + \eta \nabla^2 (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) + (\eta + \xi) \nabla^2 (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \end{cases}$$

Sostituendo la seconda nella prima, e tenendo conto di quanto precedentemente ricavato su  $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}$  si arriva finalmente a:

$$\frac{\rho_0}{\beta} \partial_t^2 \tilde{p} - \nabla^2 \tilde{p} - \frac{2\eta + \xi}{\beta} \nabla^2 \partial_t \tilde{p} = 0$$

Nel caso di fluido non viscoso quest'equazione diventa quella classica delle onde di d'Alambert, con onde non dispersive che si propagano con velocità  $\sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}}$ . I termini viscosi riproducono matematicamente una dissipazione di potenza, introducendo dei termini immaginari nella relazione di dispersione portati dal numero dispari di derivate che nello spazio di Fourier agiscono sulla fase degli esponenziali immaginari; tali termini quindi sono come noto responsabili del decadimento esponenziale nel tempo dell'intensità dell'onda. Richiamando nuovamente che  $\partial_t \tilde{p} \approx \frac{\beta}{\rho_0} \partial_t \tilde{\rho}$  e che, sempre per la derivazione di funzioni composte,  $\nabla^2 \tilde{p} \approx \frac{\beta}{\rho_0} \nabla^2 \tilde{\rho}$ , sostituiamo queste ultime nell'equazione delle onde di pressione ottenendo:

$$\partial_t^2 \tilde{\rho} - \frac{\beta}{\rho_0} \nabla^2 \tilde{\rho} - \frac{2\eta + \xi}{\rho_0} \nabla^2 \partial_t \tilde{\rho} = 0$$

La densità quindi si propaga attraverso la stessa equazione delle onde della pressione e quindi vale quanto già detto sopra, con stessa velocità e stesso assorbimento.

In realtà questo modello è irrealistico, poiché il coefficiente di espansione termica non è mai

nullo e quindi, dipendendo la densità anche da  $T$  oltre che da  $p$ , le continue compressioni e dilatazioni delle particelle fluide fanno entrare in gioco la temperatura e l'equazione sulla conservazione dell'energia, che quindi accoppiandosi a quella sopra complica lo studio della relazione di dispersione introducendo un ulteriore assorbimento dovuto alla conducibilità termica e al calore specifico che è tutt'altro che trascurabile. Una trattazione approfondita di questo è illustrata in [15]. Ulteriori considerazioni sono poi da fare se le variazioni di forze di volume esterne causate dalle compressioni/decompressioni  $\tilde{\rho}$  non sono trascurabili nel problema, come accade ad esempio nel considerare le grandi distanze e grandi profondità in oceanografia.

Quel che si fa nell'analisi di stabilità lineare di fatto è generalizzare quanto detto con questo semplice esempio, in cui si è studiato un intorno della soluzione statica dello spazio delle soluzioni (detto nella teoria dei sistemi dinamici *spazio delle fasi o degli stati*), al caso di intorni di moti generici.

Studiare la stabilità di una soluzione serve per avere informazioni sul processo di *transizione alla turbolenza*: in particolare grazie a queste informazioni possiamo conoscere la situazione del flusso base in un piccolo intorno dell'inizio di tale transizione.

Ovviamente l'analisi di stabilità lineare non dà informazioni complete sulla stabilità generale di una soluzione stazionaria, poiché quando le perturbazioni sono o diventano confrontabili con il flusso iniziale, i termini non lineari non sono più trascurabili. Essi quindi saranno determinanti per l'evoluzione del flusso: potranno contribuire ulteriormente all'instabilità, portando alla turbolenza, oppure potranno opporsi all'instabilità causata dai termini lineari, riportando il flusso nella soluzione iniziale. Oppure, ancora, potranno portare verso un'altra soluzione più stabile della prima. L'effetto dei termini non lineari può esser visibile anche solo quando la perturbazione o lo scostamento dal flusso base superano un determinato livello.

In particolare, consideriamo flussi *paralleli e incompressibili*. Un flusso parallelo avrà per il campo delle velocità, in un certo sistema di riferimento, una forma del tipo  $(U, 0, 0)$ . Inoltre, dall'equazione di continuità  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  si ha che  $\partial_x U = 0$ . Questo fa sì che anche per l'unica componente non nulla della velocità si cancelli il termine  $\mathbf{v} \cdot \nabla U = U \partial_x U$ , e quindi otteniamo un'equazione lineare per il flusso iniziale, almeno nel caso newtoniano. È importante sottolineare come quanto verrà esposto nel seguito sia applicabile non solo a flussi paralleli ma anche ad esempio a flussi cilindrici: un esempio di ciò è lo studio della stabilità del flusso viscoso piano e incompressibile che si ha tra due cilindri rotanti (*problema di Taylor*). Tuttavia la trattazione di questi casi non rientra negli scopi delle applicazioni che vogliamo affrontare e pertanto non sarà qui esposta.

Date quindi le (1.1) e un flusso parallelo incompressibile e stazionario che ne sia soluzione, caratterizzato dai campi  $\mathbf{V}$ ,  $P$  ed eventualmente altri che entrano in gioco come temperatura, concentrazione di un soluto, etc., il metodo per lo studio della stabilità lineare consiste nei passi seguenti:

- si considera una soluzione infinitamente vicina del tipo  $\mathbf{V} + \mathbf{v}$ ,  $P + p$ , ... dove le funzioni in lettere minuscole rappresentano le *perturbazioni infinitesime* del flusso base denotato in maiuscolo;

- si suppone, oltre che le perturbazioni siano infinitesime, che anche le sue derivate siano dello stesso ordine di infinitesimo; ciò permette di trascurare quindi tutti i prodotti di perturbazioni e/o loro derivate, ottenendo così un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali *lineari*, seppur a coefficienti non costanti;
- si sottraggono alle equazioni per i flussi perturbati quelle per il flusso base, ottenendo quindi un sistema dove tutti i termini sono dello stesso ordine di infinitesimo della perturbazione;
- si risolve il sistema ottenuto e si discute di come esso prevede che le soluzioni perturbate evolvano nel tempo.

## 1.2 I modi normali nei flussi piani

Avendo a che fare con un'equazione differenziale lineare, un potente metodo euristico di studio di essa è come noto l'utilizzo di serie o trasformata di Fourier, che porta quindi alle equazioni per i *modi normali*. Questo in particolare risulta molto utile quando si ha a che fare con un flusso *piano*, cioè dove una delle tre coordinate cartesiane non entra in gioco né come variabile né come componente. Si tratta della situazione che considereremo d'ora in avanti. In questo caso infatti i coefficienti non costanti davanti alle derivate nelle equazioni, che dopo aver effettuato la linearizzazione dipenderanno da  $U$ , conterranno solo una variabile e il sistema alle derivate parziali viene ricondotto a un sistema di equazioni differenziali ordinarie.

Supponiamo, per fissare le idee, che il flusso base sia del tipo  $(U(y), 0, 0)$ . In questo caso quindi è la coordinata  $z$  a non entrare in gioco. Il flusso perturbato sarà pertanto caratterizzato da  $(U(y) + u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$ ,  $P(y) + p(x, y, z, t), \dots$ . I coefficienti delle equazioni dipenderanno al più solo da  $y$ . Possiamo quindi esprimere le perturbazioni in trasformata di Fourier rispetto a  $x, z$  e  $t$ :

$$v(x, y, z, t) = \int \tilde{v}(y, k_x, k_z, \omega) e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} dk_x dk_z d\omega$$

$$p(x, y, z, t) = \int \tilde{p}(y, k_x, k_z, \omega) e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} dk_x dk_z d\omega$$

...

Data poi la linearità dell'equazione, posta la possibilità di portare le derivazioni sotto il segno di integrale si ottiene un'equazione differenziale ordinaria in  $y$ , dal momento che l'effetto delle derivate nelle altre variabili è quello di portare giù come coefficienti potenze dei numeri d'onda o della frequenza angolare dalla fase dell'esponenziale. Si ottiene quindi un'equazione per ogni modo normale, che è una sorta di equazione d'onda per i modi normali della perturbazione, a cui saranno associate le opportune condizioni al contorno del problema. Avendo a che fare con funzioni reali, nello spettro di Fourier gli esponenziali complessi coniugati saranno presenti con stesso peso. Se si è interessati all'informazione fisica portata dallo sviluppo di Fourier per conoscere il comportamento del sistema sotto una perturbazione piccola oscillante, è sufficiente prendere la parte reale delle equazioni.

Quel che si fa comunque è studiare la relazione di dispersione, ossia  $\omega(\mathbf{k})$ . Nella teoria dei sistemi dinamici la classificazione dei regimi di stabilità/instabilità è abbastanza variegata [2], ma

per i nostri interessi sarà sufficiente seguire quella semplificata in [1] basata su delle caratteristiche fondamentali. In particolare:

- se  $\Im\omega < 0$  per qualche  $\mathbf{k}$ , il flusso base è *stabile* per perturbazioni oscillanti con quei vettori d'onda poiché esse decresceranno nel tempo esponenzialmente; se ciò avviene per ogni  $\mathbf{k}$  il flusso base risulta completamente stabile, e il punto fisso funge quindi da *insieme attrattore* o *insieme limite* per le configurazioni dei campi infinitamente vicini ad esso, sul quale convergeranno dopo un tempo finito o infinito;
- se  $\Im\omega = 0$  per qualche  $\mathbf{k}$ , ivi il flusso base è in una situazione neutra tale che, se spostato leggermente nello spazio delle soluzioni, non mostra tendenze né ad allontanarsi né a riavvicinarsi, o al più se  $\Re\omega \neq 0$  conterrà propagazioni di onde perturbative; l'insieme dei valori di  $\mathbf{k}$  per cui avviene questo è detto *insieme marginale*; se il flusso base ha tale comportamento per ogni vettore d'onda, è detto *neutro*;
- se per almeno un valore del vettore d'onda  $\Im\omega > 0$ , il flusso risulterà *instabile*, poiché la perturbazione cresce esponenzialmente; in questi casi ad un certo istante diventa di dimensioni confrontabili col flusso base, e quindi si esce dal regime di perturbazione infinitesima ed entrano in gioco i termini non lineari.

In particolare, si cercano i valori dei parametri (adimensionali) tali che il flusso sia neutro, ossia i *parametri critici*.

Particolare attenzione merita il caso  $k_x = 0$ . Per  $(k_x, k_z) \neq (0, 0)$  si può scrivere  $\omega = kc(\mathbf{k})$ . Porre esattamente  $k_x = 0$  nelle equazioni e poi risolverle può dar origine ad alcuni risultati ambigui, come discontinuità del comportamento del flusso base ad esempio in casi in cui  $c(\mathbf{k})|_{k_x \neq 0}$  sia limitata mentre le equazioni di stabilità lineare risolte per  $k_x = 0$  darebbero anche  $c = \infty$ , oppure instabilità che crescono linearmente col tempo, cosa che si può mostrare avvenire per qualsiasi flusso base  $U(y)$  nel caso non viscoso [2]. Tali instabilità, dette *instabilità algebriche*, nel caso viscoso poi risultano sempre smorzate dalla viscosità dopo un breve transiente iniziale di crescita, e per questa ragione, non vengono considerate nell'analisi dei fluidi ideali come vedremo. In generale quindi, anche nei calcoli numerici, si pone sempre  $\omega_{k_x=0} := \lim_{k_x \rightarrow 0} c(\mathbf{k})$ .

## 1.3 Il caso newtoniano

### 1.3.1 Le equazioni di stabilità lineare

Applichiamo quanto visto fin ora concretamente alle equazioni per un fluido newtoniano. Denotando con le lettere maiuscole le grandezze relative al flusso base piano e con le lettere minuscole le perturbazioni. Cancellando i termini nulli per quanto detto nelle sezioni precedenti si ha innanzitutto:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ 0 = -\nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{f} \end{cases} \quad (1.2)$$

Inseriamo invece ora nelle (1.1) una soluzione differente da questa per una perturbazione infinitesima:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla P - \nabla p + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 \mathbf{V} + \nabla^2 \mathbf{v}) + \mathbf{f} \end{cases}$$

Sottraendo a queste ultime le (1.2) si ottiene:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{v} \end{cases}$$

Tenendo solamente i termini di ordine di infinitesimo più basso, si arriva finalmente a:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Notiamo subito che anche la perturbazione risulta incompressibile e che la dinamica della perturbazione è indipendente dal campo di forze di volume esterno. Il numero di Reynolds è definito ancora rispetto a una velocità tipica del flusso base.

Ora non ci resta che studiare la relazione di dispersione delle (1.3). Continueremo a supporre d'ora in poi, salvo diversa indicazione esplicita, il flusso base del tipo  $(U(y), 0, 0)$ . Notando che i coefficienti sono costanti rispetto alle variabili  $x$ ,  $z$  e  $t$ , sostituiamo ambo i membri con la loro trasformata di Fourier e supponiamo sia possibile portare le derivazioni sotto segno di integrale:

$$\begin{cases} \int \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{v}}(y, k_x, k_z, \omega) e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}) dk_x dk_z d\omega = 0 \\ \int \left[ \partial_t (\tilde{\mathbf{v}}(y, k_x, k_z, \omega) e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}) + (\tilde{\mathbf{v}}(y, k_x, k_z, \omega) \cdot \nabla \mathbf{V}) e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + \mathbf{V} \cdot \nabla (\tilde{\mathbf{v}}(y, k_x, k_z, \omega) e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}) + \nabla (\tilde{p}(y, k_x, k_z, \omega) e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}) - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 (\tilde{\mathbf{v}}(y, k_x, k_z, \omega) e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}) \right] dk_x dk_z d\omega = 0 \end{cases}$$

Data l'invertibilità dell'operatore della trasformata di Fourier, gli integrali sono nulli solo se il loro argomento è nullo. Effettuando le varie derivazioni e dividendo tutto per l'esponenziale immaginario che non si annulla mai, si ottiene per ogni modo normale:

$$\begin{cases} ik_x \tilde{u}(y) + \tilde{v}'(y) + ik_z \tilde{w}(y) = 0 \\ -i\omega \tilde{u}(y) + \tilde{v}(y) U'(y) + ik_x U(y) \tilde{u}(y) + ik_x \tilde{p}(y) - \frac{1}{\text{Re}} [-(k_x^2 + k_z^2) \tilde{u}(y) + \tilde{u}''(y)] = 0 \\ -i\omega \tilde{v}(y) + ik_x U(y) \tilde{v}(y) + \tilde{p}'(y) - \frac{1}{\text{Re}} [-(k_x^2 + k_z^2) \tilde{v}(y) + \tilde{v}''(y)] = 0 \\ -i\omega \tilde{w}(y) + ik_x U(y) \tilde{w}(y) + ik_z \tilde{p}(y) - \frac{1}{\text{Re}} [-(k_x^2 + k_z^2) \tilde{w}(y) + \tilde{w}''(y)] = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

dove per alleggerire la notazione si è sottintesa l'indicazioni di  $k_x$ ,  $k_z$ , e  $\omega$  di ciascun modo normale e si è indicata l'unica derivazione presente, rispetto alla variabile  $y$ , con l'apostrofo;  $u$ ,  $v$  e  $w$

rappresentano come noto le componenti della velocità rispettivamente lungo x, y e z.

### 1.3.2 Il teorema di Squire

Nel caso newtoniano, per il problema di stabilità dato dalle (1.4) esiste un teorema che ne semplifica molto l'analisi.

**Teorema 1.3.1** (Squire). *Per il sistema di stabilità lineare di un fluido newtoniano (1.4), ad ogni perturbazione instabile tridimensionale ne corrisponde una più instabile bidimensionale; il numero di Reynolds critico è quindi associato sempre a perturbazioni puramente bidimensionali.*

*Dimostrazione.* Nel sistema (1.4) scriviamo  $\omega$  come  $k_x \hat{c}$ , dove  $\hat{c}$  non è la velocità di fase dell'onda. In questo modo il comportamento della perturbazione è totalmente dipendente dalla parte immaginaria di tale parametro, a seconda che sia positiva o meno a seconda del segno di  $k_x$ .

Si considerino poi la prima, la terza equazione e la somma della seconda con la quarta moltiplicata per  $\frac{k_z}{k_x}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} ik_x \tilde{u}(y) + \tilde{v}'(y) + ik_z \tilde{w}(y) = 0 \\ -i\hat{c}(k_x \tilde{u}(y) + k_z \tilde{w}(y)) + \tilde{v}(y)U'(y) + iU(y)(k_x \tilde{u}(y) + k_z \tilde{w}(y)) + \\ + i\frac{1}{k_x}(k_x^2 + k_z^2)\tilde{p}(y) - \frac{1}{k_x Re}[-(k_x^2 + k_z^2)(k_x \tilde{u}(y) + k_z \tilde{w}(y)) + k_x \tilde{u}''(y) + k_z \tilde{w}''(y)] = 0 \\ -i\hat{c}k_x \tilde{v}(y) + ik_x U(y)\tilde{v}(y) + \tilde{p}'(y) - \frac{1}{Re}[-(k_x^2 + k_z^2)\tilde{v}(y) + \tilde{v}''(y)] = 0 \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Supponiamo  $k_x > 0$ . Operiamo ora la seguente *trasformazione di Squire*:

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}, \quad c = \hat{c}, \quad ku(y) = k_x \tilde{u}(y) + k_z \tilde{w}(y), \quad v(y) = \tilde{v}(y), \quad \frac{p(y)}{k} = \frac{\tilde{p}(y)}{\tilde{k}_x}, \quad k\hat{Re} = k_x Re$$

Notiamo che se il flusso parallelo è a contatto con un interfaccia, lungo quest'ultima la componente w sarà nulla per l'impenetrabilità della stessa, e perciò tali sostituzioni non modificheranno le condizioni al contorno.

Sostituendo nelle (1.5) si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} iku(y) + v'(y) = 0 \\ -ikcu(y) + v(y)U'(y) + ikU(y)u(y) + ikp(y) - \frac{1}{\hat{Re}}[-k^2u(y) + u''(y)] = 0 \\ -ikcv(y) + ikU(y)v(y) + p'(y) - \frac{1}{\hat{Re}}[-k^2v(y) + v''(y)] = 0 \end{array} \right. \quad (1.6)$$

che è il sistema (1.4) con  $w = k_z = 0$ . Ad ogni flusso perturbato tridimensionalmente sappiamo quindi associare tramite la trasformazione di Squire un flusso perturbato bidimensionalmente. Esso avrà numero di Reynolds minore, poiché  $k > k_x$ , e stesso comportamento di stabilità: infatti, rimanendo  $c = \hat{c}$ , si ha che per un  $\omega$  di una perturbazione bidimensionale il fattore di crescita ( $k \Im c$ ) è maggiore di ( $k_x \Im c$ ) in modulo, quindi o più alto se positivo (più instabile), o più basso

se negativo (più stabile), o sempre nullo se neutra era la situazione tridimensionale ( $\Im c = 0$ ). Da queste considerazioni segue quindi la tesi. Analoghe considerazioni valgono se  $k_x < 0$ , invertendo il segno nella definizione di  $k$  per garantire la positività di  $\hat{R}e$ .  $\square$

Si noti che nel caso bidimensionale a cui ci siamo ricondotti il vettore d'onda ha solo componente  $k_x$  e quindi la velocità di fase della perturbazione  $\frac{\omega}{k_x}$  pure avrà componente solo lungo  $x$  e coinciderà proprio con  $c$ . Nel caso quest'ultima sia puramente reale, la perturbazione infinitesima risulta quindi essere un'onda viaggiante a velocità di fase  $\Re c$  nella direzione del flusso stesso.

Il teorema di Squire permette quindi di semplificare la risoluzione delle equazioni in quanto, ai fini della ricerca dei parametri critici, è sufficiente restringersi in virtù di esso al caso bidimensionale, eliminando quindi una variabile e una componente di ogni grandezza vettoriale in gioco. In seguito quindi, almeno per ora riguardo ai casi newtoniani, ci riferiremo sempre alle (1.6) come le equazioni di stabilità.

### 1.3.3 Un esempio di applicazione: il problema di Benard e i moti convettivi

Come esempio di applicazione dell'analisi di stabilità lineare di un flusso che mostra in maniera evidente i risultati di tale tipo di studio, consideriamo quello che è noto come *problema di Benard*: un liquido newtoniano in quiete, posto in uno strato infinito nelle direzioni  $x$  e  $y$ ,  $z \in [-L/2, L/2]$ , tale che la superficie superiore sia mantenuta a temperatura  $T_-$  minore di quella inferiore  $T_+$  in regime stazionario. La soluzione di questo problema familiare alla pratica mostra quindi i primi moti convettivi in ambito lineare che si verificano in un fluido in queste condizioni, ed è considerato uno dei primi grandi successi della teoria di stabilità lineare. Il calcolo è abbastanza complesso, ma è molto interessante perché mostra chiaramente diverse approssimazioni e procedure tipiche.

Supponiamo per il liquido, in regime di Boussinesq, piccole espansioni termiche. Sia  $\alpha$  il coefficiente di espansione termica, che viene assunto costante nell'intervallo di temperature considerato. Supponiamo inoltre infinito il modulo di compressibilità isoterma  $\gamma = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} |_T$ , cioè  $\frac{\partial \rho}{\partial p} = 0$ . Allora l'equazione di stato sarebbe  $\rho = \rho_0 e^{-\alpha(T-T_+)}$ , dove  $\rho_0$  è la densità di riferimento del fluido a  $T_+$ ; ma per un liquido si hanno piccole espansioni anche a variazioni considerevoli di temperatura: si ha quindi  $\alpha \approx 0$ , diciamo *infinitesimo*, e si può linearizzare sviluppando al primo ordine di Taylor ottenendo  $\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_+))$ .

Scriviamo quindi i nuovi campi perturbati come  $T = \hat{T} + \tau$ ,  $P = p$ ,  $\mathbf{v}$ . Posto poi che  $de = Tds - \frac{p}{m}dV = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho \approx Tds - \frac{\alpha p}{\rho_0^2}(1 + 2\frac{\alpha(T-T_+)}{\rho_0})dT \approx Tds - \frac{\alpha p}{\rho_0^2}dT \approx Tds$ , in quanto  $\alpha dT$  è un infinitesimo di ordine superiore al primo. Allora  $\frac{\partial e}{\partial \rho} |_S \approx 0$ , e quindi  $de \approx Tds|_\rho = cdT$ , dove  $c$  è il calore specifico per unità di massa, poiché le variazioni di densità sono appunto infinitesimi di ordine superiore: tale quantità determina l'energia interna assorbita per unità di massa. Analogamente si ha per  $-p\nabla \cdot \mathbf{v}$ , per il quale dalla continuità in forma lagrangiana si ha  $= \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dT} |_p \frac{dT}{dt} = -p\alpha \frac{dT}{dt} \approx 0$ . Mettendo insieme tutte queste considerazioni si ha per la situazione statica di base:

$$\begin{cases} 0 = -\nabla P + \rho_0(1 - \alpha(\hat{T} - T_+))\mathbf{g} \\ 0 = \nabla^2 \hat{T} \end{cases}$$

dove  $\mathbf{g}$  è la forza peso  $(0, 0, -g)$ , diretta lungo l'asse  $z$  verso il basso. Dalla seconda si ha, tenute conto le condizioni al contorno suddette,  $\hat{T} = T_+ - \frac{T_+ - T_-}{2} - \Gamma z$ , dove  $\Gamma$  è il gradiente di temperatura costante  $\frac{T_+ - T_-}{L}$ . Per i campi perturbati si ha, trascurando i termini di infinitesimo di ordine superiore e sottraendo le equazioni per i campi base:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \rho_0 \partial_t \mathbf{v} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} - \rho_0 \alpha \tau \mathbf{g} \\ \rho_0 c [\partial_t \tau + \mathbf{v} \cdot \nabla \hat{T}] = \rho_0 c [\partial_t \tau - w \Gamma] = k \nabla^2 \tau \end{cases} \quad (1.7)$$

dove con  $w$  si indica come solito la componente lungo  $z$  della velocità. Otteniamo solo due equazioni per temperatura e  $w$  effettuando sulla seconda del sistema (1.7) il laplaciano della terza componente e la divergenza seguita da una derivazione rispetto a  $z$ :

$$\begin{cases} \rho_0 \partial_t \nabla^2 w = -\nabla^2 \partial_z p + \eta \nabla^2 \nabla^2 w + \rho_0 \alpha g \nabla^2 \tau \\ 0 = -\nabla^2 \partial_z p + \rho_0 g \alpha \partial_z^2 \tau \end{cases}$$

Sottraendo la seconda alla prima:

$$\rho_0 \partial_t \nabla^2 w = \eta \nabla^2 \nabla^2 w + \rho_0 \alpha g (\partial_x^2 + \partial_y^2) \tau$$

a cui va aggiunta la terza del sistema (1.7).

Introducendo la nota *diffusività termica*  $\chi = \frac{k}{\rho_0 c}$ , passiamo a variabili adimensionali attraverso le scale tipiche di temperatura  $\Delta T = T_+ - T_-$ , lunghezza  $L$  e tempo  $\frac{L^2}{\chi}$ . Allora le due equazioni in questione a sistema diventano:

$$\begin{cases} (\partial_t - \nabla^2) \tau = \frac{\Gamma L^2}{\chi} w \\ \left( \frac{1}{\text{Pr}} \partial_t - \nabla^2 \right) \nabla^2 w = \frac{g \alpha L^2 \rho_0}{\eta} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \tau \end{cases} \quad (1.8)$$

dove  $\text{Pr} = \frac{\eta}{\rho \chi}$  è il *numero di Prandtl*.

Introduciamo ora i modi normali per le perturbazioni. Essendo le (1.8) differenti dalle (1.4), per via della presenza della temperatura e del numero di Prandtl, non possiamo applicare il teorema di Squire com'è stato formulato. Tuttavia una riconduzione ad un caso bidimensionale qui risulta ancora più semplice. Infatti se ogni modo normale sarà del tipo:

$$\begin{aligned} w &= \tilde{w}(z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \\ \tau &= \tilde{\tau}(z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \end{aligned}$$

si avrà

$$\begin{cases} \left( -i\omega + k_x^2 + k_y^2 - \partial_z^2 \right) \tilde{\tau}(z) = \frac{\Gamma L^2}{\chi} \tilde{w}(z) \\ \left( \frac{-i\omega}{\text{Pr}} + k_x^2 + k_y^2 - \partial_z^2 \right) \left( \partial_z^2 - k_x^2 - k_y^2 \right) \tilde{w}(z) = -\frac{g \alpha L^2 \rho_0 (k_x^2 + k_y^2)}{\eta} \tilde{\tau}(z) \end{cases}$$

Possiamo ora effettuare la sostituzione  $K = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ , che corrisponde banalmente a una rotazione nello spazio dei vettori d'onda in cui si fa coincidere l'asse x (o y) con la direzione del vettore d'onda  $(k_x, k_y)$ . Otteniamo così un'analogia espressione che corrisponde ad aver utilizzato una perturbazione bidimensionale nel piano z e x (o y):

$$\begin{cases} (-i\omega + K^2 - \partial_z^2) \tilde{\tau}(z) = \frac{\Gamma L^2}{\chi} \tilde{w}(z) \\ \left( \frac{-i\omega}{\text{Pr}} + K^2 - \partial_z^2 \right) (\partial_z^2 - K^2) \tilde{w}(z) = -\frac{g\alpha L^2 \rho_0 K^2}{\eta} \tilde{\tau}(z) \end{cases}$$

Scrivendo  $\tilde{W}(z) = \frac{\Gamma L^2}{\chi} \tilde{w}(z)$  si ha:

$$\begin{cases} (-i\omega + K^2 - \partial_z^2) \tilde{\tau}(z) = \tilde{W}(z) \\ \left( \frac{-i\omega}{\text{Pr}} + K^2 - \partial_z^2 \right) (\partial_z^2 - K^2) \tilde{W}(z) = -\text{Ra} K^2 \tilde{\tau}(z) \end{cases} \quad (1.9)$$

avendo introdotto *numero di Rayleigh*  $\text{Ra} = \frac{g\alpha \Gamma L^4 \rho_0}{\chi \eta}$ .

Le (1.9) rappresentano il nostro sistema di equazioni di stabilità lineare, di cui vogliamo conoscere la stabilità data dalla legge di dispersione  $\omega(K)$ . Eliminando la temperatura:

$$(-i\omega + K^2 - \partial_z^2) \left( \frac{-i\omega}{\text{Pr}} + K^2 - \partial_z^2 \right) (\partial_z^2 - K^2) \tilde{W}(z) = -\text{Ra} K^2 \tilde{W}(z) \quad (1.10)$$

Sofferamoci ora sulle condizioni al contorno. Ritorniamo momentaneamente ad utilizzare le variabili dimensionate. Le due situazioni tipiche per ogni superficie sono quella di parete fissa o superficie libera. In entrambi i casi, essendo per ipotesi la temperatura mantenuta costante sulle pareti, si ha  $\tilde{\tau}(z) = 0$  a  $z = \pm L/2$  (siamo in variabili adimensionali); questa implica che lì  $\left( \frac{-i\omega}{\text{Pr}} + K^2 - \partial_z^2 \right) (\partial_z^2 - K^2) \tilde{W}(z) = 0$ . Per il primo caso, la condizione di adesione viscosa è inoltre  $W = 0$  sulle pareti, dal momento che il flusso base è già in quiete; l'annullarsi inoltre di  $u$  e  $v$  sulle pareti implica che ivi  $\partial_x u = \partial_y v = 0$ , essendo costanti (nulle) sulle due superfici per ogni x e y; allora per l'equazione di continuità anche  $\partial_z W = 0$  a  $z = \pm L/2$ . Nel caso di superficie libera le cose sono leggermente più complicate: l'interfaccia libera infatti può muoversi liberamente. Essa in generale ad ogni istante è di equazione  $z = d + \xi(x, y, t)$ , dove  $\xi$  è supposto essere infinitesimo come le sue derivate e  $d = \pm 1$ . Il versore normale alla superficie libera è quindi  $\mathbf{n} = (-\partial_x \xi, -\partial_y \xi, 1) \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla \xi|^2}} \approx \mathbf{e}_z - \nabla \xi$  al primo ordine. Essendo libera la superficie inoltre, lo sforzo totale  $S_{ij} n_j$  dovrà lì esser nullo, ovvero:

$$\begin{aligned} 0 &= -(P + p)|_{z=d+\xi} n_i + \eta (\partial_i u_j + \partial_j u_i)|_{z=d+\xi} n_j \approx \\ &\approx -(P + p)|_{z=d+\xi} \delta_{i3} - p|_{z=d+\xi} \partial_i \xi + \eta (\partial_i u_j + \partial_j u_i)|_{z=d+\xi} \delta_{j3} \approx \\ &\approx -P|_{z=d} \delta_{i3} - \nabla P|_{z=d} \xi \delta_{i3} - p|_{z=d} \delta_{i3} + \eta (\partial_i w + \partial_z u_i)|_{z=d} \end{aligned}$$

avendo in prima approssimazione sostituito il vettore tangente al primo ordine, e alla seconda si sono fatti gli sviluppi di Taylor delle quantità  $P + p$  e  $\partial_i u_j$  intorno a d e si son trascurati i prodotti di derivate o perturbazioni. Ma per ipotesi, essendo P la pressione del flusso base che è lo stato

di quiete e quindi con superficie libera completamente piana, sarà  $P(d) = 0$  e  $\nabla P|_{z=d} = \rho(d)\mathbf{g} = \rho_0(1 - \alpha(T|_{z=d} - T_+))\mathbf{g}$ . Allora sostituendo tutto, e osservando che anche  $\alpha$  è infinitesimo e quindi il prodotto  $\alpha\xi$  va cancellato:

$$0 \approx \rho_0 g \xi \delta_{i3} - p|_{z=d} \delta_{i3} + \eta(\partial_i w + \partial_z u_i)|_{z=d} \quad (1.11)$$

Per  $i = 1, 2$  otteniamo  $\partial_z u + \partial_x w = \partial_z v + \partial_y w = 0$  a  $z=d$ . La terza componente della (1.11) non è utilizzabile come condizione al contorno, poiché contiene le quantità ignote  $\xi$  e  $p$ ; essa dà:

$$\xi = \frac{1}{\rho g} (p - 2\eta \partial_z w) \approx \frac{1}{\rho_0 g} (p - 2\eta \partial_z w)$$

da cui si nota già che  $\xi$  è infinitesima, perché proporzionale a quantità infinitesime. In variabili adimensionali, dividendo  $\xi$  per la lunghezza tipica  $L$ :

$$\xi = \frac{\alpha \Gamma L}{Ra} \left( \frac{p}{Pr} - 2\partial_z w \right)$$

Ne consegue cioè che per  $Ra$  non infinitesimi, in variabili adimensionali  $\xi$  risulta addirittura di ordine di infinitesimo superiore, poiché prodotto di infinitesimi (il coefficiente  $\alpha$  che moltiplica  $p$  o  $\partial_z w$ ); allora è lecito porre  $\xi = 0$  al primo ordine, risultando così nulle anche tutte le sue derivate: si conferma così a posteriori l'assunzione iniziale, garantendo la consistenza interna nella formulazione delle approssimazioni effettuate. In particolare, alla superficie libera ad ogni istante è  $w = \frac{dz(x_0, t)}{dt} = \frac{d\xi(x_0, y_0, t)}{dt}$  in descrizione lagrangiana, dove  $x_0$  e  $y_0$  sono le posizioni di riferimento per le particelle fluide tali che all'istante  $t$  sono in posizione  $(x, y, d + \xi)$ ; allora in rappresentazione euleriana è  $w|_{z=d+\xi} = \frac{d}{dt} \xi|_{z=d+\xi} = (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \xi|_{z=d+\xi}$ , ma essendo  $\xi = 0$  risulta  $w|_{z=d} = 0$ . Avendo che  $w$  è nulla per ogni  $x$  e  $y$  a  $z=d$ , a questa quota  $\partial_x w = \partial_y w = 0$ , quindi per le condizioni precedenti abbiamo  $\partial_z u = \partial_z v = 0$ , e sostituendo nell'equazione di continuità derivata rispetto a  $z$  rimane  $\partial_z^2 w = 0$ . Tutto ciò, valendo per ogni  $x$  e  $y$ , vale anche per  $\widetilde{W}$ . Introduciamo ora il seguente

**Teorema 1.3.2** (Pellew, Southwell). *Per il sistema di stabilità lineare del problema di Benard (1.9), le perturbazioni con fattore di crescita  $\Im m \omega = 0$  hanno anche  $\Re e \omega = 0$ .*

*Dimostrazione.* Moltiplichiamo la prima delle (1.9) per la temperatura complessa coniugata  $\widetilde{\tau}^*$  e integriamo su tutto lo spessore in  $z$  tra  $-1/2$  e  $1/2$ :

$$\int_{-1/2}^{1/2} \widetilde{\tau}^* (-\partial_z^2 + k^2 - i\omega) \widetilde{\tau} dz = \int_{-1/2}^{1/2} \widetilde{W} \widetilde{\tau}^* dz$$

Integrando per parti e sfruttando che la perturbazione della temperatura, e quindi la sua complessa coniugata, si annullano agli estremi:

$$\int_{-1/2}^{1/2} (|\partial_z \widetilde{\tau}|^2 + K^2) dz - i\omega \int_{-1/2}^{1/2} |\widetilde{\tau}|^2 dz = \int_{-1/2}^{1/2} \widetilde{W} \widetilde{\tau}^* dz \quad (1.12)$$

D'ora in poi per snellire la notazione, indicheremo i due integrali a primo membro rispettivamente  $I_1$  e  $I_0$ , e si ha  $I_1, I_0 \geq 0$ . Similmente, moltiplichiamo la seconda delle (1.9) per  $\widetilde{W}^*$ , integriamo sullo spessore del fluido, e integriamo per parti due volte, sfruttando poi che agli estremi  $\widetilde{W}$  e,

rispettivamente nel caso di parete fissa e superficie libera  $\partial_z \widetilde{W}$  o  $\partial_z^2 \widetilde{W}$ , si annullano così come i loro complessi coniugati:

$$\begin{aligned} & \int_{-1/2}^{1/2} \widetilde{W}^* \left( \partial_z^2 - K^2 + \frac{i\omega}{Pr} \right) (\partial_z^2 - K^2) \widetilde{W} dz = \\ & = \int_{-1/2}^{1/2} \left[ |\partial_z^2 \widetilde{W}|^2 + (2K^2 - \frac{i\omega}{Pr}) |\partial_z \widetilde{W}|^2 + K^2 (K^2 - \frac{i\omega}{Pr}) |\widetilde{W}|^2 \right] dz + [\widetilde{W}^* \partial_z^3 \widetilde{W} - \partial_z \widetilde{W}^* \partial_z^2 \widetilde{W} - (2K^2 - \frac{i\omega}{Pr}) \widetilde{W}^* \partial_z \widetilde{W}]_{-1/2}^{1/2} = \\ & = \int_{-1/2}^{1/2} [|\partial_z^2 \widetilde{W}|^2 + 2K^2 |\partial_z \widetilde{W}|^2 + K^4 |\widetilde{W}|^2] dz - \frac{i\omega}{Pr} \int_{-1/2}^{1/2} [|\partial_z \widetilde{W}|^2 + K^2 |\widetilde{W}|^2] dz = K^2 Ra \int_{-1/2}^{1/2} \widetilde{W}^* \tau dz \end{aligned} \quad (1.13)$$

Anche qui indicheremo per semplificare la notazione i primi due integrali al membro di sinistra dell'ultima riga con  $J_1, J_0$ , rispettivamente, anche qui positivi. Moltiplicando la (1.12) per  $K^2 Ra$  e sottraendole la (1.13):

$$K^2 Ra I_1 - J_1 - i\omega K^2 Ra I_0 - \frac{i\omega^*}{Pr} J_0 = 0$$

La parte reale e immaginaria di questa danno:

$$K^2 Ra I_1 - J_1 + \Im \omega (K^2 Ra I_0 - \frac{1}{Pr} J_0) = 0 \quad - \Re \omega (K^2 Ra I_0 + \frac{1}{Pr} J_0) = 0$$

L'equazione di sinistra dice che, dovendo essere  $Pr > 0$ , per  $Ra < 0$  è necessariamente  $\Im \omega < 0$ , cioè il flusso è sempre stabile perché le perturbazioni decrescono esponenzialmente nel tempo. Questa situazione si può avere solo se  $\Gamma < 0, \alpha > 0$ , cioè se la temperatura della superficie superiore è superiore a quella della superficie bassa, oppure se  $\Gamma > 0$  ma  $\alpha < 0$ , cioè il fluido si dilata raffreddandosi, come avviene per l'acqua tra i  $0^\circ C$  e  $4^\circ C$ . Se invece si è nella situazione  $\Gamma, \alpha > 0$  o  $\Gamma, \alpha < 0$ ,  $Ra > 0$  e dall'equazione di destra abbiamo che  $\Re \omega = 0$ , e questo in particolare varrà anche quando  $\Im \omega = 0$ .  $\square$

Da questo teorema, sappiamo quindi che per cercare i punti neutri nello spazio dei parametri, possiamo porre  $\omega = 0$  nella (1.10): .

$$\left( \partial_z^2 - K^2 \right)^3 \widetilde{W}(z) = -Ra K^2 \widetilde{W}(z) \quad (1.14)$$

essendoci ricondotti così ad un *problema agli autovalori* e la condizione al contorno che contiene  $Pr$  diventa  $(\partial_z^2 - K^2)^2 \widetilde{W} = 0$ . Questo mostra come  $Pr$  non influisca sulla curva neutra del sistema. Inoltre, sappiamo che lo stato neutro è stazionario, poiché è completamente inibito il fattore oscillante nel tempo  $\omega t$ .

Riepilogando le condizioni al contorno, cioè  $\widetilde{W} = \partial_z \widetilde{W} = (\partial_z^2 - K^2)^2 \widetilde{W} = 0$  per la parete fissa e  $\widetilde{W} = \partial_z^2 \widetilde{W} = (\partial_z^2 - K^2)^2 \widetilde{W} = 0$  per la superficie libera a  $z = \pm 1/2$  affrontiamo ora varie condizioni al contorno.

- **Superfici entrambe libere.** E' il caso più semplice risolto analiticamente da Rayleigh. Sepur irrealistico esattamente, si riesce a realizzare approssimativamente in laboratorio. Rayleigh suggerì di cercare prima un set di funzioni che rispettasse le condizioni al contorno, e poi di imporre l'equazione di stabilità. Un sistema ortonormale di funzioni che si annulla-

no a  $z = \pm 1/2$  sono i seni e i coseni; dovendo annullarsi anche le derivate seconde, solo i coseni  $\cos n\pi z$ , con  $n$  naturale non nullo, sono ammissibili. La condizione sulla derivata quarta è automaticamente soddisfatta. Imponendo che questo soddisfi l'equazione di stabilità (1.14) otteniamo  $Ra = \frac{(n^2\pi^2 + K^2)^3}{K^2}$ , con  $Ra_i < Ra_{i+1}$ . Abbiamo quindi diversi autovettori dell'operatore, ognuno con una legge  $Ra(K)$ , ma il critico sarà quello minore, cioè per  $i=1$ . Per trovare il  $K$  che dà il punto di minimo della curva, data l'invarianza per riflessioni lungo  $x$ , possiamo trovare il minimo rispetto a  $K^2$ :

$$\frac{dRa_1}{dK^2} = 0 = \frac{3(\pi^2 + K^2)^2}{K^2} - \frac{(\pi^2 + K^2)^3}{K^4}$$

soddisfatta, scegliendo solo i  $K^2$  positivi perché  $K$  è reale, da  $K^2 = \pi^2/2$ , che inserito in  $Ra(K)$  dà  $Ra = \frac{27}{4}\pi^4 \approx 656$ .

- **Pareti entrambe fisse.** L'equazione caratteristica associata alla (1.14) è  $(\lambda^2 - K^2)^3 = -RaK^2$ , che ha 6 soluzioni  $\lambda(K)$  tutte differenti e complesse coniugate a coppie, di cui due puramente immaginarie ( $\pm i\lambda_0$ ) e le altre opposte in segno ( $\pm\lambda, \pm\lambda^*$ ). Dalla teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, sappiamo quindi che le soluzioni della (1.13) sono della forma  $\sum_{i=1}^6 a_i e^{\lambda_i z}$ , ma per quanto detto sulla forma delle radici della (1.14) si possono scrivere come  $c_1 \sin \lambda_0/2 + c_2 \sinh \lambda/2 + c_3 \sinh \lambda^*/2 + c_4 \cos \lambda_0/2 + c_5 \cosh \lambda/2 + c_6 \cosh \lambda^*/2$ , cioè somma di termini tutti a parità definita, com'era logico aspettarsi dato che la (1.14) è invariante per riflessioni dell'asse  $z$ .

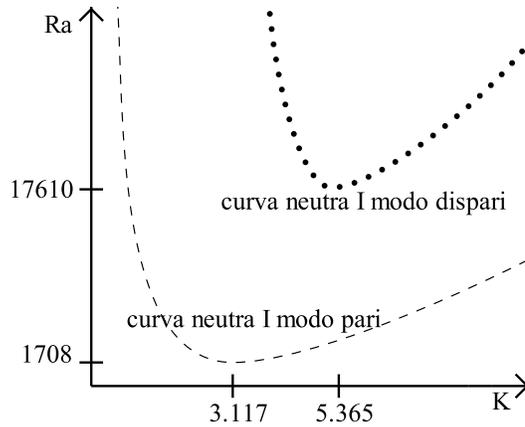
Imponendo le condizioni ai bordi per la generica soluzione, otteniamo un sistema lineare per i 6 coefficienti  $c_j$  del tipo  $\sum_j M_{ij} c_j = 0$ :

$$\begin{pmatrix} \sin \frac{\lambda_0}{2} & \sinh \frac{\lambda}{2} & \sinh \frac{\lambda^*}{2} & \cos \frac{\lambda_0}{2} & \cosh \frac{\lambda}{2} & \cosh \frac{\lambda^*}{2} \\ \lambda_0 \cos \frac{\lambda_0}{2} & \lambda \cosh \frac{\lambda}{2} & \lambda^* \cosh \frac{\lambda^*}{2} & -\lambda_0 \sin \frac{\lambda_0}{2} & \lambda \sinh \frac{\lambda}{2} & \lambda^* \sinh \frac{\lambda^*}{2} \\ (\lambda_0^2 + K^2) \sin \frac{\lambda_0}{2} & (\lambda^2 - K^2) \sinh \frac{\lambda}{2} & (\lambda^{*2} - K^2) \sinh \frac{\lambda^*}{2} & (\lambda_0^2 + K^2) \cos \frac{\lambda_0}{2} & (\lambda^2 - K^2) \cosh \frac{\lambda}{2} & (\lambda^{*2} - K^2) \cosh \frac{\lambda^*}{2} \\ -\sin \frac{\lambda_0}{2} & -\sinh \frac{\lambda}{2} & -\sinh \frac{\lambda^*}{2} & \cosh \frac{\lambda}{2} & \cos \frac{\lambda_0}{2} & \cosh \frac{\lambda^*}{2} \\ -\lambda_0 \cos \frac{\lambda_0}{2} & -\lambda \cosh \frac{\lambda}{2} & -\lambda^* \cosh \frac{\lambda^*}{2} & -\lambda_0 \sin \frac{\lambda_0}{2} & \lambda \sinh \frac{\lambda}{2} & \lambda^* \sinh \frac{\lambda^*}{2} \\ -(\lambda_0^2 + K^2) \sin \frac{\lambda_0}{2} & -(\lambda^2 - K^2) \sinh \frac{\lambda}{2} & -(\lambda^{*2} - K^2) \sinh \frac{\lambda^*}{2} & (\lambda_0^2 + K^2) \cos \frac{\lambda_0}{2} & (\lambda^2 - K^2) \cosh \frac{\lambda}{2} & (\lambda^{*2} - K^2) \cosh \frac{\lambda^*}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix} = 0$$

che per non ammettere soltanto soluzioni banali richiede l'annullamento di  $\text{Det}M$ . Essendo  $M$  del tipo  $\begin{pmatrix} A & B \\ -A & B \end{pmatrix}$ , poiché sommare e sottrarre righe a una matrice non ne cambia il

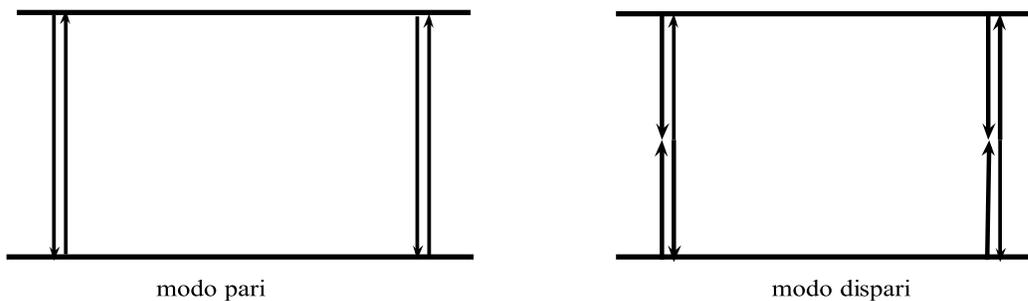
determinante, si può ricondurre alla forma a blocchi  $\begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 2B \end{pmatrix}$  per la quale la condizione di annullamento del determinante è  $\text{Det}A\text{Det}B=0$ , cioè le soluzioni di  $\text{Det}A=0 \cup \text{Det}B=0$  e poiché il minore  $A$  riguarda solo le soluzioni dispari e  $B$  le pari, segue che si hanno due relazioni indipendenti per le curve neutre e due famiglie corrispondenti di autofunzioni distinte dalla loro parità. Da questa condizione si ottengono, necessariamente tramite approcci numerici, varie curve per altrettanti modi normali pari e parallelamente altre per dei modi dispari. Dall'analisi numerica risulta che il primo modo a diventare instabile è il I pari: ciò accade a  $K = 3.117$  e  $Ra_c = 1708$ , nel senso che da  $Ra > Ra_c$ , esiste sempre almeno un modo instabile. Questo è in totale accordo con le osservazioni sperimentali. Un grafico qualitativo della curva neutra del I modo pari e del successivo rispetto ai  $K$  che diventa neutro, il I modo dispari,

è mostrato nella seguente figura.



