



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

TESI DI LAUREA MAGISTRALE IN FISICA

**Sviluppi Perturbativi a Scale Multiple nei
Problemi di Trasporto a Grande Scala per
Applicazione in Modelli Oceanografici**

Relatori:

Prof. Andrea Mazzino

Dott. Marcello Gatimu Magaldi

Correlatore:

Prof. Renzo Collina

Candidato:

Daniele Lagomarsino Oneto

ANNO ACCADEMICO 2013/2014

Indice

1	Introduzione	1
2	Nozioni di fluidodinamica	5
2.1	L'ipotesi del continuo materiale e la nozione di fluido	5
2.2	Descrizione lagrangiana ed euleriana	6
2.3	La derivata lagrangiana	7
2.4	Equazioni fondamentali	8
2.4.1	Equazione di continuità	9
2.4.2	Equazione del moto	9
2.4.3	Equazione del calore	12
2.4.4	Equazione della salinità	13
2.4.5	Equazioni di stato per l'acqua marina	13
3	Processi di Trasporto	15
3.1	La diffusione	15
3.1.1	I processi diffusivi	15
3.1.2	L'equazione di diffusione	15
3.1.3	Proprietà dei processi diffusivi	16
3.1.4	Soluzioni caratteristiche dell'equazione di diffusione	17
3.2	La turbolenza	17
3.2.1	Il numero di Reynolds	18
3.2.2	I processi stocastici	19
3.2.3	Correlazioni	20
3.2.4	Le equazioni fondamentali mediate	22
3.3	I modelli di avvezione-diffusione	25
3.3.1	L'approccio euleriano	26
3.3.2	L'approccio lagrangiano	27
3.3.3	I modelli a particelle	27
4	Metodi Perturbativi a Scale Multiple	29
4.1	Introduzione	29
4.1.1	Termini secolari	29
4.1.2	Il fallimento della teoria perturbativa standard	30
4.2	Multiscala per Equazioni Differenziali Ordinarie	33
4.2.1	Equazione di Duffing	34

4.2.2	Un ciclo limite	36
4.2.3	Approssimazione WKB	38
4.3	Multiscala per equazioni differenziali alle derivate parziali	41
4.3.1	Posizione del problema e condizione di risolubilità	41
4.3.2	Equazione del calore	44
4.4	Applicazione ai problemi di trasporto di un campo scalare passivo	47
4.4.1	Soluzioni asintotiche al problema del trasporto scalare	48
4.4.2	Multi-scala per il trasporto scalare preasintotico	52
4.4.3	Un'espressione esplicita approssimata per il calcolo del campo di Eddy Diffusivity	54
5	Il Modello Oceanografico	61
5.1	Formulazione del Modello ROMS	61
5.1.1	Generalità sui Modelli Oceanografici	61
5.1.2	Le equazioni del moto	62
5.1.3	Condizioni al contorno	64
5.1.4	Coordinate verticali	65
5.1.5	Risoluzione numerica delle equazioni	69
5.2	Configurazione del modello	71
6	Applicazione al modello oceanografico	77
6.1	Introduzione	77
6.2	Una tecnica per il calcolo del campo di Eddy Diffusivity	77
6.3	Mappe di diffusività	79
6.4	Conclusioni e sviluppi futuri	81
	Bibliografia	85
	Ringraziamenti	87

Capitolo 1

Introduzione

Il significato assunto in contesto scientifico dal termine *dispersione* ha una connotazione molto generale. Esso viene usato in riferimento ai processi naturali che riguardano l'evoluzione della distribuzione di una sostanza nello spazio e nel tempo. La fenomenologia a riguardo è piuttosto ampia e la comprensione di tali fenomeni costituisce, ancora oggi, l'oggetto di numerosi studi nei settori più disparati delle scienze e dell'ingegneria. Di pari passo con l'aumento di potenza dei calcolatori, l'utilizzo di modelli matematici numerici nello studio dei fenomeni di dispersione ha riscosso un successo sempre maggiore.

Nel contesto delle scienze ambientali questi strumenti hanno da un lato costi sensibilmente inferiori rispetto alle campagne osservative, e dall'altro forniscono informazioni più complete sui processi in studio. Rimane in ogni caso fondamentale il ruolo dei dati sperimentali, anche per la calibrazione e validazione dei modelli stessi.

Tra le possibili applicazioni in ambiente marino dei modelli numerici di dispersione rientrano, ad esempio, lo studio della propagazione di inquinanti (materiali plastici in superficie, idrocarburi, ...), la distribuzione di sostanze nutritive (organismi planctonici), il movimento di corpi (ad es. uomini o imbarcazioni, utile per le operazioni SAR: Search And Rescue).

Per questi motivi l'utilizzo di modelli numerici in processi ambientali rappresenta uno strumento importante non solo per la ricerca scientifica ma anche per la gestione ordinaria e straordinaria del territorio da parte delle autorità competenti.

In questa tesi l'attenzione è rivolta verso processi in cui la dispersione è dovuta a due contributi fondamentali: la diffusione molecolare (flusso di materia per la presenza di gradienti nella concentrazione della sostanza) e il trasporto advettivo dovuto al campo di velocità del fluido nel quale il materiale è immerso. L'equazione matematica che ne risulta è la seguente:

$$\partial_t \theta(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \theta(\mathbf{x}, t) = D_0 \nabla^2 \theta(\mathbf{x}, t) \quad (1.1)$$

dove $\theta(\mathbf{x}, t)$ è il campo scalare di concentrazione della sostanza, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ è il campo di velocità (incompressibile) del fluido in cui la sostanza è immersa e D_0 è il coefficiente di diffusione molecolare. Il secondo termine a primo membro rappresenta appunto la parte advettiva del trasporto mentre il termine a secondo membro descrive il contributo diffusivo.