- **Superficie superiore libera e parete fissa in basso.** Si tratta dell'esperienza di Bénard. Questo caso si affronta nella stessa maniera di quello appena visto. I calcoli sulle condizioni al contorno per i coefficienti portano a un insieme numerabile di curve  $Ra(K)$  delle quali quella associata al I modo è qualitativamente simile a quella del I modo dispari della situazione precedente. Essa inoltre risulta contenere anche in questo caso il  $Ra$  più basso a quale avviene instabilità, che è 1101 e corrisponde a  $K=2.682$ . Il valore critico  $Ra_c = 1101$  è in forte accordo con le osservazioni sperimentali.

Merita di esser discussa brevemente la situazione in cui  $Ra=Ra_c$ , e sperimentalmente per i  $Ra$  di poco superiori a quello critico, poiché i fattori di crescita dei modi instabili son molto piccoli e il flusso è di fatto stabile. Supponiamo di essere solo in due dimensioni, diciamo  $x$  e  $z$ . La velocità  $\mathbf{v}$ , essendoci il fattore  $e^{i(Kx-\omega t)}$ , si annulla periodicamente lungo  $x$  oltre che sulle eventuali pareti. Per tali  $x$ , anche  $w$  sarà nulla per ogni  $z$ , e nel loro intorno avviene un cambiamento di segno di tutte le componenti della velocità. A quota  $z=0$ , è  $w=0$  per i modi dispari, e in quell'intorno si ha un cambiamento di segno lungo  $z$  di  $\widetilde{W}(z)$ ; per i modi pari invece, nei punti  $x$  che non annullano la parte oscillante, a  $z=0$  c'è un massimo per il modulo di  $w$ , poiché la derivata prima di  $\widetilde{W}(z)$  è dispari e quindi in 0 deve annullarsi. Nei punti dove  $w$  si annulla e cambia segno, le particelle fluide vanno in velocità uguale e opposta, creando una compensazione nella corrente di massa. Mettendo insieme queste considerazioni, abbiamo un particolare delle linee di flusso dei *moti convettivi* per le  $x$  in cui  $u$  si annulla, rappresentato nella seguente figura.



Un'analisi dettagliata dei moti convettivi nel problema di Bènard occuperebbe troppo spazio e viene qui omessa. Se studiassimo la forma delle equazioni anche per la componente  $u$ , otterremmo che le linee nel piano  $x$ - $z$  in figura si completano formando delle linee di corrente chiuse, in cui le particelle fluide seguono un moto periodico. Inoltre il flusso sarebbe suddiviso in *celle convettive* delimitate dal fatto che da esse non esce fluido e ai loro bordi  $w=0$ . Naturalmente quelle più importanti, che si vedono sperimentalmente, sono le celle attribuite al I modo pari, poiché per  $Ra=Ra_c$  è l'unico che non decade esponenzialmente nel tempo secondo la nostra analisi. Le celle convettive possono essere rettangolari o quadrate (come facilmente intuibile dalla figura) con linee di flusso anche circolari, contenute all'interno dei quadrati stessi. Tuttavia ciò non deve ingannare: noi abbiamo ottenuto che tutti i modi con  $K^2 = k_x^2 + k_y^2$  hanno la stessa stabilità, ma la forma del flusso stazionario che si ottiene a  $Ra_c$  dopo che i modi stabili son decaduti nel tempo è differente in tre dimensioni a seconda di come viene scomposto  $K$  nelle due direzioni  $x$  e  $y$ . La trasformazione che ci ha permesso di ricondurci a 2 dimensioni era una rotazione degli assi, quindi ciò che abbiamo detto fin ora riguarderebbe una sezione lungo una direzione nel piano  $x$ - $y$  dei moti convettivi completi. Una discussione dettagliata di ciò è presente in [11]. Ci limitiamo solo a dire che in 3 dimensioni si ottengono delle celle convettive a sezioni quadrate o rettangolari analoghe a quelle citate sopra, con all'interno anche dei cilindri convettivi; oltre a queste, si ottengono anche delle celle convettive che nel piano  $x$ - $y$  hanno forma esagonale, e sono quelle che si vedono maggiormente nell'esperienza di Bènard. Tutte queste celle hanno la proprietà di poter riempire periodicamente lungo il piano  $x$ - $y$  lo spazio delimitato dai due contorni. Naturalmente nella realtà questa simmetria per traslazioni è rotta dall'impossibilità sperimentale di avere uno strato infinito di fluido che introduce degli effetti di bordo e dai termini non lineari che per  $Ra$  crescenti superiori a quello critico diventano non più trascurabili e portano a un regime di *transizione alla turbolenza*, in cui le simmetrie tendono a esser rotte.

## 1.4 Il caso euleriano

Studiare la stabilità lineare dei fluidi ideali ha diversi scopi e motivazioni. In primo luogo, permette di valutare come il flusso si comporta nel limite nello spazio dei parametri in cui è considerabile appunto non viscoso e incompressibile (nel caso newtoniano ad esempio,  $Re \rightarrow \infty$  e  $|\partial_i v_j| < \infty$  in modo da trascurare il termine viscoso). Inoltre, ciò rende possibile studiare separatamente la stabilità del flusso lontano dalle interfacce, in cui sono trascurabili in tale limite gli effetti viscosi, e in prossimità delle interfacce, grazie alla teoria dello strato limite di Blasius, di cui noi non ci occuperemo però in questa sede, dove si tiene conto della condizione di aderenza alla parete del fluido e quindi degli effetti viscosi, unendo poi le due soluzioni opportunamente. Ciò è giustificato dal fatto che, come vedremo nel seguito, per un flusso euleriano emergono notevoli proprietà circa la sua stabilità lineare verificabili in maniera molto semplice. Infine, tale analisi permette di capire tramite confronti qual è il meccanismo fisico o matematicamente quale termine delle equazioni di Navier-Stokes è responsabile della stabilità o meno di un certo flusso.

### 1.4.1 Ruolo del termine advettivo nella stabilità

Consideriamo le equazioni del moto per un fluido ideale prive del termine advettivo. Le equazioni per le perturbazioni diverrebbero allora:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \partial_t \mathbf{v} + \nabla p = 0 \end{cases}$$

Si noti come sia scomparsa la dipendenza dal flusso base. Applicando il teorema di Squire, poiché un fluido ideale è un caso particolare di fluido newtoniano con viscosità nulla, si giunge per i modi normali in luogo delle (1.6) alle:

$$\begin{cases} iku(y) + v'(y) = 0 \\ -ikcu(y) + ikp(y) = 0 \\ -ikcv(y) + p'(y) = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Sostituendo  $u$  con  $v'$  nella seconda utilizzando la prima e derivando la relazione risultante per  $y$  si ha:

$$cv''(y) + ikp(y)' = 0$$

Se inoltre si moltiplica la terza per  $-ik$  e si somma alla precedente si ottiene:

$$c(v''(y) - k^2v(y)) = 0$$

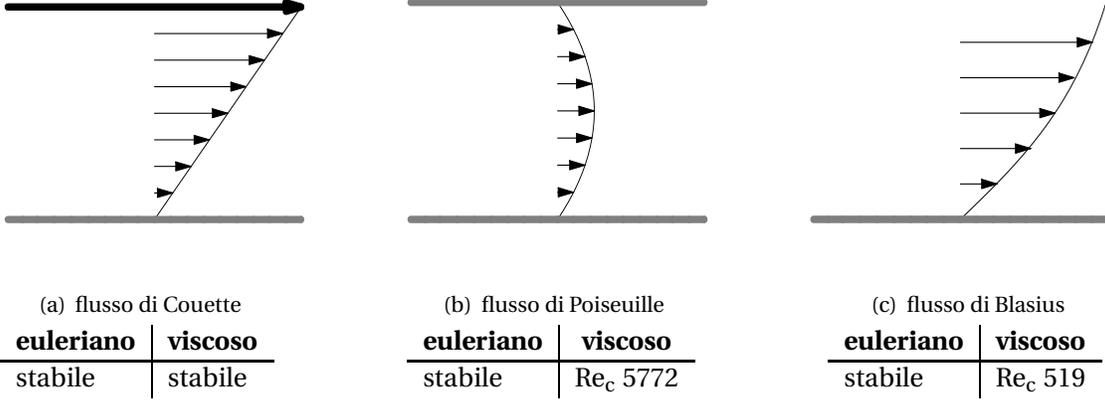
Se  $c \neq 0$ , mettendo a sistema con la prima e la seconda delle (1.7) si ha infine:

$$\begin{cases} v''(y) - k^2v(y) = 0 \\ iku(y) + v'(y) = 0 \\ -cu(y) + p(y) = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Questo sistema quindi ha le stesse soluzioni delle (1.7): si ricava  $v$  risolvendo la prima equazione differenziale e poi si sostituisce nelle altre per avere  $u$  e  $p$ . È evidente quindi come ciò sia possibile per ogni valore di  $c$ : non è presente alcun vincolo  $c(k)$ . La presenza di un'eventuale relazione di dispersione per le perturbazioni infinitesime è allora causata, per un fluido ideale, proprio dal termine non lineare advettivo, che è il solo a dipendere dalla forma del flusso base nelle relazioni per i modi normali (1.6).

Può succedere poi che un flusso abbia un determinato comportamento per il caso euleriano e questo cambi quando si ammettono i termini viscosi. La viscosità per tali flussi ha quindi un ruolo determinante. Consideriamo come esempio i flussi di Couette (quello che si forma tra due piani in moto relativo), Poiseuille (tra due piani fermi in presenza di un gradiente di pressione lungo la direzione del moto) e Blasius (flusso viscoso in un semispazio). I valori critici sono riportati nella seguente tabella e sono presi da [2]. Tutti e tre i flussi sono stabili nel limite euleriano. Dai calcoli effettuati aggiungendo i termini viscosi però risulta che solo il flusso di Couette lo rimane, mentre gli altri sopra un certo numero di Reynolds critico perdono la stabilità: per tali flussi quindi è la viscosità che ha un ruolo destabilizzante. Naturalmente è importante sottolineare ulteriormente che siamo nel regime di perturbazioni infinitesime: infatti dalle osservazioni sperimentali è noto

che anche il flusso di Couette è instabile ad alti numeri di Reynolds, diventando turbolento: l'instabilità di questo flusso è da ricercare nelle perturbazioni di ampiezza non infinitesima, che non permettono di trascurare i termini non lineari delle equazioni di stabilità, oppure in problematiche sperimentali come la dimensione non infinita delle lastre piane. Analogo discorso vale per il flusso di Poiseuille, per il quale la transizione avviene già a  $Re \approx 2510$ , valore confermato da alcuni calcoli che tengono conto degli effetti non lineari [1].



#### 1.4.2 Criteri di Rayleigh e Fjortoft

Riprendiamo le (1.6). La prima di queste, ovvero l'equazione di continuità in due dimensioni per  $u$  e  $v$ , che ovviamente antitrasformando è  $\partial_x u + \partial_y v = 0$ , suggerisce che il campo  $(u, v)$  sia solenoidale e quindi ammetta potenziale vettore, che in questo caso ha solo la componente  $z$  e quindi è equivalente a una funzione scalare, detta *funzione corrente*. Indicandola con  $\Xi(x, y, t)$ , si ha allora  $u = \partial_y \Xi$  e  $v = -\partial_x \Xi$ . Avendo scomposto poi le perturbazioni  $u(x, y, t)$ ,  $v(x, y, t)$  nelle componenti di Fourier  $\tilde{u}(y, k, \omega)e^{i(kx - \omega t)}$ ,  $\tilde{v}(y, k, \omega)e^{i(kx - \omega t)}$ , si ha che per tali modi normali  $\Xi(x, y, t) = \int \tilde{u}(y, k, \omega) dy e^{i(kx - \omega t)} + f(x, k, \omega) = \frac{i}{k} \tilde{v}(y, k, \omega)e^{i(kx - \omega t)} + g(y, k, \omega)$ , cioè confrontando possiamo scrivere anche la funzione corrente in modi normali  $\tilde{\Xi}(y, k, \omega)e^{i(kx - \omega t)}$ , stante che  $\int \tilde{u}(y, k, \omega) dy = \frac{i}{k} \tilde{v}(y, k, \omega)$  che soddisfa la prima delle (1.6). Da ciò otteniamo che  $\tilde{u} = \partial_y \tilde{\Xi}$  e  $\tilde{v} = -ik\tilde{\Xi}$ .

Derivando rispetto a  $y$  e dividendo per  $ik$  la seconda delle (1.6):

$$\tilde{u} \partial_y U + (U - c) \partial_y \tilde{u} - \frac{i}{k} (\partial_y \tilde{v}) (\partial_y U) - \frac{i}{k} \tilde{v} \partial_y^2 U = -\partial_y \tilde{p} + \frac{1}{ikRe} [\partial_y^3 \tilde{u} - k^2 \partial_y \tilde{u}]$$

Sottraendo da quest'ultima la terza delle (1.6) si elimina  $\tilde{p}$ :

$$-ik(U - c) \tilde{v} + \tilde{u} \partial_y U + (U - c) \partial_y \tilde{u} - \frac{i}{k} (\partial_y \tilde{v}) (\partial_y U) - \frac{i}{k} \tilde{v} \partial_y^2 U = \frac{1}{ikRe} [-ik \partial_y^2 \tilde{v} + ik^3 \tilde{v} + \partial_y^3 \tilde{u} - k^2 \partial_y \tilde{u}]$$

Richiamato che  $\tilde{u} = \partial_y \tilde{\Xi}$  e  $\tilde{v} = -ik\tilde{\Xi}$ , si sostituiscono queste due per ottenere un'equazione contenente solo  $\tilde{\Xi}$ :

$$-k^2(U - c) \tilde{\Xi} + (\partial_y \tilde{\Xi}) (\partial_y U) + (U - c) \partial_y^2 \tilde{\Xi} - (\partial_y \tilde{\Xi}) (\partial_y U) - \tilde{\Xi} \partial_y^2 U = \frac{1}{ikRe} [-k^2 \partial_y^2 \tilde{\Xi} + k^4 \tilde{\Xi} + \partial_y^4 \tilde{\Xi} - k^2 \partial_y^2 \tilde{\Xi}]$$

$$(U - c)(\partial_y^2 \tilde{\Xi} - k^2 \tilde{\Xi}) - \tilde{\Xi} \partial_y^2 U = \frac{1}{ikRe} [\partial_y^4 \tilde{\Xi} - 2k^2 \partial_y^2 \tilde{\Xi} + k^4 \tilde{\Xi}] \quad (1.17)$$

La (1.17) è un'equazione differenziale lineare complessa a coefficienti non costanti nota come *equazione di Orr-Sommerfeld*, e permettere di risolvere il problema di stabilità lineare per un fluido viscoso newtoniano piano, parallelo e incompressibile, insieme alle adeguate condizioni al contorno. Ad esempio, per l'adesione ad un'eventuale parete piana a una certa  $\bar{y}$  (ovviamente solo le pareti o le interfacce piane possono permettere un flusso parallelo lungo x), la condizione di annullamento di  $v$ , e quindi di  $\tilde{v} = -ik\tilde{\Xi}$ , si traduce in  $\tilde{\Xi}|_{y=\bar{y}} = 0$ , mentre quella di  $u$ , e quindi di  $\tilde{u} = \partial_y \tilde{\Xi}$ , diventa  $\partial_y \tilde{\Xi}|_{y=\bar{y}} = 0$ . Caso particolare di quest'equazione è il caso *euleriano*, che porta a quella che è nota come *equazione di Rayleigh*:

$$(U - c)(\partial_y^2 \tilde{\Xi} - k^2 \tilde{\Xi}) - \tilde{\Xi} \partial_y^2 U = 0 \quad (1.18)$$

In questo caso, ricordiamo che la condizione su una parete non è più di adesione ma semplicemente di perpendicolarità, quindi per una parete a un certo  $\bar{y}$  si ha semplicemente che lì si annulli  $v$ , cioè  $\tilde{\Xi}|_{y=\bar{y}} = 0$ . Patologia di quest'equazione differenziale, a differenza della precedente, è che per gli  $y$  tali che  $U(y)=c$  l'equazione si abbassa di grado. Pertanto, se si vuole effettuare una sorta di teoria dello strato limite ad alti  $Re$ , unendo poi le soluzioni non viscosa e viscosa fuori dallo strato, bisogna tenere conto anche delle vicinanze a questi *strati critici* a  $y$  costante per questo problema [1,2]. Non occupandoci di ciò, utilizzeremo la (1.18) per andare a dimostrare due importanti condizioni *necessarie* di instabilità per un fluido ideale. Per quanto riguarda il flusso di Couette, ovvero il flusso per cui  $\partial_y^2 U = 0$ , la (1.18) diventa un'equazione banale del secondo ordine risolta da  $\tilde{\Xi} = c_1 e^{ky} + c_2 e^{-ky}$ ; ma la condizione che  $\tilde{\Xi} = 0$  sulle due pareti implica  $\tilde{\Xi} = 0$ . Il flusso pertanto è sempre stabile a livello lineare nel limite euleriano.

**Teorema 1.4.1** (Criterio di Rayleigh). *Condizione necessaria per l'instabilità di un flusso piano, parallelo e ideale del tipo  $(U(y), 0, 0)$  di classe  $C^2$  compreso tra due pareti, è che  $\partial_y^2 U(y)$  cambi segno.*

*Dimostrazione.* Riscriviamo l'equazione di Rayleigh (1.18) nella forma

$$\partial_y^2 \tilde{\Xi} - k^2 \tilde{\Xi} - \frac{1}{U - c} \tilde{\Xi} \partial_y^2 U = 0$$

dove ovviamente abbiamo considerato i modi instabili, per i quali avendo  $c$  parte immaginaria è senz'altro  $U - c \neq 0$ . Moltiplicando per  $\tilde{\Xi}^*$  e integrando tra i due bordi  $\bar{y}_1$  e  $\bar{y}_2$  tenendo conto delle condizioni al contorno illustrate in precedenza si ha per il primo addendo

$$\int_{\bar{y}_1}^{\bar{y}_2} \tilde{\Xi}^* (\partial_y^2 \tilde{\Xi}) dy = [\tilde{\Xi}^* (\partial_y \tilde{\Xi})]_{\bar{y}_1}^{\bar{y}_2} - \int_{\bar{y}_1}^{\bar{y}_2} (\partial_y \tilde{\Xi}^*) (\partial_y \tilde{\Xi}) dy = - \int_{\bar{y}_1}^{\bar{y}_2} |\partial_y \tilde{\Xi}|^2 dy$$

e quindi

$$- \int_{\bar{y}_1}^{\bar{y}_2} (|\partial_y \tilde{\Xi}|^2 + k^2 |\tilde{\Xi}|^2) dy - \int_{\bar{y}_1}^{\bar{y}_2} \frac{1}{U - c} |\tilde{\Xi}|^2 \partial_y^2 U dy = 0 \quad (1.19)$$

Riscrivendo  $\frac{1}{U - c} = \frac{U - c^*}{|U - c|^2}$ , la parte immaginaria della (1.19) dà:

$$(\Im c) \int_{\bar{y}_1}^{\bar{y}_2} \frac{1}{|U - c|^2} |\tilde{\Xi}|^2 \partial_y^2 U dy = 0 \quad (1.20)$$

Questa condizione deve valere per ogni velocità di fase  $c$ ; se sono quindi presenti modi instabili in cui  $\Im c > 0$ , si deve per forza avere un cambio di segno in  $\partial_y^2 U$  nell'intervallo considerato, che implica, data la continuità della derivata seconda, o che sia ovunque nulla o con almeno un punto in cui si annulli.  $\square$

Risulta quindi chiaro ora come mai i flussi di Poiseuille e Blasius siano stabili nel limite euleriano: il profilo del campo di velocità non presenta flessi, ovvero punti in cui la derivata seconda si annulli e cambi segno. Il flusso di Couette ha ovunque  $\partial_y^2 U = 0$ .

Una condizione più forte è il

**Teorema 1.4.2** (Criterio di Fjortoft). *Condizione necessaria per l'instabilità di un flusso piano, parallelo e ideale del tipo  $(U(y), 0, 0)$  di classe  $C^2$  compreso tra due pareti è che  $(U - U_f)\partial_y^2 U < 0$  in qualche punto del dominio del flusso, indicando con  $U_f$  il valore assunto dalla velocità dove  $\partial_y^2 U = 0$ .*

*Dimostrazione.* Prendendo la parte reale della (1.19) si ha:

$$\int_{\bar{y}_1}^{\bar{y}_2} \frac{U - \Re c}{|U - c|^2} |\tilde{\Xi}|^2 \partial_y^2 U dy = - \int_{\bar{y}_1}^{\bar{y}_2} (|\partial_y \tilde{\Xi}|^2 + k^2 |\tilde{\Xi}|^2) dy < 0 \quad (1.21)$$

avendo escluso il caso  $\partial_y^2 U = 0$  ovunque che implica  $\tilde{\Xi} = 0$  e in generale quest'ultima soluzione nulla. Dalla (1.20) si ha inoltre:

$$(\Re c - U_f) \int_{\bar{y}_1}^{\bar{y}_2} \frac{1}{|U - c|^2} |\tilde{\Xi}|^2 \partial_y^2 U dy = 0$$

Sommando quest'ultima alla (1.21) si ottiene

$$\int_{\bar{y}_1}^{\bar{y}_2} \frac{U - U_f}{|U - c|^2} |\tilde{\Xi}|^2 \partial_y^2 U dy < 0$$

e ciò implica che da qualche parte si deve avere  $\frac{U - U_f}{|U - c|^2} |\tilde{\Xi}|^2 \partial_y^2 U < 0$   $\square$

Non è difficile trovare esempi di flussi ideali che soddisfino il criterio di Rayleigh ma non quello di Fjortoft. Un esempio ne è  $U(y) = \tanh y$  compreso tra  $-\frac{1}{2}$  e  $+\frac{1}{2}$ . C'è sì un flesso in  $y=0$ , dove peraltro  $U=0$ , ma la derivata seconda è negativa esattamente dove anche la velocità lo è, e così anche per l'intervallo dov'è positiva: allora  $\frac{U - U_f}{|U - c|^2} |\tilde{\Xi}|^2 \partial_y^2 U \geq 0$ , e il criterio di Fjortoft non è soddisfatto, implicando facilmente che un tale flusso euleriano è sempre stabile.

Quelle illustrate sono come detto, condizioni necessarie e non sufficienti per l'instabilità di un flusso con le suddette caratteristiche. Per completezza, segnaliamo brevemente che esistono analoghi teoremi che danno delle *condizioni sufficienti per la stabilità* di un flusso viscoso riguardante l'equazione di Orr-Sommerfeld delimitato tra due pareti; non rientrando nell'ambito di ciò che andremo a vedere in seguito, ci limitiamo a indicare in [11] un riferimento bibliografico in cui trovarne un'esauriente di trattazione.

## 1.5 Casi non newtoniani

### 1.5.1 Le equazioni di stabilità lineare per fluidi shear-thinning di Carreau-Bird

Avendo illustrato come ottenere le equazioni di stabilità lineare per un fluido newtoniano, vogliamo utilizzare lo stesso metodo per altre classi di fluidi. In particolare, consideriamo qui i fluidi shear-thinning di Carreau-Bird<sup>2</sup>, rimanendo sempre nell'ambito di flussi paralleli, piani e a densità costante. Per quest'ultima ragione, l'equazione di continuità rimane ancora valida, mentre dobbiamo partire dalle nuove equazioni del moto per quanto riguarda la conservazione della quantità di moto. Conviene utilizzare la notazione tensoriale. In coordinate cartesiane:

$$\partial_t V_i + V_j \partial_j V_i = -\frac{1}{\rho} \partial_i P + 2 \partial_j \left[ \left( \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) (1 + 4\lambda^2 D_{ij} D_{ij})^{\frac{n-1}{2}} \right) D_{ij} \right] + \frac{F_i}{\rho} \quad (1.22)$$

in cui abbiamo introdotto le viscosità cinematiche  $\mu_0$  e  $\mu_\infty$ . Le equazioni possono essere quindi molto complicate, ma per un flusso del tipo sinora considerato possiamo arrivare a un'espressione un po' più semplice. Innanzitutto, notiamo che per un flusso del tipo  $\mathbf{V} = (U(y), 0, 0)$ , si ha  $D_{ij} D_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_y U)^2$ . Indipendentemente da ciò passiamo a variabili adimensionali utilizzando  $\mathbf{f} := \frac{\mathbf{FL}}{U^2 \rho}$ , i due numeri di Reynolds  $Re_0 = \frac{UL}{\mu_0}$ ,  $Re_\infty = \frac{UL}{\mu_\infty}$  e il numero di Weissenberg  $Wi = \frac{U\lambda}{L}$ , che rappresenta fisicamente il rapporto tra la costante di tempo della risposta del comportamento non newtoniano del fluido e un tempo caratteristico del flusso stesso. Se  $\mu$  è la viscosità cinematica apparente, si ha allora  $\partial_j [\mu (\partial_i V_j + \partial_j V_i)] = (\partial_j \mu) (\partial_i V_j + \partial_j V_i) + \mu (\partial_i \partial_j V_j + \partial_j \partial_j V_i)$ , ma il termine proporzionale alla divergenza di  $V_i$  può esser cancellato in quanto il fluido è incompressibile. In definitiva allora si ha:

$$\begin{cases} \partial_x P = \left[ \left( \frac{1}{Re_0} - \frac{1}{Re_\infty} \right) \partial_y (1 + 2Wi^2 (\partial_y U)^2)^{\frac{n-1}{2}} \right] \partial_y U - \left[ \frac{1}{Re_\infty} + \left( \frac{1}{Re_0} - \frac{1}{Re_\infty} \right) (1 + 2Wi^2 (\partial_y U)^2)^{\frac{n-1}{2}} \right] \partial_y^2 U + f_x \\ \partial_y P = f_y \end{cases}$$

Per giungere alle equazioni di stabilità lineare bisogna perturbare  $P$  e  $\mathbf{V}$  della (1.22), poi come al solito linearizzare nelle perturbazioni infinitesime, sottrarre il flusso base e infine sostituire i modi normali.

Come prima osservazione, notiamo che solo la parte attribuita allo sforzo viscoso è differente dal caso newtoniano, perciò considereremo solamente quella nel calcolo, per poi aggiungere gli altri termini già noti dalle equazioni di stabilità lineare dei fluidi newtoniani alla fine. Anche qui i campi di forze di volume esterne si cancellano e non partecipano alle proprietà di stabilità. In secondo luogo, notiamo che una volta sostituite le grandezze perturbate, comparirà una viscosità apparente nella forma

$$\mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) (1 + 4\lambda^2 (D_{ij} + d_{ij})(D_{ij} + d_{ij}))^{\frac{n-1}{2}}$$

dove  $d_{ij}$  è il tensore di velocità di deformazione composto dai termini che perturbano la velocità quindi esso stesso infinitesimo dello stesso ordine delle perturbazioni. E' chiaro che questo termine non può essere linearizzato semplicemente trascurando i prodotti di perturbazioni, per via dell'esponente. L'idea è allora quella di effettuare uno sviluppo di Taylor al primo ordine del tipo

<sup>2</sup>Si rimanda all'Appendice B per una breve illustrazione dei modelli più significativi di fluidi non newtoniani.

$\mu = \mu|_{d_{ij}=0} + \frac{\partial \mu}{\partial d_{ij}}|_{d_{ij}=0} d_{ij} + O(d_{ij} d_{ij})$ . Facendo questo si ottiene

$$\mu = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left(1 + 4\lambda^2 D_{ij} D_{ij}\right)^{\frac{n-1}{2}} + 8\lambda^2 (\mu_0 - \mu_\infty) \frac{n-1}{2} \left(1 + 4\lambda^2 D_{ij} D_{ij}\right)^{\frac{n-3}{2}} D_{ab} d_{ab} + O(d_{ab} d_{ab})$$

che, scritto in termini delle velocità, diventa

$$\mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[ \left(1 + 2\lambda^2 (\partial_y U)^2\right)^{\frac{n-1}{2}} + 4 \frac{n-1}{2} \lambda^2 \left(1 + 2\lambda^2 (\partial_y U)^2\right)^{\frac{n-3}{2}} (\partial_y U) (\partial_y u + \partial_x v) \right]$$

Utilizzando questa espressione linearizzata della viscosità apparente, si calcola la componente  $T_x = 2(\partial_x \mu)[\partial_x(u+U)] + (\partial_y \mu)[\partial_x v + \partial_y(U+u)] + (\partial_z \mu)[\partial_x w + \partial_z(U+u)] + \mu \nabla^2(U+u)$  della forza viscosa, si trascurano i prodotti di perturbazioni o loro derivate, e si sottrae poi la componente x della forza viscosa del flusso base. Si ottiene:

$$\begin{aligned} t_x = & 2(-1+n)Wi^2(\partial_y U) \left( \frac{1}{Re_0} - \frac{1}{Re_\infty} \right) \left(1 + 2Wi^2(\partial_y U)^2\right)^{\frac{n-3}{2}} \left\{ 3(\partial_y^2 U)(\partial_y u + \partial_x v) + \right. \\ & \left. + (\partial_y^2 u)\partial_y U + \frac{2(-3+n)Wi^2(\partial_y U)^2 \partial_y^2 U(\partial_y u + \partial_x v)}{1 + 2Wi^2(\partial_y U)^2} + (\partial_y U)\partial_x \partial_y v \right\} + \\ & + \left( \frac{1}{Re_\infty} + \left( \frac{1}{Re_0} - \frac{1}{Re_\infty} \right) \left(1 + 2Wi^2(\partial_y U)^2\right)^{\frac{n-1}{2}} \right) \nabla^2 u \end{aligned} \quad (1.23)$$

Operazioni analoghe vanno fatte con la componente  $T_y = (\partial_x \mu)[\partial_y(u+U) + \partial_x v] + 2(\partial_y \mu)[\partial_y v] + (\partial_z \mu)[\partial_y w + \partial_z v] + \mu \nabla^2 v$

$$\begin{aligned} t_y = & 4(-1+n)Wi^2(\partial_y U)(\partial_y^2 U) \left( \frac{1}{Re_0} - \frac{1}{Re_\infty} \right) \left(1 + 2Wi^2(\partial_y U)^2\right)^{\frac{n-3}{2}} \partial_y v + \\ & + \left( \frac{1}{Re_\infty} + \left( \frac{1}{Re_0} - \frac{1}{Re_\infty} \right) \left(1 + 2Wi^2(\partial_y U)^2\right)^{\frac{n-1}{2}} \right) \nabla^2 v + \\ & + 2(-1+n)Wi^2(\partial_y U)^2 \left( \frac{1}{Re_0} - \frac{1}{Re_\infty} \right) \left(1 + 2Wi^2(\partial_y U)^2\right)^{\frac{n-3}{2}} (\partial_y \partial_x u + \partial_y^2 v) \end{aligned} \quad (1.24)$$

e per la componente  $T_z = (\partial_x \mu)[\partial_z(u+U) + \partial_x w] + (\partial_y \mu)[\partial_z v + \partial_y w] + 2(\partial_z \mu)[\partial_z w] + \mu \nabla^2 w$

$$\begin{aligned} t_z = & 2(-1+n)Wi^2(\partial_y U)(\partial_y^2 U) \left( \frac{1}{Re_0} - \frac{1}{Re_\infty} \right) \left(1 + 2Wi^2(\partial_y U)^2\right)^{\frac{n-3}{2}} (\partial_z v + \partial_y w) + \\ & + \left( \frac{1}{Re_\infty} + \left( \frac{1}{Re_0} - \frac{1}{Re_\infty} \right) \left(1 + 2Wi^2(\partial_y U)^2\right)^{\frac{n-1}{2}} \right) \nabla^2 w \end{aligned} \quad (1.25)$$

E' molto semplice controllare anche ad occhio che per  $n=1$  o  $Wi=0$ , la forza viscosa diventa  $\frac{1}{Re_0} \nabla^2 \mathbf{v}$  come nel caso newtoniano, dove quindi  $\mu_0 = \mu$ ; anche se  $Re_0=Re_\infty$  si riottiene il limite newtoniano, con  $\mu_\infty = \mu$ .

Non resta ora che sostituire alle perturbazioni nelle (1.23-24-25) i modi normali soliti del tipo  $f(x, y, z, t) = \tilde{f}(y) e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}$ , ricordando che anche  $\mathbf{k}$  e  $\omega$  sono adimensionalizzati tramite  $U$  e

L. Si arriva così a:

$$\begin{aligned}
t_x = & 2(-1+n)Wi^2U'' \left( \frac{1}{Re_0} - \frac{1}{Re_\infty} \right) (1+2Wi^2U'^2)^{\frac{n-3}{2}} U' (ik_x \tilde{v} + \tilde{u}') + \\
& 2ik_x(-1+n)Wi^2 \left( \frac{1}{Re_0} - \frac{1}{Re_\infty} \right) (1+2Wi^2U'^2)^{\frac{n-5}{2}} (U'U'' + 2Wi^2U'^3U'') \tilde{v} + \\
& + \left( \frac{1}{Re_\infty} + \left( \frac{1}{Re_0} - \frac{1}{Re_\infty} \right) (1+2Wi^2U'^2)^{\frac{n-1}{2}} \right) (-k_x^2 \tilde{u} - k_z^2 \tilde{u} + \tilde{u}'') + \\
& + 2(-1+n)Wi^2 \left( \frac{1}{Re_0} - \frac{1}{Re_\infty} \right) (1+2Wi^2U'^2)^{\frac{n-5}{2}} \{ \tilde{u}' (U'U'' + 2Wi^2U'^3U'') + U' [ ik_x U' \tilde{v}' + 2ik_x Wi^2 U'^3 \tilde{v}' + \\
& + (ik_x \tilde{v} + \tilde{u}') U'' + 2(-2+n)Wi^2 U'^2 (ik_x \tilde{v} + \tilde{u}') U'' + U' \tilde{u}'' + 2Wi^2 U'^3 \tilde{u}'' ] \}
\end{aligned} \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned}
t_y = & -2k_x(-1+n)Wi^2U'^2 \left( \frac{1}{Re_0} - \frac{1}{Re_\infty} \right) (1+2Wi^2U'^2)^{\frac{n-3}{2}} (k_x \tilde{v} - i\tilde{u}') + \\
& + 4(-1+n)Wi^2 \left( \frac{1}{Re_0} - \frac{1}{Re_\infty} \right) (1+2Wi^2U'^2)^{\frac{n-3}{2}} U'U'' \tilde{v}' + \\
& + \left( -\frac{1}{Re_\infty} - \left( \frac{1}{Re_0} - \frac{1}{Re_\infty} \right) (1+2Wi^2U'^2)^{\frac{n-1}{2}} \right) [(k_x^2 + k_z^2) \tilde{v} - \tilde{v}'']
\end{aligned} \tag{1.27}$$

$$\begin{aligned}
t_z = & 2(-1+n)Wi^2U'U'' \left( \frac{1}{Re_0} - \frac{1}{Re_\infty} \right) (1+2Wi^2U'^2)^{\frac{n-3}{2}} (ik_z v + \tilde{w}') + \\
& + \left( -\frac{1}{Re_\infty} - \left( \frac{1}{Re_0} - \frac{1}{Re_\infty} \right) (1+2Wi^2U'^2)^{\frac{n-1}{2}} \right) [(k_x^2 + k_z^2) \tilde{w} - \tilde{w}'']
\end{aligned} \tag{1.28}$$

dove il ' indica come solito la derivazione rispetto a y Si noti anche qui come per i suddetti casi limite si riottenga l'espressione della parte viscosa dei modi normali nel caso newtoniano.

Le equazioni complete di stabilità lineare per il fluido di Carreau-Bird sono quindi

$$\begin{cases}
ik_x \tilde{u}(y) + \tilde{v}'(y) + ik_z \tilde{w}(y) = 0 \\
-i\omega \tilde{u}(y) + \tilde{v}(y)U'(y) + ik_x U(y) \tilde{u}(y) + ik_x \tilde{p}(y) - t_x(y) = 0 \\
-i\omega \tilde{v}(y) + ik_x U(y) \tilde{v}(y) + \tilde{p}'(y) - t_y(y) = 0 \\
-i\omega \tilde{w}(y) + ik_x U(y) \tilde{w}(y) + ik_z \tilde{p}(y) - t_z(y) = 0
\end{cases} \tag{1.29}$$

tenendo conto delle (1.26-27-28). Il sistema è estremamente complesso come si può vedere, e l'unico modo per ottenerne una soluzione non resta di fatto che l'approccio numerico.

Notare che, a differenza del caso newtoniano dove la seconda equazione dipende a solo da v, qui tutte le equazioni dipendono da più di una componente della velocità della perturbazione in diverse combinazioni. Questo ha conseguenza che non è possibile effettuare nessuna rotazione che trasformi le equazioni di stabilità in una versione equivalente bidimensionale, in altri termini non è possibile estendere il teorema di Squire per questi fluidi. Ciò non deve sorprendere: in generale, tranne pochi casi, non è possibile estendere il teorema di Squire a fluidi non newtoniani, come visibile in [9].

## 1.5.2 Le equazioni di stabilità lineare per fluidi shear-thickening

I fluidi shear-thickening risultano avere una caratterizzazione un po' più semplice, almeno per quanto riguarda le equazioni di stabilità lineare. Difatti, essi hanno una relazione costitutiva del tensore degli sforzi simile al modello di Carreau-Bird, dove si pone però  $\mu_\infty = \frac{1}{\text{Re}_\infty} = 0$ , e da qui ne consegue la semplificazione consistente nel fatto che la stabilità dipende da un parametro in meno. Il numero di Reynolds è uno solo,  $\text{Re} = \frac{UL}{\mu_0}$ . Naturalmente il comportamento sarà molto diverso, perché il range della variabile  $n$  è esattamente il complementare del caso shear-thinning. Comunque, il sistema di stabilità è sempre (1.29), dove però

$$\begin{aligned}
 t_x = & 2(-1+n)U'' \frac{\text{Wi}^2}{\text{Re}} (1+2\text{Wi}^2U'^2)^{\frac{n-3}{2}} U' (ik_x \tilde{v} + \tilde{u}') + \frac{1}{\text{Re}} (1+2\text{Wi}^2U'^2)^{\frac{n-1}{2}} (-k_x^2 \tilde{u} - k_z^2 \tilde{u} + \tilde{u}'') + \\
 & + 2(-1+n) \frac{\text{Wi}^2}{\text{Re}} (1+2\text{Wi}^2U'^2)^{\frac{n-5}{2}} \{ \tilde{u}' (U' U'' + 2\text{Wi}^2 U'^3 U'') + U' [ ik_x U' \tilde{v}' + 2ik_x \text{Wi}^2 U'^3 \tilde{v}' + \\
 & + (ik_x \tilde{v} + \tilde{u}') U'' + 2(-2+n) \text{Wi}^2 U'^2 (ik_x \tilde{v} + \tilde{u}') U'' + U' \tilde{u}'' + 2\text{Wi}^2 U'^3 \tilde{u}'' ] \}
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned}
 t_y = & -2k_x(-1+n)U'^2 \frac{\text{Wi}^2}{\text{Re}} (1+2\text{Wi}^2U'^2)^{\frac{n-3}{2}} (k_x \tilde{v} - i \tilde{u}') + \\
 & + 4(-1+n) \frac{\text{Wi}^2}{\text{Re}} (1+2\text{Wi}^2U'^2)^{\frac{n-3}{2}} U' U'' \tilde{v}' - \frac{1}{\text{Re}} (1+2\text{Wi}^2U'^2)^{\frac{n-1}{2}} [(k_x^2 + k_z^2) \tilde{v} - \tilde{v}'']
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

$$t_z = 2(-1+n)U' U'' \frac{\text{Wi}^2}{\text{Re}} (1+2\text{Wi}^2U'^2)^{\frac{n-3}{2}} (ik_z v + \tilde{w}') - \frac{1}{\text{Re}} (1+2\text{Wi}^2U'^2)^{\frac{n-1}{2}} [(k_x^2 + k_z^2) \tilde{w} - \tilde{w}''] \tag{1.32}$$

Ovviamente nemmeno per questo caso è possibile estendere il teorema di Squire. E' inoltre banale riconoscere che anche qui, nel limite  $n=1$  o  $\text{Wi}=0$  si riottiene il caso newtoniano.

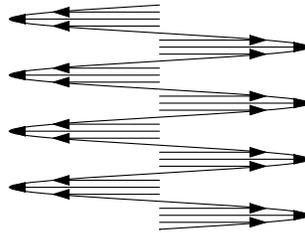


## Capitolo 2

# Il flusso di Kolmogorov

**Definizione 2.1.** Si supponga di avere un flusso bidimensionale compreso in una striscia di lunghezza in  $x$  infinita e in  $y$  di larghezza  $2\pi nL$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , con condizioni periodiche al contorno. Si chiama *flusso di Kolmogorov* il flusso piano parallelo e stazionario avente espressione:

$$\mathbf{v} = \left( U \sin \frac{y}{L}, 0 \right) \quad (2.1)$$



Il flusso di Kolmogorov è importante storicamente per essere stato uno dei primi flussi che Kolmogorov stesso ha studiato per questioni riguardanti la sua teoria sulla turbolenza sviluppata [3]; inoltre, come vedremo, la sua proprietà di periodicità delle condizioni al contorno permetterà di utilizzare approcci perturbativi che permettano risultati calcolabili in maniera esatta sfruttando tale caratteristica.

Il nostro obiettivo è studiarne la stabilità lineare nel caso in cui il fluido sia non newtoniano, in particolare shear-thickening o shear-thinning di Carreau-Bird. Le proprietà di stabilità lineare per il flusso di Kolmogorov newtoniano sono state ben approfondite e capite da tempo, e verranno richiamate brevemente in seguito.

Notare che il problema del flusso di Kolmogorov è *intrinsecamente* bidimensionale, cioè non esiste coordinata  $z$ . Dal punto di vista della stabilità lineare newtoniana, sappiamo che questo è irrilevante per il teorema di Squire; nei casi non newtoniani, non potendo estendere quest'ultimo asserto, la bidimensionalità diventa cruciale. Un flusso di Kolmogorov bidimensionale rappresenta comunque non di un artificio astratto, ma un flusso realizzabile e nel caso newtoniano già realizzato in laboratorio, ad esempio tramite sottili film di sapone [40]. L'argomento è invece totalmente nuovo per quanto riguarda i fluidi non newtoniani.

## 2.1 L'algoritmo numerico per la stabilità lineare

Il nostro approccio numerico è, tramite un metodo alle differenze finite, convertire il sistema (1.29) in un sistema matriciale, che verrà poi risolto con metodi appositi molto semplici data la linearità del problema.

Rimaniamo perciò nella forma di sistema di equazioni differenziali, risolvendo in funzione di velocità e pressione, piuttosto che ricondursi a una singola equazione per la funzione corrente come si era fatto per il caso newtoniano (Orr-Sommerfeld). Infatti, nell'approccio alle differenze finite di cui abbiamo parlato lineare, la comparsa di derivate di alto ordine come nella Orr-Sommerfeld, dove giungono addirittura fino al quarto ordine, numericamente crea maggiori problemi di un sistema di equazioni differenziali di ordine più basso. Nel caso non newtoniano poi, la presenza di derivate di ordine superiore sarebbe ancora maggiore.

Riprendiamo il sistema (1.29), ridotto in due dimensioni:

$$\begin{cases} 0 = ik_x \tilde{u}(y) + \tilde{v}'(y) \\ i\omega \tilde{u}(y) = \tilde{v}(y)U'(y) + ik_x U(y)\tilde{u}(y) + ik_x \tilde{p}(y) - t_x(y) = 0 \\ i\omega \tilde{v}(y) = ik_x U(y)\tilde{v}(y) + \tilde{p}'(y) - t_y(y) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

dove  $\mathbf{t}$  in generale rappresenta la parte di sforzo viscoso considerata nel caso newtoniano o non. Esso rappresenta un sistema di secondo ordine, in quanto nella parte viscosa compaiono  $\tilde{u}''$  e  $\tilde{v}''$ . Come si vede questo può esser scritto come:

$$i\omega \overline{\overline{A}}\mathbf{q} = \overline{\overline{B}}\mathbf{q} \quad (2.3)$$

$\mathbf{q}$  ha come dominio  $\mathbb{R}$  e:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \tilde{u}(y) \\ \tilde{v}(y) \\ \tilde{p}(y) \end{pmatrix} \quad \overline{\overline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{\overline{B}} = \begin{pmatrix} ik_x & \frac{d}{dy} & 0 \\ \dots & \dots & ik_x \\ \dots & \dots & \frac{d}{dy} \end{pmatrix}$$

con gli spazi vuoti nell'operatore  $\overline{\overline{B}}$  che vanno riempiti con le opportune derivazioni, eventualmente a coefficienti non costanti, per riottenere il sistema di equazioni considerato in partenza, sia esso newtoniano o meno. L'equazione (2.3) è detta *problema agli autovalori generalizzato*: per ottenere l'usuale problema agli autovalori, si dovrebbe avere  $\overline{\overline{A}} = \mathbf{I}$ , mentre qui invece è addirittura un operatore non invertibile. Comunque, lo scopo è simile: trovare le  $\omega$  e gli autovettori  $\mathbf{q}$  che soddisfino le suddette equazioni, assegnati  $\overline{\overline{A}}$  e  $\overline{\overline{B}}$ . Naturalmente quest'ultimo dipende da  $k_x$ , per ogni valore del quale quindi si avrà un diverso sistema di autovalori e autovettori.

Per completare la posizione del problema differenziale (2.3), mancano le condizioni al contorno. Come già detto, nel flusso di Kolmogorov si pongono condizioni al contorno periodiche sulle velocità e sulla pressione. Mostriamo che le periodicità necessariamente devono essere multipli di quella del flusso base.

Sia  $T$  il periodo assegnato delle soluzioni tramite le condizioni al contorno. Allora la condizione di periodicità si scrive  $\mathbf{q}(y) = \mathbf{q}(y + nT)$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  e deve necessariamente essere per la

(2.3):

$$\left[ i\omega \overline{\overline{A}}\mathbf{q} \right]_y = \left[ \overline{\overline{B}}\mathbf{q} \right]_y \quad \left[ i\omega \overline{\overline{A}}\mathbf{q} \right]_{y+T} = \left[ \overline{\overline{B}}\mathbf{q} \right]_{y+T}$$

Ma  $\overline{\overline{A}}$  è una matrice costante, quindi, per la periodicità di  $\mathbf{q}$ :

$$\left[ \overline{\overline{A}}\mathbf{q} \right]_y = \left[ \overline{\overline{A}}\mathbf{q} \right]_{y+T} \quad \Longrightarrow \quad \left[ \overline{\overline{B}}\mathbf{q} \right]_y = \left[ \overline{\overline{B}}\mathbf{q} \right]_{y+T} \quad (2.4)$$

$\overline{\overline{B}}$  è costituito da coefficienti, che sono funzione di  $y$  esclusivamente attraverso il flusso base  $U(y)$ , che moltiplicano le derivate di  $\mathbf{q}$ , anch'esse periodiche di periodo  $T$  come si vede calcolando il limite del rapporto incrementale in ogni punto di una funzione periodica derivabile su tutto il suo dominio. Dall'equazione di destra delle (2.4) segue allora che proprio per ognuno dei coefficienti davanti alle derivate che compaiono in  $\overline{\overline{B}}$ , indicati genericamente come delle funzioni  $f_\rho(y)$ , si deve avere necessariamente  $f_\rho(y) = f_\rho(y+T)$ . Questi sicuramente sono invarianti per traslazioni  $y \rightarrow y+2n\pi L$ , ma potrebbero anche avere periodicità minore: ad esempio, se comparisse un coefficiente  $U^2(y)$ , con  $U(y) = U \sin \frac{y}{L}$  si avrebbe  $U^2$  di periodo  $\pi L$  invece di  $2\pi L$ . In particolare, tra i vari termini dell'equazione differenziale (2.3) vi sono sempre quelli provenienti dalla parte advettiva  $U'(y)\tilde{v}(y)$ ,  $ik_x U(y)\tilde{u}(y)$ ,  $ik_x U(y)\tilde{v}(y)$  (vedere il sistema(2.2)), che hanno coefficienti di periodicità esattamente  $2\pi L$ . Allora concludiamo che gli unici  $T$  per le cui traslazioni sono invarianti tutti i coefficienti in modo che possano soddisfare l'equazione a destra delle (2.4) sono  $T=2n\pi L$ . Questo vincola allora ad imporre a  $\mathbf{q}$  una periodicità multipla di quella del flusso base di periodo  $2\pi L$ .

Un'ulteriore osservazione importante è che la periodicità di  $\tilde{u}$  equivale a porre quella di  $\tilde{v}'$ . Infatti, dall'equazione di continuità:

$$\tilde{v}'|_y = -ik_x \tilde{u}|_y = -ik_x \tilde{u}|_{y+T} = \tilde{v}'|_{y+T}$$

Come ultima osservazione, supponiamo di porre un certo  $k$ , e di risolvere il problema agli autovalori generalizzato. Per cercare le soluzioni di  $-k_x$ , basta fare complesso coniugato della (2.2):

$$\begin{cases} 0 = -ik_x \tilde{u}^*(y) + \tilde{v}'^*(y) \\ -i\omega^* \tilde{u}^*(y) = \tilde{v}^*(y)U'(y) - ik_x U(y)\tilde{u}^*(y) - ik_x \tilde{p}^*(y) - t_x^*(y) = 0 \\ -i\omega^* \tilde{v}^*(y) = -ik_x U(y)\tilde{v}^*(y) + \tilde{p}'^*(y) - t_y^*(y) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Si vede che il sistema (2.5) è il (2.2) in cui son stati sostituiti  $k_x \rightarrow -k_x$ ,  $\omega \rightarrow -\omega^*$  e le soluzioni sono complesse coniugate. Quindi :

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ v \\ p \end{pmatrix}_{(-k_x, \omega)} = \begin{pmatrix} \tilde{u}^* \\ v^* \\ p^* \end{pmatrix}_{(k_x, -\omega^*)}$$

Cioè dato un insieme di autovalori e autovettori per un dato  $k_x$ , si conoscono anche quelli per  $-k_x$ ; in particolare, gli autovalori di quest'ultimo, per cui  $\omega(-k_x) = -\omega^*(k_x)$ , mostrano che una perturbazione con numero d'onda opposto ha stesso fattore di crescita ( $\Im \omega$ ) e opposta frequenza angolare, facendo sì che gli esponenziali immaginari siano complessi coniugati per  $k_x \rightarrow -k_x$ , mentre il fattore moltiplicativo di esponenziale reale rimane lo stesso. In un problema di stabilità

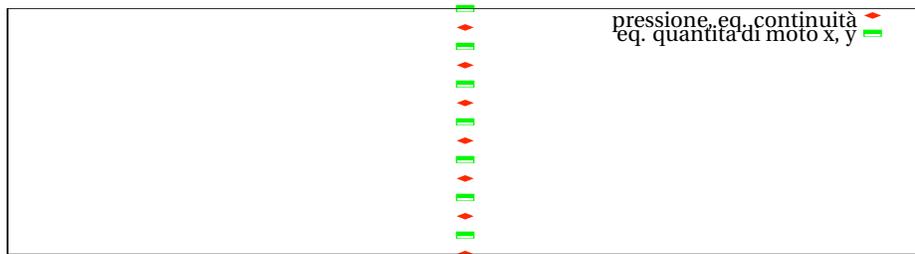
lineare bidimensionale quindi possiamo restringerci solo ai  $k_x$  positivi.

Come già detto, per ogni  $k_x$ , con le condizioni al contorno di periodicità, si otterrà un insieme di autovalori  $\omega$  discreto con i corrispondenti autovettori; quelli che saranno determinanti per la stabilità o meno del flusso saranno quelli che avranno parte immaginaria maggiore, cioè quelli meno stabili.

Adesso siamo pronti alla risoluzione numerica delle (2.3). Innanzitutto, si suddivide l'intervallo di periodicità in  $y = 2\pi nL$  in  $N$  intervalli. Il passo reticolare lungo l'unica direzione  $y$  allora sarà  $\Delta = \frac{2\pi nL}{N}$ , e le soluzioni diventano successioni finite di numeri  $\mathbf{q}(y_i)$ ,  $i = 0, \dots, N$ . Si discretizzano poi le derivate secondo la definizione di *derivata simmetrica*:

$$f'(y_i) = \frac{f(y_{i+1}) - f(y_{i-1}))}{2\Delta}$$

Per ragioni di ottimizzazione numerica è noto che conviene discretizzare l'equazione di continuità e la pressione su un reticolo sfasato di mezzo passo rispetto a quello delle velocità nelle equazioni della quantità di moto, in quanto ciò diminuisce oscillazioni nella pressione dovute alla discretizzazione. Perciò gli  $y_i$  su cui è discretizzata l'equazione di continuità e la pressione equivalgono a  $y_i + \frac{\Delta}{2}$  delle altre equazioni.



Quindi gli  $N$  vettori  $\mathbf{q}_i$  vengono raccolti in un unico vettore colonna, e analogamente dalle  $N$  matrici  $\overline{\overline{A}}_i$  e  $\overline{\overline{B}}_i$  vengono costruite due nuove grandi matrici con i coefficienti disposti in modo tale che in ogni punto  $y_i$  possano costruire le derivate di un membro delle equazioni prendendo tramite il prodotto righe per colonne i necessari valori di  $\mathbf{q}$  nei punti  $y_{i\pm 1}$ ,  $y_{i\pm 2}$ .

Una volta costruite queste grandi matrici, viene risolto il sistema lineare discretizzato ottenuto  $i\omega A'x = B'x$ , dove  $A'$  e  $B'$  sono le nuove matrici ottenute e  $x$  i vettori colonna. A causa della discretizzazione, risulta necessario un altro vincolo per determinare gli autovalori e un sistema di autovettori afferenti. Occorre allora imporre:

$$x_0 = x_N, \quad x_1 = x_{N+1}$$

Esistono numerosi metodi, diretti o iterativi per effettuare tale calcolo, che essendo lineare risulta comunque molto rapido e preciso. Un algoritmo di risoluzione del problema agli autovalori generalizzato discreto, l'algoritmo QZ [41, 42, 43], è comunque disponibile già implementato nelle librerie ZGGEV di Lapack (Linear Algebra Package), che sono quelle che sono state utilizzate per i calcoli numerici che seguiranno.

L'algoritmo numerico non considera il caso in cui  $k_x = 0$ . In questa situazione infatti diversi termini del sistema di partenza si annullano, e le matrici ottenute nella discretizzazione assumono

particolari patologie che rendono mal definite certe operazioni di inversione; in un intorno molto vicino di questo valore ( $1/k_x \gtrsim 10^5$ ) tale patologia fa sì che risultino degli autovalori fittizi estremamente grandi ( $\gtrsim 10^7$ ), che ovviamente non sono realmente legati al limite continuo. Quando si ottengono questi problemi legati ai difetti di discretizzazione dell'algoritmo, si dice che il problema è *mal condizionato* per quei parametri di input che hanno dato origine a quel comportamento errato in quel punto. Esistono altre situazioni in cui si possono ottenere autovalori mal condizionati, la cui presenza dipende anche dal numero di punti con cui si discretizza, i valori di input dei parametri ( $Re_\infty$ ,  $Re_0$ ,  $k_x$ ,  $Wi$ , etc.), situazioni in cui un termine dell'equazione diventa molto più piccolo o molto più grande degli altri (tra cui appunto il caso  $k_x \simeq 0$ ) facendo sì che l'equazione è sbilanciata e l'algoritmo di risoluzione non è più ottimale per la risoluzione del sistema. Problemi cosiddetti *stiff* e situazioni di mal condizionamento sono questioni tipiche da affrontare nell'approccio numerico alla risoluzione di equazioni differenziali. Nelle vicinanze dei valori di input in cui emerge la patologia, il calcolo numerico non può esser ritenuto affidabile.

Evitando il caso  $k_x=0$ , si può scrivere allora  $\omega = k_x c$ , con  $c$  solita velocità di fase, della quale la positività (negatività) della parte immaginaria implica instabilità (stabilità) del flusso.

Il numero di punti con cui si discretizza l'intervallo di periodicità, come vedremo, è fondamentale per la convergenza a un valore vicino a quello del limite continuo, che idealmente è ottenuto per  $\Delta \rightarrow 0$ .

## 2.2 Richiami e risultati noti: la stabilità lineare nel caso newtoniano. Verifiche numeriche.

Richiamiamo brevemente alcuni risultati noti del flusso di Kolmogorov del caso newtoniano. E' semplice osservare innanzitutto che il flusso di Kolmogorov nel caso newtoniano è effettivamente una soluzione delle equazione di Navier-Stokes con imposta una pressione costante in tutto il fluido e una forzante esterna  $\mathbf{f} = (\frac{\eta U}{L^2} \sin \frac{y}{L}, 0)$ , dove  $\eta$  è la viscosità dinamica.

Passiamo a variabili adimensionali utilizzando  $L$  come lunghezza tipica e  $U$  come velocità tipica: il periodo del flusso base ( $\sin y, 0$ ) sarà  $2\pi$ .

Il flusso di Kolmogorov sviluppa instabilità lineare a  $Re > \sqrt{2}$ , come mostrato in [10] tramite un elegante metodo facente uso delle frazioni continue; inoltre, le perturbazioni più instabilizzanti sono *a grande scala* (cioè mediate sulla periodicità del flusso base) puramente trasverse, ossia ha in media solo componente  $v$  ortogonale al flusso di Kolmogorov, che ha solo la componente lungo  $x$ ; infine, l'instabilità che si forma per  $Re \rightarrow \sqrt{2}^+$  è a lunghezza d'onda in  $x$  asintoticamente  $\rightarrow +\infty$ .

Verificare ciò per  $k_x \rightarrow 0$  è molto semplice. Infatti, se si considera l'equazione di continuità nello spazio dei numeri d'onda, mediando sulla periodicità delle soluzioni imposta nelle condizioni al contorno e sfruttando oltre la periodicità anche delle derivate il teorema fondamentale del calcolo integrale  $\langle \tilde{u} \rangle = 0$ . Inoltre:

$$i k_x \tilde{u} + \tilde{v}' = 0 \longrightarrow_{k_x \rightarrow 0} \tilde{v}' = 0 \longrightarrow \tilde{v} = \text{cost.}$$

dove si è effettuato il limite per  $k_x \rightarrow 0$  sfruttando appunto il risultato che la prima perturbazione instabilizzante è asintotica nel numero d'onda e che le velocità considerate sono funzioni limitate.

Ovviamente, in generale per  $1/k_x$  finito la perturbazione del flusso instabile potrebbe acquisire anche in  $v$  un carattere oscillatorio lungo  $y$  a media comunque non nulla.

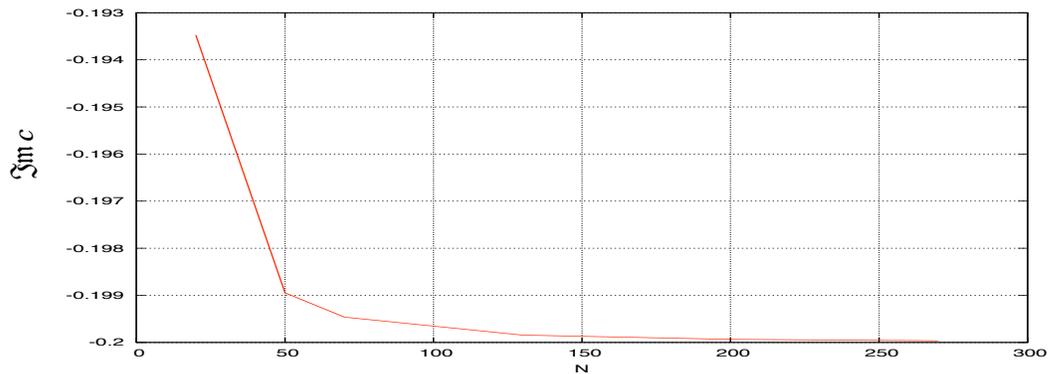
Per verificare che il nostro programma funzioni correttamente, è necessario prima verificare che esso restituisca le proprietà già assodate appena esposte. Nel nostro programma sono state implementate le equazioni shear-thinning, dalle quali per ottenere il caso shear-thickening è sufficiente porre  $\frac{1}{Re_\infty} = 0$  e  $n > 1$ . Com'è stato osservato in precedenza, da esse si riottiene il caso newtoniano imponendo una delle seguenti relazioni:

- $Wi=0$ ;
- $Re_0=Re_\infty$ ;
- $n=1$ .

$Re$  in questa sezione che riguarda il caso newtoniano quindi, corrisponde a  $Re_0$  nel caso  $n=1$  o  $Wi=0$  e  $Re_\infty$  nel terzo caso.

La prima verifica da effettuare è quindi se, imponendo ognuna di queste condizioni, si ottengono i risultati del caso newtoniano.

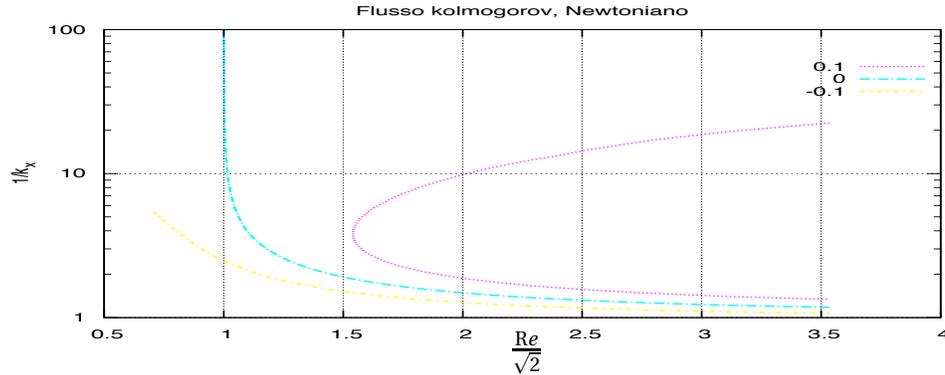
Preliminarmente, occorre guardare a quale risoluzione  $N$  i vari autovalori vanno a convergenza, cioè si asintotizzano verso un valore che presumibilmente sarà quello del limite continuo. E' interessante, come esempio, vedere la dipendenza del fattore di crescita  $\Im m c$  dell'autovalore corrispondente a  $k_x = 1$ ,  $Re=5$ .



Come si vede, a 70 punti la differenza del tasso di crescita con quello a 250 punti è dell'ordine di  $10^{-4}$ , pertanto a 70 punti si è già praticamente a convergenza. Naturalmente tutto dipende anche da quale precisione si desidera dal calcolo e allo stesso tempo quanto tempo si vuole impiegare: difatti, maggiore è la risoluzione, maggiore sono le operazioni nel programma e quindi maggiore è il tempo di calcolo. Occorre quindi un buon compromesso. Ricordiamo, infine, che naturalmente non è sufficiente guardare solo un punto del piano  $Re-\frac{1}{k_x}$  per capire se si è a convergenza: ciò dipende anche da quali regioni di questo piano si considerano. Perché un calcolo sia affidabile in una certa regione dello spazio dei parametri, occorre quindi che almeno in quella regione stessa tutti gli autovalori siano andati sufficientemente a convergenza, entro la precisione richiesta.

Una volta appurata la convergenza, si verifica che per ognuna delle condizioni che portano al caso newtoniano, mantenendo fissa la risoluzione  $N$ , i risultati sugli autovalori e gli autovettori sono *esattamente* gli stessi. Il seguente grafico, ottenuto da un flusso di Kolmogorov newtoniano

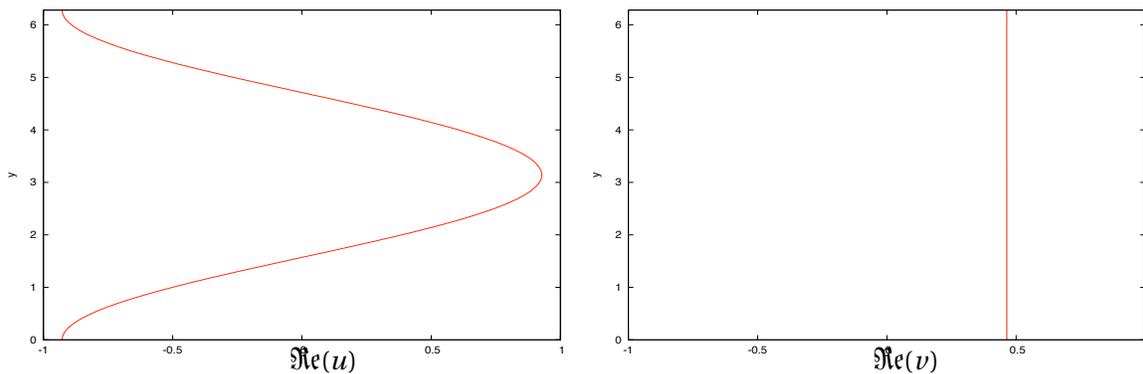
con condizioni periodiche ai bordi della striscia  $y \in [0, 2\pi]$ , rappresenta le curve a fattore di crescita meno stabile costante, ed è lo stesso quindi per ognuno dei tre casi sopra elencati.



Escludendo il caso  $k_x = 0$ , conviene graficare rispetto a  $1/k_x$ , per vedere meglio l'andamento delle curve marginali nell'intorno di  $k_x = 0$ , cioè  $1/k_x = +\infty$ . Si noti quindi come le proprietà di asintoticità della lunghezza d'onda del primo modo che crea instabilità a  $k_x \rightarrow 0$ ,  $Re \rightarrow \sqrt{2}$ , con quest'ultimo che quindi risulta il  $Re$  critico, siano confermate dalla numerica. Il programma fornisce  $Re_c = 1.41443$  con una risoluzione di 70 punti sull'asse  $y$ , con un errore quindi di ordine di grandezza  $10^{-4}$ .

Dai calcoli numerici risulta che, per  $1/k_x$  maggiore di un certo valore che cresce con  $Re$  ma sembra esser compreso tra 0.5 e 1, la frequenza dei modi meno stabili, proporzionale a  $\Re c$ , è 0 (di ordine  $10^{-15} - 10^{-12}$ , abbondantemente compatibile con 0 considerando la precisione di troncamento del programma).

Verifichiamo la trasversalità a grande scala della prima perturbazione instabilizzante, cioè la perturbazione meno stabile della velocità per  $Re \rightarrow \sqrt{2}$ : essa è rappresentata nei seguenti grafici. Essendo i modi normali nella trasformata di Fourier in  $x$  sommati a complessi coniugati perché trasformate di quantità reali, sono significative le parti reali degli autovettori.



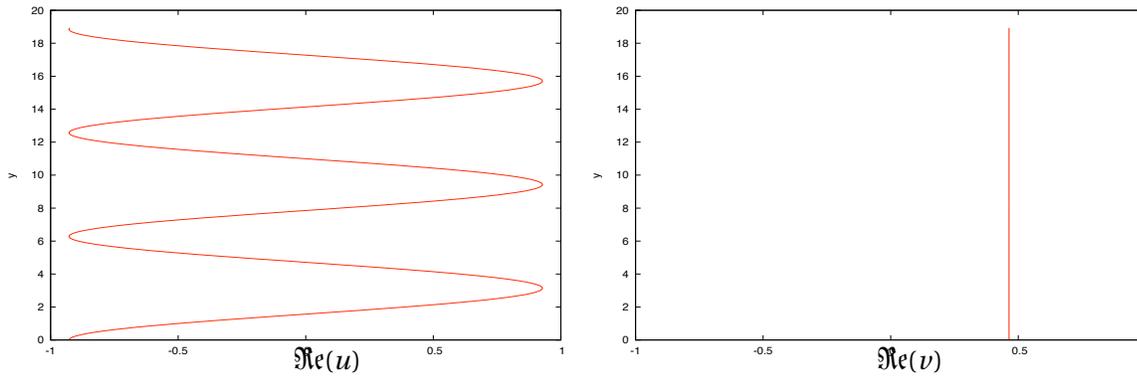
Questo autovettore è quello associato a un numero di  $Re$  e  $1/k_x = 100$  tali che per l'autovalore meno stabile  $\Im m(c) = 0.000499996$ . Come si vede,  $u$  oscilla come il flusso base sfasato di  $\pi/2$  (il massimo del modulo della perturbazione è nel minimo del flusso base), mentre  $v$  rimane costante.

Mediando sulla periodicità, si ottiene  $\langle u \rangle = 0$  e  $\langle v \rangle = \text{cost.}$ , confermando il risultato di trasversalità della prima perturbazione instabilizzante *a grande scala* mediata su quella piccola (la periodicità del punto fisso di Kolmogorov).

Come già detto nel programma numerico sarà effettuabile la scelta di una striscia larga un multiplo di  $2\pi$ . Bisogna quindi verificare che la distanza dei punti su cui si fissano le condizioni al contorno sia ininfluenza sui risultati della stabilità. Per fare ciò, abbiamo imposto che la periodicità fosse fissata a 0 e  $6\pi$ . Naturalmente, per ottenere risultati paragonabili, occorre che il passo reticolare  $\Delta$  sia uguale, e quindi va triplicato anche il numero di punti in cui si suddivide la striscia in  $y$ .

Il grafico della curva marginale risulta ad occhio lo stesso riportato sopra: gli autovalori meno stabili risultano infatti avere una differenza di ordine  $10^{-9}$  rispetto al calcolo con periodo  $2\pi$ , che è molto minore della precisione numerica alla risoluzione in cui ci siamo posti.

L'autovalore meno stabile per la stessa coppia di parametri utilizzata per i grafici delle velocità su un periodo illustrati sopra risulta  $\Im m(c) = 0.000499996$ , quindi con la sopra citata differenza di  $10^{-9}$  rispetto al calcolo su  $2\pi$ . La parte reale delle velocità associata a quest'autovalore è rappresentata nelle seguenti figure.



Come si vede quindi, le velocità risultano identiche, avendo imposto che le ampiezze agli estremi della striscia  $[0, 6\pi]$  fossero uguali per rendere più semplice all'occhio il confronto. Le differenze tra i valori assunti da queste funzioni e quelle nel caso di  $2\pi$  sono ancora difatti dell'ordine di  $10^{-9}$ . Questo mostra anche come, almeno per il caso newtoniano, il risultato non dipenda dalla larghezza della striscia, essendo le periodicità delle autofunzioni associate all'autovalore meno stabile le stesse del flusso base. Analogo risultato sarà valido allora anche per la pressione.

Il fatto che  $u$  abbia periodicità uguale a quella del flusso base si può vedere analiticamente. Dai calcoli numerici si vede che  $|c|$  è limitato. La seconda delle (1.6) allora diventa:

$$-ikc\tilde{u} + \tilde{v}U' + ikU(y)u + ik\tilde{p} - \frac{1}{\text{Re}}[-k^2\tilde{u} + u''] = 0 \quad \rightarrow_{k_x \rightarrow 0} \tilde{v}U' = \frac{1}{\text{Re}}\tilde{u}''$$

Da quest'ultima, essendo  $\tilde{v}$  costante e tenendo conto della condizione al contorno di periodicità e imponendo che si annulli la media sul periodo, che è multiplo di  $2\pi$ :

$$\tilde{u}_{k_x \rightarrow 0} \propto -\tilde{v} \cos y$$

cioè la prima perturbazione di velocità instabile risulta costante nella componente y e a media nulla e con stesso periodo del flusso base nella componente x, con le velocità aventi segno opposto in  $y=0$ .

## 2.3 La stabilità lineare in casi non newtoniani

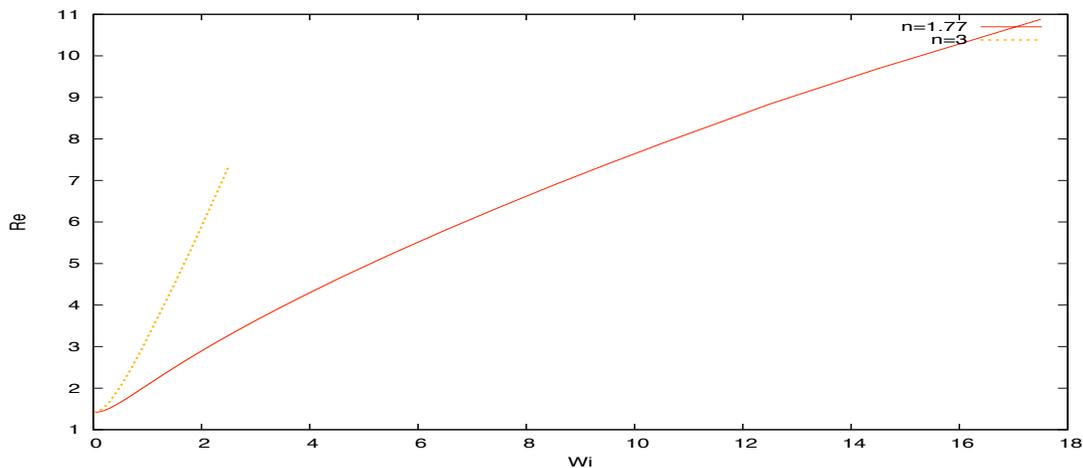
Nel caso non newtoniano più ci si allontana dal caso newtoniano più occorre aumentare la risoluzione per andare a convergenza numerica. Questo è dovuto al fatto che mano mano che ci si allontana dal limite newtoniano i termini delle equazioni diventano uno più grande o più piccolo dell'altro, e quindi occorre un numero di punti maggiore per avere un calcolo sufficientemente preciso, specialmente nella zona  $1/k_x \rightarrow \infty$ . Queste situazioni comportano l'aumento del tempo di calcolo.

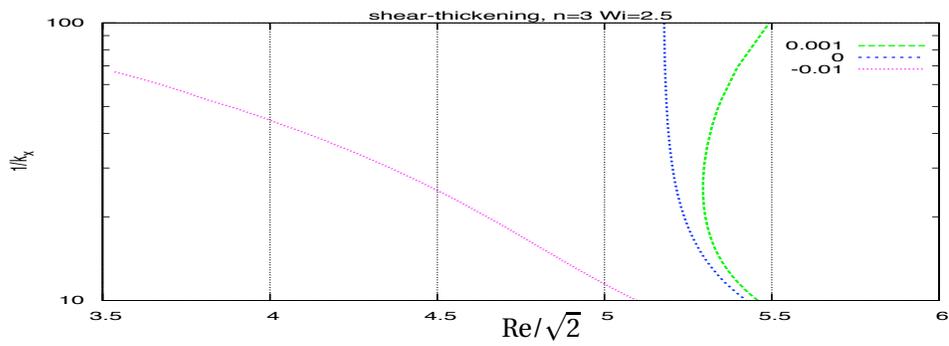
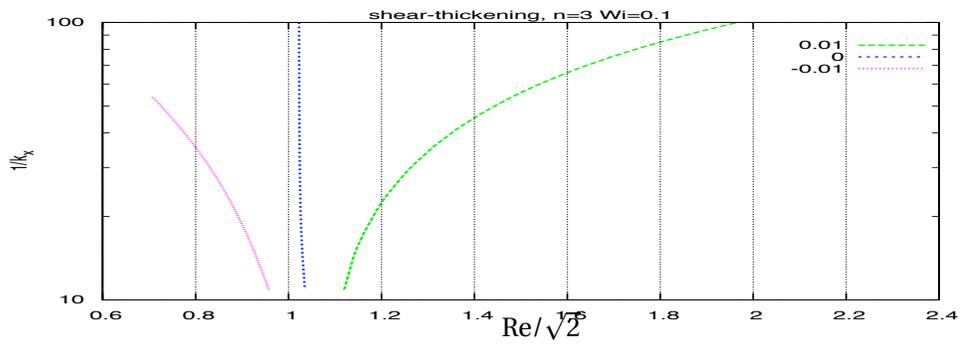
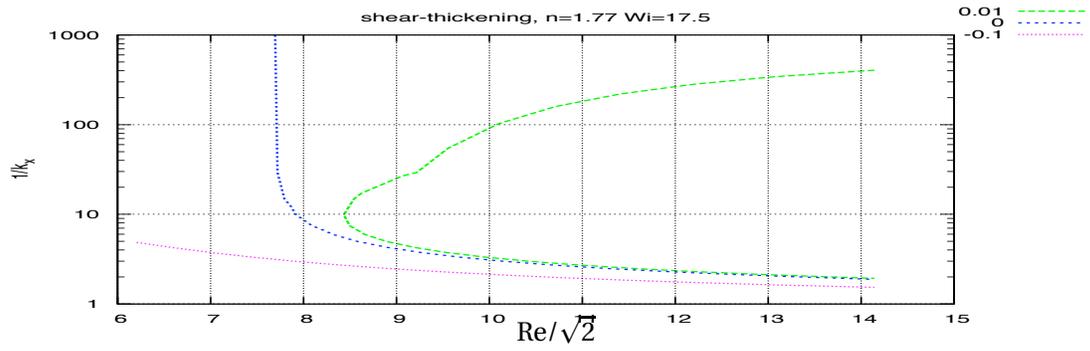
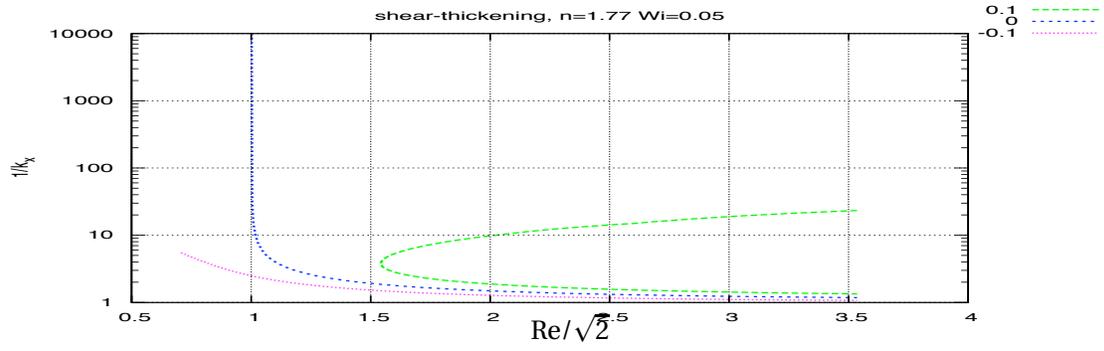
### 2.3.1 Shear-thickening

Anche nel caso shear-thickening il flusso di Kolmogorov è un punto fisso delle equazioni di Navier-Stokes, con una pressione costante in tutto lo spazio e con la forzante esterna avente espressione:

$$\mathbf{f} = \left( \eta_0 \frac{n-1}{2} 4\lambda^2 \frac{U^3}{L^4} \sin \frac{y}{L} \cos^2 \frac{y}{L} \left( 1 + 2\lambda^2 \frac{U^2}{L^2} \cos^2 \frac{y}{L} \right)^{\frac{n-3}{2}} + \eta_0 \left( 1 + 2\lambda^2 \frac{U^2}{L^2} \cos^2 \frac{y}{L} \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{U}{L^2} \sin \frac{y}{L}, \quad 0 \right)$$

Sono di seguito illustrati i calcoli per  $n=1.77$  e  $n=3$ . Il Re critico, che per  $Wi=0$  è  $\sqrt{2}$ , cresce illimitatamente in maniera tanto più veloce quanto  $n$  è maggiore di 1. Questo significa che la parte viscosa shear-thickening ha un effetto stabilizzante sulla dinamica del flusso. Risulta sempre asintotica la prima perturbazione instabile e ancora le frequenze rimangono nulle per un  $1/k_x > a$ , con  $a$  che varia debolmente con Re, ma che comunque risulta esser sempre minore di 1. Nel grafico delle curve marginali nel piano Re-Wi, la parte del piano sottesa dalle curve rappresenta il flusso stabile.

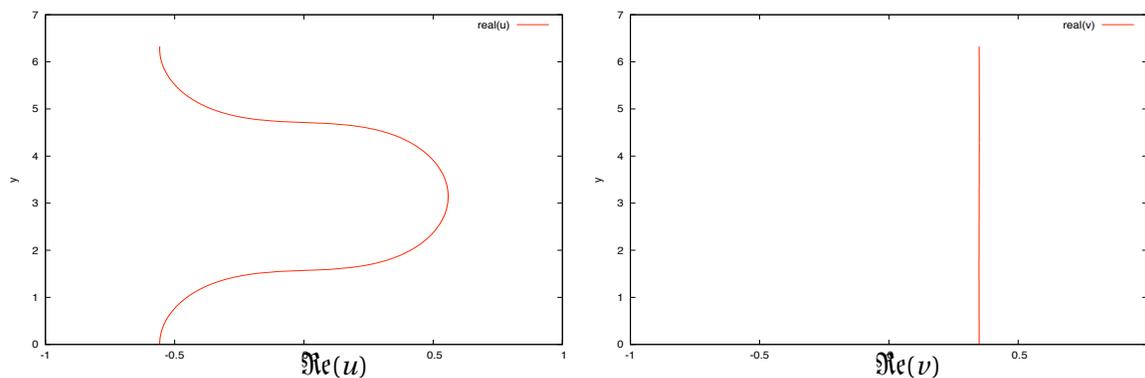


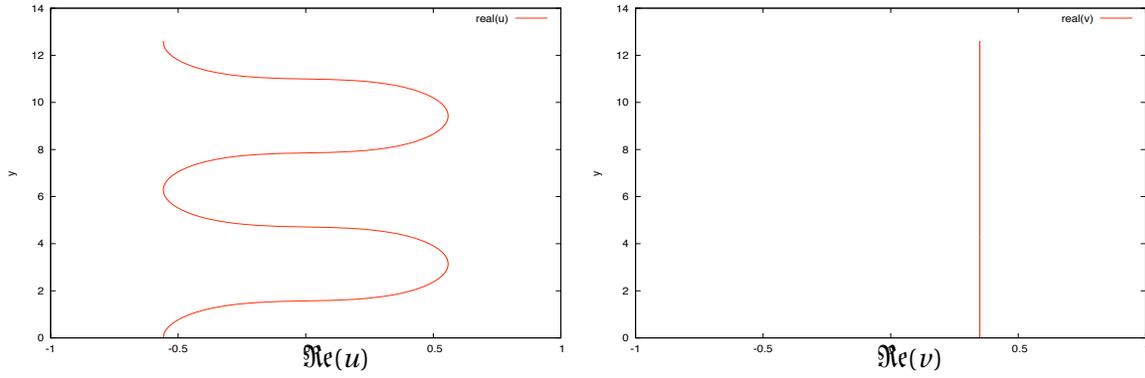


Si può osservare come l'unico ramo presente nelle curve marginali sia quello asintotico che non interseca mai l'asse  $\text{Re}=0$ . Pertanto questo modello fenomenologico di fluido shear-thickening non contiene fenomeni di *turbolenza elastica*, ovvero turbolenza originata da instabilità a  $\text{Re}$  arbitrariamente bassi sopra un certo numero  $\text{Wi}$ , oltre al quale il fluido assume sempre un comportamento caotico. Di questi fenomeni, caratteristici di alcuni fluidi sia shear-thickening sia shear-thinning, si sa molto poco e rappresentano quindi un interessante ramo attivo di ricerca attuale. Ad oggi, pur essendo essi stati esser riprodotti in diverse esperienze di laboratorio, dal punto di vista teorico reologico gli unici modelli che prevedono questo fenomeno sono fluidi con disciolti grossi polimeri (il più semplice dei quali è il modello di Oldroyd-B), i quali posseggono una costante di tempo di rilassamento. Quest'ultima fa sì che il fluido abbia non una risposta istantanea ai cambiamenti delle condizioni al contorno o dell'entità delle forzanti esterne e quindi possa presentare fenomeni di isteresi, in quanto le sue proprietà dipendono dalla storia precedente in un intervallo di tempo confrontabile con la costante di tempo stessa [34-35-36-37-38-39].

E' interessante chiedersi, anche in questo caso, com'è il comportamento della perturbazione instabilizzante della velocità a  $\text{Re} \rightarrow \text{Re}_c^+$ , che si troverà ancora per  $k_x \rightarrow 0$  data la condizione di asintoticità. Innanzitutto, è banale verificare preliminarmente già per via analitica che valgono ancora le proprietà che discendono dall'equazione di continuità:  $u$  è ancora a media nulla sulla periodicità delle soluzioni (piccola scala) e  $v$  è costante. Resta da verificare se continua a valere il fatto che le autofunzioni sono con periodicità  $2\pi$  e quindi la periodicità stessa non dipende dalla larghezza della striscia. Come campione, prendiamo il caso  $n=1.77$ , con il  $\text{Wi}=17.5$ , il più distante dal caso newtoniano, a  $1/k_x = 100$  e  $\Im m c = 1.67047 \cdot 10^{-5}$ . Il calcolo è stato effettuato su  $[0, 2\pi]$  e  $[0, 4\pi]$ .

Si ottiene che le velocità risultano identiche, avendo imposto che le ampiezze agli estremi della striscia  $[0, 4\pi]$  fossero uguali per rendere più semplice all'occhio il confronto. Le differenze tra i valori assunti da queste funzioni e quelle nel caso di  $2\pi$  sono ancora difatti dell'ordine di  $10^{-9}$ . Questo mostra anche come, anche per il caso shear-thickening, il risultato non dipenda dalla larghezza della striscia, essendo le periodicità delle autofunzioni associate all'autovalore meno stabile le stesse del flusso base. Analogo risultato sarà valido allora anche per la pressione. Le velocità in  $y=0$  risultano essere di segno opposto.





E' confermato che, almeno vicino all'asintoto, quindi per l'instabilità che determina il valore minimo di Re a cui il flusso diventa instabile, la larghezza della striscia non è rilevante.

### 2.3.2 Shear-thinning

Anche nel caso shear-thinning il flusso di Kolmogorov è un punto fisso delle equazioni di Navier-Stokes, con una pressione costante in tutto lo spazio e con la forzante esterna avente espressione:

$$\mathbf{f} = \left( (\eta_0 - \eta_\infty) \frac{n-1}{2} 4\lambda^2 \frac{U^3}{L^4} \sin \frac{y}{L} \cos^2 \frac{y}{L} \left( 1 + 2\lambda^2 \frac{U^2}{L^2} \cos^2 \frac{y}{L} \right)^{\frac{n-3}{2}} + (\eta_0 + (\eta_0 - \eta_\infty) \left( 1 + 2\lambda^2 \frac{U^2}{L^2} \cos^2 \frac{y}{L} \right)^{\frac{n-1}{2}} \right) \frac{U}{L^2} \sin \frac{y}{L}, 0 \right)$$

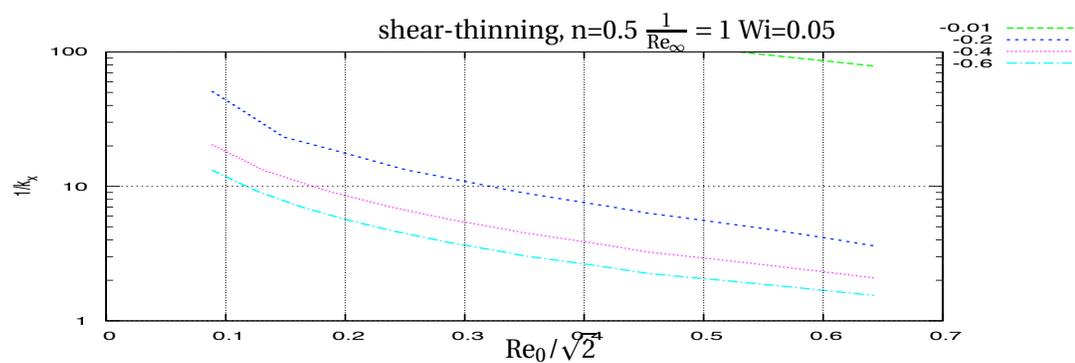
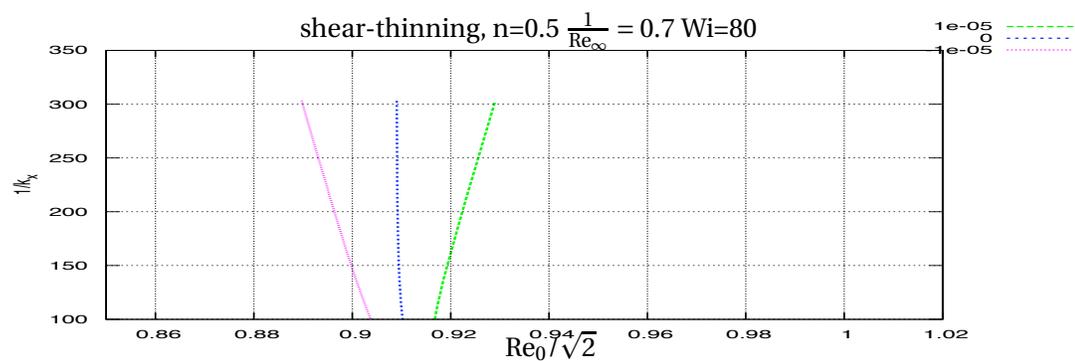
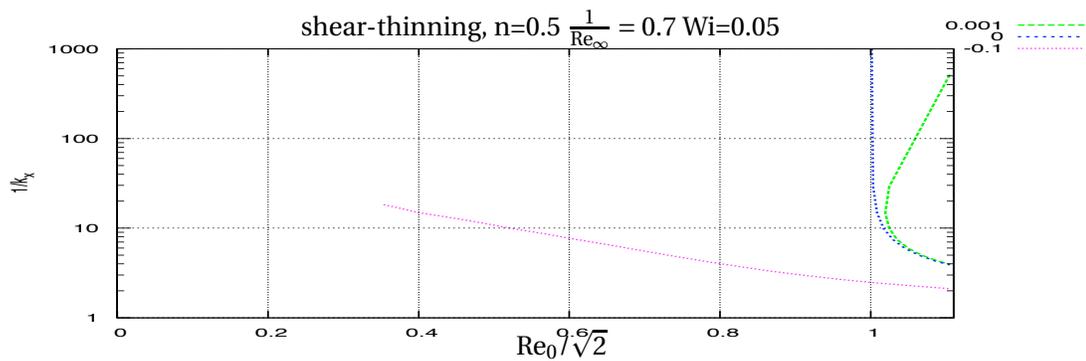
Nel caso shear-thinning abbiamo sempre il vincolo che  $\eta_0 \geq \eta_\infty$ ; questo implica che  $\frac{1}{Re_0} \geq \frac{1}{Re_\infty}$  e quindi  $Re_0 \leq Re_\infty$ . Prima di effettuare i calcoli possiamo quindi osservare che, poiché per quanto detto precedentemente quando  $Re_0 = Re_\infty$  la viscosità apparente dà origine a un fluido newtoniano con  $Re = Re_\infty$ , e poiché per un fluido newtoniano si ha  $Re_c = \sqrt{2}$ , quando  $Re_\infty = C > \sqrt{2}$  per il valore massimo consentito di  $Re_0 = C$  si avrà che il fluido avrà un comportamento newtoniano con numero di Reynolds  $Re = C > \sqrt{2}$  e pertanto sarà instabile per ogni  $Wi$ . Quando  $Re_\infty = \sqrt{2}$ , per il valore massimo di  $Re_0 = \sqrt{2}$  si ha che il flusso si comporta come un fluido newtoniano con numero di Reynolds  $\sqrt{2}$  che è esattamente il più grande  $Re$  in cui si hanno tutti i modi stabili eccetto quello asintotico a  $k_x = 0$  neutro, pertanto non è più instabile ed anzi tende asintoticamente nel tempo ad uno stato neutro per qualunque  $Wi$ . Per  $Re_\infty = c < \sqrt{2}$  infine, quando anche  $Re_0$  assume il valore massimo possibile  $c$ , il flusso si comporta come un fluido newtoniano con  $Re = c < \sqrt{2}$  e pertanto è stabile indipendentemente da  $Wi$ .