L'integrazione numerica della (1.1) prevede la conoscenza completa dei suoi coefficienti



Figura 1.1 – Sversamento di petrolio in mare a seguito del disastro della piattaforma petrolifera Deepwater Horizon (Golfo del Messico), iniziato il 20 aprile 2010 e terminato dopo 106 giorni con più di 3 milioni di barili (più di 500 milioni di litri) di greggio sversati. E' considerato l'incidente ambientale in mare più grave della storia.

e campi esterni, tra cui il campo di velocità avveffivo. Questa naturale necessità costituisce un problema in applicazioni di tipo ambientale, dove i campi di velocità forniti dai modelli oceanografici o atmosferici hanno risoluzioni molto basse in relazione alle scale su cui avviene la diffusione molecolare.

D'altra parte, nel caso di studi ambientali, l'interesse è rivolto alla comprensione dei fenomeni su scala grande, tipicamente di ordine di grandezza maggiore o uguale della scala minima su cui si ha conoscenza del campo avveffivo.

La linearità dell'equazione potrebbe quindi indurre il tentativo di studiare l'evoluzione dei modi di Fourier a basse frequenze separatamente, ottenendo l'informazione cercata. Tuttavia, se si considera l'equazione corrispondente alla (1.1) nello spazio delle frequenze, il prodotto scalare che compare nel termine avveffivo viene convertito in un prodotto di convoluzione (integrale su tutte le frequenze) tra le trasformate dei campi di concentrazione e velocità. Non è possibile quindi disaccoppiare la dinamica della grande scala dalle altre, in particolare non è possibile ignorare l'interazione tra il campo di concentrazione a grande scala e la parte non risolta dai modelli ambientali del campo di velocità avveffivo.

Questa difficoltà viene solitamente superata introducendo dei nuovi coefficienti di diffusione efficaci rinormalizzati: *Eddy Diffusivities* D^E , nell'equazione per i campi a grande scala.

Un altro aspetto importante nell'applicazione a flussi ambientali è l'inevitabile natura turbolenta del problema. E' noto infatti che, ad esempio in processi oceanici, per la maggior parte dei flussi si hanno numeri di Reynolds molto elevati ¹ e ciò da luogo inevitabilmente a fenomeni turbolenti che richiedono, quindi, una trattazione di tipo statistico. E' un fatto noto che la diffusività turbolenta, la cui teoria fonda le sue radici

¹Considerando una viscosità dell'acqua salata $\nu \sim 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, una velocità tipica $U \sim 10^{-1} \text{ m/s}$ e una lunghezza tipica di 10^5 m , otteniamo un numero di Reynolds $Re = \frac{UL}{\nu} \sim 10^{10}$! che risulta elevatissimo.

nei lavori di G.I. Taylor (1921), sia notevolmente maggiore rispetto alla pura diffusività molecolare. Pertanto il suo contributo non può essere trascurato per l'effetto che ha sull'evoluzione del campo di concentrazione a grande scala.

La determinazione delle grandezze efficaci è ottenuta tipicamente con metodi empirici o semi-empirici. Possiamo ad esempio immaginare di stimare il coefficiente di diffusione con considerazioni di natura puramente dimensionale come $D^E = \alpha LU$ dove L e U sono lunghezza e velocità tipiche del flusso studiato e α è un parametro adimensionale determinabile sperimentalmente da una situazione all'altra. Se invece siamo interessati ad una valutazione più fine, possiamo ipotizzare che la diffusività rinormalizzata sia una funzione del valore locale del tensore velocità di deformazione \mathcal{D} e di alcuni coefficienti di nuovo determinabili sperimentalmente (la tecnica più semplice che si basa su considerazioni di questo tipo è la chiusura di Smagorinsky, per cui $D^E \propto \sqrt{2\mathcal{D} : \mathcal{D}}$). La grandezza rinormalizzata ottenuta è in questo caso un campo, ma la sua determinazione resta comunque di natura semi-empirica.

Vale la pena sottolineare che, un utilizzo grossolano dell'intuizione potrebbe suggerire che la parte di trasporto avvevativo a grande scala sia sostanzialmente dominata dalla parte nota (risolta dal modello di corrente) del campo avvevativo, mentre la rinormalizzazione del coefficiente di diffusione sia dovuta al solo moto turbolento delle scale non risolte. Ciò si rivela essere errato.

L'utilizzo di sviluppi perturbativi rinormalizzati (tecnica delle scale-multiple) permette di estrapolare l'evoluzione a grande scala (limite infrarosso) del campo di concentrazione e le corrispondenti grandezze efficaci esclusivamente a partire da principi primi, senza ricorrere a metodi totalmente o parzialmente empirici.

Il principale risultato, ottenuto con queste tecniche, è contenuto nella seguente equazione:

$$\partial_t \Theta(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot [\mathbf{U}^E(\mathbf{x}, t) \Theta(\mathbf{x}, t)] = \partial_i \partial_j [D_{ij}^E(\mathbf{x}, t) \Theta(\mathbf{x}, t)] \quad (1.2)$$

dove $\Theta(\mathbf{x}, t)$ rappresenta la componente lentamente variabile del campo di concentrazione (alla quale siamo interessati), $D_{ij}^E(\mathbf{x}, t)$ è un campo tensoriale di Eddy Diffusivities che dipende sia dalle scale non risolte turbolente del campo di velocità che dalla componente a grande scala dello stesso e $\mathbf{U}^E(\mathbf{x}, t)$ un campo di velocità avvevativo efficace, diverso dal campo originario $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ e compressibile, per via della correzione introdotta dall'effetto delle piccole scale.