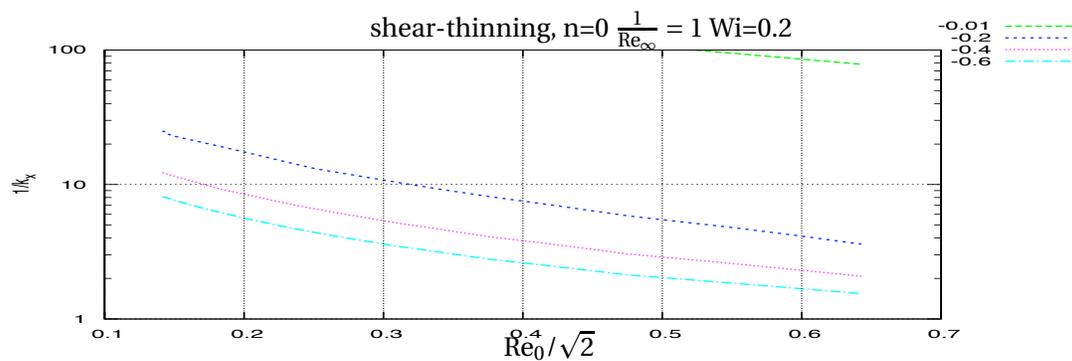
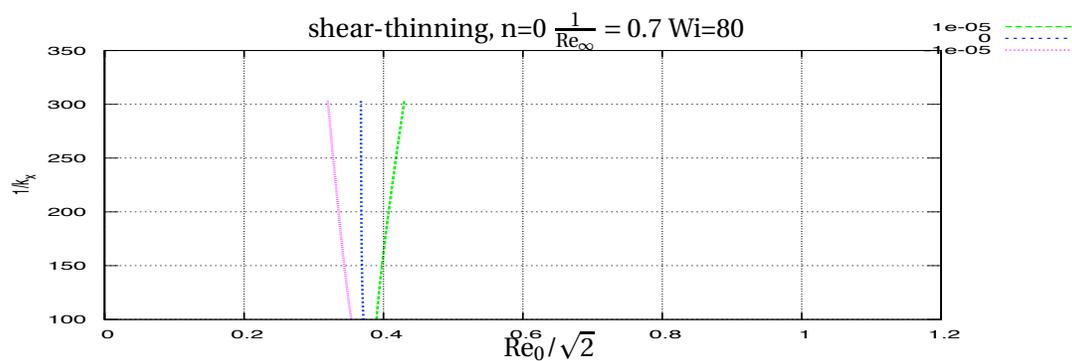
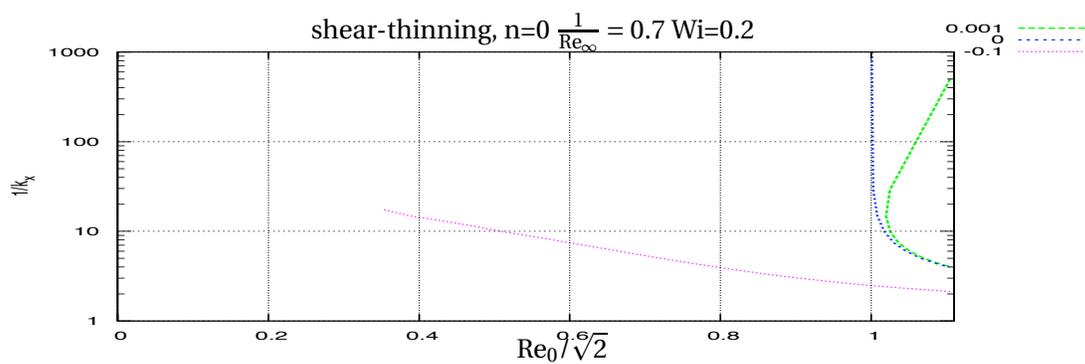
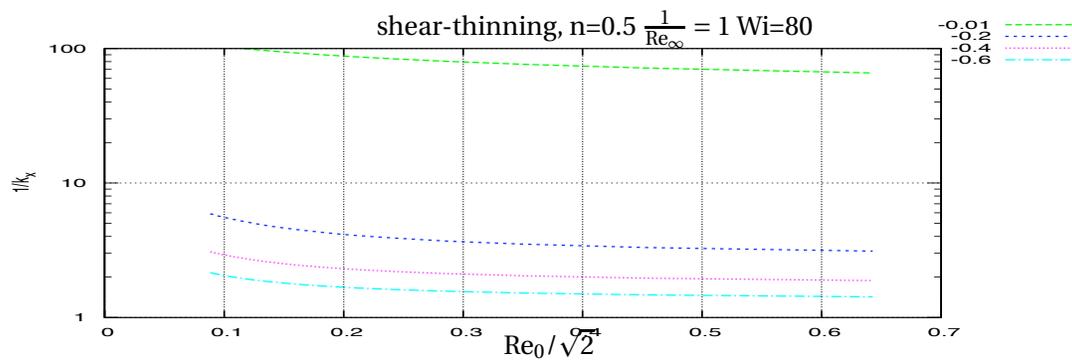
Per quanto riguarda lo spazio dei parametri in generale, si è scelto per ogni  $n$  di tener fisso  $Re_\infty$  e a sua volta effettuare una casistica su  $Wi$  per poi graficare rispetto a  $Re_0$  e  $1/k_x$ . Successivamente si metteranno tutti i dati insieme e si discuteranno disegnando le curve di livello della superficie marginale  $f(Re_0, Re_\infty, Wi) = 0$  per alcuni  $n$  (nel nostro caso,  $n=0.5$  e  $n=0$ ).

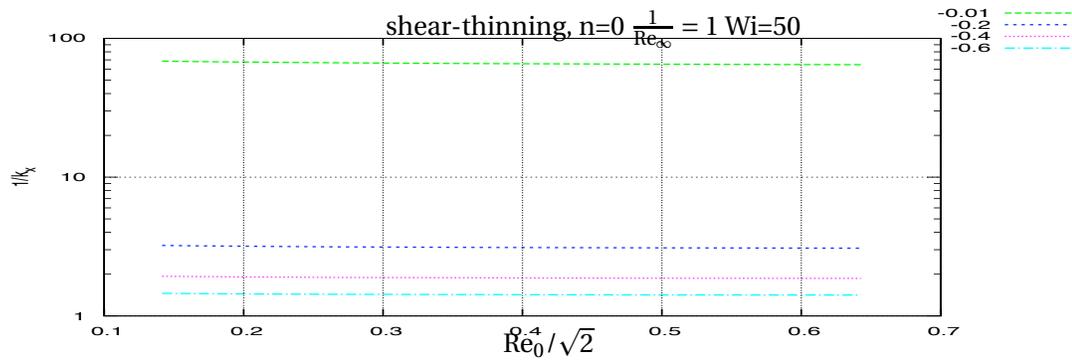
Quel che si osserva comunque è che fissati  $n$  e  $Re_\infty > \sqrt{2}$ , la marginale nel piano  $Re_0 - \frac{1}{k_x}$  presenta ancora asintoto per  $k_x \rightarrow 0$ . Aumentando  $Wi$ , essa si sposta verso  $Re_0=0$ , in maniera asintotica, partendo ovviamente da  $\sqrt{2}$ . Questo avviene sempre più lentamente diminuendo  $Re_\infty$  partendo dall'infinito. Quando si è vicini al valore  $Re_\infty = \sqrt{2}$ , l'asintoto si muove infatti di pochissimo verso sinistra anche per  $Wi$  molto grandi, come si può vedere dai grafici con  $\frac{1}{Re_\infty} = 0.7$ . Si

tratta sempre di instabilità idrodinamiche e non elastiche, poiché la marginale non interseca mai l'asse  $Re_0=0$ , e idealmente almeno, esiste sempre un  $Re_0$  estremamente piccolo per il quale il flusso base è stabile. Poi, per le considerazioni fatte precedentemente, a  $Re_\infty \leq \sqrt{2}$  il flusso smette di essere instabile per qualsiasi valore ammesso di  $Re_0$ . Diminuendo  $n$  aumenta semplicemente la velocità con cui l'asintoto verticale della curva neutra si sposta da  $\sqrt{2}$  a 0 per  $Wi \rightarrow \infty$ . Infine, ancora le frequenze rimangono nulle per un  $1/k_x > a$ , con  $a$  che varia debolmente con  $Re_0$  ma tale che quelli a frequenza non nulla son sempre modi stabili.

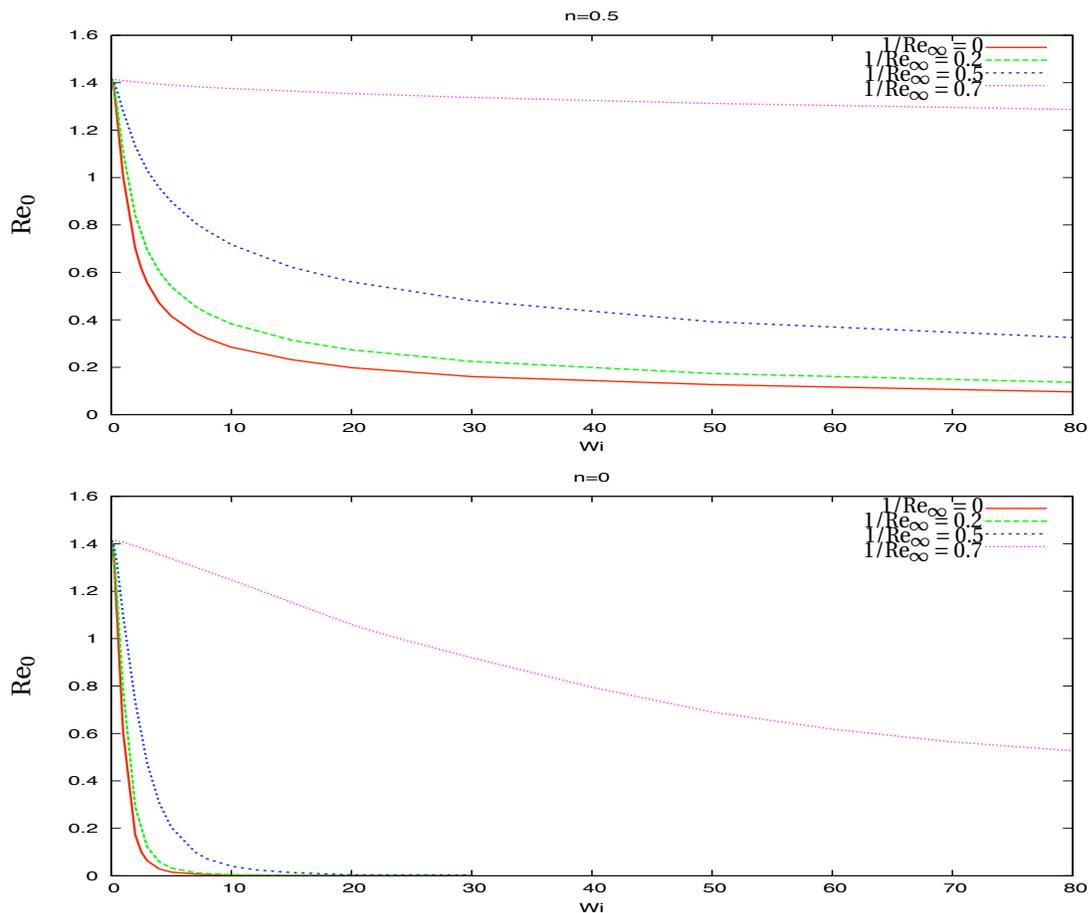
Ricordiamo ancora che è da considerare solo la striscia di piano  $Re_0 < Re_\infty$ .







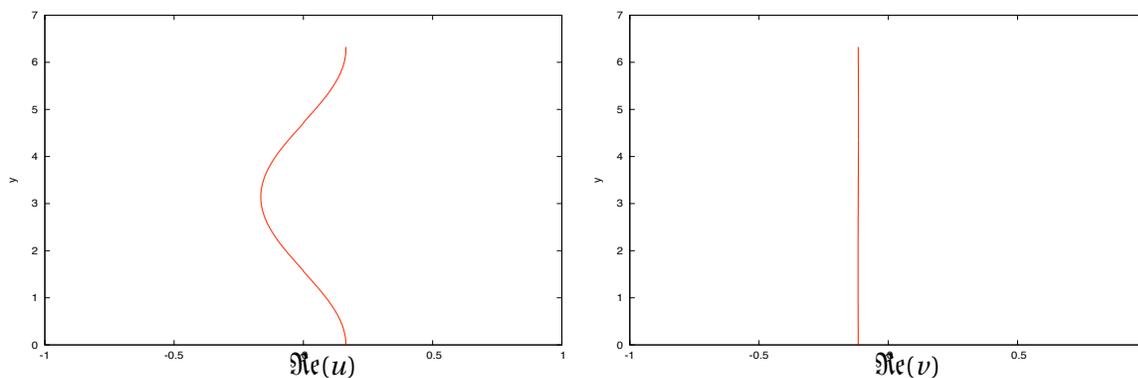
La parte viscosa non newtoniana del fluido in questo caso ha quindi un effetto destabilizzante fino a che  $Re_\infty > \sqrt{2}$ , mentre è stabilizzante per valori minori. Seguono le curve marginali nei piani  $Re_0$ - $Wi$  a  $n$  fissato e per alcuni  $\frac{1}{Re_\infty} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ . La regione sottesa dalla curva rappresenta la zona di punto fisso stabile.



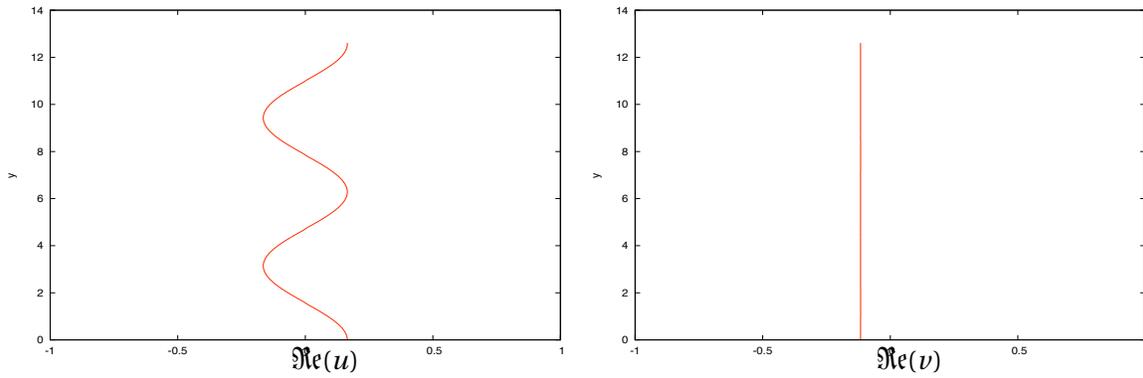
Effettuando però il  $\lim_{Wi \rightarrow \infty}$  sulle equazioni di stabilità lineare e non sulle soluzioni, che appunto analiticamente non sappiamo calcolare, troviamo un caso di fluido newtoniano con  $Re_y$

nolds  $Re_\infty$ , che quindi rimarrebbe instabile per ogni  $Re_\infty > \sqrt{2}$  e non viene data nessuna informazione su  $Re_0$ . Questo significa che potenzialmente siamo in presenza di un *limite singolare* del problema: eseguire il limite prima sulle equazioni è diverso che eseguirlo alla fine del calcolo sulle soluzioni esatte<sup>1</sup>. Lo studio dei limiti singolari e delle singolarità delle soluzioni prodotte da punti in cui i coefficienti di un'equazione differenziale sono anch'essi singolari o si annullano è molto importante nella teoria delle equazioni differenziali [17]. Queste situazioni sono assai frequenti in fluidodinamica, poiché capita spesso di misurarsi con problematiche del genere. Il limite euleriano  $Re \rightarrow \infty$  è un limite singolare delle equazioni di Navier-Stokes ad esempio, poiché annulla il coefficiente davanti alla derivata seconda della velocità e abbassa l'equazione di ordine. La casistica di questi limiti è piuttosto complicata e laboriosa da descrivere. In generale, si può dire che si può avere un limite singolare quando effettuando quest'operazione sparisce una dipendenza da una qualche grandezza nelle equazioni differenziali considerate [44]: nel nostro caso, ponendo  $Wi \rightarrow \infty$  scompare anche  $Re_0$ , e questo deve in qualche modo mettere in allarme. Comunque, dai grafici si ottiene che nel caso  $Wi=0$  è solo  $Re_0$  a incidere, mentre nel caso  $Wi=\infty$  è soltanto  $Re_\infty$ : in entrambi i casi limite si è in condizione di fluido newtoniano. In quest'ultimo, il flusso risulta sempre stabile se  $Re_\infty < \sqrt{2}$ , ma anche sempre instabile se  $Re_\infty > \sqrt{2}$ . per qualsiasi  $Re_0$  appartenente all'intervallo concesso  $(0, Re_\infty)$ . In questo senso, ciò è coerente col fatto che per  $Wi \rightarrow \infty$   $Re_0$  scompare dalle equazioni del moto.

Data l'asintoticità a  $k_x \rightarrow 0$  della prima perturbazione destabilizzante, valgono ancora le proprietà che discendono dall'equazione di continuità:  $u$  è a media nulla sulla periodicità delle soluzioni (piccola scala) e  $v$  è costante, cioè la perturbazione è trasversa su grande scala. Resta da verificare se continua a valere il fatto che le autofunzioni sono sempre con periodicità  $2\pi$  e non suoi multipli. Di seguito sono mostrati i calcoli per  $n=0$ ,  $Re_\infty=0.7$ ,  $1/k_x = 1000$ ,  $Wi=20$  e  $Re_0$  tale da dare  $\Im c = 2.0064 \cdot 10^{-6}$  per il caso  $2\pi$ -periodico. Sotto, il calcolo per gli stessi parametri di input, con dominio  $[0, 4\pi]$  in  $y$  e ovviamente il doppio di intervalli: risulta  $\Im c = 2.01604 \cdot 10^{-6}$ , differente dal precedente entro un errore minore di  $10^{-8}$ .



<sup>1</sup> Come esempio banale, si consideri  $y'' + \omega^2 y = 0$ , il cui integrale generale è  $y(x) = A \sin \omega x + B \cos \omega x$ . Eseguendo il limite su quest'ultimo per  $\omega \rightarrow 0$ , si ottiene  $y(x) = B$ . Invece, se si effettua il limite prima sull'equazione, si ottiene  $y''=0$ , che ha come integrale generale  $y = Ax + B$ .



Come si vede quindi, le velocità risultano identiche, avendo imposto che le ampiezze agli estremi della striscia  $[0, 2\pi]$  fossero uguali per rendere più semplice all'occhio il confronto. I risultati dei valori assunti dalle componenti delle velocità hanno discrepanze dell'ordine di  $10^{-9}$ , quindi minori dell'accuratezza del metodo numerico alla risoluzione utilizzata. Questo mostra anche come, anche per il caso shear-thinning, il risultato non dipenda dalla larghezza della striscia, essendo le periodicità delle autofunzioni associate all'autovalore meno stabile le stesse del flusso base. Analogo risultato sarà valido allora anche per la pressione. Nuovamente, le velocità risultano avere segno opposto in  $y=0$ .

E' confermato che, almeno vicino all'asintoto, quindi per l'instabilità che determina il valore minimo di  $Re_0$  a cui il flusso diventa instabile, la larghezza della striscia di periodicità non è rilevante.



## Capitolo 3

# La rinormalizzazione a scale multiple

### 3.1 Multiscala per equazioni differenziali ordinarie

#### 3.1.1 Termini secolari e teoria delle perturbazioni

Si consideri la seguente equazione differenziale

$$\ddot{y} + y = \cos \omega t$$

che corrisponde all'equazione del moto di un oscillatore forzato. L'integrale generale, come noto, è dato da una soluzione particolare più l'integrale generale dell'equazione completa:

$$y(t) = A \cos t + B \sin t + \frac{\cos \omega t}{1 - \omega^2}$$

quando  $|\omega| \neq 1$ . In tale situazione, infatti, la soluzione in questa famiglia non è definita, e per  $|\omega| \rightarrow 1$  diverge. Questo accade perché in quel valore del parametro, il termine non omogeneo è soluzione esso stesso dell'equazione omogenea: matematicamente, esso *appartiene al kernel dell'operatore*  $\frac{d^2}{dt^2} + \mathbf{I}$ , fisicamente ciò corrisponde a una risonanza dovuta alla coincidenza tra frequenza della forzante esterna e frequenza del moto della particella libera.

La soluzione corretta quando  $|\omega| = 1$  è

$$y(t) = A \cos t + B \sin t + \frac{1}{2} t \sin t$$

Come si vede, l'ampiezza delle oscillazioni diverge per  $t \rightarrow \infty$ , cioè si ha la suddetta risonanza. In questo caso compare un termine del tipo  $t \sin t$ , dove un fattore crescente ( $t$ ) moltiplica il corrispondente termine non omogeneo che compariva nell'equazione differenziale. Termini con questa caratteristica si chiamano *secolari*, e nell'integrale generale di un'equazione differenziale a coefficienti costanti non omogenea compaiono usualmente, moltiplicati di almeno un fattore  $t$  rispetto al termine non omogeneo che li genera.

Questo crea dei problemi nell'utilizzo degli sviluppi perturbativi. Consideriamo infatti il seguente problema di Cauchy per l'equazione di Duffing [17]:

$$\ddot{y} + y + \epsilon y^3 = 0 \quad y(0) = 1 \quad \dot{y}(0) = 0$$

dove  $\epsilon$  è un parametro piccolo. L'equazione è non lineare e in generale non solubile esattamente. Cerchiamo allora euristicamente una soluzione tramite una serie perturbativa del tipo:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon^n y_n(t), \quad y_0(0) = 1 \quad \dot{y}_0(0) = 0 \quad y_n(0) = \dot{y}_n(0) = 0 \quad n \geq 1$$

Sostituendo la serie nell'equazione di Duffing e applicando il principio di identità delle serie di potenze per  $\epsilon$  otteniamo una gerarchia di equazioni, una per ogni ordine:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 + y_0 &= 0 \\ \ddot{y}_1 + y_1 &= -y_0^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Pertanto risolvendole in ordine si riescono a ricavare iterativamente i termini della serie perturbativa all'ordine desiderato. Tenendo conto delle condizioni iniziali, si ha così per l'ordine 0:

$$y_0(t) = \cos t$$

Sostituendo nell'ordine 1, dove si utilizza l'identità  $\cos^3 t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} \cos 3t + \frac{3}{4} \cos t$ , se ne ottiene l'integrale generale

$$y_1(t) = A \cos t + B \sin t + \frac{1}{32} \cos 3t - \frac{3}{8} t \sin t$$

dove compare il termine secolare atteso dal fatto che  $\cos t$  è soluzione dell'omogenea per  $y_1$ . La soluzione approssimata in teoria delle perturbazioni ottenuta è quindi

$$y(t) = \cos t + \epsilon \left[ \frac{1}{32} \cos 3t - \frac{1}{32} \cos t - \frac{3}{8} t \sin t \right] + O(\epsilon^2) \quad \epsilon \rightarrow 0^+$$

Quindi, fissato un  $t$ , la precedente equazione approssima la soluzione a meno di termini di infinitesimo uguale o maggiore di  $\epsilon^2$  per  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . Notiamo però che, fissato un  $\epsilon$ , dopo un tempo  $t \simeq \frac{1}{\epsilon}$  la soluzione sembra aumentare l'ampiezza delle proprie oscillazioni a causa del termine secolare, mostrandosi quindi illimitata. Lo sviluppo sembra avere due scale differenti di variazione nel tempo: una piccola del periodo delle funzioni oscillanti e una *infinita* nell'aumento dell'ampiezza.

Ciò è falso. Infatti, l'equazione di Duffing precedentemente considerata può essere ottenuta dalla lagrangiana  $L = \frac{\dot{y}^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \epsilon \frac{y^4}{4}$ ; non dipendendo dal tempo, è conservata l'Hamiltoniana:

$$0 = \dot{H} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \dot{y} - L \right] = \frac{d}{dt} \left[ \dot{y}^2 + \frac{y^2}{2} + \epsilon \frac{y^4}{4} \right]$$

Da ciò banalmente:

$$\dot{y}^2 + \frac{y^2}{2} + \epsilon \frac{y^4}{4} = C > 0 \implies 0 \leq y^2 \leq C,$$

pertanto  $y^2$ , e quindi  $y$  anche, risultano limitate per ogni  $t$ . Questo significa che nella serie perturbativa, i termini secolari seppur divergenti per grandi  $t$ , vengono *risommati* dando alla fine una somma della serie limitata. E' ciò che accade ad esempio per  $x \geq 0$  alla nota serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$ ,

che converge uniformemente a  $e^{-x}$  su tutto  $\mathbb{R}$ .

### 3.1.2 Utilizzo delle scale multiple

Nell'esempio precedente abbiamo visto che in una serie perturbativa, i termini secolari possono compensarsi anche tendendo all'infinito. Serve un metodo che quindi trovi un'approssimazione della soluzione del problema posto *asintoticamente*, proprio per  $t$  arbitrariamente grandi, e tenga conto della suddetta sommazione, cosa che lo sviluppo perturbativo troncato non può fare perché come visto vale per una scala di tempi *molto più piccoli*, cioè impone un limite superiore dell'intervallo di validità dei tempi.

Una soluzione a questo problema è data dalle *scale multiple*. Supponiamo che la soluzione esatta abbia un andamento in cui sono ben distinguibili differenti scale di variazione, ad esempio nel caso di due scale, una che caratterizzi l'andamento globale, come una modulazione in ampiezza o un comportamento asintotico, e l'altra che caratterizzi andamenti tipici su intervalli molto più piccoli, come uno pseudoperiodo di oscillazioni.

Nel caso più semplice di due scale, potremmo quindi descrivere la funzione attraverso due variabili di tempi differenti, rappresentanti le due suddette scale di tempi. Costruiamo la serie perturbativa nella forma

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon^n y_n(t, T)$$

dove  $t$  rappresenta una variabile *veloce*, che dovrà risultare *periodica*, e  $T$  una variabile *lenta*, cioè che cresca *infinitamente* più lentamente rispetto alla  $t$  nel limite  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , come ad esempio  $T = \epsilon t^1$ . Si può provare a inserire questa serie nell'equazione differenziale posta e, una volta usata la regola di derivazione delle funzioni composte, trattare  $t$  e  $T$  come variabili indipendenti per poi imporre l'assenza di termini secolari al primo ordine. Successivamente, si ritorna solo a  $t$  risostituendo  $T = \epsilon t$ , che è esattamente la scala a cui lo sviluppo perturbativo ordinario diventava critico, ottenendo un candidato di soluzione approssimata asintotica a grandi  $t$ , ove ovviamente questo sviluppo sia affidabile (lontano da eventuali singolarità, nei punti dove la suddetta separazione di scala sia valida, etc.).

Come al solito, chiariamo bene l'applicazione di questo metodo con tre esempi molto significativi [17].

#### Equazione di Duffing

Riconsideriamo il problema di Cauchy

$$\ddot{y} + y + \epsilon y^3 = 0 \quad y(0) = 1 \quad \dot{y}(0) = 0$$

Tentiamo lo sviluppo perturbativo multiscale. Supponiamo che  $y$  dipenda da  $t$  e  $T$ . Per la derivata, applicando la regola di derivazione delle funzioni composte, si ha:

$$\dot{y} = \partial_t y + (\partial_t T) \tilde{\partial}_T y$$

---

<sup>1</sup>La periodicità nella variabile veloce è richiesta in quanto si può dimostrare [18] che, in generale con  $N$  variabili, definite le funzioni nelle nuove variabili veloci  $X_i/\epsilon^{N_i}$  e lente  $X_i$ , la soluzione a scale multiple tende a quella esatta in un senso *debole* quando  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .

dove la  $\tilde{\partial}_T$  rappresenta la derivata rispetto alla variabile di grande scala. Poniamo in questo caso  $T = \epsilon t$ , e dopo aver effettuato questa sostituzione trattiamo  $t$  e  $T$  come variabili indipendenti. Inseriamo la serie perturbativa nella forma  $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon^n y_n(t, T)$ . Otteniamo:

$$\dot{y} = \partial_t y_0 + \epsilon(\partial_t y_1 + \tilde{\partial}_T y_0) + O(\epsilon^2) \Rightarrow \ddot{y} = \partial_t^2 y_0 + \epsilon(2\partial_t \tilde{\partial}_T y_0 + \partial_t^2 y_1) + O(\epsilon^2)$$

Dall'equazione differenziale completa, dopo aver sostituito la serie, si ottiene per gli ordini 0 e 1

$$\partial_t^2 y_0 + y_0 = 0 \quad \partial_t^2 y_1 + y_1 = -y_0^3 - 2\partial_t \tilde{\partial}_T y_0$$

L'integrale generale dell'ordine 0, rimanendo nell'ambito di funzioni a valori reali, è

$$y_0(t, T) = A(T)e^{it} + A^*(T)e^{-it} \quad (3.1)$$

con  $A(T)$  una qualsiasi funzione complessa di  $T$ . La periodicità nella variabile veloce è quindi automaticamente verificata. Questa soluzione compare a sua volta come termine non omogeneo nell'ordine 1. Imponiamo in quest'ultimo l'assenza di termini secolari, ossia che il termine a secondo membro non appartenga al kernel dell'operatore a primo membro (operazione necessaria per rendere possibile la periodicità nella variabile veloce anche all'ordine 1). Esso vale:

$$-y_0^3 - 2\partial_t \tilde{\partial}_T y_0 = e^{it} [-3A^2 A^* - 2i\tilde{\partial}_T A] + e^{-it} [-3AA^{*2} + 2i\tilde{\partial}_T A^*] - e^{3it} A^3 - e^{-3it} A^{*3}$$

Notiamo subito che i termini  $e^{it}$  e  $e^{-it}$  sono soluzioni nel kernel di  $\partial_t^2 + \mathbf{I}$ , e darebbero quindi origine a termini secolari. Imponiamo allora che i loro coefficienti siano nulli:

$$-3A^2 A^* - 2i\tilde{\partial}_T A = 0 \quad -3AA^{*2} + 2i\tilde{\partial}_T A^* = 0 \quad (3.2)$$

Queste due equazioni non sono indipendenti: sono una la complessa coniugata dell'altra, pertanto non vi è sovrabbondanza rispetto all'incognita  $A$ , ed è sempre possibile soddisfarle. Se imponiamo una di esse quindi, almeno fino all'ordine 1 in  $\epsilon$ , non saranno presenti termini secolari nello sviluppo multiscale.

L'equazione del primo ordine ci serve quindi per imporre la condizione di non secolarità dell'ordine 0 e fissare quindi tale termine dello sviluppo. Scegliamo di fermare lo sviluppo al primo ordine: se volessimo ottenere il termine di ordine 1, dovremmo infatti considerare l'equazione differenziale dell'ordine 2 per  $y_2$  e imporre che il termine non omogeneo (che dipenderà quindi da  $y_0$  e  $y_1$ ) non sia soluzione di tale equazione: questo imporrebbe allora il vincolo sulle costanti dell'integrale generale dell'equazione dell'ordine 1 per  $y_1$ . Questo processo può andare avanti iterativamente.

Scriviamo  $A(T)$  in coordinate polari nel piano complesso  $R(T)e^{i\theta(T)}$ , inseriamo nelle (3.1), ricordando che  $\theta$  e  $R$  son due funzioni reali, e otteniamo:

$$-3R^3 e^{i\theta} - 2ie^{i\theta} \tilde{\partial}_T R + 2e^{i\theta} \tilde{\partial}_T \theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\partial}_T R = 0 \\ \tilde{\partial}_T \theta = \frac{3}{2} R^2 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema  $A(T)$  diventa  $R(0)e^{i[\theta(0)+3R^2(0)\frac{T}{2}]}$ . Possiamo ora scrivere la soluzione generale approssimata all'ordine 0, ponendo finalmente  $T = \epsilon t$  coerentemente con la scelta iniziale. Ne risulta:

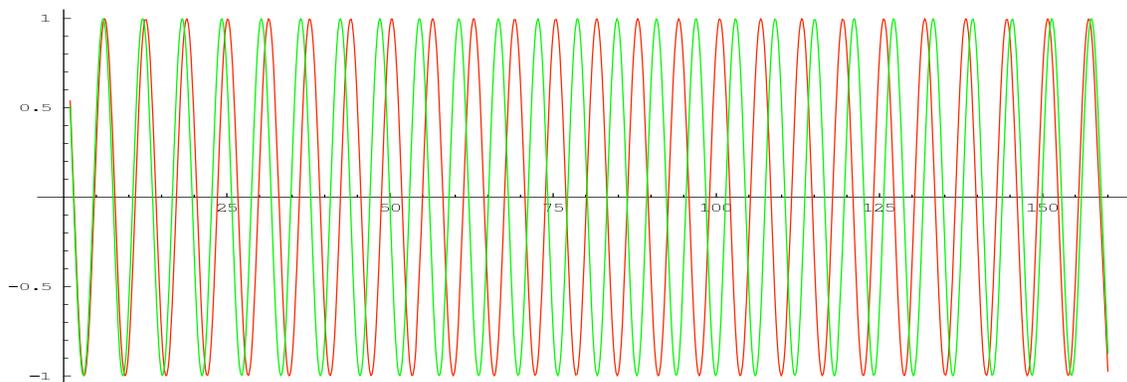
$$y(t) = 2R(0) \cos \left[ \theta(0) + \left( \frac{3}{2}R^2(0)\epsilon + 1 \right) t \right] + O(\epsilon) \quad \epsilon \rightarrow 0^+,$$

Dobbiamo infine porre le condizioni iniziali del problema di Cauchy per determinare le due costanti:  $y(0) = 1$  porta a diverse possibili soluzioni che data la periodicità del seno e le sue proprietà per parità sono tutte equivalenti a  $\theta(0) = 0$ ,  $R(0) = \frac{1}{2}$ ; la condizione ulteriore  $\dot{y}(0) = 0$  è compatibile con queste ultime. Notare che derivando rispetto a  $t$  compare un ulteriore termine proporzionale a  $\epsilon$  che, essendo noi all'ordine 0, andrebbe in ogni caso trascurato. In definitiva:

$$y(t) = \cos \left[ \left( \frac{3}{8}\epsilon + 1 \right) t \right] + O(\epsilon) \quad \epsilon \rightarrow 0^+,$$

La soluzione approssimata all'ordine 0 dello sviluppo a scale multiple risulta analoga alla soluzione dell'ordine 0 dello sviluppo perturbativo ordinario (che era  $y(t) = \cos t$ ), eccetto che per la presenza di una *frequenza rinormalizzata*  $\omega = 1 + 3\epsilon$ . In questo caso, si può mostrare esplicitamente [17] che la somma dei termini maggiormente divergenti agli ordini successivi in  $\epsilon$  della serie perturbativa ordinaria restituisce l'espressione ottenuta con le scale multiple: i termini secolari a questo ordine sono quindi stati risommati. Tale frequenza rinormalizzata dà inoltre la scala piccola di tempi rispetto a cui è necessario guardare invece a tempi grandi affinché lo sviluppo multiscala sia affidabile.

Nel grafico sottostante è presentato il caso  $\epsilon = 0.1$  per  $t \in [1, 160]$ . Già per  $t > 1$  si osserva l'indistinguibilità tra il grafico approssimato col multiscala e la soluzione dell'equazione completa ottenuta numericamente: tra le due curve sovrapposte emerge solo la curva colorata di rosso. La curva colorata di verde invece è il normale coseno della teoria ordinaria delle perturbazioni. Come si vede, l'accordo tra curva verde e rossa è buono sul primo semiperiodo, mentre dopo un periodo lo sfasamento comincia a risultare evidente, e a  $t=160$  il coseno è rimasto indietro di un completo periodo.



Risulta evidente quindi come già l'ordine 0 sia sufficiente ad ottenere un'approssimazione precisissima della soluzione esatta tramite il multiscala. Il calcolo ad ordini successivi in genere risulta molto più complesso. Inoltre, l'introduzione di più di due scale non è mai banale poiché lascia

spesso molta libertà e può portare a risultati ambigui.

### Un ciclo limite

Si abbia un problema di Cauchy per la seguente *equazione dell'oscillatore di Rayleigh*:

$$\ddot{y} + y = \epsilon \left[ \dot{y} - \frac{1}{3} \dot{y}^3 \right]. \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 2a$$

Anche qui, si vede subito che all'ordine 0 in teoria delle perturbazioni ordinaria si avrebbe  $y(t) = 2a \sin t + O(\epsilon)$ . Come nell'esempio precedente, per catturare l'effetto della risommazione dei termini secolari a grandi  $t$ , imponiamo uno sviluppo a scale multiple fino al primo ordine  $y(t) = y_0(t, T) + \epsilon y_1(t, T) + O(\epsilon^2)$ , dove  $\epsilon t = T$ . La derivata seconda rispetto al tempo è già stata calcolata nell'esempio precedente, e le equazioni per l'ordine 0 e 1 quindi sono

$$\partial_t^2 y_0 + y_0 = 0 \quad \partial_t^2 y_1 + y_1 = -2\partial_t \tilde{\partial}_T y_0 + \partial_t y_0 - \frac{1}{3} (\partial_t y_0)^3$$

La soluzione all'ordine 0 è per le funzioni a valori reali come solito  $A(T)e^{it} + A^*(T)e^{-it}$ . Il termine non omogeneo dell'ordine 1 è perciò:

$$-2i\tilde{\partial}_T A e^{it} + 2i\tilde{\partial}_T A^* e^{-it} + iA e^{it} - iA^* e^{-it} + \frac{i}{3} \left[ A^3 e^{3it} - A^{*3} e^{-3it} - 3A^2 A^* e^{it} + 3A^{*2} A e^{-it} \right]$$

Se si pone l'assenza dei termini secolari, ossia l'annullarsi dei coefficienti di  $e^{it}$  e  $e^{-it}$ :

$$-2i\tilde{\partial}_T A + iA - iA^2 A^* = 0 \quad 2i\tilde{\partial}_T A^* - iA^* + iA^{*2} A = 0,$$

che come prima sono l'una la complessa coniugata dell'altra. Scrivendo in forma polare  $A(T) = R(T)e^{i\theta(T)}$  e inserendo in una delle due si ottiene per parte immaginaria e reale:

$$-2i\tilde{\partial}_T R e^{i\theta} + 2R\tilde{\partial}_T \theta e^{i\theta} + iR e^{i\theta} - iR^3 e^{i\theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} R\tilde{\partial}_T \theta = 0 \\ -2\tilde{\partial}_T R + R - R^3 = 0 \end{cases}$$

da cui abbiamo come soluzioni

$$R=0 \cup \begin{cases} \theta = \theta(0) \\ T = \ln \frac{R}{R(0)} - \ln \frac{1-R^2}{1-R(0)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \theta(0) \\ R = \sqrt{\frac{1}{\frac{1-R(0)^2}{R(0)^2} e^{-T} + 1}} \end{cases}$$

In definitiva quindi possiamo scrivere l'integrale generale approssimato all'ordine 0 dello sviluppo a scale multiple, peraltro in modo da comprendere anche la possibilità  $R=0$ :

$$y(t) = \frac{2R(0) \cos[t + \theta(0)]}{\sqrt{[1 - R(0)^2]e^{-\epsilon t} + R(0)^2}} + O(\epsilon), \quad \epsilon \rightarrow 0^+$$

Imponiamo ora le condizioni iniziali.  $y(0)=0$  comporterebbe  $R(0)=0$  oppure  $\theta(0) = \pm \frac{\pi}{2}$ ;  $\dot{y}(t)$  all'ordine 0 è  $-\frac{2R(0) \sin[t + \theta(0)]}{\sqrt{[1 - R(0)^2]e^{-\epsilon t} + R(0)^2}} + O(\epsilon)$ , e per essere  $\dot{y}(0) = 2a$  bisogna che sia  $R(0) = \mp a$ , opposto quindi

al segno di  $\theta(0) = \pm \frac{\pi}{2}$ . In definitiva quindi l'approssimazione cercata è:

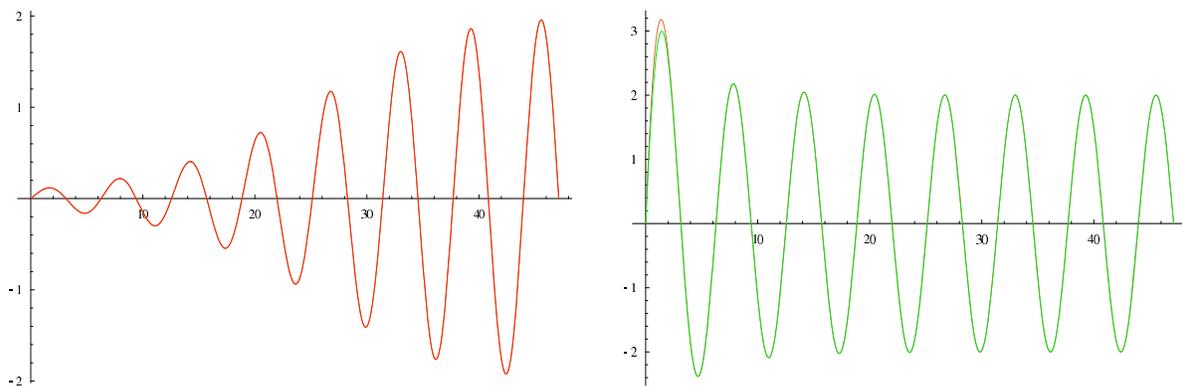
$$y(t) = \frac{2a \sin t}{\sqrt{[1 - a^2]e^{-\epsilon t} + a^2}} + O(\epsilon), \quad \epsilon \rightarrow 0^+ \quad (3.3)$$

Questa volta, confrontando con la soluzione all'ordine 0 della teoria delle perturbazioni ordinaria  $y = 2a \sin t + O(\epsilon)$ , gli effetti della risommazione all'ordine 1 dei termini secolari che comparirebbero in tale sviluppo si riflettono nell'ampiezza modulata della soluzione multiscale. Anche in questo caso, lo pseudoperiodo delle oscillazioni fornisce una piccola scala tipica del problema.

Osserviamo che nella modulazione in ampiezza l'effetto del segno di  $a$  è irrilevante, mentre nel numeratore della (3.3) due valori di  $a$  con stesso modulo ma segno opposto si rifletterebbero nella variazione del segno dell'oscillazione, o se si preferisce, in uno sfasamento di  $\pi$  di quest'ultima. Per  $a=0$  ritroviamo la soluzione nulla. Per  $|a|=1$ , la modulazione dell'ampiezza viene soppressa e la soluzione è la stessa predetta dalla soluzione perturbativa all'ordine 0 ordinaria, cioè dall'equazione differenziale priva del termine proporzionale a  $\epsilon$ . Per  $|a|>1$ , l'argomento della radice  $[1 - a^2]e^{-\epsilon t} + a^2$ , e quindi la radice stessa, è crescente; essendo  $a$  denominatore, l'ampiezza allora sarà decrescente; viceversa è per  $|a|<1$ .

La particolarità di quest'equazione è che mostra un comportamento interessante che compare in molti sistemi dinamici non lineari e autonomi (cioè indipendenti da  $t$  esplicitamente), tra cui appunto l'oscillatore di Rayleigh. Le soluzioni, in tutti i casi, si avvicinano per  $t \rightarrow +\infty$  alla soluzione  $y = 2 \sin t$  asintoticamente (eccezione ovviamente per il caso  $a = 1$ , in cui il sistema è già su tale soluzione). Tale configurazione, che è periodica, rappresenta quindi un *ciclo limite*, chiamato così poiché nello spazio delle fasi  $(y, \dot{y})$  è rappresentato da un'orbita chiusa. Difatti, data la periodicità di  $y$ , dopo un periodo la traiettoria si ritroverà nelle stesse  $(y, \dot{y})$ , e data l'invarianza per traslazioni temporali dell'equazione di evoluzione del sistema, la dinamica da quel punto in poi sarà la stessa del periodo precedente per tutto il periodo successivo.

Di seguito sono riportati i confronti tra grafico del multiscale a ordine 0 e della soluzione numerica completa, per  $\epsilon = 0.2$  e rispettivamente  $a = 0.2$ ,  $a = 2$ , per  $t \in [0, 15\pi]$ . Nel primo caso, l'accordo è migliore dello spessore delle linee da subito (emerge la curva colorata di rosso), nel secondo c'è un lieve disaccordo a  $\pi/2$  (la soluzione numerica completa ha un picco più alto), mentre nella regione di tempi a grande scala  $t \gg 1$  lo scarto ancora diventa minore dello spessore delle linee.



## Approssimazione WKB

Sia un'equazione delle onde nel dominio delle frequenze di Fourier nella forma:

$$\epsilon^2 \tilde{\partial}_X^2 y(X, \omega) + \left[ \frac{\omega}{c(X, \omega)} \right]^2 y = 0$$

L'equazione è stata espressa nella notazione delle variabili a grande scala poiché se si effettua la sostituzione  $X = \epsilon x$  si ottiene:

$$\partial_x^2 y(x, \omega) + \left[ \frac{\omega}{c(\epsilon x, \omega)} \right]^2 y = 0 \quad (3.4)$$

cioè  $c$  varia su una scala di lunghezze molto grande in quanto dipende da  $\epsilon x$ .

Al solito, allora, inseriamo in quest'ultima uno sviluppo del tipo  $y = y_0(x, X) + \epsilon y_1(x, X) + O(\epsilon^2)$ , e per i vari ordini otteniamo per ogni modo a frequenza angolare  $\omega$  fissata:

$$\partial_x^2 y_0 + \left[ \frac{\omega}{c(X)} \right]^2 y_0 = 0 \quad \partial_x^2 y_1 + \left[ \frac{\omega}{c(X)} \right]^2 y_1 = -2\tilde{\partial}_x \tilde{\partial}_X y_0$$

L'integrale generale reale dell'ordine 0 è  $A(X)e^{i\frac{\omega}{c(X)}x} + A^*(X)e^{-i\frac{\omega}{c(X)}x}$ . Inserendo nel termine non omogeneo del primo ordine si ottiene, indicando per brevità  $\frac{\omega}{c(X)}$  con  $K(X)$ :

$$\begin{aligned} & \partial_x^2 y_1 + K^2(X)y_1 = \\ & = -2ie^{iK(X)x} \{ \tilde{\partial}_X [A(X)K(X)] + ix A(X)K(X)\tilde{\partial}_X K(X) \} + 2ie^{-iK(X)x} \{ \tilde{\partial}_X [A^*(X)K(X)] - ix A^*(X)K(X)\tilde{\partial}_X K(X) \} \end{aligned}$$

Per cancellare la presenza dei termini secolari è necessario che gli argomenti in parentesi davanti ad essi si annullino; tuttavia, data la presenza della variabile  $x$ , l'unica possibilità è che sia  $A(X) = 0$ . Il metodo multiscale pertanto sembra fallire. La ragione per la quale accade ciò è che nel limite  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , il termine  $\frac{\omega}{c(\epsilon x)}$  dipendente da  $\epsilon$  non si cancella; cioè non abbiamo un'equazione differenziale di partenza del tipo  $f_1(y, y', \dots, y^{(n)}) + \epsilon f_2(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ , ossia che contenga una perturbazione. Possiamo però tentare di ricondurci a una forma di questo tipo effettuando un cambio di variabili  $\xi = \xi(x)$  nella (3.4), con  $\xi$  invertibile e inversa derivabile, quindi  $\xi' \neq 0$ . Si hanno allora le derivate:

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^2\xi}{dx^2} \frac{d}{d\xi} + \left[ \frac{d\xi}{dx} \right]^2 \frac{d^2}{d\xi^2}$$

La (3.4) allora diventa:

$$\xi'' \frac{dy}{d\xi} + \xi'^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + K^2(\epsilon x)y = 0 \Rightarrow \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{K^2(\epsilon x)}{\xi'^2} y + \frac{\xi''}{\xi'^2} \frac{dy}{d\xi} = 0$$

e la si può ricondurre alla semplicissima forma dell'oscillatore armonico perturbato  $\frac{d^2 y}{d\xi^2} + y + \epsilon \frac{dy}{d\xi} = 0$  imponendo che  $K^2(\epsilon x) = \xi'^2$ , cioè

$$\xi = \pm \int_{x_0}^x K(\epsilon x') dx' = \pm \frac{1}{\epsilon} \int_{\epsilon x_0}^{\epsilon x} K(X') dX'$$

Tenendo conto che  $\xi'' = \pm \frac{dK(\epsilon x)}{dx} = \pm \epsilon \frac{dK(X)}{dX}$  si ha in definitiva:

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + y \pm \epsilon \frac{1}{K^2(X)} \frac{dK(X)}{dX} \frac{dy}{d\xi} = 0 \quad (3.5)$$

La (3.5) è la nostra nuova equazione perturbata su cui applicare il multiscala, sostituendo uno sviluppo del tipo  $y = y_0(\xi, X) + \epsilon y_1(\xi, X) + O(\epsilon^2)$ , dove ovviamente  $X = \epsilon x(\xi)$ .

Se  $\frac{dX}{d\xi} = \epsilon \frac{dx}{d\xi} = \frac{\epsilon}{\xi'} = \pm \frac{\epsilon}{K(X)}$  la derivata rispetto a  $\xi$  è  $\frac{d}{d\xi} = \partial_\xi \pm \frac{\epsilon}{K(X)} \tilde{\partial}_X$ . Allora per le derivate prime e seconde:

$$\frac{dy}{d\xi} = \partial_\xi y_0 + \epsilon (\partial_\xi y_1 \pm \frac{1}{K(X)} \tilde{\partial}_X y_0) + O(\epsilon^2) \Rightarrow \frac{d^2 y}{d\xi^2} \Rightarrow \partial_\xi^2 y_0 + \epsilon (\pm \frac{2}{K(X)} \partial_\xi \tilde{\partial}_X y_0 + \partial_\xi^2 y_1) + O(\epsilon^2)$$

Quindi all'ordine 0 e 1:

$$\partial_\xi^2 y_0 + y_0 = 0 \quad \partial_\xi^2 y_1 + y_1 = \mp \left[ \frac{\tilde{\partial}_X K(X)}{K^2(X)} \partial_\xi y_0 + \frac{2}{K(X)} \partial_\xi \tilde{\partial}_X y_0 \right]$$

Inserendo le soluzioni dell'ordine 0  $A(X)e^{i\xi} + A^*(X)e^{-i\xi}$  nell'ordine 1:

$$\partial_\xi^2 y_1 + y_1 = \mp i e^{i\xi} \left[ \frac{2}{K(X)} \tilde{\partial}_X A + \frac{\tilde{\partial}_X K(X)}{K^2(X)} A \right] \pm i e^{-i\xi} \left[ \frac{2}{K(X)} \tilde{\partial}_X A^* + \frac{\tilde{\partial}_X K(X)}{K^2(X)} A^* \right]$$

Porre l'assenza dei termini secolari questa volta è possibile, e le due equazioni che si ottengono come nei casi precedenti sono l'una la complessa coniugata dell'altra. E' sufficiente allora che:

$$2\tilde{\partial}_X A + \frac{\tilde{\partial}_X K(X)}{K(X)} A = 0 \implies \ln A(X) = -\frac{1}{2} \ln |K(X)| + cost.$$

Le due soluzioni linearmente indipendenti approssimate all'ordine 0 del multiscala quindi sono, a meno di fasi complesse riassorbite nei coefficienti:

$$y = \frac{C_\pm}{\sqrt{K(X)}} e^{\pm i\xi} + O(\epsilon) \quad \epsilon \rightarrow 0^+$$

Ricordando che  $\xi = \pm \frac{1}{\epsilon} \int_{X_0}^X K(X') dX'$  si ottiene

$$y = \frac{C_\pm}{\sqrt{K(X)}} e^{\pm i \frac{1}{\epsilon} \int_{X_0}^X K(X') dX'} + O(\epsilon) \quad \epsilon \rightarrow 0^+$$

che è la nota *approssimazione WKB<sup>2</sup>* di estrema importanza in svariati campi della fisica, dall'ottica geometrica, all'approssimazione semiclassica in meccanica quantistica e teoria quantistica dei campi.

---

<sup>2</sup>Ritornando alla notazione iniziale  $K(X, \omega) = \left[ \frac{\omega}{c(X, \omega)} \right]$ , esprimendo ogni modo normale nel dominio dei tempi si ottiene  $y_0 \propto e^{i\omega t \pm i \frac{1}{\epsilon} \int_{X_0}^X \frac{\omega}{c(X', \omega)} dX'}$ ; per le superfici a fase costante si ha  $\omega t \pm \frac{1}{\epsilon} \int_{X_0}^X \frac{\omega}{c(X', \omega)} dX' = cost.$ , da cui derivando quest'ultima espressione rispetto a X si ha  $\mp c(X, \omega) = \dot{X}$ ; i due esponenziali pertanto rappresentano le onde monocromatiche *entranti e uscenti* viaggianti in ogni punto con *velocità di fase*  $c(X, \omega)$  in approssimazione WKB.

## 3.2 Multiscala per equazioni differenziali alle derivate parziali

I precedenti metodi possono essere potentemente utilizzati in problemi alle derivate parziali di svariato tipo, oltre a quelli appena visti con un'equazione differenziale contenente un termine perturbativo, in cui si ha una piccola scala del problema dato, che è fornita dalla periodicità di qualche aspetto del problema stesso, e si è interessati a un andamento delle soluzioni in modo che esse risultino rese omogenee senza oscillazioni su piccola scala, come se fossero viste da lontano, cioè viste da grande scala: si tratta quindi di una tecnica di rinormalizzazione che nello spirito ricorda il blocking nel modello di Ising.

La chiave cruciale nelle seguenti applicazioni sarà ancora la periodicità nelle variabili veloci dell'espansione nel multiscala, che appunto fornirà la cosiddetta piccola scala. Nei casi precedenti, essa era fornita intrinsecamente dal problema, poiché si aveva sempre a che fare con (o, nel caso della WKB, ci si riconduceva a) equazioni dell'oscillatore armonico perturbato: in tale situazione, l'ordine 0 dello sviluppo che comprendeva solo le variabili veloci consisteva proprio nell'equazione imperturbata, e le soluzioni quindi erano degli esponenziali immaginari nelle variabili veloci con coefficienti dipendenti dalle variabili lente che, eventualmente, modificavano la periodicità della soluzione una volta tornati alle variabili originarie (equazione di Duffing). Nei prossimi casi invece, questa periodicità non sarà intrinseca, ma verrà imposta di volta in volta in base a considerazioni sulle simmetrie del problema.

Dopo una spiegazione matematica del problema, utilizziamo in seguito diversi esempi che gradualmente introdurranno nuove peculiarità per giungere all'obiettivo finale, che è quello di utilizzare le scale multiple per studiare la stabilità di un punto fisso delle equazioni di Navier-Stokes sotto perturbazioni a grande scala.

### 3.2.1 Posizione del problema e condizione di risolubilità

Matematicamente si ha un'equazione differenziale o un sistema di equazioni differenziali del tipo  $A\Phi = g(\Phi)$ , con  $\Phi$  e  $g(\Phi)$  perciò eventualmente *vettori di funzioni*  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $A$  è quindi un operatore differenziale di ordine  $k$ , o eventualmente una matrice le cui componenti a loro volta sono operatori differenziali siffatti, della forma:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^k f_i^\alpha \partial_i^\alpha + \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha+\beta=2}^k f_{ij}^{\alpha\beta} \partial_i^\alpha \partial_j^\beta, + \dots, \quad f_i^\alpha, f_{ij}^{\alpha\beta}, \dots : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

eventualmente quindi a coefficienti non costanti, con  $f_i^\alpha, f_{ij}^{\alpha\beta}, \dots, g$  invarianti rispetto a traslazioni  $x_n \rightarrow x_n + L_n, \forall x_n$  di un certo  $L_n$  in ogni variabile  $x_n$  da cui dipendono esplicitamente. Ovviamente  $\Phi \in C^k(\mathbb{R}^n)$ , in modo tale che le derivate parziali che compaiono nell'equazione differenziale esistano su tutto il dominio  $\mathbb{R}^n$  della funzione incognita stessa.

Per trovare un'espressione asintotica a grandi scale della soluzione, si introduce allora, dette  $x_1, \dots, x_n$  le variabili in questione, uno sviluppo dell'incognita  $\Phi = \sum_{i=0}^{+\infty} e^i \Phi_i(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_n)$ , dopo aver esplicitato le derivate dell'equazione originaria comprendendo anche le nuove variabili lente legate a quelle veloci da funzioni  $X_n = e^k x_n, k > 0$  scelte a seconda del problema affrontato.

Si effettuano poi le seguenti ipotesi:

- si suppone che i termini dello sviluppo a scale multiple abbiano le stesse caratteristiche di periodicità delle funzioni periodiche del problema originario rispetto alle  $x_n$  per le traslazioni  $x_n \rightarrow x_n + L_n, \forall x_n$ . Data anche l'ipotesi di esistenza delle derivate che compaiono in A su tutto  $\mathbb{R}^n$ , segue che anche queste ultime hanno le suddette periodicità, come si ottiene facilmente calcolando i limiti dei rapporti incrementali; il problema quindi equivale a restringersi, nelle variabili veloci, all'iper-rettangolo n-dimensionale  $C := [0, L_1] \times \dots \times [0, L_n]$ , con le condizioni al contorno periodiche per  $\Phi$  e le sue derivate parziali fino all'ordine precedente a quello corrispondente che compare in A (analogamente al problema di Cauchy di ordine k in una variabile, dove si impongono condizioni iniziali fino alla derivata k – 1-esima) eventualmente destre o sinistre se calcolate in direzione ortogonale alle facce dell'iper-rettangolo C di periodicità;
- supponiamo che il dominio di A, o delle sue componenti nel caso  $\Phi$  sia un vettore di funzioni, consista nelle funzioni con le proprietà suddette e che stiano anche in  $H := L^2[C]$ ; questo copre di fatto tutti i casi di nostro interesse, dove le funzioni incognite (velocità, temperature, concentrazioni di inquinanti,...) son sempre limitate nell'intervallo del periodo e quindi rientrano sicuramente in questa categoria; come noto, questo è uno spazio di Hilbert dotato di prodotto scalare  $\int_C f_1(x)f_2(x)d^n x, f_1, f_2 \in H$ , avendo a che fare con funzioni reali.

Si guarda quindi ordine per ordine la gerarchia di equazioni differenziali nelle nuove variabili. All'i-esimo livello le uniche derivate che agiranno sull'i-esimo termine dello sviluppo  $\Phi_i$  saranno quelle nelle variabili  $x_n$ , poiché non portano ulteriori potenze di  $\epsilon$ . Le equazioni differenziali saranno quindi ad ogni ordine della forma:

$$A\Phi_i = \Psi(\Phi_0, \dots, \Phi_i) \quad (3.6)$$

con A l'operatore differenziale iniziale rispetto ora soltanto alle variabili veloci agente sulla funzione i-esima dello sviluppo, più un eventuale termine  $\Psi$  non omogeneo.

Il sistema (3.6), con le condizioni al contorno e il dominio dell'operatore A suddetto, rappresenta il problema da risolvere. Riguardo a ciò, si ha:

**Teorema 3.2.1** (Condizione di risolubilità della (3.6)). *Siano i termini a coefficienti non costanti di A riscrivibili come somma di termini di derivata  $\partial_i \xi_i$ , con le  $\xi_i$  quantità ancora di periodi  $L_n$ , e sia invertibile la restrizione di A alle funzioni del dominio originario a media nulla.*

*Se allora la (3.6) ammette una qualche soluzione  $\Phi$ , deve necessariamente essere:*

$$\langle \Psi \rangle = 0, \quad \langle \Psi \rangle := \frac{\int_C \Psi d^n x}{\int_C d^n x} \quad (3.7)$$

*Viceversa, se è data una  $\Psi$  tale che  $\langle \Psi \rangle = 0$  la (3.7) è sufficiente a garantire l'esistenza di soluzioni per le (3.6). Se quindi A ha tutte le suddette caratteristiche, le (3.7) rappresentano una condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità del problema.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione della necessarietà nella prima parte dell'enunciato è banale: se tutti i termini a coefficienti non costanti vengono scritti come  $\sum_i \partial_i \xi_i$ , l'integrale su C sarà nullo per il teorema fondamentale del calcolo integrale applicato alla variabile  $x_i$ , essendo le  $\xi_i$  periodiche

su  $C$ . Per la stessa ragione si annullano quindi le derivate pure che compongono  $A$  (o le sue componenti, se è una matrice di operatori differenziali). Pertanto integrando la (3.6) su  $C$  si ottiene la (3.7).

Dimostriamo ora la seconda parte. Scriviamo  $\Phi = \langle \Phi \rangle + \tilde{\Phi}$ , dove quindi  $\langle \tilde{\Phi} \rangle = 0$ . Se l'operatore ristretto, che chiameremo  $\tilde{A}$ , è invertibile, è ben definito  $\tilde{A}^{-1}\tilde{\Phi}$ . Possiamo quindi farlo agire da sinistra sulla (3.6), ottenendo:

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{-1}\Psi &= \tilde{A}^{-1}A(\langle \Phi \rangle + \tilde{\Phi}) = \tilde{A}^{-1}\tilde{A}\tilde{\Phi} + \tilde{A}^{-1}A\langle \Phi \rangle \Rightarrow \tilde{\Phi} = \tilde{A}^{-1}\Psi - \tilde{A}^{-1}A\langle \Phi \rangle \\ &\Rightarrow \Phi = \tilde{A}^{-1}\Psi + (\mathbf{I} - \tilde{A}^{-1}A)\langle \Phi \rangle \end{aligned} \quad (3.8)$$

con  $\langle \Phi \rangle$  costante arbitraria. Siamo quindi riusciti a scrivere un'espressione esplicita della soluzione  $\Phi$  data la  $\Psi$  a media nulla. Ciò completa la dimostrazione.  $\square$

Il significato del precedente teorema è profondo e ha diversi aspetti. Innanzitutto, notiamo che dalla (3.8) sappiamo anche scrivere il nucleo ponendo  $\Psi = 0$  e tenendo conto che  $A\langle \Phi \rangle = 0$ , in quanto operatore differenziale che agisce su una costante o su un vettore di costanti, da cui  $\Phi = \langle \Phi \rangle$ : il nucleo dell'operatore  $A$  che soddisfa le ipotesi del teorema sono le funzioni costanti nelle variabili veloci.

Consideriamo per il momento il caso in cui  $A$  non sia una matrice e quindi  $\Phi$  è una semplice funzione. Allora la condizione di risolubilità  $\langle \Psi \rangle = 0$  equivale all'*ortogonalità del termine non omogeneo rispetto al kernel di  $A$  nel senso di  $L^2$* . Le costanti sono l'ordine 0 dello sviluppo di Fourier rispetto alle variabili veloci del termine non omogeneo periodico in  $C$ ; imporre il suo integrale nullo, significa imporre l'assenza di questa componente. Questo quindi riporta alla stessa situazione analizzata nelle equazioni differenziali con termine perturbativo analizzate nella sezione precedente, dove si imponeva ciò per far sì che fossero assenti i termini secolari nella serie perturbativa facendo sì che risultassero risommati, e in un certo senso la generalizza, portando alla luce una visione più astratta. E' in questo passaggio che avviene la rinormalizzazione. La differenza è che in quel caso il nucleo erano delle funzioni oscillanti, la cui periodicità permetteva proprio l'utilizzo di queste tecniche, mentre in questo caso sono le costanti.

In secondo luogo, avendo l'usale prodotto scalare di  $L^2$ , notiamo che se  $\phi_0$  è nel kernel di  $A^\dagger$ , si ha:

$$(\phi_0, \Psi) = (\phi_0, A\Phi) = (A^\dagger\phi_0, \Phi) = 0$$

da cui  $\Psi$  *dev'essere ortogonale anche al kernel dell'aggiunto di  $A$* . Questo significa che un'operatore  $A$  che soddisfa le ipotesi del teorema 3.2.1 e l'aggiunto  $A^\dagger$  hanno lo stesso kernel, che sono le costanti<sup>3</sup>.

Queste due considerazioni sono estendibili anche al caso in cui  $\Phi$  sia un vettore di funzioni a  $D$  componenti. In tal caso, indicizzandole esplicitamente con  $\Phi_\mu$ , questo starà in uno spazio vettoriale che è  $\prod_{n=1}^D L^2[C]$ , con le componenti e le loro derivate soddisfacenti le solite condizioni

---

<sup>3</sup>In verità, in letteratura (v. [18]) viene presentato il teorema 3.2.1 partendo da quest'aspetto di ortogonalità al kernel dell'aggiunto come condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità dell'equazione non omogenea per l'operatore  $A$ ; questo fatto è mostrato essere una diretta conseguenza su  $A$  dell'alternativa di Fredholm. L'approccio qui presentato segue invece [19], ed è quello più significativo per le nostre applicazioni poiché pone enfasi sul legame tra condizione di risolubilità e presenza di termini secolari.

periodiche ai bordi. Si può allora definire in questo insieme il prodotto scalare:

$$(\Phi, \Psi) := \sum_{\mu=1}^D \int_C \Phi_{\mu} \Psi_{\mu} d^n x$$

Allora la condizione  $\langle \Psi \rangle$ , essendo la media intesa componente per componente, implica che il prodotto scalare di  $\Psi$  per un generico vettore della forma

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

cioè  $\sum_{\mu=1}^D c_{\mu} \int_C \Psi_{\mu} d^n x$  sia nullo. Ma i vettori costanti come già detto costituiscono il kernel dell'operatore  $A$  citato nel teorema.

Infine, troviamo l'espressione di  $A^{\dagger}$ , che sarà una matrice di operatori differenziali.

$$(\Phi, A\Psi) = \sum_{\mu, \nu=1}^D \int_C \Phi_{\mu} A_{\mu\nu} \Psi_{\nu} d^n x = \sum_{\mu, \nu=1}^D \int_C (A_{\mu\nu}^{\dagger} \Phi_{\mu}) \Psi_{\nu} d^n x = \int_C \sum_{\mu, \nu=1}^D (A_{\mu\nu}^{\dagger} \Phi_{\mu}) \Psi_{\nu} d^n x := (A^{\dagger} \Phi, \Psi)$$

avendo indicato con  $A_{\mu\nu}^{\dagger}$  l'aggiunto dell'operatore differenziale componente che sta alla  $\mu$ -esima riga e  $\nu$ -esima colonna di  $A$ . L'aggiunto di un  $A$  siffatto cioè è la matrice le cui componenti sono le aggiunte di quelle della matrice originaria e poi trasposte. La condizione di risolubilità implica che  $\Psi$  sia ortogonale anche al kernel di  $A^{\dagger}$ , che è costituito ancora dalle costanti se  $A$  soddisfa le ipotesi del teorema 3.2.1.

### 3.2.2 Equazione del calore

Come semplice esempio introduttivo [3], consideriamo l'equazione del calore in una dimensione. Si abbia una sbarra di diffusività termica  $k(x)$ , la cui struttura a piccola scala è periodica, diciamo di periodo  $2\pi$ , perciò tali saranno le sue proprietà fisiche e in particolare la stessa  $k(x)$ ; essa sia anche estremamente più lunga di  $2\pi$ , idealmente, *infinite* volte  $2\pi$  (come se si guardassero le proprietà della sbarra macroscopicamente rispetto al suo periodo; essa ovviamente sarà lunga moltissimi ordini di grandezza di volte rispetto ad esso, che quindi si può considerare un tratto di lunghezza infinitesimo in tali condizioni). Le sue estremità siano mantenute a temperature costanti rispettivamente  $\tau(x_1)$  e  $\tau(x_2)$ .

L'equazione è:

$$\partial_t \tau = \partial_x [k(x) \partial_x \tau] = -\partial_x J_q \quad (3.9)$$

essendo  $J_q = -k(x) \partial_x \tau$ .

Utilizziamo dapprima un approccio euristico. Siamo interessati a soluzioni stazionarie, quindi raggiunte dopo il transiente temporale, trattandosi di un processo diffusivo. Naturalmente, che ciò avvenga per l'equazione in questione dovrebbe essere dimostrato: noi lo assumeremo a priori.

Se il termine di derivata temporale è nullo, significa che tale è anche la derivata spaziale della corrente di calore, che quindi risulterà assumere il valore costante nello spazio e nel tempo  $J_q$ ; in regime stazionario si avrebbe cioè  $k(x)\partial_x\tau = \text{cost.}$ . Osserviamo inoltre che data la periodicità della funzione  $k(x)$  l'equazione  $k(x)\partial_x\tau = \text{cost.}$  mostra che la soluzione  $\tau(x)$  ha le derivate con stessa periodicità di  $k(x)$ . Ciò intuitivamente, suggerisce che la temperatura presenti una qualche modulazione descrivibile con una piccola scala data dalla periodicità della diffusività termica, e un'altra variazione descritta da una scala molto più grande. Si avrebbe nelle suddette condizioni a grandi scale:

$$\tau(x_2) - \tau(x_1) = -J_q \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{k(x)} \simeq -J_q(x_2 - x_1) \left\langle \frac{1}{k(x)} \right\rangle_x$$

con  $\left\langle \frac{1}{k(x)} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{k(x)}$ . Allora vista in grande scala la corrente di calore sarà

$$J_q \simeq -\frac{\tau(x_2) - \tau(x_1)}{x_2 - x_1} \frac{1}{\left\langle \frac{1}{k(x)} \right\rangle_x} = -\frac{\tau(x_2) - \tau(x_1)}{x_2 - x_1} k^E$$

cioè l'ordinaria corrente termica in cui le proprietà di non uniformità spaziale sono state assorbite in una nuova diffusività termica consistente nella *media armonica* sul periodo della diffusività iniziale a piccola scala.

Vediamo come ottenere questo risultato utilizzando rigorosamente le scale multiple. Supponiamo allora uno sviluppo perturbativo della funzione incognita di temperatura della forma  $\tau_0(x, t, X, T) + \epsilon\tau_1(x, t, X, T) + \epsilon^2\tau_2(x, t, X, T) + O(\epsilon^2)$ , essendo insieme alle sue derivate coinvolte periodica nelle variabili veloci ad ogni ordine. Analogamente a quanto fatto per i problemi perturbati, saremo interessati alla soluzione all'ordine 0. Inoltre, supponiamo che le variabili di grande scala siano tali che  $X = \epsilon x$ ,  $T = \epsilon^2 t$ ; la dipendenza quadratica della variabile temporale dal parametro è scelta in base a considerazioni di simmetria e dimensionali del problema: in questo caso si vuole arrivare a un'equazione finale della diffusione.

Le derivate allora risultano essere  $\partial_t \rightarrow \partial_t + \epsilon^2 \tilde{\partial}_T$  e  $\partial_x \rightarrow \partial_x + \epsilon \tilde{\partial}_X$ . Inserendo nella (3.9), otteniamo come al solito la gerarchia dei vari ordini. L'ordine 0 è

$$\partial_t \tau_0(T, X, t, x) = \partial_x [k(x) \partial_x \tau_0(T, X, t, x)]$$

A differenza del caso in una dimensione emerge subito la prima differenza. In più dimensioni, può capitare che già l'ordine 0 risulti essere un'equazione alle derivate parziali, la cui soluzione solitamente è ardua, sia per la difficoltà di trovare un'integrale generale sia anche solo per tenere conto delle eventuali condizioni al contorno. Tuttavia, in questo caso semplici considerazioni di simmetria del problema possono chiarire e delineare la questione.

Soffermiamoci sulle periodicità da porre delle variabili veloci. Rispetto alla  $x$ , notiamo che l'equazione può esser scritta come  $\partial_t \tau = (\partial_x k) \partial_x \tau + k \partial_x^2 \tau$ , e quindi avendo i coefficienti in  $x$  periodici di  $2\pi$ , ci troviamo in una situazione analoga a quella vista per il flusso di Kolmogorov: valgono allora analoghe conclusioni per la periodicità nelle variabile veloce  $x$  rispetto a quella della diffusività. Per quanto riguarda  $t$ , non vi è una periodicità particolare indotta da una tale caratteristica dei coefficienti rispetto a questa variabile; tuttavia, data la linearità dell'equazione e la costanza dei coefficienti rispetto a  $t$ , possiamo effettuare la trasformata di Fourier di entrambi i membri ri-

petto al tempo veloce: questo porta che possiamo focalizzare l'attenzione grazie al principio di sovrapposizione su ogni modo normale che, nel tempo, può avere una periodicità arbitraria, dovuta al fatto che su  $\omega$  non ci sono vincoli. Tale ragionamento può esser ripetuto ovviamente per gli ordini successivi, dato che solo le derivate veloci agiranno sul termine di ordine più alto dello sviluppo  $\tau_n$ .

Tutto questo mostra comunque come sia necessario, per un corretto risultato, che la scala di modulazione lenta sia ben distinta da quella veloce nell'andamento della funzione<sup>4</sup>, in particolare estremamente più grande, in modo che ci si trovi il regime  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , condizione senza la quale il multiscale fallisce la sua convergenza alla soluzione esatta.

Per l'ordine 0 in particolare vale il seguente risultato importante. Scriviamo  $\tau_0 = \langle \tau_0 \rangle + \tilde{\tau}_0$ , dove  $\langle \dots \rangle$  è la media spazio-temporale sui periodi in t e x. Chiaramente  $\tilde{\tau}_0$  ha media nulla.

**Teorema 3.2.2.** *L'unica soluzione dell'ordine 0 per le fluttuazioni a media nulla con le condizioni di periodicità poste è  $\tilde{\tau}_0 = 0$ .*

*Dimostrazione.* Indichiamo con  $\langle \dots \rangle_x$  la media solamente sul periodo spaziale. Sappiamo che  $\tilde{\tau}_0$  ha integrale sul periodo spaziale C nullo. Essendo  $\tilde{\tau}_0$  periodica nelle variabili spaziali, possiamo svilupparla in serie di Fourier  $\tilde{\tau}_0(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\tilde{\tau}}_{0n}(t) e^{i \frac{2\pi n}{C} x}$  e, essendo assente il coefficiente per  $n = 0$ , si può scrivere  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |\hat{\tilde{\tau}}_{0n}(t)|^2 \geq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{\tilde{\tau}}_{0n}(t)|^2$ . Per l'identità di Parseval,  $\langle \tilde{\tau}_0^2(x, t) \rangle_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{\tilde{\tau}}_{0n}(t)|^2$  e, potendo derivare la serie di Fourier termine a termine per le supposte condizioni di periodicità della funzione e delle derivate,  $\langle |\partial_x \tilde{\tau}_0(x, t)|^2 \rangle_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2\pi}{C}\right)^2 n^2 |\hat{\tilde{\tau}}_{0n}(t)|^2$ . Da ciò, otteniamo la seguente *diseguaglianza di Poincarè*:

$$\langle |\partial_x \tilde{\tau}_0(x, t)|^2 \rangle_x \geq \left(\frac{2\pi}{C}\right)^2 \langle \tilde{\tau}_0^2(x, t) \rangle_x$$

Posto tutto ciò, moltiplichiamo per  $\tilde{\tau}_0$  entrambi i membri dell'equazione dell'ordine 0 per la fluttuazione, sfruttando al regola di derivazione delle funzioni composte, e integriamo sulle periodicità spaziali:

$$\frac{1}{2} \langle \partial_t \tilde{\tau}_0^2 \rangle_x = \langle \partial_x [k \tilde{\tau}_0 \partial_x \tilde{\tau}_0] \rangle_x - \langle k (\partial_x \tilde{\tau}_0)^2 \rangle_x \leq -\langle (\partial_x \tilde{\tau}_0)^2 \rangle_x \min_{x \in C} k$$

Il termine barrato è nullo per il teorema fondamentale del calcolo integrale e avendo condizioni periodiche in k,  $\tau$  e nella sua derivata in x. La diseguaglianza invece viene dal fatto che, essendo sia k che  $(\partial_x \tau_0)^2$  sempre positive, si ha  $\int_C k (\partial_x \tilde{\tau}_0)^2 dx \geq \int_C (\partial_x \tilde{\tau}_0)^2 dx [\min_{x \in C} k]$ . Perciò, dalla diseguaglianza di Poincarè:

$$\frac{1}{2} \partial_t \langle \tilde{\tau}_0^2 \rangle_x \leq -\left(\frac{2\pi}{C}\right)^2 \langle \tilde{\tau}_0^2 \rangle_x \min_{x \in C} k \implies \langle \tilde{\tau}_0^2 \rangle_x \leq c e^{-2t \left(\frac{2\pi}{C}\right)^2 \min_{x \in C} k} \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} 0$$

Ma la fluttuazione  $\tilde{\tau}_0$  è periodica anche nel tempo per costruzione: allora  $\tilde{\tau}_0 = 0 \forall t$  □

La soluzione dell'ordine 0 risulta allora  $\tau_0 = \langle \tau_0 \rangle$ , cioè  $\tau_0$  è costante rispetto alle variabili veloci. Inoltre, ciò mostra che il kernel dell'operatore dell'equazione del calore rispetto alle variabili veloci sulle funzioni periodiche e limitate sono le costanti, e pertanto la sua restrizione alle funzioni a media nulla ha kernel vuoto (solo l'elemento 0 è la costante a media nulla).

<sup>4</sup>Per chiarire concettualmente e intuitivamente, potremmo utilizzare l'analogia con l'interferenza tra due onde lineari, fenomeno che risulta trascurabile quanto più le frequenze son differenti tra loro.

L'equazione dell'ordine 1 è:

$$-\partial_t \tau_1(x, t, T, X) + \partial_x [k(x) \partial_x \tau_1(x, t, T, X)] = -\partial_x [k(x) \tilde{\partial}_X \tau_0(T, X)] - k(x) \partial_x \tilde{\partial}_X \tau_0(X, T)$$

Essendo l'operatore dell'equazione del calore considerata rientrante nella casistica del teorema 3.2.1, possiamo scrivere la condizione di risolubilità. A quest'ordine però, essa porta alla trivialità  $0=0$ . Comunque, mediamo l'ordine 1 integrando sul periodo temporale. Si ha allora, indicando ciò con  $\langle \dots \rangle_t$ :

$$\partial_x [k \partial_x \langle \tau_1 \rangle_t] = -\partial_x [k \tilde{\partial}_X \tau_0],$$

e risulta un'equazione differenziale ordinaria non omogenea per  $\langle \tau_1 \rangle_t$ , che è la stessa situazione in cui ci trovavamo nel caso delle equazioni differenziali ordinarie in cui si volevano risommare i termini secolari. Comunque, tale equazione raccogliendo la derivata rispetto a x, implica che:

$$\partial_x \langle \tau_1 \rangle_t + \tilde{\partial}_X \tau_0 = \frac{F_3(X, T)}{k(x)} \implies \langle \tilde{\partial}_X \tau_0 \rangle = F_3(X, T) \left\langle \frac{1}{k(x)} \right\rangle \quad (3.10)$$

dove si è effettuata la media integrando sulla periodicità spaziale C e si è sfruttato che  $\tau_0$  è costante rispetto a x, mentre  $\int_C \partial_x \langle \tau_1 \rangle_t dx = 0$  ancora banalmente per il teorema fondamentale del calcolo integrale.

L'ordine 2, infine:

$$\begin{aligned} & -\partial_t \tau_2(x, t, X, T) + \partial_x [k(x) \partial_x \tau_2(x, t, T, X)] = \\ & = -\partial_x [k(x) \tilde{\partial}_X \tau_1(x, T, X)] - [k(x) \tilde{\partial}_X \partial_x \tau_1(x, T, X)] - \tilde{\partial}_X [k(x) \tilde{\partial}_X \tau_0(T, X)] - \tilde{\partial}_T \tau_0(X, T) \end{aligned}$$

Otteniamo ancora la condizione di risolubilità mediando entrambi i membri spazio-temporalmente; integrando ulteriormente sul periodo temporale e scambiando le due medie si ottiene:

$$\tilde{\partial}_X \langle k \partial_x \langle \tau_1 \rangle_t \rangle + \tilde{\partial}_X \langle k \tilde{\partial}_X \tau_0 \rangle - \tilde{\partial}_T \tau_0 = 0 \quad (3.11)$$

Esplicitiamo  $F_3$  dall'equazione destra delle (3.10) e inseriamola in quella a sinistra, ottenendo:

$$\partial_x \langle \tau_1 \rangle_t + \tilde{\partial}_X \tau_0 = \frac{\tilde{\partial}_X \tau_0}{k(x) \left\langle \frac{1}{k(x)} \right\rangle}$$

Da quest'ultima poi, sostituiamo  $\partial_x \langle \tau_1 \rangle_t$  nella (3.11), giungendo finalmente a:

$$\tilde{\partial}_T \langle \tau_0 \rangle = \frac{1}{\left\langle \frac{1}{k(x)} \right\rangle} \tilde{\partial}_X^2 \langle \tau_0 \rangle := k^E \tilde{\partial}_X^2 \langle \tau_0 \rangle \quad (3.12)$$

dove si è tenuto conto del risultato dell'ordine 0 che  $\tau_0 = \langle \tau_0 \rangle$ , ed è ciò che avevamo ottenuto con l'argomento euristico.  $k^E$  è detta *diffusività termica vestita* o *rinormalizzata (eddy diffusivity)*, per la quale le medie armoniche spazio-temporale e spaziale coincidono poiché la diffusività originaria non dipendeva dal tempo.

### 3.2.3 Turbolenza dello scalare passivo

Consideriamo un inquinante in un fluido incompressibile in moto a velocità  $\mathbf{v}$ . La traiettoria di ogni particella di inquinante nel modello di Einstein-Smoluchowski sarà data da:

$$dx_i = v_i(\mathbf{x}, t)dt + \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)dW_j \quad (3.13)$$

cioè gli spostamenti delle particelle hanno un contributo dovuto al campo di velocità del fluido da cui son trascinate e un altro di natura casuale, con  $\mathbf{W}$  processo di Wiener, il processo caratteristico del moto browniano, caratterizzato dalla condizione iniziale  $\mathbf{W}_0 = 0$ , avente in ogni istante una distribuzione di probabilità gaussiana di media 0 e varianza  $t$  e tale che in un certo intervallo di tempo non abbia memoria della sua realizzazione negli intervalli di tempo precedenti. L'equazione precedente è un'equazione differenziale stocastica nella variabile aleatoria  $\mathbf{x}(t)$ . Essa può venir anche scritta come [26]:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\eta}(t)$$

dove se  $\sigma_{ij} = \sqrt{2D_0}\delta_{ij}$  è un tensore isotropo e costante (cioè non c'è feedback nel processo aleatorio  $\mathbf{x}$ , che è il caso di nostro interesse),  $\boldsymbol{\eta}$  è un *rumore bianco*, la derivata di un processo di Wiener, avente quindi in ogni istante distribuzione gaussiana con media nulla e coefficiente di autocorrelazione:

$$\langle \eta_i(t)\eta_j(t') \rangle = 2D_0\delta_{ij}\delta(t-t')$$

dove la media è intesa sulle realizzazioni possibili in ogni istante. L'ultima versione dell'equazione del moto mostra come nel modello di Einstein-Smoluchowski sia ritenuto trascurabile il termine d'inerzia proporzionale all'accelerazione: si può mostrare difatti che la velocità media decade con un esponenziale negativo nel tempo a una costante [48,49]. Senza entrare nel dettaglio della teoria delle equazioni differenziali stocastiche, che non è attinente da vicino ai nostri scopi, richiamiamo che comunque la distribuzione di probabilità  $\theta$  del processo alla (3.13), e quindi la concentrazione delle particelle nel flusso se la distribuzione viene normalizzata al numero totale di particelle, son date dalla nota *equazione di Fokker-Planck*:

$$\partial_t\theta + \partial_i(v_i\theta) = \partial_i\partial_j [D_{ij}\theta]$$

dove appunto  $D_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}\sigma_{ik}(\mathbf{x}, t)\sigma_{kj}(\mathbf{x}, t)$ .

Nel caso di nostro interesse, dove il processo è isotropo e caratterizzato da rumore bianco, si ha  $D_{ij} = D_0\delta_{ij}$ , e perciò sfruttando anche che  $\partial_i v_i = 0$  dall'incompressibilità:

$$\partial_t\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta = D_0\nabla^2\theta \quad (3.14)$$

La (3.14) è detta *equazione dello scalare passivo*, detta così perché lo scalare non interviene nella dinamica del flusso stesso che quindi ne risulta indipendente. L'assenza di componente stocastica nella (3.13) implicherebbe  $D_0 = 0$ , e l'equazione si abbasserebbe di ordine nelle derivate spaziali. Ciò richiederebbe quindi una trattazione differente da quella che andremo ad esporre, e pertanto non contempleremo questo caso.

Il problema dello scalare passivo è molto importante nello studio della turbolenza, perché

presenta molte proprietà simili alle equazioni di Navier-Stokes in tale regime: rotture delle simmetrie spontanee che poi vengono ripristinate in senso statistico quando la turbolenza è totalmente sviluppata; l'andamento dello spettro energetico nelle frequenze, etc. Ciò avviene ad alti numeri di Péclet  $Pe = \frac{UL}{D_0}$ . Notiamo però che lo scalare passivo ha un'equazione lineare, a differenza delle Navier-Stokes: questo prova come per indurre un comportamento caotico basti soltanto la presenza di un termine advettivo nell'equazione.

Il fatto che la (3.14) sia lineare inoltre, implica che dato un flusso e una distribuzione di particelle soluzione di essa, una qualsiasi perturbazione a questa si propaga con la stessa dinamica lineare, a differenza di quanto accadeva nelle equazioni di Navier-Stokes che sono non lineari. Perciò per studiare la stabilità delle soluzioni della (3.14) è sufficiente studiare le soluzioni generiche della stessa.

Supponiamo che il flusso  $\mathbf{v}$  sia periodico in tutte le direzioni e nel tempo, esteso idealmente in tutto lo spazio; si noti che in tali condizioni, potendo scrivere, con  $\langle \dots \rangle$  media sull'insieme di periodicità spazio-temporale,  $\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle + \tilde{\mathbf{v}}$ , dove il primo addendo del membro a sinistra è una velocità costante e il secondo una velocità a media nulla, esiste sempre un sistema di riferimento dove si ha  $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$  sul periodo, e assumeremo perciò tale proprietà.

Vogliamo studiare il comportamento della concentrazione su grandi lunghezze e a grandi tempi [23,26]. Al solito, imponiamo  $\theta = \theta_0(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T) + \epsilon \theta_1(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T) + \epsilon^2 \theta_2(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T) + \dots$ , con la consueta relazione di periodicità tra le variabili veloci spaziali e temporali dello scalare e delle sue derivate coinvolte e le periodicità del flusso; inoltre, come nell'equazione del calore,  $X = \epsilon x$ ,  $T = \epsilon^2 t$ . Esplicitando le derivate nelle nuove variabili e ponendo  $\theta_0 = \langle \theta_0 \rangle + \tilde{\theta}_0$  si ottiene all'ordine 0:

$$\partial_t \tilde{\theta}_0 + \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\theta}_0 = D_0 \nabla^2 \tilde{\theta}_0 \quad (3.15)$$

**Teorema 3.2.3.** *La (3.15) nelle condizioni di periodicità e media nulla poste ha solo la soluzione  $\tilde{\theta}_0 = 0$ .*

*Dimostrazione.* Indichiamo con  $\langle \dots \rangle_{\mathbf{x}}$  la media solamente sui periodi spaziali. Sappiamo che  $\tilde{\theta}_0$  ha integrale sui periodi spaziali nullo. Essendo  $\tilde{\theta}_0$  periodica nelle variabili spaziali, possiamo svilupparla in serie di Fourier  $\tilde{\theta}_0(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\theta}_{0\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$  e, essendo assente il coefficiente per  $\mathbf{k} = 0$ , si può scrivere  $\sum_{\mathbf{k}} k^2 |\tilde{\theta}_{0\mathbf{k}}(t)|^2 \geq \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{\theta}_{0\mathbf{k}}(t)|^2$ . Per l'identità di Parseval,  $\langle \tilde{\theta}_0^2(\mathbf{x}, t) \rangle_{\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{\theta}_{0\mathbf{k}}(t)|^2$  e, potendo derivare la serie di Fourier termine a termine per le supposte condizioni di periodicità della funzione e delle derivate,  $\langle |\nabla \tilde{\theta}_0(\mathbf{x}, t)|^2 \rangle_{\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{k}} k^2 |\tilde{\theta}_{0\mathbf{k}}(t)|^2$ . Da ciò, otteniamo la seguente *disuguaglianza di Poincaré*:

$$\langle |\nabla \tilde{\theta}_0(\mathbf{x}, t)|^2 \rangle_{\mathbf{x}} \geq \langle \tilde{\theta}_0^2(\mathbf{x}, t) \rangle_{\mathbf{x}}$$

Posto tutto ciò, moltiplichiamo la (3.15) per  $\tilde{\theta}_0$ , sfruttando la regola di derivazione delle funzioni composte, e integriamo sulle periodicità spaziali:

$$\frac{1}{2} \langle \partial_t \tilde{\theta}_0^2 \rangle_{\mathbf{x}} + \langle \tilde{\theta}_0 \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\theta}_0 \rangle_{\mathbf{x}} = \langle \nabla \cdot [\tilde{\theta}_0 \nabla \tilde{\theta}_0] \rangle_{\mathbf{x}} - D_0 \langle |\nabla \tilde{\theta}_0|^2 \rangle_{\mathbf{x}}$$

Il secondo termine barrato è nullo avendo usato il teorema della divergenza e che il flusso uscente da un iper-rettangolo in cui l'integrando assume gli stessi valori sulle facce opposte è nullo. Il

primo barrato invece, si annulla poiché:

$$\langle \tilde{\theta}_0 \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\theta}_0 \rangle_{\mathbf{x}} = \langle \nabla \cdot [\mathbf{v} \tilde{\theta}_0^2] \rangle_{\mathbf{x}} - \langle \tilde{\theta}_0 \nabla \cdot [\mathbf{v} \tilde{\theta}_0] \rangle_{\mathbf{x}} = -\langle \tilde{\theta}_0^2 \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{x}} - \langle \tilde{\theta}_0 \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\theta}_0 \rangle_{\mathbf{x}}$$

Perciò, dalla disuguaglianza di Poincarè:

$$\frac{1}{2} \langle \partial_t \tilde{\theta}_0^2 \rangle_{\mathbf{x}} \leq -D_0 \langle \tilde{\theta}_0^2 \rangle_{\mathbf{x}} \implies \langle \tilde{\theta}_0^2 \rangle_{\mathbf{x}} \leq C e^{-2D_0 t} \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} 0$$

Ma la fluttuazione  $\tilde{\theta}_0$  è periodica anche nel tempo per costruzione: allora  $\tilde{\theta}_0 = 0 \forall t$  □

Da ciò segue che  $\theta_0 = \langle \theta_0 \rangle$ , cioè è costante nelle variabili veloci. Le costanti rappresentano pertanto il kernel dell'operatore dello scalare passivo sulle funzioni con le già dette caratteristiche di periodicità, e pertanto analogamente all'equazione del calore sarà possibile scriverne la condizione di risolubilità ad ogni ordine.

L'ordine 1 della gerarchia è:

$$\partial_t \theta_1 + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta_1 - D_0 \nabla^2 \theta_1 = -\mathbf{v} \cdot \tilde{\nabla} \langle \theta_0 \rangle$$

Effettuando la media di entrambi i membri sul dominio di periodicità spazio-temporale però si vede che in questo caso si arriva alla banalità  $0 = 0$ , essendo  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ ,  $\tilde{\nabla} \langle \theta_0 \rangle$  costante nelle variabili veloci e  $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$ .

L'ordine 2 è:

$$\partial_t \theta_2 + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta_2 - D_0 \nabla^2 \theta_2 = -\tilde{\partial}_T \langle \theta_0 \rangle - \mathbf{v} \cdot \tilde{\nabla} \theta_1 + D_0 \tilde{\nabla}^2 \langle \theta_0 \rangle + 2D_0 \nabla \cdot \tilde{\nabla} \theta_1$$

e la condizione di risolubilità che se ne ottiene è:

$$\tilde{\partial}_T \langle \theta_0 \rangle + \tilde{\nabla} \cdot \langle \mathbf{v} \theta_1 \rangle = D_0 \tilde{\nabla}^2 \langle \theta_0 \rangle \quad (3.16)$$

Torniamo ora all'ordine 1. Osserviamo che esso è un'equazione differenziale non omogenea. La soluzione è data dall'integrale generale dell'omogenea più una soluzione particolare dell'equazione completa. Data la separazione delle variabili veloci e lente nel termine non omogeneo, per trovarla si può risolvere considerando prima le tre separate equazioni :

$$\partial_t \chi + \mathbf{v} \cdot \nabla \chi - D_0 \nabla^2 \chi = -\mathbf{v} \quad (3.17)$$

risolverle con le condizioni al contorno di periodicità per trovare le tre componenti del campo vettoriale  $\chi$  e infine considerare la somma delle tre componenti ognuna moltiplicata per un fattore  $\tilde{\partial}_i \langle \theta_0 \rangle$ , che dipende solo dalle variabili lente e quindi rappresenta una costante rispetto a quelle veloci: si ottiene cioè  $\chi \cdot \tilde{\nabla} \langle \theta_0 \rangle$ , che per la linearità, sarà essa stessa una soluzione dell'equazione completa. Per quanto riguarda la soluzione generale dell'equazione omogenea, abbiamo già visto che l'operatore dell'equazione dello scalare passivo, sulle funzioni periodiche, ha come kernel le costanti; agendo quindi all'ordine 1 rispetto alle variabili veloci, l'integrale generale dell'omogenea

associata sarà una generica  $\theta'_1(\mathbf{X}, T)$ , e l'integrale generale dell'ordine 1 quindi:

$$\theta_1(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T) = \theta'_1 + \tilde{\nabla} \langle \theta_0 \rangle \cdot \chi$$

Inserendo quest'ultima nella (3.16), sfruttando ancora che  $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$ , si ottiene:

$$\tilde{\partial}_T \langle \theta_0 \rangle = D_{ij}^E \tilde{\partial}_i \tilde{\partial}_j \langle \theta_0 \rangle \quad (3.18)$$

dove la parte mediata, i cui indici sono contratti con quelli simmetrici delle due derivate  $ij$ , è stata scritta in modo da produrre un tensore simmetrico  $D_{ij}^E$ , il *tensore di diffusività vestita o rinormalizzata (eddy diffusivity tensor)*:

$$D_{ij}^E = D_0 \delta_{ij} - \frac{1}{2} [\langle v_i \chi_j \rangle + \langle \chi_i v_j \rangle]$$

la cui anisotropia è dovuta al fatto che il flusso non è invariante per rotazioni (lo diverrebbe se fosse nullo). Ovviamente per conoscerlo bisogna risolvere l'equazione ausiliaria (3.17). Moltiplicando ogni componente  $i$  di quest'ultima per  $\chi_j$ , aggiungendo l'analoga espressione con indici scambiati e mediando sulle periodicità delle loro variabili veloci si ottiene:

$$\partial_t \langle \chi_i \chi_j \rangle + v_k \partial_k \langle \chi_i \chi_j \rangle + \langle v_i \chi_j \rangle + \langle v_j \chi_i \rangle - D_0 \langle \chi_i \nabla^2 \chi_j + \chi_j \nabla^2 \chi_i \rangle = 0$$

Tenendo conto delle relazioni  $\chi_j \nabla^2 \chi_i = \partial_l (\chi_i \partial_l \chi_j) - (\partial_l \chi_i) (\partial_l \chi_j)$  diventa:

$$\langle v_i \chi_j \rangle + \langle v_j \chi_i \rangle = -2D_0 \langle \partial_l \chi_i \rangle \langle \partial_l \chi_j \rangle$$

Perciò la diffusività vestita è scrivibile anche come:

$$D_{ij}^E = D_0 \delta_{ij} + D_0 \langle \partial_l \chi_i \rangle \langle \partial_l \chi_j \rangle$$

Studiamo ora la relazione di dispersione dell'equazione rinormalizzata con questa diffusività. Operando la trasformata di Fourier di entrambi i membri, si ottiene facilmente  $-i\omega = -D_{ij}^E K_i K_j$ . Ma le componenti di  $D_{ij}^E$  sono una  $\delta_{ij}$  sommata a una matrice della forma  $A_{li} A_{lj} = A^T A$ , dover  $A_{ij}$  è reale; pertanto  $K_i A_{li} A_{lj} K_j = \mathbf{K}^T A^T A \mathbf{K} = \sum_n \mathbf{K}^T A^T \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^T A \mathbf{K} = \sum_n (\mathbf{e}_n^T A \mathbf{K})^2 \geq 0$ , dove  $\mathbf{e}_n$  è una base di  $\mathbb{R}^n$  e si è usata la relazione di completezza. Pertanto  $D_{ij}^E$  risulta definita positiva, e così  $-i\omega$  è un numero reale  $>0$ : l'equazione ha sempre soluzioni stabili, e i modi normali con  $\mathbf{K} \neq 0$  decadono nel tempo a 0, lasciando solo il modo costante a  $\mathbf{K} = 0$ , che rappresenta quindi la generica soluzione asintotica.