In sintesi, contrariamente a quanto potrebbe risultare intuitivo, le piccole scale influenzano il trasporto avvevativo delle grandi e queste ultime rientrano nella determinazione dei coefficienti di diffusione turbolenta. Gran parte del lavoro è stato inoltre dedicato alla messa a punto di un modello oceanografico per la simulazione del campo di corrente nella zona del Mar Mediterraneo centro-occidentale con particolare attenzione verso lo studio delle correnti superficiali nell'area del Mar Ligure.

Per questa seconda parte di modellistica oceanografica è stato utilizzato il modello open-source ROMS (Regional Ocean Modeling System), largamente utilizzato dalla comunità oceanografica internazionale. Si tratta di un modello tridimensionale a superficie libera, con coordinate verticali di tipo terrain-following (coordinate sigma), che integra le equazioni di Navier-Stokes mediate alla Reynolds. Il codice di ROMS è scritto in linguaggio FORTRAN mentre le opzioni di configurazione necessitano l'utilizzo del C++. La produzione di tutti i file di input (file di griglia, forzanti, condizioni iniziali e al contorno) e l'analisi degli output del modello, sono state da me effettuate utilizzando il linguaggio interpretato Python.

Il contenuto originale di questo lavoro di tesi sta nell'utilizzo dei risultati teorici, otte-

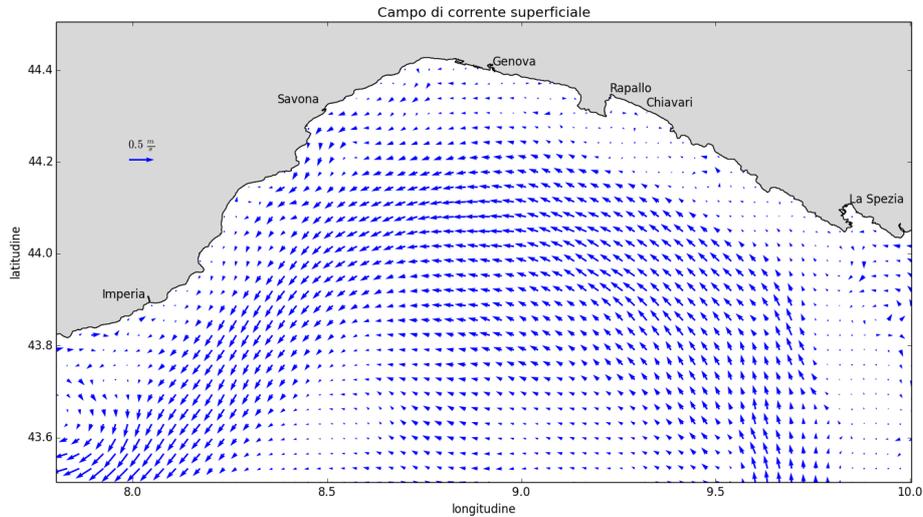


Figura 1.2 – Esempio di campo di corrente superficiale, nella zona del Mar Ligure, simulato dal modello messo a punto nella tesi.

nuti applicando la tecnica delle scale multiple, per la determinazione dei campi efficaci $D_{ij}^E(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{U}^E(\mathbf{x}, t)$ nel caso di un ipotetico fenomeno di dispersione nel campo di corrente superficiale realistico, simulato da ROMS nella zona del Mar Ligure. Questo rappresenta un primo passo verso la realizzazione di un modello numerico di dispersione che, contemporaneamente alla simulazione dei campi di corrente, integri direttamente l'equazione (1.2) utilizzando i campi rinormalizzati ottenuti.

Parallelamente, nella sezione 4.4.3, ho ricavato delle formule approssimate esplicite per il calcolo delle componenti del campo tensoriale D^E valide in un regime diverso da quello di applicabilità ai fenomeni di dispersione ambientale.

Pertanto, nel suo complesso, questo lavoro può essere identificato come una tesi di fisica teorica su una teoria di campo classica, con una forte connotazione applicativa in ambito ambientale.

I capitoli 2 e 3 riportano brevemente le principali nozioni su fluidodinamica e fenomeni di trasporto utili nel resto della trattazione. Il capitolo 4 introduce alla teoria perturbativa multi-scala con esempi e mostra in dettaglio le applicazioni ai fenomeni di trasporto scalare passivo, comprendendo anche gli sviluppi innovativi presentati sopra. Il capitolo 5 contiene le informazioni sul modello oceanografico messo a punto e su i dettagli della configurazione utilizzata. Il capitolo 6 mostra l'applicazione dei risultati teorici esposti nel capitolo 4 al campo di corrente simulato dal modello di corrente descritto nel capitolo 5.

Capitolo 2

Nozioni di fluidodinamica

Nel seguente capitolo verranno presentate le nozioni della fluidodinamica che sono alla base dei processi di dispersione e degli sviluppi teorici successivi. Tra i vari testi di approfondimento: [1] e [2] .

2.1 L' ipotesi del continuo materiale e la nozione di fluido

Secondo la definizione classica, basata su considerazioni qualitative macroscopiche, un fluido è uno stato di aggregazione della materia tale che lo spazio da esso occupato dipende dal recipiente che lo contiene. Un liquido, in particolare, è caratterizzato da un volume ma non da una forma propria, mentre un gas non ha neppure un volume proprio e assume quello del recipiente che lo contiene.

Tradotto in termini di teoria molecolare della materia, la classificazione può essere espressa nel modo seguente: in un corpo solido le molecole sono normalmente libere di compiere piccoli moti oscillatori attorno a posizioni di equilibrio fisse le une rispetto alle altre, restando pertanto mediamente ferme, mentre sono in grado di avere dei movimenti relativi in un fluido. In quest'ultimo caso, molecole adiacenti possono ancora avere posizioni correlate (stato liquido), oppure possono avere completa libertà di movimento (gas).

La rappresentazione della materia a livello fondamentale, consolidata ormai da anni, ci fornisce una visione sostanzialmente discreta della stessa. Tuttavia, nello studio della fluidodinamica, siamo generalmente interessati a comprendere il comportamento complessivo del fluido, ovvero il moto medio di tutte le singole molecole. In fluidodinamica quindi, si trascura il dettaglio microscopico del moto e la materia viene rappresentata come un *continuo materiale*: l'oggetto viene assimilato ad una regione continua R dello spazio fisico, definita da una superficie chiusa δR di forma e posizione eventualmente variabili nel tempo.

Questa schematizzazione rende possibile la descrizione delle grandezze relative al sistema per mezzo di campi e l'utilizzo di tutti gli strumenti del calcolo e dell'analisi. Tuttavia l'approssimazione del continuo materiale rimane valida fintanto che la distanza media tra le molecole risulta trascurabile rispetto alla scala spaziale su cui osserviamo il fenomeno. Infatti, se si operasse a scale di dimensioni paragonabili con quelle delle distanze medie molecolari, la discontinuità della materia diventerebbe visibile e quindi lo schema del continuo risulterebbe inadeguato. Fortunatamente, le più piccole scale

spaziali dei moti di interesse oceanografico ed atmosferico sono sempre estremamente grandi rispetto alle scale molecolari. Nel nostro studio, le scale utilizzate risulteranno essere abbondantemente superiori alla distanza media tra le molecole ma, contemporaneamente, abbastanza piccole da considerare i campi associati al sistema come funzioni continue.

Compatibilmente con i limiti di validità della descrizione del mezzo come un continuo, ogni particella di fluido è indefinitamente suddivisibile in particelle sempre più piccole fino a quando le grandezze che caratterizzano il fluido possono essere considerate costanti.

Alla luce di questa schematizzazione geometrica del sistema è possibile riformulare la definizione di fluido in termini della legge costitutiva che relaziona il comportamento meccanico del sistema e lo sforzo applicato ad esso.

Risulta così che un corpo rigido è un sistema materiale continuo rigorosamente indeformabile indipendentemente dallo sforzo applicato ad esso (le posizioni relative di tutti i punti del sistema non cambiano mai). Un corpo per cui questo non accade è un corpo deformabile. In particolare, i diversi comportamenti di un corpo deformabile possono essere schematizzati dalle relazioni che collegano, in condizioni statiche, uno sforzo di taglio applicato alla superficie del corpo con la sua conseguente deformazione. Seguendo questo criterio, un fluido è descritto come un corpo deformabile per il quale vale la seguente relazione:

$$\frac{dh}{dt} = g(S(t))$$

dove h è la deformazione del corpo corrispondente allo sforzo di taglio S . La derivata rispetto al tempo della funzione $h(t)$ rappresenta la velocità di deformazione. In un fluido nessuna deformazione è in grado di controbilanciare uno sforzo di taglio persistente: esso, per quanto possa essere piccolo, produce una deformazione infinita.

2.2 Descrizione lagrangiana ed euleriana

Posto quindi di assimilare il fluido ad una regione continua e deformabile dello spazio fisico, il problema della determinazione del moto del sistema può essere affrontato utilizzando due rappresentazioni alternative: quella *lagrangiana* e quella *euleriana*.

Nella rappresentazione **lagrangiana** il flusso è determinato una volta nota la legge oraria di ogni punto della regione occupata dal fluido, identificato dalla sua posizione iniziale \mathbf{r}_0 . Questo implica la conoscenza delle equazioni

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

nelle quali x_0, y_0, z_0 individuano la posizione della particella all'istante iniziale. Cambiare i valori di x_0, y_0, z_0 significa passare da una particella all'altra. In forma vettoriale, possiamo scrivere

$$\{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) \quad \text{con} \quad \mathbf{r}_0 \in R_0, t \geq 0\}$$

dove $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ è la posizione nel tempo assunta dalla particella individuata dalla sua posizione iniziale $\mathbf{r}_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ e R_0 è la regione inizialmente occupata dal fluido. La

velocità e l'accelerazione delle particelle saranno quindi descritte come

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{d[\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)]}{dt}$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{d^2[\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)]}{dt^2}$$

Lo schema lagrangiano consiste quindi nel fissare un sistema di riferimento inerziale con il moto e nel descrivere il movimento delle singole particelle di fluido in questo sistema di riferimento. Pertanto, in questa rappresentazione, tutte le grandezze relative al flusso sono espresse utilizzando x_0, y_0, z_0, t come variabili indipendenti e il calcolo della posizione \mathbf{r} assunta nel tempo da una particella fluida avviene attraverso la risoluzione di equazioni differenziali date dalle leggi della dinamica.

Tuttavia la descrizione matematica di questo tipo di approccio non risulta affatto semplice. Le particelle di fluido interagiscono tra loro durante il moto e tenere in considerazione questa interazione complica il problema matematico da risolvere.