Tuttavia, sappiamo che l'equazione della diffusione (3.18) non presenta alcun tipo di andamento caotico, mentre per lo scalare passivo ciò si vede sia sperimentalmente sia nell'equazione di partenza (3.14), come già detto, ad alti numeri di Peclét. Questo significa che le perturbazioni che portano ad un andamento caotico non sono previste dall'analisi a scale multiple. Questa tecnica fallisce in tale regime poiché non esiste più una separazione di scala sufficientemente netta da far sì che  $\frac{\mathbf{X}}{\mathbf{x}} = \epsilon \rightarrow 0$   $\frac{T}{t} = \epsilon^2 \rightarrow 0$ , e pertanto lo sviluppo a scale multiple non converge più alla soluzione esatta, cadendo le sue ipotesi di validità.

### 3.2.4 Viscosità vestita e stabilità lineare del flusso di Kolmogorov newtoniano

In base ai precedenti due esempi, potremmo applicare il multiscala alla stabilità lineare di un flusso periodicizzato, tentando di ricondurci a un'equazione diffusiva. Una volta arrivati alla relazione finale a grande scale, con i parametri rinormalizzati, essi possono dare informazioni sulla stabilità lineare o meno del flusso.

Mostriamo come esempio quanto detto sul caso del flusso di Kolmogorov newtoniano. E' conveniente scrivere il termine advettivo come  $v_i \partial_i v_j = \partial_i (v_i v_j)$ , dove come al solito abbiamo sfruttato che  $\partial_i v_i = 0$ . Pertanto, si avrà per il flusso base perturbato, indicando con  $\mathbf{U}$  il punto fisso e  $\mathbf{v}$  la perturbazione  $U_i \partial_i v_j + v_i \partial_i U_j = \partial_i (U_i v_j + U_j v_i)$ . Le equazioni perturbate allora vengono riscritte come:

$$\begin{cases} \partial_i v_i = 0 \\ \partial_t v_i + \partial_j (U_j v_i + U_i v_j) = -\frac{\partial_i p}{\rho} + \mu \partial_j \partial_j v_i \end{cases}$$

Prendiamo le equazioni di stabilità lineare e sviluppiamo a scale multiple le perturbazioni:  $\mathbf{v} = \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon^n \mathbf{v}_n(x, y, t, X, Y, T)$ ,  $p = \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon^n p_n(x, y, t, X, Y, T)$ , ancora con  $X = \epsilon x$ ,  $Y = \epsilon y$ ,  $T = \epsilon^2 t$ , e le derivate parziali nelle nuove variabili indotte nel modo già visto  $\partial_x + \epsilon \tilde{\partial}_X$ ,  $\partial_y + \epsilon \tilde{\partial}_Y$  e  $\partial_t + \epsilon^2 \tilde{\partial}_T$ . Come nei precedenti casi di equazione diffusiva, siamo interessati ad arrivare all'ordine 2 in  $\epsilon$ .

La periodicità lungo  $y$  sarà nella solita relazione rispetto a quella del punto fisso, analogamente a quanto fatto per le condizioni al contorno nella risoluzione lineare numerica. Per quanto già detto nei precedenti esempi, dipendendo i coefficienti solo da  $y$ , possiamo scegliere una periodicità arbitraria lungo  $t$  e  $x$ . Mostriamo che questo è irrilevante, e che alla fine l'unica scala veloce che compare è quella in  $y$ , poiché è presente la piccola scala del problema data dalla periodicità del flusso di Kolmogorov. Infatti, operando le suddette sostituzioni, si può integrare ambo i membri sui periodi arbitrari in  $t$  e  $x$ ; non dipendendo alcun coefficiente da queste variabili, ed essendo quindi le equazioni composte soltanto da termini di derivata in queste variabili ( $\partial_t v_i, \partial_x p, \partial_x (U_x v_j + U_j v_x), \dots$ ), essi verranno cancellati in virtù delle periodicità e sopravviverà un'equazione contenente solo la variabile veloce  $y$  e le varie grandezze mediate sul periodo  $x$  e  $t$ . Ciò non influisce sul cercato risultato finale, cioè l'andamento delle grandezze mediate su *tutte* le periodicità, come visto nei precedenti esempi; pertanto potremo considerare le equazioni per le quantità  $\langle \mathbf{v}_n \rangle_{xt}, \langle p_n \rangle_{xt}$ , che per snellire la notazione continueremo a indicare con  $\mathbf{v}_n(y, X, Y, T)$  e  $p_n(y, X, Y, T)$ .

Le equazioni all'ordine 0 allora, ricordando che  $\mathbf{U} = (U \sin \frac{y}{L}, 0)$ , sono:

$$\begin{cases} \partial_y v_0 = 0 \\ \partial_y (U_x v_0) = \mu \partial_y^2 v_0 \\ 0 = -\frac{\partial_y p_0}{\rho} + \mu \partial_y^2 v_0 \end{cases} \quad (3.19)$$

La prima equazione dà  $v_0 = \langle v_0 \rangle$ , la terza allora  $p_0 = \langle p_0 \rangle$ , mentre dalla seconda otteniamo che  $u_0 = -\frac{UL \langle v_0 \rangle}{\mu} \cos \frac{y}{L} + Ay + B$ , ma tenendo conto della condizione di periodicità dev'essere  $A=0$  e

mediando si vede che  $B = \langle u_0 \rangle$ ; perciò in sintesi al primo ordine:

$$u_0 = -\frac{UL\langle v_0 \rangle}{\mu} \cos \frac{y}{L} + \langle u_0 \rangle \quad v_0 = \langle v_0 \rangle \quad p_0 = \langle p_0 \rangle \quad (3.20)$$

Le equazioni all'ordine 1 in  $\epsilon$  sono invece:

$$\begin{cases} \partial_y v_1 = -\tilde{\partial}_X u_0 - \tilde{\partial}_Y v_0 \\ \partial_y (U_x v_1) - \mu \partial_y^2 u_1 = -2\tilde{\partial}_X (U_x u_0) - \tilde{\partial}_Y (U_x v_0) - \tilde{\partial}_X \frac{p_0}{\rho} + 2\mu \partial_y \tilde{\partial}_Y u_0 \\ \frac{\partial_y p_1}{\rho} - \mu \partial_y^2 v_1 = -\tilde{\partial}_X (U_x v_0) - \tilde{\partial}_Y \frac{p_0}{\rho} + 2\mu \partial_y \tilde{\partial}_Y v_0 \end{cases} \quad (3.21)$$

Qui come già visto troviamo delle equazioni differenziali con termini non omogenei. Che esse siano composte da termini della forma  $\partial_i \xi$  lo si vede direttamente. Per quanto riguarda il kernel, verificare che le costanti vi appartengano è ancora banale, ma in questo caso, avendo a che fare con un sistema a coefficienti non costanti, è molto più complicato invece verificare che *soltanto* le costanti costituiscano il kernel, e che quindi la restrizione dell'operatore alle funzioni a media nulla sia invertibile. Procedendo come negli esempi precedenti però, effettuando cioè ad ogni ordine la media di entrambi i membri del sistema sul periodo in  $y$ , si ottiene ancora la condizione necessaria a cui devon soddisfare le soluzioni che i termini omogenei devon esser ortogonali alle costanti, cioè a media nulla; da ciò si possono ottenere le soluzioni esplicite di  $u$ ,  $v$  e  $p$  rispetto alle variabili veloci soddisfacenti in queste ultime le corrette condizioni al contorno di periodicità, verificando quindi che effettivamente la condizione di media nulla oltre ad esser necessaria è pure sufficiente per la soluzione del problema.

Osservando che sono nulli gli integrali sulla periodicità in  $y$  di  $U_x v_0 = \propto \langle v_0 \rangle \sin \frac{y}{L}$  e di  $u_0 U_x$ , che contiene la somma di un termine analogo al precedente e di uno del tipo  $\propto \cos \frac{y}{L} \sin \frac{y}{L} = \sin \frac{2y}{L}$ :

$$\begin{cases} \tilde{\partial}_X \langle u_0 \rangle + \tilde{\partial}_Y \langle v_0 \rangle = 0 \\ \tilde{\partial}_X p_0 = 0 \\ \tilde{\partial}_Y p_0 = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Otteniamo quindi che  $p_0$  non compare in nessun ordine, venendo cancellata nelle equazioni dell'ordine 0 per l'indipendenza da  $y$  e dell'ordine 1 per l'indipendenza da  $X$  e  $Y$ . Integrando la prima delle (3.21) si ottiene:

$$v_1 = \frac{UL^2}{\mu} \tilde{\partial}_X \langle v_0 \rangle \sin \frac{y}{L} - (\tilde{\partial}_X \langle u_0 \rangle + \tilde{\partial}_Y \langle v_0 \rangle) y + \langle v_1 \rangle$$

dove si può cancellare il secondo termine proporzionale a  $y$  in virtù della prima delle (3.22). Inserendo l'espressione così ottenuta e quelle dell'ordine 0 nella seconda delle (3.21), dopo aver

cancellato i termini nulli, si può integrare due volte per ottenere  $u_1$ :

$$\begin{aligned}
& \partial_y \left( \frac{U^2 L^2}{\mu} \sin^2 \frac{y}{L} \tilde{\partial}_X \langle v_0 \rangle + U \langle v_1 \rangle \sin \frac{y}{L} \right) - \mu \partial_y^2 u_1 = \\
& = 2 \left( \frac{U^2 L \tilde{\partial}_X \langle v_0 \rangle}{\mu} \sin \frac{y}{L} \cos \frac{y}{L} - U \tilde{\partial}_X \langle u_0 \rangle \sin \frac{y}{L} \right) - U \sin \frac{y}{L} \tilde{\partial}_Y \langle v_0 \rangle - 2 \partial_y \tilde{\partial}_Y \left( UL \langle v_0 \rangle \cos \frac{y}{L} \right) \\
& \frac{U^2 L^2}{\mu} \sin^2 \frac{y}{L} \tilde{\partial}_X \langle v_0 \rangle + U \langle v_1 \rangle \sin \frac{y}{L} - \mu \partial_y^2 u_1 = \left( \frac{U^2 L^2 \tilde{\partial}_X \langle v_0 \rangle}{\mu} \sin^2 \frac{y}{L} + 2UL \tilde{\partial}_X \langle u_0 \rangle \cos \frac{y}{L} \right) - \tilde{\partial}_Y \left( UL \langle v_0 \rangle \cos \frac{y}{L} \right) + A \\
& u_1 = -\frac{UL}{\mu} \langle v_1 \rangle \cos \frac{y}{L} - 2 \frac{UL^2}{\mu} \tilde{\partial}_X \langle u_0 \rangle \sin \frac{y}{L} + \frac{UL^2}{\mu} \tilde{\partial}_Y \langle v_0 \rangle \sin \frac{y}{L} + Ay + B
\end{aligned}$$

dove ancora nell'ultima, si pone  $A=0$  per la periodicità e  $B=\langle u_1 \rangle$  per la media. In definitiva:

$$u_1 = -\frac{UL}{\mu} \langle v_1 \rangle \cos \frac{y}{L} - \left( 2 \frac{UL^2}{\mu} \tilde{\partial}_X \langle u_0 \rangle - \frac{UL^2}{\mu} \tilde{\partial}_Y \langle v_0 \rangle \right) \sin \frac{y}{L} + \langle u_1 \rangle \quad v_1 = \frac{UL^2}{\mu} \tilde{\partial}_X \langle v_0 \rangle \sin \frac{y}{L} + \langle v_1 \rangle \quad (3.23)$$

Dalla terza delle (3.21) potremmo ricavare anche  $p_1$ ; ciò però non è necessario, in virtù dei passaggi seguenti che effettueremo sulle prossime equazioni.

Il secondo ordine in  $\epsilon$  infine:

$$\begin{cases} \partial_y v_2 = -\tilde{\partial}_X u_1 - \tilde{\partial}_Y v_1 \\ \tilde{\partial}_T u_0 + 2\tilde{\partial}_X (U_x u_1) + \tilde{\partial}_Y (U_x v_1) + \partial_y (U_x v_2) = -\tilde{\partial}_X \frac{p_1}{\rho} + \mu (\tilde{\partial}_X^2 u_0 + \partial_y^2 u_2 + 2\partial_y \tilde{\partial}_Y u_1 + \tilde{\partial}_Y^2 u_0) \\ \tilde{\partial}_T v_0 + \tilde{\partial}_X (U_x v_1) = -\partial_y \frac{p_2}{\rho} - \tilde{\partial}_Y \frac{p_1}{\rho} + \mu (\tilde{\partial}_X^2 v_0 + \partial_y^2 v_2 + 2\partial_y \tilde{\partial}_Y v_1 + \tilde{\partial}_Y^2 v_0) \end{cases} \quad (3.24)$$

Effettuando la media sul periodo spaziale delle ultime due si ottiene:

$$\begin{cases} \tilde{\partial}_T \langle u_0 \rangle + 2\tilde{\partial}_X \langle U_x u_1 \rangle + \tilde{\partial}_Y \langle U_x v_1 \rangle = -\tilde{\partial}_X \frac{\langle p_1 \rangle}{\rho} + \mu (\tilde{\partial}_X^2 \langle u_0 \rangle + \tilde{\partial}_Y^2 \langle u_0 \rangle) \\ \tilde{\partial}_T \langle v_0 \rangle + \tilde{\partial}_X \langle U_x v_1 \rangle = -\tilde{\partial}_Y \frac{\langle p_1 \rangle}{\rho} + \mu (\tilde{\partial}_X^2 \langle v_0 \rangle + \tilde{\partial}_Y^2 \langle v_0 \rangle) \end{cases} \quad (3.25)$$

Questo rappresenta un sistema di equazioni per  $\langle v_0 \rangle$ ; infatti  $\langle U_x v_1 \rangle$  possono essere calcolati esplicitamente avendo trovato in precedenza le espressioni nella variabile veloce  $y$  di  $v_1$ :

$$\begin{cases} \langle U_x u_1 \rangle = -\frac{U^2 L^2}{2\mu} (2\tilde{\partial}_X \langle u_0 \rangle - \tilde{\partial}_Y \langle v_0 \rangle) = -\frac{3U^2 L^2}{2\mu} \tilde{\partial}_X \langle u_0 \rangle \\ \langle U_x v_1 \rangle = \frac{U^2 L^2}{2\mu} \tilde{\partial}_X \langle v_0 \rangle \end{cases}$$

dove nell'ultima eguaglianza della prima si è sfruttata la continuità all'ordine 1 mediata. Inserendo tutto nella seconda e terza delle (3.25) e con anche la continuità mediata al primo ordine, che viene anche sfruttata per utilizzare che  $\tilde{\partial}_Y \tilde{\partial}_X \langle v_0 \rangle = -\tilde{\partial}_X^2 \langle u_0 \rangle$ , otteniamo un sistema di 3 equazioni nelle

incognite  $\langle u_0 \rangle$ ,  $\langle v_0 \rangle$  e  $\langle p \rangle$ , che quindi rappresenta un problema chiuso:

$$\begin{cases} \tilde{\partial}_X \langle u_0 \rangle + \tilde{\partial}_Y \langle v_0 \rangle = 0 \\ \tilde{\partial}_T \langle u_0 \rangle = \frac{7U^2 L^2}{2\mu} \tilde{\partial}_X^2 \langle u_0 \rangle - \tilde{\partial}_X \frac{\langle p_1 \rangle}{\rho} + \mu(\tilde{\partial}_X^2 \langle u_0 \rangle + \tilde{\partial}_Y^2 \langle u_0 \rangle) \\ \tilde{\partial}_T \langle v_0 \rangle = -\frac{U^2 L^2}{2\mu} \tilde{\partial}_X^2 \langle v_0 \rangle - \tilde{\partial}_Y \frac{\langle p_1 \rangle}{\rho} + \mu(\tilde{\partial}_X^2 \langle v_0 \rangle + \tilde{\partial}_Y^2 \langle v_0 \rangle) \end{cases}$$

Dalla prima si vede che le velocità mediate nelle variabili veloci ammettono un potenziale vettore, la *funzione corrente* a grande scala:

$$\langle u_0 \rangle = \tilde{\partial}_Y \Psi \quad \langle v_0 \rangle = -\tilde{\partial}_X \Psi$$

Derivando quindi la seconda equazione del sistema rispetto a Y e sottraendole la terza derivata per X, sostituendo poi la funzione corrente si elimina la pressione ricavando:

$$\tilde{\partial}_T (\tilde{\partial}_X^2 + \tilde{\partial}_Y^2) \Psi = \mu(\tilde{\partial}_X^4 + 2\tilde{\partial}_X^2 \tilde{\partial}_Y^2 + \tilde{\partial}_Y^4) \Psi + \frac{7U^2 L^2}{2\mu} \tilde{\partial}_X^2 \tilde{\partial}_Y^2 \Psi - \frac{U^2 L^2}{2\mu} \tilde{\partial}_X^4 \Psi \quad (3.26)$$

che è scrivibile come:

$$\tilde{\partial}_T (\tilde{\partial}_X^2 + \tilde{\partial}_Y^2) \Psi = \mu_{ijkl}^E \tilde{\partial}_i \tilde{\partial}_j \tilde{\partial}_k \tilde{\partial}_l \Psi$$

Il tensore  $\mu_{ijkl}^E$  ha le dimensioni di una viscosità cinematica, ed è pertanto detto *viscosità vestita* o *rinormalizzata* (*eddy viscosity*). Per come è definita la funzione corrente, appare ovvio che le velocità non esplodono nel tempo se essa stessa non esplode e viceversa. Pertanto potremmo studiare la relazione di dispersione della (3.26). che è lineare, e indagarne la stabilità.

Come già visto, dobbiamo indagare per ogni modo normale  $\Psi_0 e^{i(K_X X + K_Y Y - \Omega T)}$  sul segno di  $i\Omega$ , che infatti risulta essere un numero reale:

$$i\Omega[K_X^2 + K_Y^2] = \mu[K_X^4 + 2K_X^2 K_Y^2 + K_Y^4] + \frac{7U^2 L^2}{2\mu} K_X^2 K_Y^2 - \frac{U^2 L^2}{2\mu} K_X^4$$

cioè studiare il segno del secondo membro, dal momento che la quantità  $K_X^2 + K_Y^2$  non influisce sul segno di  $\Omega$ . Passando a variabili adimensionali e dividendo per  $K_Y^4$ :

$$\left( \frac{1}{\text{Re}} - \frac{\text{Re}}{2} \right) s^2 + \left( \frac{2}{\text{Re}} + \frac{7\text{Re}}{2} \right) s + \frac{1}{\text{Re}}$$

dove  $s = \frac{K_X^2}{K_Y^2}$ ; il flusso è stabile a grande scala se  $i\Omega = as^2 + bs + c > 0 \forall s \geq 0$ . Certamente, dovrà essere  $a > 0$ , affinché il polinomio tenda a  $+\infty$  se  $s \rightarrow +\infty$ . Tracciando il grafico del polinomio sul piano cartesiano (che risulterà quindi una parabola), si vede quindi che la parte per  $s$  positive è  $\geq 0$  o se la parabola ha al più un punto in comune con l'asse x ed è sempre positiva ( $a > 0, b^2 - 4ac \leq 0$ ), oppure se è positiva per  $s \geq 0$  e le intersezioni con l'asse x sono ad  $s \leq 0$  ( $a > 0, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leq 0$  in quanto è sufficiente che la radice maggiore sia negativa; quest'ultima in particolare, risolvendo il sistema di disequazioni è banale verificare che è equivalente a dire che  $a > 0, b \geq 0, c \geq 0, b^2 - 4ac \geq 0$ ).

In questo caso,  $b^2 - 4ac = \frac{49\text{Re}^2}{4} + 16 > 0$ ,  $b > 0$  e  $c > 0$ , dal momento che  $\text{Re} > 0$ . Quindi la stabilità o meno dipende solo da  $a$ , e in particolare  $a > 0$  se:

$$\frac{1}{\text{Re}} - \frac{\text{Re}}{2} > 0 \implies \text{Re} < \sqrt{2}$$

che è il risultato analitico noto dall'analisi di [10] e dai calcoli numerici presentati, confermando quindi che le perturbazioni che danno origine all'instabilità nel flusso di Kolmogorov sono a grande scala. Per  $\text{Re} > \sqrt{2}$ , esistono valori di  $s$  per cui il flusso viene amplificato, e risulta quindi instabile. Che ciò accada non viola il secondo principio della termodinamica: siamo infatti in regime linearizzato, e la trattazione completa delle equazioni non lineari presenterebbe da un certo punto in poi un meccanismo di saturazione e/o bilanciamento dovuto proprio ai termini suddetti.

Soffermiamoci su cosa accade per  $\text{Re} \rightarrow \sqrt{2}^+$ . Nell'intorno destro di questo valore,  $a < 0$ , e quindi la radice maggiore diventa  $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , che è allora sempre positiva e tende a  $+\infty$ , poiché per quanto detto in precedenza  $a \rightarrow 0^-$  e  $-b - \sqrt{b^2 - 4ac} < 0$  strettamente. L'altra radice  $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  è sempre negativa e quindi non è da considerare: infatti per esser positiva si dovrebbe avere  $c < 0$  che non è possibile. Perciò quando  $\text{Re}$  si avvicina a  $\sqrt{2}$  dall'alto, il flusso diventa stabile per perturbazioni con  $s$  superiori a un certo  $M_{\text{Re} \rightarrow \sqrt{2}^+} \rightarrow +\infty$ .

Osserviamo però che, avendo  $\langle u_0 \rangle = iK_Y \Psi_0 e^{i(K_x X + K_y Y - \Omega T)}$  e  $\langle v_0 \rangle = -iK_X \Psi_0 e^{i(K_x X + K_y Y - \Omega T)}$ , e che  $u_0$  diretta lungo  $x$  è parallela al flusso base, si ha che l'angolo  $\theta$  formato tra la perturbazione e il punto fisso è tale che  $\tan^2 \theta = \frac{v_0^2}{u_0^2} = s$ . Ma allora quanto detto significa che per valori di  $\text{Re}$  tendenti a  $\sqrt{2}^+$ ,  $\tan^2 \theta \rightarrow +\infty$  quando  $s \rightarrow +\infty$ , cioè la perturbazione tende ad essere ortogonale al flusso base. Questo è proprio ciò che è previsto anche dal calcolo numerico: infatti nell'intorno destro del Reynolds suddetto, e per  $k_x \rightarrow 0$ , che significava appunto  $s' = k_x/k_y \rightarrow 0$ , vedevamo una perturbazione con  $u$  a media nulla sulla piccola scala (periodo del flusso base) e  $v$  costante diversa da zero, cioè proprio una perturbazione ortogonale su grande scala.

L'indipendenza dal segno dell'angolo ( $\tan^2 \theta$ ) riflette la linearità delle equazioni di stabilità, che possono esser moltiplicate per  $-1$ , ottenendo una perturbazione con stessi fattori di crescita e numeri d'onda.



## Capitolo 4

# Le scale multiple per il flusso di Kolmogorov in casi non newtoniani

Quanto mostrato nel capitolo precedente sulla stabilità del flusso di Kolmogorov newtoniano può essere replicato per studiare la stabilità a grande scala per i casi non newtoniani qua affrontati ed eventualmente fare dei paragoni con il caso esatto calcolato numericamente. Difatti, si può notare come il membro sinistro della (3.26) sia disceso dal termine  $\partial_t \mathbf{v}$ , e dal gradiente della pressione sul quale si sono fatte le derivate incrociate per cancellarlo, e quindi non dipende nè dal flusso base nè dal modello di fluido. Pertanto, l'informazione del flusso base considerato e sulla reologia è contenuta interamente nella viscosità rinormalizzata, che sarà la grandezza che caratterizzerà il problema.

I passaggi, che son stati mostrati con cura per il caso newtoniano, sono dal punto di vista dell'algoritmo gli stessi, con la differenza che avendo a che fare con un'espressione reologica e delle equazioni del moto molto più complesse, i calcoli stessi saranno estremamente più laboriosi, e di fatto sono affrontabili in maniera sicura solo tramite l'utilizzo di software manipolatori (Maple, Mathematica).

Riprendiamo quindi il modello di Carreau-Bird. Sofferiamoci sulla parte di sforzi viscosi delle equazioni perturbate linearizzate. Come già detto per scriverla innanzitutto perturbiamo la divergenza del tensore degli sforzi viscosi, che quindi risulta  $\partial_j [\mu (\partial_i (V_j + v_j) + \partial_j (V_i + v_i))]$  somma dell'ordine 0  $\mu^{(0)}$  calcolato nel flusso base e  $\mu^{(1)}$  consistente nel primo ordine dello sviluppo di Taylor rispetto alla perturbazione  $d_{ij}$ ; successivamente, trascuriamo i prodotti di perturbazioni, ottenendo:

$$\partial_j [\mu^{(0)} (\partial_i V_j + \partial_j V_i)] + \partial_j [\mu^{(0)} (\partial_i v_j + \partial_j v_i)] + \partial_j [\mu^{(1)} (\partial_i V_j + \partial_j V_i)]$$

che, dopo che le è stato sottratto il termine viscoso del flusso base, risulta:

$$\partial_j [2\mu^{(0)} d_{ij}] + \partial_j [2\mu^{(1)} D_{ij}] := \partial_j t_{ij}$$

Ne consegue che le equazioni di stabilità lineare possono esser scritte come:

$$\begin{cases} \partial_i v_i = 0 \\ \partial_t v_i + \partial_j (U_j v_i + U_i v_j) = -\frac{\partial_i p}{\rho} + \partial_j t_{ij} \end{cases}$$

che quindi ancora una volta risulta formata da termini di derivata e divergenza. Inseriamo quindi il solito sviluppo a scale multiple con le già dette periodicità sulle variabili veloci  $\mathbf{v} = \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon^n \mathbf{v}_n(x, y, t, X, Y, T)$ ,  $p = \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon^n p_n(x, y, t, X, Y, T)$ , ancora con  $X = \epsilon x$ ,  $Y = \epsilon y$ ,  $T = \epsilon^2 t$ , e le derivate parziali nelle nuove variabili indotte nel modo già visto  $\partial_x + \epsilon \tilde{\partial}_X$ ,  $\partial_y + \epsilon \tilde{\partial}_Y$  e  $\partial_t + \epsilon^2 \tilde{\partial}_T$ . Siamo interessati ad arrivare all'ordine 2 in  $\epsilon$ . Come mostrato nel caso newtoniano, mediando ad ogni ordine sulle arbitrarie periodicità in  $x$  e  $t$ , dipendendo i coefficienti non costanti solo da  $y$  in ogni termine, grazie alle condizioni periodiche su tutte le grandezze e le loro derivate si annullano i termini di derivata rispetto a  $x$  e  $t$  e si ricavano equazioni ad ogni ordine per le grandezze  $\langle \mathbf{v}_n \rangle_{xt}$ ,  $\langle p_n \rangle_{xt}$  dipendenti solo da  $y$ , che per snellire la notazione continueremo a indicare con  $\mathbf{v}_n(y, X, Y, T)$  e  $p_n(y, X, Y, T)$ , rimanendo da verificare il comportamento di queste ultime mediate anche sulla periodicità in  $y$ . Analogamente a quanto fatto per il caso newtoniano, al primo e secondo ordine eseguiremo la media sulla periodicità della variabile veloce  $y$  per ottenere la condizione che gli eventuali termini comprendenti anche variabili lente siano a media nulla, sperimentando poi che effettivamente questa condizione sarà sufficiente per la risolubilità.

Le equazioni all'ordine 0 allora, ricordando che  $\mathbf{U} = (U \sin \frac{y}{L}, 0)$ , sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_y v_0 = 0 \\ \partial_y (U_x v_0) = \partial_y \left\{ \mu_\infty \partial_y u_0 + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[ (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-1}{2}} + 4 \frac{n-1}{2} \lambda^2 (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-3}{2}} (\partial_y U_x)^2 \right] \partial_y u_0 \right\} \\ 0 = -\frac{\partial_y p_0}{\rho} + \partial_y \left\{ \left[ \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-1}{2}} \right] \partial_y v_0 \right\} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Dalla prima ancora segue che  $v_0 = \langle v_0 \rangle$ ; inserendo questo nella terza si ottiene ancora che  $p_0 = \langle p_0 \rangle$ ; tenendo inoltre conto del risultato su  $v_0$  nella seconda, si può integrare una volta in  $y$ , isolare i termini  $\partial_y u_0$  e reintegrare per ottenere la soluzione dell'equazione come integrale indefinito su cui le costanti vengono poi fissate con le condizioni al contorno:

$$u_0 = \int \frac{\langle v_0 \rangle U_x + A}{\mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[ (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-1}{2}} + 4 \frac{n-1}{2} \lambda^2 (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-3}{2}} (\partial_y U_x)^2 \right]} dy$$

Questo integrale è purtroppo non risolvibile esattamente. Pertanto l'unica possibilità di fare dei calcoli analitici che rimane è verificare se il multiscale è valido almeno per piccoli  $\lambda$ . Sviluppiamo quindi in serie di Taylor intorno a  $\lambda = 0$  l'equazione della quantità di moto in  $x$  all'ordine 0. Eseguendo tale sviluppo non si annulla nessun coefficiente davanti ai termini dell'equazione differenziale, né scompare la dipendenza da qualche altro parametro o  $\lambda = 0$  rappresenta un punto di singolarità per qualcuno di questi coefficienti; pertanto sembrerebbe che non siamo in presenza di un limite singolare; tuttavia, ciò in questo caso non è a priori comunque corretto poiché si sta di fatto scambiando serie e integrale. Detto questo, calcoliamo la soluzione ed espandiamo quest'ultima ancora nell'intorno di  $\lambda = 0$ . Scegliamo di eseguire degli sviluppi al terzo ordine, anche se non compaiono termini  $\propto \lambda^3$  per via della dipendenza esplicita da  $\lambda^2$ . La legittimità di questo sviluppo, e quindi l'analicità delle soluzioni in  $\lambda = 0$ , con gli scambi di serie ed integrale che ne conseguono durante i passaggi successivi, verranno verificati quindi alla fine se il calcolo coinciderà nel suddetto intorno con i risultati ottenuti precedentemente al calcolatore, entro i limiti dell'errore numerico.

L'equazione della quantità di moto in x al terzo ordine in  $\lambda$  è:

$$\partial_y(U_x v_0) = \partial_y \left\{ \mu_\infty \partial_y u_0 + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[ 1 + 6 \frac{n-1}{2} \lambda^2 (\partial_y U_x)^2 + O(\lambda^4) \right] \partial_y u_0 \right\}$$

Da cui

$$u_0 = \int \frac{\langle v_0 \rangle U_x + A}{\mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[ 1 + 6 \frac{n-1}{2} \lambda^2 (\partial_y U_x)^2 + O(\lambda^4) \right]} dy$$

Eseguito un ulteriore sviluppo fino al terzo ordine in  $\lambda$  dell'integrando, si ottiene per  $u_0$ :

$$\begin{aligned} & - \left[ -\mu_\infty + \left( -\frac{3}{2\mu_0} + \frac{3}{2\mu_\infty} \right) \mu_\infty^2 (n-1) \left( \frac{\lambda U}{L} \right)^2 \right] \frac{Ay}{\mu_0 \mu_\infty} - \frac{UL \langle v_0 \rangle}{\mu_0} \cos \frac{y}{L} + B + \\ & + \frac{\mu_\infty^2 \lambda^2}{L^4} \left[ (n-1) \langle v_0 \rangle U^3 L^3 \left( \frac{-1}{\mu_0^2 \mu_\infty} + \frac{1}{\mu_0 \mu_\infty^2} \right) \cos^3 \frac{y}{L} - \left( -\frac{3}{2\mu_0} + \frac{3}{2\mu_\infty} \right) (n-1) \frac{AU^2 L^2 y}{\mu_0 \mu_\infty} \cos \frac{y}{L} \sin \frac{y}{L} \right] + O(\lambda^4) \end{aligned}$$

dove A e B come al solito sono costanti rispetto alla sola variabile veloce  $y$ . Le condizioni al contorno di periodicità e di media impongono che  $A = 0$ ,  $B = \langle u_0 \rangle$ . In definitiva:

$$u_0 = -\frac{UL \langle v_0 \rangle}{\mu_0} \cos \frac{y}{L} + \langle u_0 \rangle + \frac{\mu_\infty^2 \lambda^2}{L^4} (n-1) \langle v_0 \rangle U^3 L^3 \left( \frac{-1}{\mu_0^2 \mu_\infty} + \frac{1}{\mu_0 \mu_\infty^2} \right) \cos^3 \frac{y}{L} + O(\lambda^4)$$

$$v_0 = \langle v_0 \rangle$$

$$p_0 = \langle p_0 \rangle$$

Le equazioni all'ordine 1 in  $\epsilon$  sono più complesse di quelle dell'ordine 0 poiché bisogna sostituirvi le espressioni ricavate sopra. E' bene trattarle una per una. La continuità come solito risulta:

$$\partial_y v_1 + \tilde{\partial}_X u_0 + \tilde{\partial}_Y v_0 = 0 \implies \tilde{\partial}_X \langle u_0 \rangle + \tilde{\partial}_Y \langle v_0 \rangle = 0$$

La seconda implica come nel caso newtoniano che esiste la funzione corrente a grande scala per l'ordine 0. Inserendo nell'equazione di sinistra le espressioni di  $u_0$ ,  $v_0$ , comparirebbe un termine  $\tilde{\partial}_X \langle u_0 \rangle + \tilde{\partial}_Y \langle v_0 \rangle$ , che si può cancellare in virtù della continuità mediata. Quindi si può ricavare  $v_1$  integrando l'equazione differenziale in  $y$ :

$$\left[ \frac{UL}{\mu_0} \cos \frac{y}{L} - \frac{\mu_\infty^2 \lambda^2}{L^4} (n-1) U^3 L^3 \left( \frac{-1}{\mu_0^2 \mu_\infty} + \frac{1}{\mu_0 \mu_\infty^2} \right) \cos^3 \frac{y}{L} \right] \tilde{\partial}_X \langle v_0 \rangle + O(\lambda^4) = \partial_y v_1$$

da cui

$$v_1 = \left[ \frac{UL^2}{\mu_0} \sin \frac{y}{L} - \mu_\infty^2 \lambda^2 (n-1) U^3 \left( \frac{-1}{\mu_0^2 \mu_\infty} + \frac{1}{\mu_0 \mu_\infty^2} \right) \left( \frac{\sin \frac{y}{L} \cos^2 \frac{y}{L}}{3} + \frac{2 \sin \frac{y}{L}}{3} \right) \right] \tilde{\partial}_X \langle v_0 \rangle + A + O(\lambda^4)$$

dove operando la media si trova che ancora la costante  $A = \langle v_1 \rangle$ .

L'ordine 1 della componente x:

$$\begin{aligned} \partial_y(U_x v_1) + 2\tilde{\partial}_X(U_x u_0) + \tilde{\partial}_Y(U_x v_0) &= -\tilde{\partial}_X \frac{p_0}{\rho} + \\ + \partial_y \left\{ \mu_\infty \partial_y u_1 + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[ (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-1}{2}} + 4 \frac{n-1}{2} \lambda^2 (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-3}{2}} (\partial_y U_x)^2 \right] \partial_y u_1 \right\} + \\ + \tilde{\partial}_Y \left\{ \mu_\infty \partial_y u_0 + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[ (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-1}{2}} + 4 \frac{n-1}{2} \lambda^2 (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-3}{2}} (\partial_y U_x)^2 \right] \partial_y u_0 \right\} + \\ + \partial_y \left\{ \mu_\infty [\tilde{\partial}_Y u_0 + \tilde{\partial}_X v_0] + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[ (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-1}{2}} + 4 \frac{n-1}{2} \lambda^2 (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-3}{2}} (\partial_y U_x)^2 \right] (\tilde{\partial}_Y u_0 + \tilde{\partial}_X v_0) \right\} \end{aligned}$$

Effettuiamo la media. I termini che hanno una derivata esterna  $\partial_y$ , si annullano integrati per le periodicità ai bordi del box.  $U_x u_0$  integrato si annulla per via dell'ortogonalità tra sin del flusso base e cos,  $\cos^3$  nella funzione  $u_0$ .  $U_x v_0$  si annulla perché il seno, flusso base, è a media nulla ( $v_0$  è costante in y). Rimane quindi:

$$0 = -\tilde{\partial}_X \frac{\langle p_0 \rangle}{\rho} + \tilde{\partial}_Y \left\{ (\mu_0 - \mu_\infty) \left\langle \left[ (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-1}{2}} + 4 \frac{n-1}{2} \lambda^2 (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-3}{2}} (\partial_y U_x)^2 \right] \partial_y u_0 \right\rangle \right\}$$

Si può, nella media dentro le graffe, integrare per parti, sfruttando la periodicità anche del termine in parentesi quadre oltre che di  $u_0$  per eliminare il termine di bordo, e infine sviluppare ancora, come al livello precedente, all'ordine  $\lambda^3$ .

$$0 = -\tilde{\partial}_X \frac{\langle p_0 \rangle}{\rho} + (\mu_0 - \mu_\infty) \tilde{\partial}_Y \left\langle u_0 \partial_y \left[ 1 + 6 \frac{n-1}{2} \lambda^2 (\partial_y U_x)^2 + O(\lambda^4) \right] \right\rangle$$

Ma  $\partial_y [1 + 6 \frac{n-1}{2} \lambda^2 (\partial_y U_x)^2 + O(\lambda^4)] \propto 2 \sin \frac{y}{L} \cos \frac{y}{L} \propto \sin \frac{2y}{L}$ , e quest'ultimo integrato con i termini che compongono  $u_0$ , cioè  $\cos \frac{y}{L}$  e  $\cos^3 \frac{y}{L}$  è nullo in quanto son funzioni pari mentre il seno è dispari. Perciò in definitiva:

$$\tilde{\partial}_X p_0 = 0$$

dove si è sfruttato il risultato dell'ordine 0 che  $p_0$  non dipende da y. Allora questo si può eliminare nell'equazione della quantità di moto in x non mediata.

Una volta fatto ciò, sostituendo le espressioni dell'ordine 0 del multiscale in quest'ultima, effettuando lo sviluppo dell'equazione differenziale all'ordine  $\lambda^3$ , scrivendo la soluzione come integrale e sviluppando ancora l'integrando si può ottenere un'approssimazione della soluzione  $u_1$  analogamente a quanto fatto vedere per  $u_0$ . Anche questa volta si ottengono due costanti di integrazioni. Anche qui come per  $u_0$  si ottiene un termine proporzionale a z e il vincolo che si impone sulla costante di integrazione A è che faccia sì che questi termini siano nulli e ciò implica ancora A=0; la pura costante additiva B invece, analogamente all'ordine 0, risulta avere il solito ruolo di  $\langle u_1 \rangle$  in quanto gli altri termini risultano tutti avere media nulla. L'espressione così ottenuta di  $u_1$  però risulta estremamente lunga.

$$\begin{aligned} u_1 = & -\frac{\mu_\infty}{192U} \left[ -192 \tilde{\partial}_Y \langle v_0 \rangle \frac{UL}{\mu_0} \frac{UL}{\mu_\infty} \sin \frac{y}{L} + 8 \frac{\lambda^2 U^2}{L^2} \tilde{\partial}_X \langle v_0 \rangle \left( \frac{UL}{\mu_0} \right)^3 n \sin \frac{y}{L} - \frac{\lambda^2 U^2}{L^2} \tilde{\partial}_X \langle v_0 \rangle \left( \frac{UL}{\mu_0} \right)^3 (n-1) \sin 4 \frac{y}{L} + \right. \\ & \left. + 144 \tilde{\partial}_Y \langle v_0 \rangle \frac{UL}{\mu_0} \frac{\lambda^2 U^2}{L^2} (n-1) \frac{UL}{\mu_\infty} \sin \frac{y}{L} + 16 \tilde{\partial}_Y \langle v_0 \rangle \frac{U^2 L^2}{\mu_0 \mu_\infty} \frac{\lambda^2 U^2}{L^2} (n-1) \sin 3 \frac{y}{L} - 144 \frac{\lambda^2 U^2}{L^2} \tilde{\partial}_Y \langle u_0 \rangle \frac{UL}{\mu_\infty} \sin 2 \frac{y}{L} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 144(n-1) \frac{\lambda^2 U^2}{L^2} \tilde{\partial}_X \langle v_0 \rangle \frac{UL}{\mu_\infty} \sin 2 \frac{y}{L} - 144(n-1) \frac{\lambda^2 U^2}{L^2} \tilde{\partial}_X \langle v_0 \rangle \frac{UL}{\mu_0} \sin 2 \frac{y}{L} + 192 \frac{U^2 L}{\mu_0 \mu_\infty} \langle v_0 \rangle \cos \frac{y}{L} + \\
& - 144(n-1) \frac{\lambda^2 U^2}{L^2} \frac{UL}{\mu_0} \tilde{\partial}_Y \langle u_0 \rangle \sin 2 \frac{y}{L} - 8 \frac{\lambda^2 U^2}{L^2} \tilde{\partial}_X \langle v_0 \rangle \frac{U^3 L^3}{\mu_0^3} \sin 2 \frac{y}{L} - 144(n-1) \tilde{\partial}_Y \langle v_0 \rangle \frac{\lambda^2 U^4}{\mu_0^2} \sin \frac{y}{L} + \\
& - 16 \tilde{\partial}_Y \langle v_0 \rangle \frac{\lambda^2 U^4}{\mu_0^2} (n-1) \sin 3 \frac{y}{L} + (n-1) \frac{\lambda^2 U^2}{L^2} \tilde{\partial}_X \langle v_0 \rangle \frac{U^3 L^3}{\mu_0^2 \mu_\infty} \sin 4 \frac{y}{L} - 8(n-1) \frac{\lambda^2 U^2}{L^2} \tilde{\partial}_X \langle v_0 \rangle \frac{U^3 L^3}{\mu_0^2 \mu_\infty} \sin 2 \frac{y}{L} + \\
& + 384 \frac{U^2 L^2}{\mu_\infty \mu_0} \tilde{\partial}_X \langle u_0 \rangle \sin \frac{y}{L} + 48 \frac{\lambda^2 U^4}{\mu_0^2 L} \langle v_1 \rangle (n-1) \cos 3 \frac{y}{L} + 96 \frac{\lambda^2 U^4}{\mu_0^2} \tilde{\partial}_X \langle u_0 \rangle (n-1) \sin 3 \frac{y}{L} + \\
& - 144(n-1) \frac{\lambda^2 U^2}{L^2} \frac{U^2 L}{\mu_0 \mu_\infty} \langle v_1 \rangle \cos \frac{y}{L} - 864(n-1) \frac{\lambda^2 U^2}{L^2} \frac{U^2 L^2}{\mu_\infty \mu_0} \tilde{\partial}_X \langle u_0 \rangle \sin \frac{y}{L} + 864 \frac{\lambda^2 U^4}{\mu_0^2 L} \tilde{\partial}_X \langle u_0 \rangle (n-1) \sin \frac{y}{L} + \\
& + 144 \frac{\lambda^2 U^4}{\mu_0^2} \langle v_1 \rangle (n-1) \cos \frac{y}{L} - 48(n-1) \frac{\lambda^2 U^2}{L^2} \frac{U^2 L^2}{\mu_0 \mu_\infty} \langle v_1 \rangle \cos 3 \frac{y}{L} - 96 \frac{\lambda^2 U^2}{L^2} \frac{U^2 L^2}{\mu_\infty \mu_0} \tilde{\partial}_X u_0 (n-1) \sin 3 \frac{y}{L} \Big] + O(\lambda^4)
\end{aligned}$$

Al secondo ordine in  $\epsilon$ , infine, come nel caso newtoniano sono significative solo le equazioni per la quantità di moto. Rispettivamente la componente x e la y sono:

$$\begin{aligned}
\tilde{\partial}_T u_0 + 2\tilde{\partial}_X (U_x u_1) + \tilde{\partial}_Y (U_x v_1) + \partial_y (U_x v_2) &= -\tilde{\partial}_X \frac{p_1}{\rho} + \left\{ \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) [1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \tilde{\partial}_X^2 u_0 + \\
& + \partial_y \left\{ \mu_\infty \partial_y u_2 + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[ (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-1}{2}} + 4 \frac{n-1}{2} \lambda^2 (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-3}{2}} (\partial_y U_x)^2 \right] \partial_y u_2 \right\} + \\
& + \tilde{\partial}_Y \left\{ \mu_\infty \partial_y u_1 + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[ (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-1}{2}} + 4 \frac{n-1}{2} \lambda^2 (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-3}{2}} (\partial_y U_x)^2 \right] \partial_y u_1 \right\} + \\
& + \mu_\infty \partial_y [\tilde{\partial}_Y u_1 + \tilde{\partial}_X v_1] + \mu_\infty \tilde{\partial}_Y [\tilde{\partial}_Y u_0 + \tilde{\partial}_X v_0] + \\
& + \partial_y \left\{ (\mu_0 - \mu_\infty) \left[ (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-1}{2}} + 4 \frac{n-1}{2} \lambda^2 (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-3}{2}} (\partial_y U_x)^2 \right] (\tilde{\partial}_Y u_1 + \tilde{\partial}_X v_1) \right\} + \\
& + \tilde{\partial}_Y \left\{ (\mu_0 - \mu_\infty) \left[ (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-1}{2}} + 4 \frac{n-1}{2} \lambda^2 (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-3}{2}} (\partial_y U_x)^2 \right] (\tilde{\partial}_Y u_0 + \tilde{\partial}_X v_0) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\partial}_T v_0 + \tilde{\partial}_X (U_x v_1) &= -\partial_y \frac{p_2}{\rho} - \tilde{\partial}_Y \frac{p_1}{\rho} + \partial_y \left\{ \mu_\infty \partial_y u_2 + (\mu_0 - \mu_\infty) [1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2]^{\frac{n-1}{2}} \partial_y u_2 \right\} + \\
& + \tilde{\partial}_Y \left\{ \mu_\infty \partial_y u_1 + (\mu_0 - \mu_\infty) [1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2]^{\frac{n-1}{2}} \partial_y u_1 \right\} + \partial_y \left\{ \mu_\infty \tilde{\partial}_Y u_1 + (\mu_0 - \mu_\infty) [1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2]^{\frac{n-1}{2}} \tilde{\partial}_Y u_1 \right\} + \\
& + \left\{ \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) [1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \tilde{\partial}_Y^2 u_0 + \mu_\infty \tilde{\partial}_X [\tilde{\partial}_Y u_0 + \tilde{\partial}_X v_0] + \\
& + \tilde{\partial}_X \left\{ (\mu_0 - \mu_\infty) \left[ (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-1}{2}} + 4 \frac{n-1}{2} \lambda^2 (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-3}{2}} (\partial_y U_x)^2 \right] (\tilde{\partial}_Y u_0 + \tilde{\partial}_X v_0) \right\} + \\
& + \tilde{\partial}_X \left\{ \mu_\infty \partial_y u_1 + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[ (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-1}{2}} + 4 \frac{n-1}{2} \lambda^2 (1 + 2\lambda^2 (\partial_y U_x)^2)^{\frac{n-3}{2}} (\partial_y U_x)^2 \right] \partial_y u_1 \right\}
\end{aligned}$$

Effettuando la media, si cancellano i termini dipendenti dalle quantità al secondo ordine, come ci aspettavamo, e anche altri in generale che risultato di derivata pura  $\partial_y$ . Effettuando ancora lo sviluppo di Taylor fino a  $\lambda^3$  di entrambe le equazioni, si cancelleranno anche altri termini tramite delle integrazioni per parti, come mostrato nel caso dell'ordine 1.

Analogamente al caso newtoniano quindi, sostituendo le espressioni dell'ordine 1, derivando la prima per Y, sottraendole la seconda derivata per X e sostituendo infine la funzione corrente a grande scala all'ordine, si ottiene l'equazione della viscosità rinormalizzata contenente solo  $\Psi$ .

Eseguendo questi lunghi calcoli, si arriva all'espressione:

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_T(\tilde{\partial}_X^2 + \tilde{\partial}_Y^2)\Psi = & \frac{-\mu_0\mu_\infty}{8UL} \left[ -8\frac{UL}{\mu_\infty}(\tilde{\partial}_X^4 + \tilde{\partial}_Y^4 + 2\tilde{\partial}_Y^2\tilde{\partial}_X^2) - \left( 28\frac{U^3L^3}{\mu_0^2\mu_\infty} + 8\frac{\lambda^2U^3}{L\mu_\infty} - 8\frac{\lambda^2U^3}{L\mu_0} + 45(n-1)\frac{\lambda^2U^5L}{\mu_0^3} \right) \tilde{\partial}_Y^2\tilde{\partial}_X^2 + \right. \\ & - 12\left(\frac{\lambda^2U^3}{L\mu_0} - \frac{\lambda^2U^3}{L\mu_\infty}\right)\tilde{\partial}_Y^4 + \left( 4\frac{U^3L^3}{\mu_0^2\mu_\infty} - 12(n-1)\frac{\lambda^2U^3}{L\mu_\infty} + 12(n-1)\frac{\lambda^2U^3}{L\mu_0} + 3(n-1)\frac{\lambda^2U^5L}{\mu_0^3} - 3(n-1)\frac{\lambda^2U^5L}{\mu_0^2\mu_\infty} \right) \tilde{\partial}_X^4 + \\ & \left. + \left( 45(n-1)\frac{\lambda^2U^5L}{\mu_0^2\mu_\infty} \right) \tilde{\partial}_Y^2\tilde{\partial}_X^2 + 12n\left(\frac{\lambda^2U^3}{L\mu_0} - \frac{\lambda^2U^3}{L\mu_\infty}\right)\tilde{\partial}_Y^4 + n\left( 8\frac{\lambda^2U^3}{L\mu_\infty} - 8\frac{\lambda^2U^3}{L\mu_0} \right) \tilde{\partial}_Y^2\tilde{\partial}_X^2 \right] \Psi + O(\lambda^4) \end{aligned}$$

La relazione di dispersione allora risulta:

$$\begin{aligned} i\Omega(K_X^2 + K_Y^2) = & \frac{-\mu_0\mu_\infty}{8UL} \left[ -8\frac{UL}{\mu_\infty}(K_X^4 + K_Y^4 + 2K_Y^2K_X^2) - \left( 28\frac{U^3L^3}{\mu_0^2\mu_\infty} + 8\frac{\lambda^2U^3}{L\mu_\infty} - 8\frac{\lambda^2U^3}{L\mu_0} + 45(n-1)\frac{\lambda^2U^5L}{\mu_0^3} \right) K_Y^2K_X^2 + \right. \\ & - 12\left(\frac{\lambda^2U^3}{L\mu_0} - \frac{\lambda^2U^3}{L\mu_\infty}\right)K_Y^4 + \left( 4\frac{U^3L^3}{\mu_0^2\mu_\infty} - 12(n-1)\frac{\lambda^2U^3}{L\mu_\infty} + 12(n-1)\frac{\lambda^2U^3}{L\mu_0} + 3(n-1)\frac{\lambda^2U^5L}{\mu_0^3} - 3(n-1)\frac{\lambda^2U^5L}{\mu_0^2\mu_\infty} \right) K_X^4 + \\ & \left. + \left( 45(n-1)\frac{\lambda^2U^5L}{\mu_0^2\mu_\infty} \right) K_Y^2K_X^2 + 12n\left(\frac{\lambda^2U^3}{L\mu_0} - \frac{\lambda^2U^3}{L\mu_\infty}\right)K_Y^4 + n\left( 8\frac{\lambda^2U^3}{L\mu_\infty} - 8\frac{\lambda^2U^3}{L\mu_0} \right) K_Y^2K_X^2 \right] + O(\lambda^4) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Anche qui è da studiare il segno del membro di destra.

## 4.1 Caso shear-thickening

Imponiamo nella (4.2) che  $\mu_\infty = 0$ ; questo coincide col caso shear-thickening. Si tratta ovviamente del caso più semplice, avendo un parametro in meno.

$$\begin{aligned} i\Omega(K_X^2 + K_Y^2) = & \frac{\mu_0}{8UL} \left[ 8UL(K_X^4 + K_Y^4 + 2K_Y^2K_X^2) + \left( 28\frac{U^3L^3}{\mu_0^2} - 8(n-1)\frac{\lambda^2U^3}{L} - 45(n-1)\frac{\lambda^2U^5L}{\mu_0^2} \right) K_Y^2K_X^2 + \right. \\ & \left. + 12(n-1)\frac{\lambda^2U^3}{L}K_Y^4 - \left( 4\frac{U^3L^3}{\mu_0^2} - 12(n-1)\frac{\lambda^2U^3}{L} - 3(n-1)\frac{\lambda^2U^5L}{\mu_0^2} \right) K_X^4 \right] + O(\lambda^4) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Passando a variabili adimensionali e introducendo ancora la quantità  $s = \tan^2\theta$ , risulta di dover studiare il segno di:

$$\left( \text{Wi}^2(n-1)(3\text{Re}^2 + 12) - 4\text{Re}^2 + 8 \right) s^2 + \left( 16 - \text{Wi}^2(n-1)(45\text{Re}^2 + 8) + 28\text{Re}^2 \right) s + 8 + 12\text{Wi}^2(n-1) + O(\text{Wi}^4) \quad (4.4)$$

Come già detto, una condizione necessaria per la positività del binomio è  $a > 0$ . La presenza di più parametri rende più complesso lo studio del segno delle altre condizioni per la positività; perciò, analogamente al caso newtoniano, terremo solo quella sul coefficiente  $a$  e verificheremo confrontando con i dati numerici se anche qui è l'unica che discrimina di fatto la stabilità o meno del flusso di Kolmogorov. Ciò dovrebbe essere difatti vero per  $\text{Wi}$  almeno nell'intorno di 0 (il caso in cui ci siamo dovuti restringere); questo per via della continuità col caso newtoniano a cui si arriva appunto per  $\text{Wi}=0$ , applicando nell'intorno di questo valore il teorema della permanenza del segno alle quantità  $b, c, b^2 - 4ac$  che sono ivi funzioni continue; questo implica l'esistenza di

un tale intorno in cui sia ancora vero che  $c \geq 0$ ,  $b \geq 0$  e  $b^2 - 4ac \geq 0$ . Ricordiamo che tale polinomio è valido per piccoli  $Wi$ . Le soluzioni di  $a=0$  sono:

$$Re = \pm 2 \frac{\sqrt{-(2 + 3Wi^2n - 3Wi^2)(-3Wi^2 + 3Wi^2n - 4)}}{(-3Wi^2 + 3Wi^2n - 4)} + O(Wi^4)$$

Il caso newtoniano mostrava  $Re < \sqrt{2}$ , perciò è chiaro che per continuità nell'intorno di  $Wi=0$  è da considerare la soluzione che in tale intorno sia positiva, cioè quella col  $-$ . Sviluppando ancora fino al terzo ordine in  $Wi$  per raggruppare coerentemente gli eventuali termini  $O(Wi^4)$ :

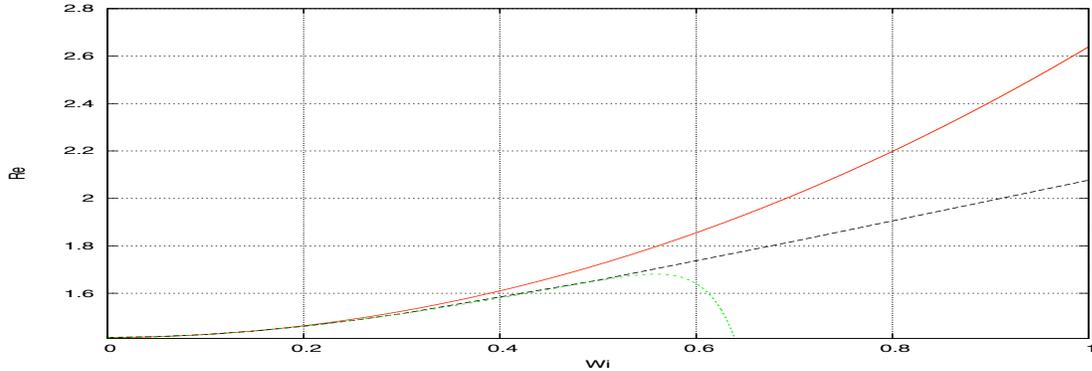
$$Re < \sqrt{2} \left( 1 + \frac{9}{8}(n-1)Wi^2 + O(Wi^4) \right)$$

Presentiamo come caso esemplificativo  $n=1.77$ . Come si vede dal grafico seguente, l'accordo tra il multiscala al terzo ordine (curva rossa) e la numerica (curva nera) è migliore dello spessore delle linee fino a poco più di  $Wi=0.2$ . Vien da chiedersi se il disaccordo successivo sia dovuto allo sviluppo in serie o alla perdita delle ipotesi di separazione di scala. Eseguiamo il calcolo suddetto utilizzando uno sviluppo al ventunesimo ordine in  $Wi$  (curva verde), che corrisponde all'espressione:

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \left[ 1 + \frac{2362899019}{4932501504} Wi^{14} n^3 + \frac{409491}{819200} Wi^8 - \frac{827}{1024} Wi^6 - \frac{12994467723257878007}{1833469999054848000} Wi^{20} n^{10} + \right. \\ & + \frac{42783232936455527}{5500409997164544} Wi^{20} n^3 + \frac{159815162832675281}{78577285673779200} Wi^{20} n^4 + \frac{357015995252997677}{196443214184448000} Wi^{20} n^5 + \\ & + \frac{12316367295357729523}{1100081999432908800} Wi^{20} n^2 + \frac{9}{8} Wi^2 n - \frac{115471361531}{41104179200} Wi^{14} n - \frac{307069}{819200} Wi^8 n^4 + \frac{143}{3072} Wi^6 n + \\ & + \frac{781}{3072} Wi^6 n^3 + \frac{519}{1024} Wi^6 n^2 - \frac{268767}{409600} Wi^8 n^2 - \frac{29}{128} Wi^4 n^2 - \frac{51}{64} Wi^4 n + \frac{2412469}{5898240} Wi^{10} n^2 + \frac{4713242581}{9248440320} Wi^{12} n^2 + \\ & - \frac{2337893}{1310720} Wi^{10} n + \frac{2621891}{5898240} Wi^{10} n^3 + \frac{1108385}{2359296} Wi^{10} n^4 + \frac{33101203}{58982400} Wi^{10} n^5 - \frac{68871}{204800} Wi^8 n^3 + \\ & + \frac{175714645441}{123312537600} Wi^{14} n^7 + \frac{177649}{204800} Wi^8 n + \frac{90947088541}{123312537600} Wi^{14} n^5 + \frac{148662767213}{123312537600} Wi^{14} n^6 + \\ & - \frac{284229988681}{123312537600} Wi^{14} n^2 + \frac{19360638721}{7707033600} Wi^{12} n + \frac{1097062339}{3523215360} Wi^{14} n^4 - \frac{40550481241}{46242201600} Wi^{12} n^6 + \\ & - \frac{146754423}{256901120} Wi^{12} n^3 - \frac{806432863}{1849688064} Wi^{12} n^4 - \frac{5779745759}{7707033600} Wi^{12} n^5 - \frac{562973178460097}{443925135360000} Wi^{16} n^6 + \\ & - \frac{147458809056023}{73987522560000} Wi^{16} n^7 - \frac{9}{8} Wi^2 + \frac{39283304913}{41104179200} Wi - \frac{240149186186759153}{137510249929113600} Wi^{20} n^7 + \\ & - \frac{84903265515037469}{22450653049651200} Wi^{20} n^8 - \frac{19434237837061633}{11905649344512000} Wi^{20} n + \frac{72658852050143}{78920024064000} Wi^{18} n^6 + \\ & + \frac{3203936931060433}{947040288768000} Wi^{18} n^8 - \frac{227286580767241}{473520144384000} Wi^{18} n^4 - \frac{5998463912283733}{2130840649728000} Wi^{18} n^3 + \\ & + \frac{34732337481087583}{8523362598912000} Wi^{18} n^9 + \frac{220198021546331}{101468602368000} Wi^{18} n^7 - \frac{1813877011508539}{761014517760000} Wi^{16} n^8 + \\ & + \frac{83033569245037}{221962567680000} Wi^{16} n^3 + \frac{6635115411228749}{1331775406080000} Wi^{16} n^2 - \frac{2012250398351}{25367150592000} Wi^{16} n^4 + \\ & - \frac{294633625001969}{665887703040000} Wi^{16} n^5 - \frac{940929327849761}{947040288768000} Wi^{18} n - \frac{3222378320359385339}{550040999716454400} Wi^{20} n^9 + \end{aligned}$$

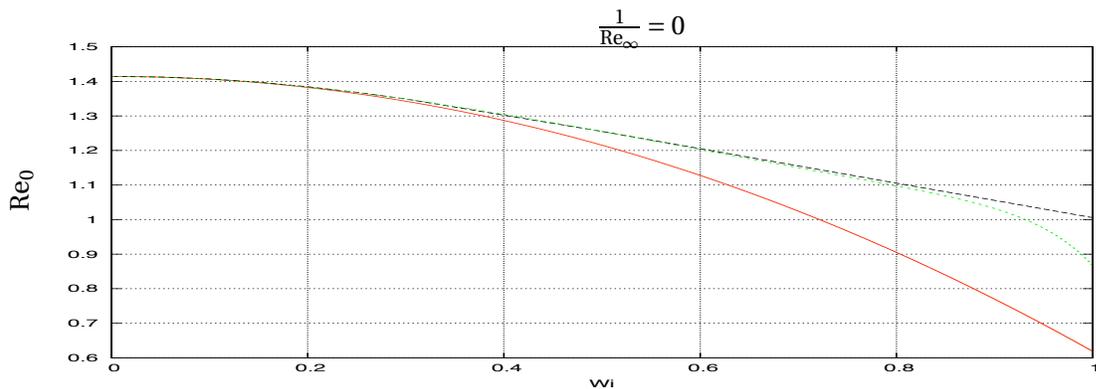
$$\begin{aligned}
& - \frac{1943160711016079}{236760072192000} Wi^{18} n^2 - \frac{938576576674837}{591900180480000} Wi^{16} - \frac{440596744096501}{1420560433152000} Wi^{18} n^5 + \\
& + \frac{531808955877571}{221962567680000} Wi^{16} n + \frac{10385497834195501}{43654047596544000} Wi^{20} n^6 + \frac{131}{128} Wi^4 - \frac{1991607969}{5138022400} Wi^{12} - \frac{661027}{6553600} Wi^{10} + \\
& + \left. \frac{237520795343361}{105226698752000} Wi^{18} - \frac{361423992288433433}{122231333270323200} Wi^{20} + O(Wi^{22}) \right]
\end{aligned}$$

Risulta quindi chiaro, vedendo che ora l'accordo è perfetto fino  $Wi \approx 0.5$ , che le discrepanze dovute al calcolo precedente a grandi  $Wi$  sono dovute al troncamento della serie di Taylor, la quale quindi risulta avere una convergenza lentissima al variare della potenza di  $Wi$ , e potrebbe anche avere un raggio di convergenza finito.



## 4.2 Caso shear-thinning

Passiamo ora al caso shear-thinning, che in generale prevede la trattazione completa della (4.2). osservando preliminarmente che i precedenti risultati possono anche essere applicati nel caso shear-thinning particolare in cui  $\mu_\infty = 0$ , verifichiamo prima questo caso più semplice. In seguito è rappresentato il caso  $n=0.5$  con ancora il nero per il calcolo numerico, il rosso per il terzo ordine e il verde per il ventunesimo: la situazione è analoga alla precedente.



Analizziamo ora il caso in cui  $\mu_\infty \neq 0$  e mostriamo che anche in questo caso le instabilità soddisfano le condizioni di grande scala. Passando a variabili adimensionali e introducendo ancora

la quantità  $s = \tan^2 \theta$ , risulta di dover studiare il segno di:

$$\begin{aligned} & -(-8\text{Re}_\infty + 3\text{Wi}^2\text{Re}_0^3n - 12\text{Re}_0\text{Wi}^2 + 4\text{Re}_\infty\text{Re}_0^2 + 12\text{Re}_\infty\text{Wi}^2 - 3\text{Wi}^2\text{Re}_0^3 - 12\text{Wi}^2n\text{Re}_\infty + 3\text{Re}_0^2\text{Re}_\infty\text{Wi}^2 + \\ & - 3\text{Wi}^2\text{Re}_0^2n\text{Re}_\infty + 12\text{Wi}^2n\text{Re}_0)s^2 - (45\text{Wi}^2\text{Re}_0^2n\text{Re}_\infty - 28\text{Re}_\infty\text{Re}_0^2 + 16\text{Re}_0\text{Wi}^2 - 16\text{Wi}^2n\text{Re}_0 + \\ & - 45\text{Re}_0^2\text{Re}_\infty\text{Wi}^2 - 16\text{Re}_\infty\text{Wi}^2 + 45\text{Wi}^2\text{Re}_0^3 + 16\text{Wi}^2n\text{Re}_\infty - 45\text{Wi}^2\text{Re}_0^3n)s + 8\text{Re}_\infty - 12\text{Re}_\infty\text{Wi}^2 + \\ & + 12\text{Re}_0\text{Wi}^2 + 12\text{Wi}^2n\text{Re}_\infty - 12\text{Wi}^2n\text{Re}_0 + O(\text{Wi}^4) \end{aligned}$$

che per aver stabilità dev'essere positivo. Come prima, studiamo la positività del coefficiente a. Notiamo che in questo caso a è un polinomio cubico in  $\text{Re}_0$ , quindi lo studio del suo segno può essere complesso. Conviene quindi scrivere la marginale nella forma  $\frac{1}{\text{Re}_\infty} = f(\text{Re}_0, \text{Wi})$ , visto che il polinomio è lineare in  $\text{Re}_\infty$ . Parametizziamo con il reciproco di quest'ultimo per ottenere il caso  $\mu_\infty = 0$  ponendo  $\frac{1}{\text{Re}_\infty} = 0$ . La marginale risulta:

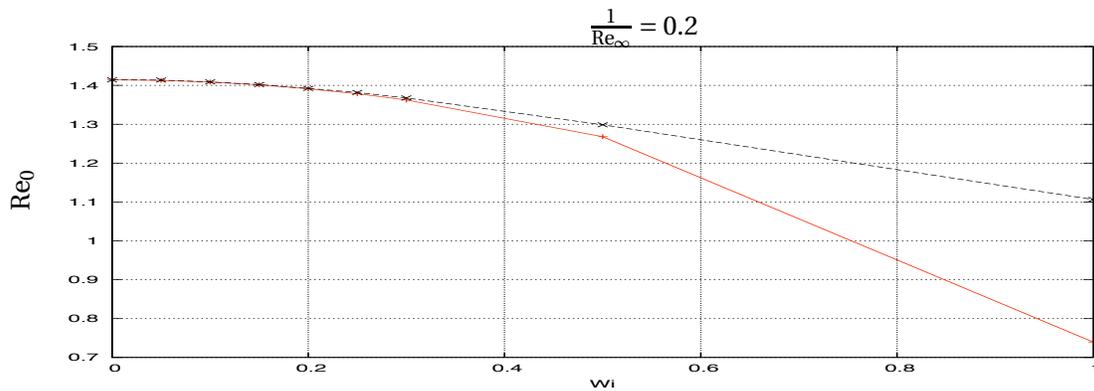
$$\frac{1}{\text{Re}_\infty} = \frac{1}{3} \frac{8 + 12\text{Wi}^2n - 3\text{Wi}^2\text{Re}_0^2 + 3\text{Wi}^2\text{Re}_0^2n - 4\text{Re}_0^2 - 12\text{Wi}^2}{\text{Wi}^2\text{Re}_0(4n - \text{Re}_0^2 + \text{Re}_0^2n - 4)} + O(\text{Wi}^4)$$

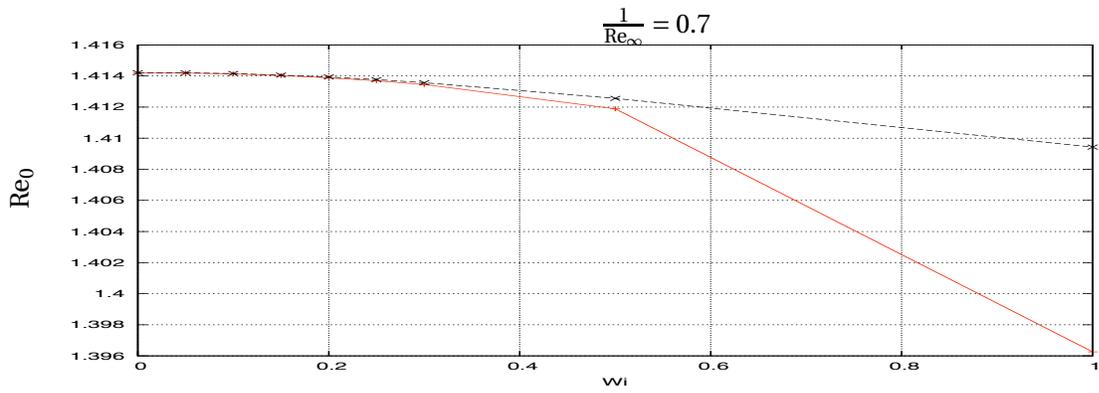
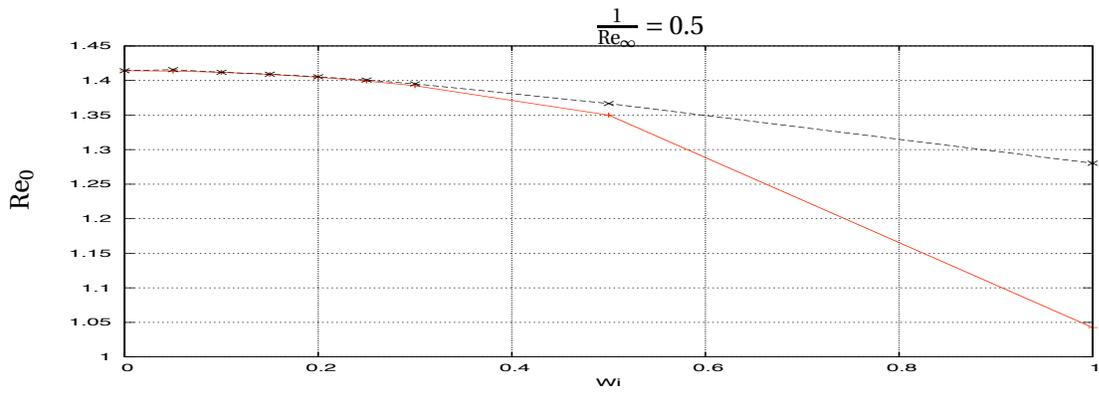
Innanzitutto, notiamo che se  $\text{Re}_0 = \sqrt{2}$ , con  $n \neq 1$ , almeno al terzo ordine si ha:

$$\frac{1}{\text{Re}_\infty} = \frac{1}{6} \frac{18\text{Wi}^2n - 18\text{Wi}^2}{\text{Wi}^2(6n - 6)} \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

che coincide con quanto era stato ottenuto con l'approccio numerico: se  $\text{Re}_\infty = \sqrt{2}$ , il  $\text{Re}_0$  critico rimane sempre  $\sqrt{2}$ , indipendentemente da  $\text{Wi}$  e  $n$ .

Di seguito alcuni paragoni per  $n=0.5$ . Le curve in verde sono al solito i risultati numerici, quelle rosse i risultati del multiscala al terzo ordine. Per realizzare i confronti, dal momento che il programma prendeva come input  $\frac{1}{\text{Re}_\infty}$  e non  $\text{Re}_0$ , si sono cercati per tentativi nell'espressione precedente i valori di  $\text{Re}_0$  che dessero il desiderato  $\frac{1}{\text{Re}_\infty}$  messo nel file di input, entro un errore  $< 10^{-6}$ .





Notiamo come anche qui l'accordo del multiscale con la numerica sia ottimo fino a  $Wi \approx 0.3$ , per via di considerazioni analoghe al caso shear-thickening sul troncamento della serie di Taylor.

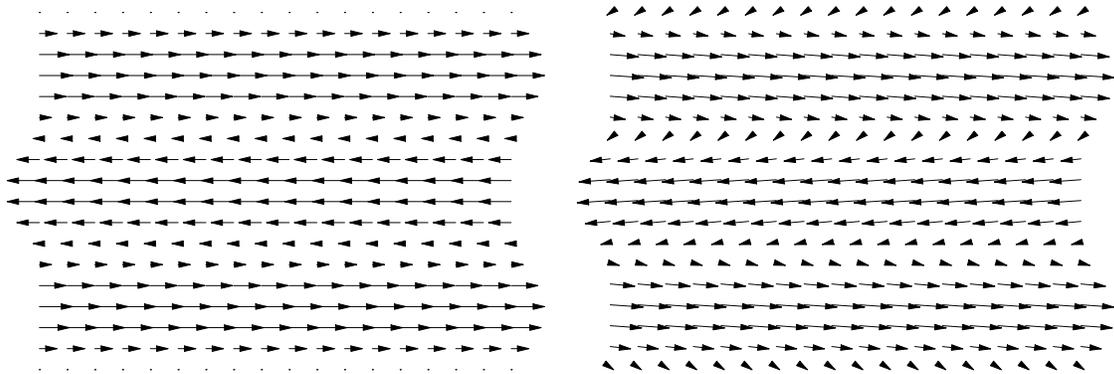
# Conclusioni e possibili sviluppi

Sono state ricavate le equazioni di stabilità lineare per i fluidi di Carreau-Bird shear-thinning e shear-thickening, per i quali non vale il teorema di Squire. Dopodiché ci siamo posti in un flusso bidimensionale (film), il flusso di Kolmogorov, per studiarne le proprietà fisiche di stabilità e paragonarle col caso newtoniano. L'approccio analitico tramite le scale multiple ci ha permesso di ottenere delle considerazioni perturbative rispetto a piccoli  $Wi$ , confermate ed estese dai calcoli numerici alle differenze finite in tutto lo spazio dei valori assumibili dai parametri.

Il fluido shear-thickening quindi si è mostrato più stabile del caso newtoniano, in maniera più accentuata tanto più si allontana dal comportamento di quest'ultimo.

Il fluido shear-thinning d'altra parte, ha mostrato un comportamento più complesso, per via della presenza di due numeri di Reynolds  $Re_\infty$  e  $Re_0$ . In particolare, se  $Re_\infty < \sqrt{2}$  il flusso risulta sempre stabile; se  $Re_\infty > \sqrt{2}$ , il flusso risulta instabile per tutti i  $Re_0$  maggiori di un valore critico, che tende a 0 per  $Wi \rightarrow \infty$  tanto più rapidamente quanto  $n$  è minore di 1 e tanto più lentamente quanto appunto  $Re_\infty$  è vicino a  $\sqrt{2}$ .

In tutti i casi, comunque, la perturbazione nelle velocità meno stabile è trasversa su grande scala, con la prima l'instabilità che si origina per  $k_x \rightarrow 0$ . Questa perturbazione sovrapposta al flusso base di Kolmogorov, rappresentato a sinistra nella figura sottostante, dà origine al flusso rappresentato a destra. I rapporti tra le ampiezze di queste ultime, comunque, dipendono in generale dai vari parametri.



Altra importante caratteristica del fluido analizzato è che presenta solo instabilità idrodinamiche e non elastiche. Ciò esclude la validità dell'adattamento del modello di Carreau-Bird ad esempio per molti fluidi shear-thickening per cui si visualizza questo effetto, almeno in quelle situazioni molto lontane dal caso newtoniano in cui il modello è spinto a punti tali da avere un numero di Weissenberg sufficientemente alto che dovrebbe presentare le instabilità elastiche.

La presenza dell'instabilità elastica fin ora, dal punto di vista matematico, è nota risultare solo in modelli di fluidi (Oldroyd-B) in cui sono presenti dei grossi polimeri in soluzione, che risultano in quiete appallottolati su loro stessi, ma si allungano quando sollecitati, e posseggono una costante di tempo di rilassamento. Tale costante fa sì che le equazioni del moto del fluido accoppiate con quelle dei polimeri in soluzione dipendano dallo stato del flusso negli istanti precedenti: questi modelli cioè rappresentano fluidi con *memoria*, ed infatti pure nella pratica sperimentale risultano mostrare anche fenomeni di isteresi. I modelli fenomenologici come quelli di Carreau-Bird o analoghi non hanno questa dipendenza dal flusso negli istanti precedenti. Essi reagiscono alle variazioni del flusso *istantaneamente*: in particolare, nello stesso istante in cui cambia  $\partial_i v_j$  cambia anche la viscosità apparente. Quanto mostrato nei precedenti capitoli fa pensare quindi che l'assenza di instabilità elastiche sia peculiare di modelli che non abbiano quest'ultima fattura.

Si potrebbe verificare però ancora se le instabilità a  $Re \rightarrow 0$  siano prettamente legate alla viscoelasticità polimerica dei fluidi, o se in generale sono legate al ritardo della risposta del fluido nel tempo. Sappiamo che, oltre ai fluidi viscoelastici, anche i fluidi tissotropici e antitissotropici mostrano fenomeni di isteresi dipendenti dalla storia del fluido e in generale risposta non istantanea tra le proprietà reologiche del materiale e le variazioni di flusso. Si potrebbe quindi generalizzare gli analizzati modelli di fluido shear-thinning e shear-thickening ad un modello mostrante tissotropia rispettivamente positiva o negativa. Riprendiamo la viscosità apparente nei modelli analizzati:

$$\eta_{\infty} + (\eta_0 - \eta_{\infty})(1 + 4\alpha^2 D_{ij}D_{ij})^{\frac{n-1}{2}}$$

dove si ricopre il caso shear-thinning se  $n < 1$ , mentre il caso shear-thickening è dato da  $n > 1$  e  $\eta_{\infty} = 0$ . Possiamo porre per la costante di struttura  $\lambda$ :

$$\tau(\partial_t \lambda + \nu_k \partial_k \lambda) = -\lambda + 4\alpha^2 D_{ij}D_{ij} \quad (4.5)$$

che per  $\tau = 0$  (caso di risposta istantanea) porta a  $\lambda = 4\alpha^2 D_{ij}D_{ij}$ ; per  $\tau \neq 0$ , essa rientra invece nella categoria di equazioni del primo tipo delle (B.6). In base alla definizione operativa di viscosità tramite il flusso di Couette indotto da una lamina piana che scorra sopra il fluido a velocità costante, che è un caso di flusso piano parallelo e incompressibile, si ha  $\partial_x \lambda = \partial_z \lambda = 0$ ,  $D_{ij}$  risulterebbe stazionario e dipendente solo da  $y$  e quindi:

$$\lambda = (\lambda_0 - 4\alpha^2 D_{ij}D_{ij})e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + 4\alpha^2 D_{ij}D_{ij}$$

da cui si vede che per  $t \rightarrow +\infty$ , si riottiene  $\lambda = 4\alpha^2 D_{ij}D_{ij}$ . Per far sì che asintoticamente la viscosità tenda a quella di Carreau-Bird, sarà sufficiente porre allora:

$$\eta = \eta_{\infty} + (\eta_0 - \eta_{\infty})(1 + \lambda)^{\frac{n-1}{2}} \quad (4.6)$$

che rientra manifestamente nella famiglia (B.7). Se in un esperimento in cui lo sforzo di taglio puro costante in un flusso tipo Couette viene aumentato repentinamente ad un livello maggiore,  $n < 1$  darà una viscosità in calo nel tempo: il caso shear-thinning allora è diventato un caso tissotropico; analogamente, il caso shear-thickening è diventato antitissotropico. Accoppiando la (4.5) con l'equazione di continuità e l'equazione della quantità di moto con la nuova viscosità (4.6) si

ottengono le equazioni di Navier-Stokes per il fluido in questione:

$$\begin{cases} \partial_k v_k = 0 \\ \rho[\partial_t v_i + v_k \partial_k v_i] = -\partial_i p + \partial_k \left[ \left( \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)(1 + \lambda)^{\frac{n-1}{2}} \right) (\partial_k v_i + \partial_i v_k) \right] + f_i \\ \tau(\partial_t \lambda + v_k \partial_k \lambda) = -\lambda + 4\alpha^2 D_{ij} D_{ij} \end{cases}$$

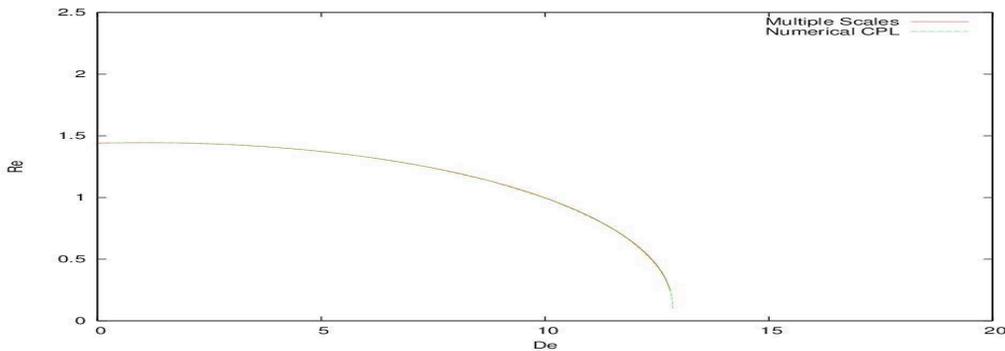
Vediamo cosa accade intorno ad un punto fisso piano parallelo e incompressibile  $\mathbf{V} = (U(y), 0, 0)$ . L'equazione per  $\lambda$  è lineare, perciò l'analisi di stabilità lineare non la varia. La viscosità apparente ora invece andrà linearizzata intorno al punto fisso  $\Lambda = (\alpha \partial_y U(y))^2$ , tramite il già visto sviluppo di Taylor al primo ordine. Allora, per una perturbazione  $(p, v, \lambda)$ :

$$\begin{cases} \partial_k v_k = 0 \\ \rho[\partial_t v_i + \partial_k (V_i v_k + v_i V_k)] = -\partial_i p + 2\partial_k \left[ \left( \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)(1 + \Lambda)^{\frac{n-1}{2}} \right) d_{ki} + \frac{n-1}{2} (\eta_0 - \eta_\infty)(1 + \Lambda)^{\frac{n-3}{2}} D_{ki} \lambda \right] \\ \tau[\partial_t \lambda + V_k \partial_k \lambda] = -\lambda + 8\alpha^2 D_{ij} d_{ij} \end{cases}$$

dove  $D_{ij}$  e  $d_{ij}$  sono le velocità di deformazione di flusso base e perturbazione. Su queste equazioni è possibile quindi eseguire nuovamente l'analisi a scale multiple e l'analisi numerica tramite il problema agli autovalori generalizzato.

Mostriamo qualche risultato preliminare interessante. Le nuove variabili adimensionali saranno  $Re = \frac{UL\rho}{\eta_0}$ ,  $Wi = \alpha \frac{U}{L}$  e il nuovo  $De = \tau \frac{U}{L}$ , detto *numero di Deborah*, associato solitamente al tempo di rilassamento  $\tau$  dei polimeri nel modello di Oldroyd-B polimerico. Consideriamo nuovamente il flusso di Kolmogorov. Restringiamoci alla situazione  $\eta_\infty = 0$ . Intorno ad esso, effettuiamo le due analisi di stabilità precedentemente citate. Nel multiscala nuovamente comparirà uno sviluppo a piccoli  $Wi$  e questo, comparando nelle espressioni in gioco la quantità  $DeWi$ , implicherà anche una bontà dell'approssimazione sempre minore crescendo fino a un certo  $De$ , tanto minore quanto maggiore sarà  $Wi$  ed oltre il quale l'approssimazione diventerà totalmente inaffidabile.

La cosa interessante è che per il caso antitotropico ad  $n > 1$  fissato sembra comparire secondo il multiscala un ramo che piega verso  $Re=0$  ad un certo  $De$  che, fissato anche  $Wi$  (il quale deve comunque rimanere piccolo ma non nullo) è sempre minore tanto più è grande quest'ultimo. Ciò è confermato anche dalle prime analisi numeriche effettuate. Di seguito, la figura del caso  $n=1.3$   $Wi=0.3$  con sovrapposti risultati numerici e curva multiscala all'ordine  $O(Wi^5)$ .



Questo mostra quindi come l'instabilità a  $Re=0$  non sia presente solo nei fluidi viscoelastici polimerici, ma più in generale in fluidi che non hanno una risposta istantanea alle variazioni esterne. Tali instabilità e le turbolenze originate, sono state dette finora elastiche, ma tale terminologia è impropria essendo che in questo caso non sono causate dalle proprietà elastiche del fluido indotte dai polimeri disciolti.

Questo nuovo modello potrebbe tornare utile anche per cercare di comprendere quali sono i meccanismi che danno origine a questo tipo di turbolenza. Possibilità di ulteriore investigazione futura:

- porre  $De=Wi$  per ottenere lo stesso numero di parametri indipendenti del modello di Oldroyd-B, e capire se addirittura si potessero scegliere dei parametri tali per cui i due modelli portino a risultati compatibili quantitativamente, dall'analisi di stabilità su quest'ultimo [34];
- flusso sinusoidale tra pareti fisse.
- analisi di un flusso a getto: flussi di grande e ovvio interesse pratico, che contengono molte particolarità nelle instabilità e turbolenze nel caso newtoniano che potrebbero esser ricercate nei modelli non newtoniani qui presentati, confrontate o generalizzate.

# Appendice A

## Le equazioni di Navier-Stokes

### A.1 Le equazioni del moto

Dato un fluido, possiamo descrivere il suo stato termodinamico e meccanico tramite delle equazioni che comprendono le variabili termiche e meccaniche opportune e che descrivono le leggi di conservazione, dette *equazioni di Navier-Stokes*.

Utilizzeremo qui la descrizione *euleriana*, ovvero i campi che compaiono nelle equazioni assumono in ogni punto il valore della grandezza corrispondente nel punto stesso in ogni istante. Alternativamente, nella descrizione *lagrangiana*, i campi restituiscono in ogni punto il valore della grandezza associata assunto dalla particella fluida che occupava quel punto ad un certo istante fissato  $t_0 = 0$ .

La trattazione standard riguarda fluidi in regime classico (quindi assenza di effetti relativistici o quantistici, di cui esistono ovviamente numerosi esempi), senza memoria o particolari caratteristiche di anisotropia (come i cristalli liquidi), l'assenza di reazioni chimiche, non tiene conto delle tensioni superficiali e non ammette interazioni a distanza fra le varie particelle fluide come quelle elettromagnetiche o gravitazionali; tutto ciò implica dei vincoli sulle caratteristiche fisiche del problema fluidodinamico trattato.

Senza entrare nel dettaglio di come si ricavano queste equazioni, rimandando a [1] chi fosse interessato, elenchiamole ora associate alla corrispondente legge di conservazione.

Il principio di conservazione della massa porta alla cosiddetta *equazione di continuità*:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\partial_t \rho$$

o se si preferisce la notazione tensoriale:

$$\partial_i (\rho v_i) = -\partial_t \rho$$

dove gli indici sono tutti bassi indifferentemente e la derivazione covariante coincide con la derivazione parziale  $\partial_i$  perché ci poniamo in coordinate cartesiane; è sottintesa la consueta convenzione di somma sugli indici ripetuti due volte.  $\rho$  è la densità del fluido, che in generale dipende ovviamente dal punto.

Il secondo principio della dinamica porta a tre equazioni, ognuna per una componente della velocità, riguardanti la conservazione della quantità di moto:

$$\rho[\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}] = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{f}$$

oppure anche qui:

$$\rho[\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i] = -\partial_i p + \partial_j S_{ij} + f_i$$

dove  $p$  è il campo di pressione,  $\mathbf{f}$  sono le forze di volume esterne. Un termine come quello che in questo caso compare rispetto al campo di velocità del tipo  $\mathbf{v} \cdot \nabla A$ , con  $A$  grandezza qualsiasi, è detto *termine advettivo associato ad A*.  $\mathbf{S}$  è il tensore degli sforzi viscosi. In generale l'invarianza per traslazioni spazio-temporali della teoria implica banalmente che non potrebbe dipendere da  $x$  e  $t$ . L'invarianza per trasformazioni di cinematica relativa di Galileo implica che non può dipendere nemmeno da  $\mathbf{v}$ . Esso dipende dalle derivate del campo di velocità tramite il tensore di velocità di deformazione  $D_{ij} = \frac{1}{2}[\partial_j v_i + \partial_i v_j]$ . Il modo in cui dipende da questo identifica il tipo di fluido (relazione costitutiva del materiale).

Si dimostra che la conservazione del momento angolare implica un tensore degli sforzi viscosi simmetrico.

Un fluido in cui c'è una dipendenza lineare omogenea tra il tensore degli sforzi viscosi e il tensore di velocità di deformazione:

$$S_{ij} = K_{ijkl} D_{kl}$$

dove quindi  $K_{ijkl}$  è costante, è detto *newtoniano*. L'invarianza per rotazioni del fluido e le opportune proprietà di simmetria rispetto allo scambio degli indici  $ij$  e  $kl$  comportano che  $K_{ijkl}$  dev'essere del tipo

$$K_{ijkl} = 2\eta \delta_{ik} \delta_{jl} + \xi \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (\text{A.1})$$

in cui  $\eta$  e  $\xi$  sono rispettivamente *primo* e *secondo* coefficiente di viscosità, che sono caratteristici del materiale e quindi son noti a priori. Spesso viene tabulato anche  $\eta_v := \xi + \frac{2}{3}\eta$  detto *viscosità di volume (bulk viscosity)*. Allora  $S_{ij}$  diventa:

$$2\eta D_{ij} + \xi D_{kk} \delta_{ij}$$

Le equazioni della quantità di moto, in forma vettoriale, diventano:

$$\rho[\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \xi) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{f}$$

Consideriamo ora l'equazione di continuità. Posto che

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = -\partial_t \rho$$

e che  $\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla = \partial_t + \frac{\partial x^i(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^i}$  è la *derivata temporale totale lagrangiana*  $\frac{d}{dt}$ , cioè la derivata temporale che segue una stessa particella fluida che si muove col flusso, si ha

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{d}{dt} \rho$$

il che significa che se  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  allora  $\frac{d}{dt}\rho = 0$ , cioè il flusso è incompresso: ogni particella fluida mantiene la propria densità costante durante il moto. Quando per un flusso è valido ciò o è ragionevole effettuare questa approssimazione si dice che si è in *regime o approssimazione di Boussinesq*. Caso particolare di questo è un fluido incompressibile a densità *costante*  $\rho$ .

Per fluidi a densità costante quindi nelle equazioni del moto, non contribuisce il termine proporzionale alla divergenza della velocità, e quindi diventa irrilevante il secondo coefficiente di viscosità. Il primo allora viene detto viscosità *dinamica*; è inoltre ben definita allora un'altra costante  $\mu$ , detta *viscosità cinematica* e definita come  $\eta/\rho$ . Se il fluido è incompressibile e non viscoso, esso è detto *ideale o euleriano*. In quest'ultimo caso, le equazioni di continuità e quantità di moto sono sufficienti per la chiusura del problema.