Nella rappresentazione **euleriana** il flusso del fluido viene descritto attraverso l'utilizzo di campi (scalari, vettoriali o tensoriali) funzioni del tempo e della posizione nello spazio fisico. Questa descrizione non presenta le difficoltà matematiche illustrate per la descrizione lagrangiana ed è direttamente legata alle osservazioni sperimentali, in cui i valori delle grandezze relative al flusso sono misurate in punti fissi dello spazio e al variare del tempo. La dinamica è quindi nota una volta note le funzioni

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}(x, y, z, t) && \text{velocità} \\ T &= T(x, y, z, t) && \text{temperatura} \\ S &= S(x, y, z, t) && \text{salinità} \\ \rho &= \rho(x, y, z, t) && \text{densità} \end{aligned}$$

dove x, y, z identificano la posizione del punto di osservazione e t è l'istante in cui viene effettuata la misura.

I campi non descrivono le caratteristiche di una fissata particella, ma quelle di particelle diverse che transitano nel luogo di osservazione in tempi successivi, quindi, in questo caso sono x, y, z, t a giocare il ruolo di variabili indipendenti. A differenza della descrizione lagrangiana, dove la velocità e l'accelerazione sono riferite ad una particella con una precisa identità, nella descrizione euleriana la derivata parziale $\partial/\partial(t)$ fornisce informazioni sulla variazione locale nel punto di posizione (x, y, z) .

2.3 La derivata lagrangiana

I due differenti approcci di descrizione del flusso, lagrangiano ed euleriano, possono essere tra loro correlati.

Consideriamo una generica proprietà del fluido F (sia essa scalare o vettoriale) valutata in entrambe le descrizioni. Poniamoci quindi nella situazione in cui $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ e $t = t'$, ossia siamo nello stesso punto ed allo stesso istante temporale per entrambe le descrizioni. La relazione tra le due rappresentazioni è contenuta nel fatto che: all'istante t , il valore della grandezza F misurato nella posizione \mathbf{r}' in rappresentazione euleriana,

deve coincidere con il valore di F visto dalla particella che si trova in quella stessa posizione al medesimo istante. Matematicamente:

$$F(\mathbf{r}, t) = F[\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t), t] = F(\mathbf{r}', t')$$

Derivando rispetto al tempo e considerando la derivazione di funzioni composte, otteniamo

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \quad (2.1)$$

dove $\mathbf{u} = (u, v, w)$.

L'equazione (2.1) può essere riscritta in maniera più sintetica utilizzando l'operatore

$$\boldsymbol{\partial} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Si ottiene quindi

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\partial} F$$

Il primo termine dell'equazione, dF/dt , prende il nome di *derivata lagrangiana o particellare* ed indica la variazione temporale della quantità F lungo il flusso. Alla derivata lagrangiana contribuiscono due termini: il primo è la derivata *parziale* $\partial F/\partial t$, che rappresenta la variazione di F nel tempo in un punto fisso dello spazio; il secondo, $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\partial} F$, viene chiamato termine *avvevivo* e descrive la variazione di F dovuta allo spostamento della particella in zone con differenti valori di F .

Le descrizioni lagrangiana ed euleriana vengono quindi correlate attraverso l'*operatore di derivata lagrangiana*

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\partial} \quad (2.2)$$

2.4 Equazioni fondamentali

Lo studio dei flussi oceanografici utilizza le seguenti equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d\rho}{dt} + \rho \boldsymbol{\partial} \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{eq. continuità} \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\partial} p + \nu \partial^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{R} & \text{eq. moto} \\ \frac{dT}{dt} = \kappa_T \boldsymbol{\partial}^2 T + \frac{Q_C}{\rho c_V} & \text{eq. calore} \\ \frac{dS}{dt} = \kappa_S \boldsymbol{\partial}^2 S + \frac{Q_S}{\rho} & \text{eq. salinità} \\ \rho = \rho(p, T, S) & \text{eq. stato} \end{array} \right.$$

dove vale la (2.2). Esaminiamo il significato fisico delle singole equazioni.

2.4.1 Equazione di continuità

La legge di conservazione della massa stabilisce che, in un certo intervallo di tempo, in assenza di sorgenti o pozzi interni, l'aumento di massa in una certa porzione di spazio deve essere pari a quella che, nello stesso tempo, è entrata attraverso la frontiera.

Il tasso di incremento della massa in entrata viene espresso, applicando il teorema di Reynolds nel caso di un volume fisso, come

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

dove ρ e dV sono rispettivamente la densità ed un volume infinitesimo del fluido. Il flusso di massa in uscita viene descritto dall'integrale di superficie

$$\int_A \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A}$$

il cui integrando rappresenta il flusso in uscita attraverso un elemento infinitesimo di superficie $d\mathbf{A}$.

Applicando il teorema della divergenza, si ottiene

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\partial} \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0$$

da cui si ricava, in virtù dell'arbitrarietà del volume V , l'*equazione di continuità*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\partial} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.3)$$

la quale può essere scritta in altre forme qualora si sviluppi l'operazione di divergenza, ottenendo così

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\partial} \rho + \rho \boldsymbol{\partial} \cdot \mathbf{u} = 0$$

o ancora

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \boldsymbol{\partial} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.4)$$

Infine, introducendo l'approssimazione di flusso *incompressibile* secondo cui la densità di ogni particella fluida rimane costante durante il moto, si ha che la derivata lagrangiana a primo membro della (2.4) si annulla e l'equazione di continuità assume la forma:

$$\boldsymbol{\partial} \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.5)$$

2.4.2 Equazione del moto

Il moto di un fluido in un sistema di riferimento inerziale è tipicamente descritto dall'*equazione di Navier-Stokes*

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\partial} p + \nu \partial^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (2.6)$$

dove $\mathbf{u} = (u, v, w)$ è la velocità del fluido. Un fluido per cui vale la (2.6) viene detto *newtoniano*. L'equazione tiene conto dei seguenti fenomeni:

- gradiente di pressione $\boldsymbol{\partial} p$;

- attrito viscoso $\nu \partial^2 \mathbf{u}$;
- accelerazione di gravità \mathbf{g} .

Il coefficiente di viscosità cinematica del fluido $\nu = \mu/\rho$ (con μ coefficiente di viscosità dinamica) esprime la tendenza di un fluido alla diffusione molecolare. Il termine di attrito viscoso $\nu \partial^2 \mathbf{u}$ descrive la deformazione a cui possono essere sottoposte le particelle di fluido quando le particelle adiacenti si muovono con velocità differenti: particelle ferme, o che si muovono tutte alla stessa velocità, non esercitano alcuna forza di taglio fra loro; invece, particelle adiacenti che si muovono con velocità diverse nella direzione del moto eserciteranno delle forze di trascinamento l'una rispetto all'altra. Da un punto di vista molecolare, la viscosità dipende dal fatto che le singole molecole sono animate da un moto caotico che si sovrappone al moto d'insieme lungo la direzione media della particella cui appartengono; questo fa sì che particelle più veloci possano spostarsi in strati più lenti e viceversa.

Inoltre l'equazione (2.6) è ricavata assumendo l'ipotesi di incompressibilità del flusso. L'equazione di Navier-Stokes deriva dall'unione dell'equazione di Cauchy con la relazione costitutiva che definisce il tensore degli sforzi τ_{ij} per un fluido newtoniano. L'equazione di Cauchy

$$\rho \frac{du_i}{dt} = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

rappresenta il secondo principio della dinamica per un fluido e viene ottenuta tenendo in considerazione le forze sia di volume (delle quali generalmente si considera solo la forza gravitazionale) sia di superficie che agiscono sul fluido; quest'ultime sono descritte attraverso il tensore degli sforzi τ_{ij} .

Ogni fluido viene descritto in maniera diversa specificando τ_{ij} , ossia descrivendo uno specifico *legame costitutivo*. La relazione tra uno sforzo di superficie e la deformazione di un fluido dipende dallo stato del fluido. In un fluido a riposo è presente solo la componente normale dello sforzo e i suoi effetti non dipendono dall'orientamento della superficie; invece, in un fluido in movimento si esercitano anche delle forze tangenziali e occorre quindi introdurre anche la componente dello sforzo dovuta alla viscosità. La più comune definizione di τ_{ij} è la seguente:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad (2.7)$$

Il termine $-p\delta_{ij}$ rappresenta la componente normale isotropica dello sforzo (dove δ_{ij} è il delta di Kronecker). σ_{ij} rappresenta invece la componente tangenziale non-isotropica dello sforzo, ed è proporzionale al *tensore di deformazione* e_{ij} (talvolta indicato anche con \mathcal{D} , che coincide con la parte simmetrica del tensore gradiente di velocità)

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

in cui i termini diagonali descrivono la deformazione lineare di una particella fluida mentre i termini non-diagonali sono proporzionali alla deformazione angolare dovuta a sforzi tangenziali.

Il primo indice di τ_{ij} si riferisce alla direzione normale alla superficie rispetto alla quale lo sforzo è calcolato, il secondo alla direzione della componente della forza.

Dall'esistenza di τ_{ij} dipendono effetti quali la diffusione di quantità di moto e la dissipazione energetica. Tutto ciò viene solitamente attribuito, da un punto di vista macroscopico, ad una maggiore o minore viscosità del fluido. Ecco perché τ_{ij} è chiamato tensore degli sforzi viscosi ed il suo effetto è descritto nell'equazione di Navier-Stokes dal termine di attrito viscoso. Infatti, la proporzionalità fra la componente σ_{ij} ed il tensore di deformazione e_{ij} è espressa dalla relazione

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij}$$

in cui compare il coefficiente di viscosità dinamica μ . Questa relazione può anche essere descritta in forma matriciale:

$$\sigma_{ij} = \mu \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & 2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & 2\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Sistema di riferimento non inerziale

Talvolta può risultare adeguato l'utilizzo di formulazioni delle equazioni di Navier-Stokes diverse dalla (2.6). In particolare, nello studio dei flussi geofisici, è necessario utilizzare una forma che tenga conto del fatto che il sistema di riferimento terrestre non è inerziale. Questo implica la necessità di considerare anche la presenza delle forze apparenti dovute al movimento di rotazione terrestre: forza di Coriolis e forza centrifuga. Per il passaggio ad un sistema di riferimento non-inerziale, occorre descrivere la relazione fra un sistema fisso ed uno rotante: la variazione di un generico vettore \mathbf{P} nel sistema rotante viene vista da quello fisso come la somma della variazione delle componenti di \mathbf{P} e dei suoi versori, secondo la formula

$$\left(\frac{d\mathbf{P}}{dt}\right)_F = \left(\frac{d\mathbf{P}}{dt}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P}$$