La terza equazione che aggiungiamo al nostro sistema per descrivere l'evoluzione dei nostri campi anche nei casi viscosi deriva dalla conservazione dell'energia, ovvero il primo principio della termodinamica. In forma vettoriale, questa risulta

$$\rho[\partial_t e + \mathbf{v} \cdot \nabla e] = -p\nabla \cdot \mathbf{v} + \epsilon - \nabla \cdot \mathbf{J}^q$$

dove  $e$  è l'energia interna per unità di massa  $E/m$  di una particella fluida,  $\mathbf{J}^q$  è la corrente di calore uscente dal bordo della particella fluida e  $\epsilon$  è la densità di potenza dissipata dalla viscosità:

$$\epsilon = S_{ij}\partial_i v_j = S_{ij}D_{ij}$$

poiché la parte antisimmetrica del tensore  $\partial_i v_j$  non contribuisce essendo il tensore degli sforzi viscosi simmetrico. Con la notazione tensoriale riscriviamo tutto come:

$$\rho[\partial_t e + v_i \partial_i e] = -p\partial_i v_i + S_{ij}D_{ij} - \partial_i J_i^q$$

Abbiamo ora la chiusura completa del problema: abbiamo le nove incognite  $v_i$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $e$ ,  $J_i^q$ , più la conoscenza delle proprietà intrinseche del materiale tramite i vari parametri viscosi e la legge di conduzione termica  $J_i^q(T)$ ; l'esempio più noto di quest'ultima è ad esempio la legge di Fourier  $J_i^q = -k_{ij}\partial_j T$ , dove nel caso di materiale isotropo (come i fluidi in questione)  $k_{ij} = k\delta_{ij}$ .  $k$  è la nota conducibilità termica, che come le due viscosità in generale dipenderà dalla temperatura  $T$  ed è nota conoscendo le proprietà del materiale. Abbiamo quindi al posto delle tre incognite  $J_i^q$  la temperatura  $T$ , quindi in totale sette incognite. Le equazioni che abbiamo trovato implementando le leggi fondamentali di conservazione sono cinque (due scalari e una vettoriale). Ma del nostro materiale conosciamo anche l'equazione di stato  $f(\rho, T, p) = 0$ ; inoltre possiamo da quest'ultima ricavare l'espressione dell'energia interna tramite la nota *equazione dell'energia* della termodinamica  $dE = mc_v dT + (T\frac{\partial p(V,T)}{\partial T} - p)dV$ , dove  $c_v$  è il calore specifico a volume costante. Abbiamo quindi aggiunto due equazioni per un totale di sette, che per sette incognite rendono possibile la risoluzione del problema, insieme alle condizioni iniziali e/o al contorno. Comunque, se ai fini della risoluzione di un problema un fluido è considerabile incompressibile e uniforme, quindi con equazione di stato  $\rho = \text{cost.}$ , la densità diventa nota come parametro intrinseco del fluido, quindi le equazioni di continuità e della quantità di moto non contengono più la temperatura e diventano sufficienti per la chiusura del problema, che avrà ora come incognite solo  $p$  e  $\mathbf{v}$ .

In particolare, se il fluido è newtoniano, supponendo per la corrente di calore valida la legge di

Fourier, l'equazione per l'energia diventa:

$$\rho[\partial_t e + \mathbf{v} \cdot \nabla e] = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \epsilon + k \nabla^2 T \quad (\text{A.2})$$

Ultima considerazione. Noto che  $dE = Tds - pdV$  e quindi  $de = Tds + \frac{1}{\rho^2} p d\rho$ , dove  $s$  è l'entropia per unità di massa, riscrivendo anche la (A.1) con la derivata temporale lagrangiana e avendosi  $\rho T \frac{ds}{dt} = \rho \frac{de}{dt} - p \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$ , si ha dall'equazione di continuità che  $\frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = p \nabla \cdot \mathbf{v}$  e questo cancella il corrispondente termine nella (A.2). Rimane quindi:

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{\rho T} \nabla \cdot \mathbf{J}^q + \frac{\epsilon}{\rho T} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left( \frac{1}{T} \mathbf{J}^q \right) - \frac{1}{\rho T} \mathbf{J}^q \cdot \nabla T + \frac{\epsilon}{\rho T} \quad (\text{A.3})$$

$\nabla \cdot \left( \frac{1}{T} \mathbf{J}^q \right)$  è la divergenza della corrente di entropia uscente dalla particella fluida. Supponiamo che il fluido occupi l'intero sistema termodinamico (al limite, l'intero spazio): allora integrando su tutto il suo volume, il flusso sul bordo della corrente di entropia per ovvie ragioni fisiche deve annullarsi. Poiché per il secondo principio della termodinamica l'entropia di un sistema isolato non può diminuire, ne consegue che le altre due quantità al membro di destra non devono essere mai negative. In particolare, ciò deve valere per  $\epsilon$ , che per un fluido newtoniano è:

$$\epsilon = S_{ij} D_{ij} = \left( 2\eta D_{ij} + \left( \eta_v - \frac{2}{3}\eta \right) D_{kk} \delta_{ij} \right) D_{ij} = 2\eta H_{ij} H_{ij} + \eta_v [D_{kk}]^2$$

dove si è indicato con  $H_{ij}$  il tensore

$$\left( D_{ij} - \frac{1}{3} D_{kk} \delta_{ij} \right)$$

Allora per essere  $\epsilon \geq 0$  si deve avere  $\eta, \eta_v \geq 0$ . Analogo discorso vale per il termine  $-\mathbf{J}^q \cdot \nabla T$ , che se soddisfa la legge di Fourier diventa  $k(\nabla T) \cdot (\nabla T)$ , e dev'essere necessariamente  $k \geq 0$ .

## A.2 Le variabili adimensionali

È conveniente spesso utilizzare per l'analisi del problema delle variabili adimensionali che caratterizzino dei rapporti tra scale tipiche di alcune grandezze del fluido, in modo da poter riprodurre gli stessi rapporti (e quindi gli stessi effetti fisici) con diversi valori o diverse scale delle grandezze che caratterizzano il fluido (temperatura, velocità, densità, pressione, concentrazioni di soluti, etc.). Questo metodo è noto come *analisi di omogeneità* e in fluidodinamica trova molti vantaggi. Il numero di parametri adimensionali indipendenti è legato al numero di grandezze fisiche indipendenti del problema dal noto teorema  $\Pi$  di Buckingham sull'analisi dimensionale.

Un semplice esempio di come si effettua questo (e anche il fondamentale, perché porta al numero adimensionale più noto e significativo della meccanica dei fluidi) si può vedere considerando le equazioni di Navier-Stokes per un fluido newtoniano incompressibile prive di forze esterne. Se nel flusso sono presenti una lunghezza tipica  $L$  e una velocità tipica  $U$  scelte convenzionalmente, oltre alla densità e viscosità caratteristiche del fluido stesso, possiamo dividere entrambe le equazioni per combinazioni di queste quantità in modo da renderle adimensionali.

L'equazione di continuità rimane invariata

$$\frac{L}{U} \partial_i v_i = 0 \implies \partial_i^* v_i^* = 0$$

dove si sono introdotte la derivata rispetto alla nuova lunghezza adimensionale  $x_i^* = x_i/L$  e la velocità adimensionale  $v_i/U$ . Notare che il problema ha così una scala di tempo tipica  $L/U$ . Così, la seconda equazione diventa:

$$\frac{L}{U^2} (\partial_t + v_j \partial_j) v_i = -\frac{L}{\rho U^2} \partial_i p + \frac{\mu L}{U^2} \partial_j \partial_j v_i$$

Riscalando quindi velocità, tempi e forze di volume esterne tramite le grandezze tipiche in modo da ottenere le variabili adimensionali suddette si ha:

$$(\partial_t^* + v_j^* \partial_j^*) v_i^* = -\partial_i^* p^* + \frac{\mu}{UL} \partial_j^* \partial_j^* v_i^*$$

dove  $p^*$  è la pressione adimensionale e  $\frac{UL}{\mu}$  è il *numero di Reynolds*, che dà una stima dell'importanza degli effetti di inerzia del flusso rispetto a quelli viscosi.



## Appendice B

# Fluidi non newtoniani

Un fluido dove la relazione tra tensore degli sforzi viscosi e tensore di velocità di deformazione non è lineare e omogenea è un fluido *non newtoniano*. Esistono una gran quantità di equazioni che modellano questa categoria: alcune derivanti da considerazioni di tipo puramente fenomenologico poiché fittano molto bene con le misurazioni effettuate e posseggono alcune proprietà teoriche di base a seconda del tipo di fluido non newtoniano considerato, alcune invece derivano da modelli microscopici in cui vengono utilizzati alcuni risultati di meccanica statistica e teoria cinetica dello stato liquido.

### B.1 I fluidi shear-thinning

Illustriamo qui alcuni casi di fluidi *non lineari* in cui non c'è comunque dipendenza dal tempo o dalla *storia* del fluido. I modelli in seguito sono ripresi da [4], [5], [6], [7] e [16].

Supponiamo che  $K_{ijkl}$  dipenda esso stesso dal tensore di velocità di deformazione. Le simmetrie già citate in appendice A implicherebbero comunque un  $K_{ijkl}$  del tipo (A.1), con la differenza che  $\eta$  e  $\xi$  potrebbero ancora dipendere dal tensore  $D_{ij}$ .

Il fluido sia incompressibile e a densità uniforme. Allora come sappiamo il coefficiente  $\xi$  non dà più contributo e possiamo considerare solo la viscosità  $\eta$  che qui chiameremo *apparente* perché appunto non è costante. Essa dovrà quindi esser sempre positiva, per quanto detto in appendice A sul secondo principio della termodinamica.

La prima categoria che citiamo sono i cosiddetti fluidi *shear-thinning* (*pseudoplastici*), in cui aumentando i gradienti di velocità, e quindi la velocità di deformazione, *diminuisce* lo sforzo di taglio viscoso. Esempi pratici di tali fluidi sono gli shampoo, la glicerina, le sabbie mobili. Si tratta molto spesso di soluzioni contenenti polimeri molto lunghi, oppure sospensioni di particelle allungate o fibre. Tale fenomeno è dovuto al fatto che questi, quando il fluido è in quiete, sono disposti in modo casuale. Man mano che si aumentano le velocità relative (e quindi il tensore di velocità di deformazione) essi tendono ad allinearsi coerentemente e quindi oppongono meno resistenza al moto. In particolare, questi fluidi risultano avere una viscosità apparente asintotica  $\eta_\infty$  man mano che si aumentano le velocità relative nel flusso, che risulta essere vicina alla viscosità

del solvente. I nostri modelli quindi devono essere tali che:

$$\lim_{D_{ij} \rightarrow 0} \eta(D_{ij}) = \eta_0$$

$$\lim_{D_{ij} \rightarrow \pm\infty} \eta(D_{ij}) = \eta_\infty$$

Elenchiamo i più noti. Posto  $\tilde{\tau}^2$  il secondo invariante di un generico tensore  $\tau_{ij}$ , definito come  $1/2(\tau_{ij}\tau_{ji} - \tau_{ii}^2)$ , il fluido è incompressibile quindi  $D_{ii} = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ,  $D_{ij}$  è simmetrico, allora risulta  $\tilde{D} = \sqrt{1/2 D_{ij} D_{ij}}$ ; si hanno:

- il modello a legge di potenza

$$\eta = m \tilde{D}^{n-1}$$

con  $m$  *indice di consistenza* e  $n$  adimensionale; se  $n=1$ , si ha il caso newtoniano, se  $n < 1$  si ha il caso shear-thinning; per il secondo principio della termodinamica dev'essere evidentemente  $m \geq 0$ ; notare come qui la viscosità apparente tenda ad annullarsi al crescere della velocità di deformazione;

- il modello di Cross

$$\eta = \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + K \tilde{D}^n} + \eta_\infty$$

con  $n > 0$  adimensionale e  $K$  detto *indice di consistenza*, che nel caso  $K=0$  riporta al caso newtoniano; se  $D_{ij}$ , e quindi  $\tilde{D}$ , tendono a 0,  $\eta$  vale esattamente  $\eta_0$ ; se  $D_{ij}$  tende a  $\pm\infty$ , la frazione tende a 0 e  $\eta$  tende a  $\eta_\infty$ ; per non avere una variazione di entropia nel tempo negativa indipendentemente dal flusso, è facile vedere analogamente a quanto mostrato per il caso newtoniano che si deve avere sempre  $K, \eta_0, \eta_\infty \geq 0$  e  $\eta_0 \geq \eta_\infty$ , con quest'ultima che conferma le osservazioni sui fluidi shear-thinning;

- il modello di Carreau-Yasuda

$$\eta = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)(1 + (\lambda \tilde{D})^a)^{\frac{n-1}{a}}$$

con  $a > 0$ , il *tempo elastico*  $\lambda \geq 0$  sempre dal principio dell'aumento dell'entropia e  $\eta_0 \geq \eta_\infty$ ; la costante  $n \leq 1$  dà una misura di quanto è lontano il fluido dall'essere newtoniano; è chiaro che se  $n = 1$  o se  $\lambda = 0$  o se  $\eta_0 = \eta_\infty$  si riottiene il caso newtoniano; notiamo che se  $\hat{D} \rightarrow \pm\infty$ , la potenza tende a 0 e quindi la viscosità tende a  $\eta_\infty$ . Analogamente, se i gradienti di velocità tendono a 0, e quindi  $\hat{D} \rightarrow 0$ , la potenza tende a 1 e quindi la viscosità tende a  $\eta_0$ ;

- il modello di Carreau-Bird, che è un caso particolare del precedente dove si pone  $a=2$ , il che risulta in ottimo accordo con le misurazioni della maggioranza dei materiali shear-thinning. Riscalando convenzionalmente la costante  $\lambda$  per ragioni di comodità di calcolo, esplicitamente si ha:

$$\eta = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)(1 + 4\lambda^2 D_{ij} D_{ij})^{\frac{n-1}{2}} \quad (\text{B.1})$$

## B.2 I fluidi shear-thickening

Un'altra categoria di fluidi non newtoniani sono gli *shear-thickening* (*dilatanti*). Questi risultano avere proprietà opposte agli shear-thinning: aumentando le velocità relative nel flusso essi aumentano la viscosità apparente. Esempi di questo genere di fluidi sono sospensioni dense di caolino, di  $TiO_2$  o di farina fine di granturco in acqua. Non è noto dalle misure fatte fino ad oggi se anche questi materiali presentino una viscosità apparente asintotica finita quando la velocità di deformazione tende all'infinito in maniera analoga agli shear-thinning o se invece essa cresce indefinitamente facendo sì che il fluido asintoticamente tenda a comportarsi come un solido. Una spiegazione qualitativa del loro comportamento è legata all'attrito che le grosse particelle solide sospese nel fluido hanno tra loro quando alzando le velocità relative si rende il moto più disordinato, facendole urtare tra di loro e scorrere l'una sull'altra in maggior numero.

Il più semplice modello di shear-thickening è dato da quello a legge di potenza analogo al già visto shear-thinning, dove però  $n \geq 1$ .

Un altro modello tipico di questa categoria di fluidi un po' più sofisticato è dato da un adattamento del modello di Carreau-Bird per i fluidi shear-thinning visti nella sezione precedente:

$$\eta = \eta_0(1 + 4\lambda^2 D_{ij}D_{ij})^{\frac{n-1}{2}} \quad (B.2)$$

avendo le costanti lo stesso ruolo del caso shear-thinning con la differenza che qui  $n \geq 1$ . Tale modello è noto rappresentare liquami contenenti deiezioni animali, paglia, fieno e in generale filamenti macroscopici.

## B.3 I fluidi viscoplastici

Diamo ora qualche cenno ad altri tipi di fluidi non newtoniani, i cosiddetti *fluidi viscoplastici*. Si è già parlato della possibilità della presenza di una relazione non omogenea tra  $S_{ij}$  e  $D_{ij}$  in alcune condizioni. Un tipico esempio può essere un fluido che sotto una certa (bassa) sollecitazione  $\hat{S}$  rimanga statico e si comporti quindi come un solido, mentre superando questa soglia mostri un comportamento fluido vero e proprio. Appartengono a questa categoria i ketchup, che hanno bisogno di essere scossi nel loro contenitore per fluire.

Un esempio di fluido viscoplastico è dato dal modello di Bingham:

$$\begin{cases} D_{ij} = 0 & \text{se } \tilde{S} < \hat{S} \\ S_{ij} = (2\eta_p + \frac{\tilde{S}}{D})D_{ij} & \text{se } \tilde{S} \geq \hat{S} \end{cases}$$

dove  $\tilde{S}$  è il secondo invariante del tensore degli sforzi viscosi.

Supponiamo di avere un flusso piano parallelo, in cui si ha solo lo sforzo viscoso di taglio non nullo. Dalla precedente relazione si ha che  $S_{11}, S_{22} = 0$  implicano necessariamente anche  $D_{11}, D_{22} = 0$ . Allora solo le componenti 12 e 21 dei tensori sono diverse da 0. Quindi  $\tilde{D} = \sqrt{1/2(D_{12}^2 + D_{21}^2)} = D_{12}$ , dal momento che  $D_{ij}$  è simmetrico. Allora per la componente di sforzo viscoso di taglio si ha  $S_{12} = 2\eta_p D_{12} + \hat{S}$ , che è la relazione della viscosità nei flussi piani paralleli newtoniani, resa non omogenea dal termine additivo  $\hat{S}$ .

Esistono comunque anche fluidi che superata la soglia si comportano ad esempio come shear-thinning (es. dentifrici, schiume da barba), e il loro tensore degli sforzi viscosi ha una relazione che combina proprietà del modello di Bingham con quelli visti precedentemente.

Un altro modello che invece presenta un comportamento tendente soltanto asintoticamente a quello viscoplastico di Bingham è il modello di Papanastasiou, dove si ha la viscosità apparente data da:

$$\eta = 2\eta_p + \frac{\hat{S}}{\tilde{D}}(1 - e^{-m\tilde{D}})$$

Questo implica un tensore degli sforzi viscosi dato da:

$$S_{ij} = 2\eta_p D_{ij} + \frac{\hat{S}D_{ij}}{\tilde{D}}(1 - e^{-m\tilde{D}})$$

con  $m > 0$  ( $m=0$  riporta al caso newtoniano) ed è facile verificare che per  $m \rightarrow +\infty$  si ha che per  $D_{ij} = 0$  anche  $S_{ij} = 0$ , mentre per avere  $D_{ij} \neq 0$ , cioè  $\tilde{D} > 0$ , dev'essere necessariamente  $S_{ij} = 2\eta_p D_{ij} + \frac{\hat{S}}{\tilde{D}} D_{ij}$ .

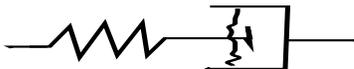
Citiamo infine un altro modello non lineare, e non omogeneo nel caso di flusso piano parallelo, detto modello di Casson, utilizzato in principio per descrivere il flusso del sangue. La relazione costitutiva è data da:

$$\begin{cases} D_{ij} = 0 & \text{se } \tilde{S} < \hat{S} \\ \sqrt{S_{ij}} = \sqrt{2\eta_p D_{ij}} + \sqrt{\frac{\hat{S}}{\tilde{D}} D_{ij}} & \text{se } \tilde{S} \geq \hat{S} \end{cases}$$

## B.4 I fluidi viscoelastici e i fluidi polimerici

Molto importanti sono i modelli di fluidi capaci di catturare anche le proprietà elastiche del fluido stesso, indotte dalla presenza di polimeri disciolti. Tali fluidi son detti *viscoelastici*. Naturalmente, un analogo discorso si può trasportare parallelamente su solidi aventi anche proprietà viscosi (es. il modello solido lineare standard), indotte quando strati di molecole cominciano a scorrere l'una sull'altra. Tenere conto delle proprietà elastiche dei polimeri esplicitamente fa sì che si possano ottenere risultati più affidabili dei precedenti modelli che sono totalmente empirici e quindi possono avere molti limiti applicativi. Questi modelli si creano mettendo in serie e/o in parallelo nella particella di materiale componenti elastiche e viscosi, analogamente ad un circuito elettrico. Si ottiene così un'equazione del moto per  $S_{ij}$  funzione di  $D_{ij}$  e del tempo, che va accoppiata all'equazione della quantità di moto dove comparirà ora semplicemente il termine incognito di divergenza del tensore degli sforzi viscoelastici  $\partial_i S_{ij}$ . Soffermiamoci sul caso fluido. I modelli più semplici sono i seguenti.

- Modello di Maxwell; egli aveva progettato un piccolo modello di materiale in grado di mostrare comportamento viscoelastico; è composto da una parte elastica lineare e una parte viscosa newtoniana in parallelo; lo schema è il seguente:



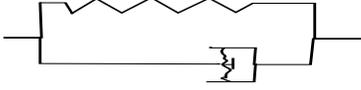
Ogni elemento subisce ed imprime la stessa forza all'elemento successivo, e quindi lo stesso sforzo; inoltre la deformazione e quindi la velocità di deformazione totale è la somma

dei contributi elastico lineare ( $D_{ij}^E$ , la molla) e viscoso ( $D_{ij}^V$ , il fluido newtoniano). Posto che  $S_{ij}^E = S_{ij}^V = S_{ij}$ , si ha quindi  $S_{ij}^V = 2\eta D_{ij}^V$  e  $S_{ij}^{\nabla E} = kD_{ij}^E$ , dove  $A_{ij}^{\nabla} = \partial_t A_{ij} + v_k \partial_k A_{ij} - A_{kj} \partial_k v_i - A_{ik} \partial_k v_j$  è la derivata di Oldroyd (geometricamente corrispondente alla derivata di Lie rispetto al campo delle velocità di un tensore a due indici controvarianti in modo da ottenere una relazione costitutiva che abbia la stessa forma in tutti i sistemi di coordinate[45]; essa coincide inoltre per gli scalari con la derivata lagrangiana). Segue quindi:

$$D_{ij}^V + D_{ij}^E = D_{ij} \quad \Longrightarrow \quad S_{ij} + \frac{2\eta}{k} S_{ij}^{\nabla} = 2\eta D_{ij}$$

L'equazione a destra rappresenta l'equazione costitutiva del moto.  $\frac{2\eta}{k}$  è la costante di tempo del fluido ed è quella che mantiene la memoria degli stati precedenti: se  $k \rightarrow \infty$ , cioè la molla diventa rigida e non contribuisce alla deformazione, il fluido diventa newtoniano.

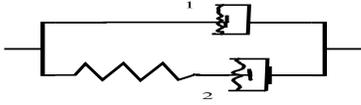
- Modello di Kelvin-Voigt [46]; composto da parte newtoniana e parte elastica lineare in parallelo:



Ogni elemento subisce la stessa velocità di deformazione  $D_{ij}$ ; inoltre si ha  $S_{ij} = S_{ij}^E + S_{ij}^V$ . Da ciò:

$$S_{ij}^{\nabla} = kD_{ij} + 2\eta D_{ij}^{\nabla}$$

- Modello di Oldroyd-B [47]; più significativo e preciso dei precedenti. Consiste in un parallelo di fluido newtoniano e di un fluido viscoelastico di Maxwell:



Si ha quindi  $D_{ij} = D_{ij}^1 = D_{ij}^{2V} + D_{ij}^{2E}$ ; anche  $S_{ij} = S_{ij}^1 + S_{ij}^2$ , con  $S_{ij}^2 = S_{ij}^{2E} = S_{ij}^{2V}$ ; 1 e 2V sono supposti avere due viscosità differenti  $\eta_1$  e  $\eta_2$ . Individuiamo pertanto due contributi al tensore degli sforzi: quello puramente viscoso del fluido 1 e quello viscoelastico del modello di Maxwell nella parte 2. Come già visto,  $S_{ij}^2 + \frac{2\eta_2}{k} S_{ij}^{2\nabla} = 2\eta_2 D_{ij}$ ; inserendovi la suddetta  $S_{ij}^2 = S_{ij} - 2\eta_1 D_{ij}$ , si ottiene l'equazione costitutiva finale:

$$S_{ij} + \frac{2\eta_2}{k} \left( S_{ij}^{\nabla} - 2\eta_1 D_{ij}^{\nabla} \right) = 2(\eta_1 + \eta_2) D_{ij} \quad \Longrightarrow \quad S_{ij} + \lambda_1 S_{ij}^{\nabla} = 2\eta (D_{ij} + \lambda_2 D_{ij}^{\nabla}) \quad (\text{B.3})$$

avendo introdotto nell'equazione a destra la viscosità totale  $\eta = \eta_1 + \eta_2$ , il tempo di rilassamento  $\lambda_1 = \frac{2\eta_2}{k}$  e il tempo di ritardo  $\lambda_2 = \lambda_1 \frac{\eta_1}{\eta}$ .

E' interessante che il modello di Oldroyd-B possa esser dimostrato valido partendo da considerazioni microscopiche di meccanica statistica su equazioni differenziali stocastiche tramite un cosiddetto *modello a manubrio*. Si considera il raggio vettore  $R_i$  di distanza tra i capi di un polimero, di cui il primo occupante la posizione  $\mathbf{x}$  viaggiante con la particella fluida, trattato come una molla con forza di richiamo  $-kR_i$ , cioè col polimero a lunghezza a riposo nulla, situazione

in cui risulterà arricciato in un punto; l'allungamento del polimero risulta molto minore (infinitesimo) delle dimensioni delle particelle fluide, rispetto alle quali il polimero è praticamente un punto materiale; si può considerare per esso l'equazione del moto:

$$\frac{d}{dt}R_i(\mathbf{x}, t) = R_k(\mathbf{x}, t)\partial_k v_i(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2\tau}R_i(\mathbf{x}, t) + \sqrt{\frac{R_0^2}{\tau}}\xi_i(t) \quad (\text{B.4})$$

dove  $\xi_i(t)$  è la forza aleatoria che generano tra loro i due capi del polimero a causa dell'agitazione termica, un rumore bianco gaussiano;  $R_0$  rappresenta il valore di allungamento all'equilibrio termico per il principio di equipartizione dell'energia  $\frac{1}{2}kR_0^2 = \frac{1}{2}K_B T$ ;  $R_k\partial_k v_i$  rappresenta al primo ordine la velocità relativa del fluido nel secondo capo del polimero  $\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{R}, t)$  rispetto al fluido nel primo  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ; si è trascurato il termine di inerzia dell'accelerazione [48,49].

Inserendo la (B.4) in  $\frac{d}{dt}\langle R_i R_j \rangle = \langle (\frac{d}{dt}R_i)R_j + R_i\frac{d}{dt}R_j \rangle$ , dove a loro volta si sostituiscono nei termini  $\propto \langle R_i \xi_j \rangle$  la (B.4) integrata, si ottiene l'equazione del moto per il *tensore di conformazione*  $\sigma_{ij} = \langle R_i R_j \rangle / R_0^2$

$$\partial_t \sigma_{ij} + u_k \partial_k \sigma_{ij} = \sigma_{kj} \partial_k v_i + \sigma_{ik} \partial_k v_j - \frac{1}{\tau}(\sigma_{ij} - \delta_{ij}) \quad (\text{B.5})$$

avendo scritto per esteso la derivata sostanziale delle componenti scalari del tensore. Notare come automaticamente nella relazione costitutiva si formi la derivata di Oldroyd. Poiché dalla meccanica statistica [50] sappiamo che  $T_{ij} = \rho^N \langle R_i F_j \rangle$ , dove  $F_j$  sono le forze esercitate nelle coppie di particelle e  $\rho^N$  la loro concentrazione volumica, otteniamo per il contributo dei polimeri al tensore degli sforzi totale, inserendo la forza elastica e la forza aleatoria a concentrazione costante, che  $T_{ij}^p = \rho^N k R_0^2 (\sigma_{ij} - \delta_{ij})$ . Dalla (B.5):

$$\begin{aligned} \partial_t(\sigma_{ij} - \delta_{ij}) + v_k \partial_k(\sigma_{ij} - \delta_{ij}) &= (\sigma_{kj} - \delta_{kj})\partial_k v_i + (\sigma_{ik} - \delta_{ik})\partial_k v_j + \partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{1}{\tau}(\sigma_{ij} - \delta_{ij}) \\ \implies T_{ij}^p + \tau T_{ij}^{p\nabla} &= 2\rho^N k R_0^2 \tau D_{ij} \end{aligned}$$

che è la relazione di Maxwell, identificando  $\eta_p = \rho^N k R_0^2 \tau = \rho^N K_B T \tau$ . Il tensore degli sforzi totali sarà la somma del contributo del fluido solvente, di viscosità dinamica  $\eta_s$ , e quello dei polimeri (Maxwell), riottenendo quindi la relazione costitutiva di Oldroyd. Le equazioni della quantità di moto saranno:

$$\rho[\partial_t v_i + v_k \partial_k v_i] = -\partial_i p + \eta \beta \partial_k \partial_k v_i + \frac{\eta(1-\beta)}{\tau} \partial_k (\sigma_{ki} - \delta_{ki}) + f_i$$

con  $\beta = \frac{\eta_s}{\rho^N K_B T \tau + \eta_s}$  e avendo posto  $\eta = \rho^N K_B T \tau + \eta_s$ .  $\beta$  varia quindi da 0 ( $\eta_s = 0$ , il solvente è un fluido ideale e l'unico contributo viscoso è dei polimeri; caso limite di alte temperature) fino a 1 ( $\rho^N = 0$ , oppure  $\tau = 0$ , che moltiplicando la (B.4) per  $\tau$  significa  $R=0$  sempre: si tratta del caso puramente newtoniano).

Segnaliamo che oltre a questi esistono altri modelli che combinano diversi paralleli e serie dei precedenti elementi, utilizzando anche relazioni non lineari. La forza del modello di Oldroyd-B, sta nel riuscire a giustificare tramite relazioni rigorose e quantitative di meccanica statistica l'equazione costitutiva. Quest'ultimo però in alcune situazioni mostra comportamenti singolari, in quanto i polimeri nel modello possono allungarsi indefinitamente e generare quindi uno sforzo

divergente. Per tale ragione, esistono modelli che implementano relazioni elastiche non lineari per i polimeri e tengono conto anche di una lunghezza massima che può avere un polimero. Un esempio di questi modelli è il modello FENE. Essi presentano semplicemente una relazione costitutiva più complessa del modello di Oldroyd-B, perciò ci fermiamo a queste considerazioni.

## B.5 I fluidi tissotropici e antitissotropici

Esistono fluidi la cui viscosità cambia *nel tempo* da quando sono in quiete a quando sono portati ad uno stato di moto, stabilizzandosi ad un nuovo valore, per poi tendere a ritornare al valore precedente una volta che sono portati nuovamente verso lo stato di quiete.

Se la loro viscosità diminuisce nella prima parte di questo processo e perciò aumenta nella seconda, essi si dicono *tissotropici*, o aventi risposta di tissotropia positiva; nella situazione opposta vengono detti *antitissotropici*, aventi risposta di tissotropia negativa [52]. In ogni caso, in seguito ci riferiremo con comportamento tissotropico ad entrambe le situazioni. In questo comportamento quindi è presente una dipendenza dalla storia del fluido, in quanto se cambia il flusso, la viscosità dipenderà in ogni punto in base alla velocità nel flusso agli istanti precedenti. Ciò può anche dare origine a fenomeni di isteresi nel diagramma  $S_{ij} - D_{ij}$ , se il passaggio da un certo gradiente di deformazione ad un altro e il successivo ritorno allo stato precedente vengono fatti non dando il tempo sufficiente al fluido di stabilizzarsi. Oltre a tutto ciò, questi fluidi possono presentare anche uno stress di soglia per entrare in moto, rientrando allora anche nei già visti fluidi viscoplastici.

Il comportamento tissotropico a livello microscopico è causato dalla formazione in quiete di reticoli tramite deboli forze che vengono distrutti con l'aumentare delle velocità relative in pezzi sempre più piccoli, per poi tendere a ricomporsi una volta che tali moti diminuiscono o cessano. Nel caso antitissotropico avviene l'opposto, l'aumento delle velocità relative contribuisce a creare agglomerati di particelle grosse che impediscono lo scorrimento.

Fanno parte dei tissotropici gel come dispersioni acquose di  $Fe_2O_3$  o  $Al(OH)_3$  o anche  $V_2O_5$ , che quando agitate mostrano una transizione a sol liquido, o anche analoghi sistemi contenenti amido di mais, o ancora lattice di gomma e alcune vernici ad olio; l'antitissotropia è un comportamento più raro, ad esempio visibile in alcune sospensioni colloidali o argille. Esistono anche fluidi che hanno comportamenti misti, che se portati dalla quiete a una situazione di nuovo flusso stabile, la loro viscosità prima aumenta e poi diminuisce nel tempo o viceversa. Un esempio di questi sono alcuni tipi di vaselina. Tutti questi aspetti sono fondamentali nelle proprietà dei cosmetici o delle creme in chimica farmaceutica.

Un modello molto semplice di fluido con comportamento tissotropico è ottenibile da quello di Bingham già visto, ponendo però la soglia  $\hat{S}$  funzione del tempo, che quindi implicherà anche una relazione lineare non omogenea tra sforzo viscoso e velocità di deformazione, con il termine additivo dipendente dal tempo. Ad esempio, Slibar e Paslay hanno proposto:

$$\hat{S}(t) = \hat{S}_0 - \frac{\int_0^{+\infty} \tilde{D}(t-s)e^{-\alpha s} ds}{\beta + \int_0^{+\infty} \tilde{D}(t-s)e^{-\alpha s} ds} (\hat{S}_0 - \hat{S}_\infty)$$

In questo modello, la viscosità rimane costante, mentre evidentemente la memoria degli stati precedenti, data dall'integrale dipendente dal flusso all'istante t-s, è presente solo nella viscosità di

soglia;  $\alpha$  e  $\beta$  sono parametri del materiale;  $\widehat{S}_0$  rappresenta ovviamente la soglia quando il fluido è in quiete ( $\widetilde{D} = 0$ ); essendo inoltre  $\widetilde{D}$  quando il fluido è in un nuovo stato di moto stazionario sempre positivo, tale sarà anche l'integrando, che darà quindi origine a un integrale crescente monotonicamente: allora, dopo un certo tempo  $t$ ,  $\beta$  sarà trascurabile, e il fluido avrà la soglia  $\widehat{W}$ . Esiste comunque la possibilità di rendere con memoria anche la viscosità, ma in ogni caso ovviamente un modello simile non descrive certo in maniera generale la categoria dei fluidi tissotropici.

Esistono modelli anche più complicati, che descrivono comportamenti tissotropici unendo funzioni integrali di memoria con modelli viscoelastici non lineari, e complicando ulteriormente la relazione del termine non omogeneo della relazione sforzo viscoelastico-velocità di deformazione, ad esempio rendendo il  $\widehat{S}_0$  del modello precedente a sua volta funzione degli stati precedenti. Questi modelli, sono perlopiù adatti a trattare materiali che si avvicinano più a solidi che a liquidi, ad esempio dipendendo dal tensore di deformazione della teoria dell'elasticità, e pertanto non ne tratteremo. Un grande esempio di questa categoria è il modello di White, che descrive molto bene i dati sperimentali della gomma di carbone.

Un'altra categoria di modelli con comportamento tissotropico è formata da fluidi in cui certi parametri dipendono da un *parametro di struttura*. Esso è uno scalare  $\lambda$ , dipendente dal tempo, che quindi conterrà gli effetti di memoria o risposta non istantanea del materiale, la cui equazione del moto, è dei tipi:

$$\frac{d}{dt}\lambda = -k_1\widetilde{D}^a\lambda^b + k_2\widetilde{D}^c(1-\lambda)^d \quad \frac{d}{dt}\lambda = k_1\widetilde{D}^e(\lambda - \lambda_s)^f \quad (\text{B.6})$$

in cui i vari parametri liberi son determinati da fit con dati sperimentali dei viscosimetri, mentre  $\lambda_s$  nel secondo caso, integrando rispetto al tempo si vede che rappresenta il valore di  $\lambda$  a cui asintoticamente tende il fluido nel caso  $f > 0$ . Fanno leggera eccezione pochi modelli che presentano alcune varianti, come:

- il modello di Lee-Brodkey:  $\frac{d}{dt}\lambda = k_1\widehat{S}^a\lambda^b + k_2(1-\lambda)^c + k_3\widehat{S}(1-\lambda)^e$ ;
- il modello di Burgos:  $\frac{d}{dt}\lambda = k_1\widetilde{D}e^{-a\widetilde{D}}\lambda + k_2(1-\lambda)$ .

Una delle precedenti può esser accoppiata poi a un modello già visto nei paragrafi precedenti, dove i vari parametri dipendono ora anche dalla costante  $\lambda$  secondo una qualche funzione. Ad esempio una categoria può essere:

$$S_{ij} = \widehat{S}(\lambda) + \eta_\lambda(D_{ij}, \lambda)D_{ij} + \eta_{\lambda=0}(D_{ij})D_{ij} \quad (\text{B.7})$$

dove  $\eta_0$  rappresenta un'eventuale viscosità residua quando il fluido è totalmente destrutturato ( $\lambda = 0$ ). Notare come in questa categoria appartengano i fluidi shear-thickening, i fluidi shear-thinning e i fluidi viscoplastici, qualora sparisse la dipendenza strutturale; pertanto possiamo avere anche generalizzazioni a casi tissotropici o antitissotropici facilmente. Alcuni esempi che derivano dal primo tipo:

- il modello di Moore  $\widehat{S}(\lambda) = 0$ ,  $\eta_\lambda(\lambda) = \lambda\eta_0$ ;
- il modello di Worrall-Tulliani  $\widehat{S}(\lambda) = \widehat{S}$ ,  $\eta_\lambda(\lambda) = \lambda\eta_0$ ;

- il modello di Tiu-Boger  $\widehat{S}(\lambda) = \widehat{S}$ ,  $\eta_\lambda(\lambda) = \lambda K \widehat{D}^{n-1}$ ;
- il modello di Houska  $\widehat{S}(\lambda) = \lambda(\widehat{S}_0 - \widehat{S}_\infty) + \widehat{S}_\infty$ ,  $\eta_\lambda(\lambda) = \lambda K \widehat{D}^{n-1}$ ;
- il modello di Nguyen-Boger  $\widehat{S}(\lambda) = \lambda \widehat{S}$ ,  $\eta_\lambda(\lambda) = 0$ ;
- il modello di Toorman  $\widehat{S}(\lambda) = \lambda \widehat{S}$ ,  $\eta_\lambda(\lambda) = \lambda \eta_0$ .

Infine, esistono modelli che combinano equazioni con termini di struttura a modelli viscoelastici, e vorrebbero rappresentare fluidi che presentano caratteristiche di entrambe le categorie: i fluidi che presentano tali caratteristiche son stati da taluni chiamati *tissoelastici*, ma il termine non è stato ancora da tutti accettato. Ad esempio, si può accoppiare un'equazione di struttura al modello di Maxwell, imponendo che  $k = k(\lambda)$ ,  $\mu = \mu(\lambda)$ .



# Bibliografia

- [1] Kundu P. K., Cohen I. M., Dowling D. R., *Fluid Mechanics, fifth edition*, 2012, Academic Press.
- [2] Schmid P. J., Henningson D. S., *Stability and Transition in Shear Flows*, 2001, Springer.
- [3] Frisch U., *Turbulence*, 1995, Cambridge University Press.
- [4] Cross M. C., Hohenberg P. C., *Pattern formation outside equilibrium*, 1993, Reviews of Modern Physics, 65, 851
- [5] Murali Krishnan J., Deshpande A. , *Rheology of Complex Fluids*, 2010, Springer.
- [6] Pinarbasi A., Liakopoulos A., *Stability of two-layer Poiseuille flow of Carreau-Yasuda and Bingham-like fluids*, 1995, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 57, 227-241
- [7] Mitsoulis E., *Flows of viscoplastic materials: models and computations* , 2007, Rheology Reviews, 135 - 178
- [8] Squire H. B., *On the stability fo a three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls*, 1933, Proceedings of the Royal Society of London A, 142, 621-628
- [9] Georgievskii D. V., *Applicability of the Squire transformation in linearized problems on shear stability*, 2009, Russian Journal of Mathematical Physics, 16, 478-483
- [10] Meshalkin L., Sinai Y. G., *Investigation of the stability of a stationary solution of a system of equations for the plane movement of an incompressible viscous fluid*, 1961, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 25, 1700-1705
- [11] Drazin P. G., Reid V. D., *Hydrodynamic Stability*, 1981, Cambridge University Press
- [12] Jeffreyss H., *Some case of instability in fluid motion*, 1928, Proceedings of the Royal Society of London A, 118, 299-329
- [13] Fjortoft R., *Application of integral theorems in deriving criteria of stability of laminar flow and for the baroclinic circular vortex*, 1950, Geofysike Publikasjoner Oslo, 17(6), 1-52
- [14] Pellew A., Southwell R. V., *On Maintained Convective Motion in a Fluid Heated from below*, 1940, Proceedings of the Royal Society of London A, 76, 312-343
- [15] Landau L. D., Lifshitz E. M., *Fluid Mechanics: Volume 6 of Course of Theoretical Physics*, 2nd edn Revised, 2000, Butterworth Heinemann

- [16] Roberts S. A., Kumar S., *Stability of creeping Couette flow of a power-law fluid past a deformable solid* 2006, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 139, 93–102
- [17] Bender C. M., Orszag S. A., *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*, 1978, Mc-Graw Hill Inc.
- [18] Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolau G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, 1978, North-Holland Publishing Company.
- [19] Dubrulle B., Frisch U., *Eddy viscosity of parity-invariant flow*, 1991, Physical Review A 43, 5355–5364
- [20] Nayfeh A. H., *Perturbation Methods*, 1973, John Wiley and Sons, Inc.
- [21] Cole J. D., *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, 1968, Ginn and Company.
- [22] Van Dyke, M., *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, 1964, Academic Press, Inc.
- [23] Frisch U., *Lecture on turbulence and lattice gas hydrodynamics* in *Lecture Notes, NCAR-GTP Summer School June 1987, 1989*, eds. J. R. Herring, J. C. McWilliams, World Scientific, 219-371
- [24] Karatzas I., Shreve S. , *Brownian motion and Stochastic Calculus*, 1998, Springer.
- [25] Oksendal B., *Stochastic Differential Equations*, 1998, Springer.
- [26] Biferale L., Crisanti A., Vergassola M., Vulpiani A., *Eddy diffusivities in scalar transport*, 1995, Physics of Fluids, 7(11) , 2725-2734
- [27] Moffat H. K., *Transport effects associated with turbulence*, 1983, Reports on Progress in Physics, 46, 621
- [28] Chandrasekhar S., *Stochastic problems in physics and astronomy* 1943, Reviews of Modern Physics, 15, 1
- [29] McLaughlin D. W., Papanicolaou G. C., Pironneau O. R., *Convection of microstructure and related problems*, 1985, SIAM Journal on Applied Mathematics, 45,780
- [30] Majda A., McLaughlin R., *The effect of mean flows on enhanced diffusivity in transport by incompressible periodic velocity fields*, 1993, Studies in Applied Mathematics, 89, 245
- [31] Sivashinsky G. L., Yakhot V., *Negative viscosity effect in large scale flows*, 1984, Physics of Fluids, 28, 1040
- [32] Gama S., Vergassola M., Frisch U., *Negative eddy viscosity in isotropically forced two-dimensional flow: linear and non-linear dynamics*, 1994, Journal of Fluid Mechanics, 260, 95-126
- [33] Vergassola M., Gama S., Frisch U., *Proving the existence of negative isotropic eddy viscosity*, in *NATO-ASI: Solar and Planetary Dynamos*, 1993, eds. M. R. E. Proctor, P. C. Mathews & A. M. Rucklidge, Cambridge University Press, 321-327.

- [34] Boffetta G., Celani A., Mazzino A., Puliafito A., Vergassola M., *The viscoelastic Kolmogorov flow: eddy viscosity and linear stability* 2005, Journal of Fluid Mechanics, 523, 161-170
- [35] Groisman A., Steinberg V., *Elastic vs. inertial instability in a polymer solution flow*, 1998, Europhysics Letters, 43, 165-170
- [36] Groisman A., Steinberg V., *Mechanism of elastic instability in Couette flow of polymer solutions: experiment*, 1998, Physics of Fluids, 10, 2451-2463
- [37] Groisman A., Steinberg V., *Elastic turbulence in a polymer solution flow*, 2000, Nature, 405, 53-55
- [38] Groisman A., Steinberg V., *Elastic turbulence in curvilinear flows of polymer solutions*, 2004, New Journal of Physics, 6, 29-48
- [39] Shaqfeh E. S. G., *Purely elastic instabilities in viscometric flows*, 1996, Annual Review of Fluid Mechanics, 28, 129-185
- [40] Burgess J. M., Bizon C., McCormick W. D., Swift J. B., Swinney H. L., *Instability of the Kolmogorov flow in a soap film*, 1999, Physical Review E, 60(1), 715-721
- [41] Anderson E., Bai Z., Bischof C., Blackford S., Demmel J., Dongarra J. J., Du Croz J. J., Greenbaum A., Hammarling S., McKenney A., Sorensen D., *LAPACK Users' Guide (3rd Edition) SIAM*, 1999, URL: <http://www.netlib.org/lapack/lug>
- [42] Golub G. H., Van Loan C. F., *Matrix Computations (3rd Edition)*, 1996, Johns Hopkins University Press
- [43] Wilkinson J. H., *Kronecker's canonical form and the QZ algorithm*, 1979, Linear Algebra and its Applications, 28, 285-303
- [44] Masmoudi N., *Examples of singular limits in hydrodynamics*, 2006, URL: <http://www.math.nyu.edu/faculty/masmoudi/handbook.pdf>
- [45] J. H. Spurk, N. Aksel., *Fluid mechanics*, , 2nd edn, 2008, Springer
- [46] Xie W.-C., *Dynamic Stability of Structures*, 2008, Cambridge University Press.
- [47] Oldroyd J. G., *On the formulation of rheological equations of state*, 1950, Proceedings of the Royal Society of London A, 200, 523-541.
- [48] Kubo R., Toda M., Hashitsume N., *Statistical mechanics II: Nonequilibrium Statistical Mechanics*, 1978, Springer.
- [49] Reif F., *Fountamentals of Statistical and Thermal Physics*, 1965, Mcgraw Hill, Inc.
- [50] Morante S., Rossi G. C., Testa M., *The stress tensor of a molecular system: An exercise in statistical mechanics*, 2006, Journal of Chemical Physics, 125, 034101
- [51] McQuarrie, A. D., *Statistical Mechanics*, 1976, University Science Books.

- [52] Mewis J., Wagner N. J., *Thixotropy*, 2009, Advances in Colloid and Interface Science, 147-148, 214-227
- [53] Tanner R. I., Walters K., *Rheology: an historical perspective*, 1998, Elsevier.
- [54] Chhabra R. P., Richardson J. F., *Non-Newtonian flow and applied rheology*, 2008, 2nd edn, Butterworth-Heinemann.
- [55] A. S. Lodge, *Elastic liquids*, 1964, Academic Press.
- [56] Stone P. A., Waleffe F., Graham M. D., *Toward a structural understanding of turbulent drag reduction: nonlinear coherent states in viscoelastic shear flow*, 2002, Physical Review Letter, 89, 208301-1-4.
- [57] Hansen C. L., Skordalakes E., Berger J. M., Quake S.R., *A robust and scalable microfluidic metering method that allows protein crystal growth by free interface diffusion*, 2002, Proceedings of the National Academy of Sciences of USA, 99, 16531-1653.