dove i pedici F e R indicano rispettivamente il sistema fisso e rotante. $\boldsymbol{\Omega}$ è la velocità angolare. Il primo elemento del secondo termine rappresenta la variazione delle componenti del vettore, il secondo elemento la variazione dei versori. Questa relazione viene utilizzata per descrivere come vengono trasformati il vettore posizione \mathbf{r}_F ed i vettori velocità e accelerazione \mathbf{u}_F e \mathbf{a}_F nel passaggio al nuovo sistema di riferimento. In particolare, l'accelerazione \mathbf{a}_F diventa

$$\mathbf{a}_F = \mathbf{a}_R + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R - \Omega^2 \mathbf{R} \quad (2.9)$$

dove \mathbf{a}_F e \mathbf{a}_R sono rispettivamente l'accelerazione nel sistema fisso e rotante, \mathbf{u}_R è la velocità nel sistema rotante e \mathbf{R} è il vettore perpendicolare all'asse di rotazione (figura 2.1). Nella (2.9) compaiono due nuovi elementi, l'accelerazione di Coriolis $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R$ e l'accelerazione centrifuga $\Omega^2 \mathbf{R}$. La sostituzione di (2.9) nell'equazione di Navier-Stokes (2.6), porta al raggiungimento della nuova forma:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nabla} p + \nu \partial^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \Omega^2 \mathbf{R} \quad (2.10)$$

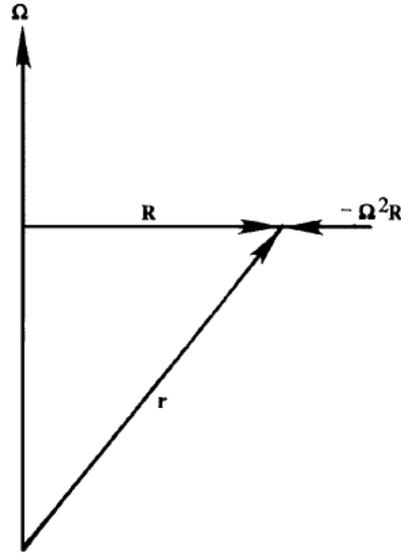


Figura 2.1 – Accelerazione centripeta $-\Omega^2\mathbf{R}$, ovvero accelerazione centrifuga $\Omega^2\mathbf{R}$.

Quali sono gli effetti delle forze apparenti?

La forza centrifuga deve essere aggiunta alla forza gravitazionale \mathbf{g} , definendo la forza di gravità effettiva $\mathbf{g}^* = \mathbf{g} + \Omega^2\mathbf{R}$. L'effetto della forza centrifuga si ripercuote quindi sia sulla direzione sia sull'intensità della forza di gravità. Infatti, mentre \mathbf{g} è diretta lungo la verticale rispetto ad un ellissoide perfetto, \mathbf{g}^* è ortogonale alla superficie del geoide terrestre. Inoltre, l'intensità della forza centrifuga è variabile fra l'equatore e i poli: massima nel primo caso, nulla nel secondo. La forza gravitazionale \mathbf{g}^* può essere sostituita nell'equazione dal *potenziale gravitazionale* Φ (o *geopotenziale*), ricordando che le forze di volume conservative possono essere espresse come il gradiente di una funzione potenziale; nel caso della forza di gravità, vale quindi la relazione

$$\mathbf{g}^* = -\partial\Phi$$

Nell'emisfero boreale (australe), il termine $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$, detto accelerazione di Coriolis, tende a deviare un corpo in moto verso destra (sinistra) rispetto alla direzione di movimento. Esso si annulla quando si è in quiete ($\mathbf{u} = 0$) oppure quando la direzione del moto coincide con $\boldsymbol{\Omega}$.

2.4.3 Equazione del calore

L'equazione della temperatura nella forma

$$\frac{dT}{dt} = \kappa_T \partial^2 T + \frac{Q_C}{\rho c_v} \quad (2.11)$$

viene ottenuta dall'equazione del primo principio della termodinamica nel caso di una trasformazione a volume costante. Inoltre si trascurano le possibili variazioni del calore specifico a volume costante (c_v) e si assume che la variazione di energia interna di una particella sia dovuta:

- al riscaldamento diretto dall'esterno Q ;

- al flusso di calore \mathbf{J}_c proveniente dalle particelle circostanti e proporzionale al gradiente della temperatura secondo la costante di proporzionalità $-k_T$.

$$\mathbf{J}_c = -k_T \partial T$$

La costante $\kappa_T = \frac{k_T}{\rho c_V}$ viene detta *coefficiente di diffusione termica molecolare*.

2.4.4 Equazione della salinità

La definizione di salinità (S) utilizzata in ambito oceanografico ha subito variazioni nel corso del tempo, infatti è una definizione sperimentale e pertanto si può modificare con l'introduzione di nuove tecniche di analisi, che permettono di ottenere risultati con una precisione sempre maggiore. Fino alla fine degli anni '70, la salinità veniva definita misurando il rapporto fra i grammi di sali contenuti in una certa quantità d'acqua e la massa d'acqua che li contiene; si otteneva quindi un valore di salinità senza unità di misura ma espresso come parti per mille (‰). Dal 1978 è stato introdotto un nuovo sistema di misura, denominato *salinità pratica*, basato su un rapporto di conducibilità fra il campione di acqua di mare ed una soluzione a conducibilità nota (es. KCl oppure acqua di mare standardizzata). In questo caso il valore risultante è adimensionale e di solito viene indicata con la sigla *PSU*, *Practical Salinity Unit*.

La variazione di S nel tempo è misurata attraverso una relazione analoga a quella del calore:

$$\frac{dS}{dt} = \kappa_S \partial^2 S + \frac{Q_S}{\rho} \quad (2.12)$$

dove Q_S rappresenta l'eventuale sorgente di salinità e $\kappa_S = \frac{k_S}{\rho}$ è il *coefficiente di diffusività salina molecolare*.

2.4.5 Equazioni di stato per l'acqua marina

Nell'equazione di stato la densità ρ , o equivalentemente il suo reciproco, il volume specifico α , dipende dalla pressione, dalla temperatura e dalla salinità:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(p, T, S) \\ \alpha &= \alpha(p, T, S) \end{aligned} \quad (2.13)$$

L'equazione di stato per l'acqua marina è molto complessa e solitamente l'andamento della densità viene ricavato da grafici come quello in figura 2.2, che mostra l'andamento della densità delle acque di superficie, ovvero a pressione atmosferica. Il diagramma temperatura-salinità ($T-S$) restituisce i valori della densità dell'acqua in funzione di questi due parametri. Differenziando la (2.13), si ottiene

$$d\alpha = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_{pS} dT + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p} \right)_{TS} dp + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial S} \right)_{pT} dS = a_T \alpha dT - a_p \alpha dp - a_S \alpha dS$$

dove i coefficienti

$$a_T = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_{pS}, \quad a_p = -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p} \right)_{TS}, \quad a_S = -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial S} \right)_{Tp}$$

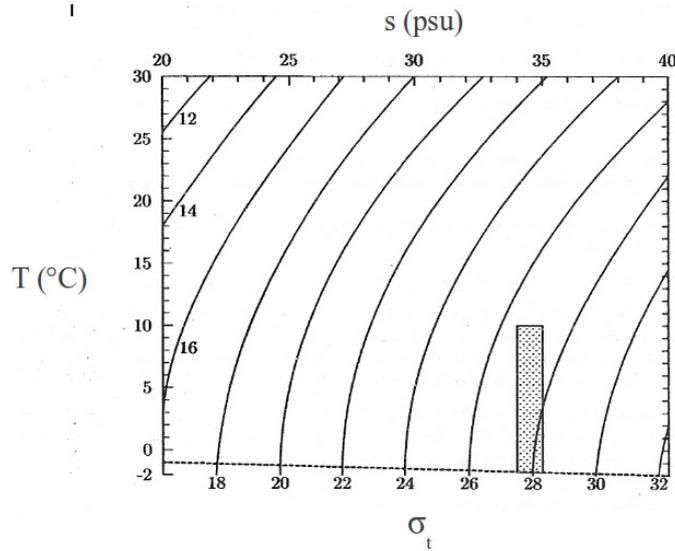


Figura 2.2 – Valori della densità, espressi in σ , in funzione della temperatura $T(^{\circ}C)$ e della salinità $S(PSU)$ alla pressione atmosferica. Il 90% dell'acqua marina ha valori compresi nella regione rettangolare punteggiata. La linea tratteggiata rappresenta la separazione fra acqua e ghiaccio.

vengono chiamati rispettivamente *coefficiente di espansione termica*, *compressibilità isoterma* e *contrazione salina*. Una densità tipica per l'acqua a $10^{\circ}C$ e salinità 35 psu è di circa 1027 kg m^{-3} ; con una temperatura di $20^{\circ}C$ è invece pari a 1025 kg m^{-3} . Poiché le variazioni di densità dell'acqua marina sono molto contenute, spesso la densità viene espressa come *densità in situ*, in cui la pressione p viene sottratta della pressione atmosferica:

$$\sigma_t = (\rho(p, T, S) - 1000) \text{ kg m}^{-3}$$

Capitolo 3

Processi di Trasporto

In questo capitolo sono utilizzate le nozioni di base della teoria dei processi stocastici per descrivere le caratteristiche principali dei fenomeni di trasporto che entrano in gioco nei processi di dispersione. Come riferimento per una trattazione più approfondita si consideri, ad esempio, [3].

3.1 La diffusione

3.1.1 I processi diffusivi

Se immettiamo una particella solida di piccole dimensioni all'interno di un fluido, osserviamo che al passare del tempo tale particella percorre una traiettoria discontinua e casuale, che nel tempo la porta mediamente ad allontanarsi sempre più dalla posizione iniziale. Tale moto viene detto *moto Browniano* e può essere spiegato in base alla teoria molecolare della struttura della materia come la risultante degli urti di quella particella con le varie molecole incontrate lungo il suo percorso.

Rientra tra le diverse conseguenze di questo fenomeno il processo chiamato *diffusione*, con il quale una certa sostanza immessa nel fluido viene progressivamente a distribuirsi in tutto il mezzo. Lo stesso processo avviene per le proprietà del fluido, quali per esempio la densità e la salinità, qualora la loro distribuzione iniziale non sia uniforme. In tali processi non si trasferisce solo materia da un punto all'altro dello spazio, ma anche quantità di moto ed energia cinetica.

3.1.2 L'equazione di diffusione

Per ricavare l'equazione di diffusione, iniziamo con il considerare una quantità per unità di volume q di una qualsiasi grandezza fisica Q . Per fare qualche esempio, q può rappresentare la concentrazione di un inquinante oppure la densità.

Analizziamo inizialmente il caso unidimensionale. La concentrazione di una sostanza al tempo t e nel punto x è espressa dalla funzione $q(x, t)$. Si osserva sperimentalmente che le sostanze tendono ad occupare il massimo spazio disponibile, muovendosi dalle zone a maggiore concentrazione verso quelle a minore concentrazione. L'*ipotesi diffusiva* consiste nell'assumere che la sostanza cerchi di spostarsi, ad un istante fissato, da una posizione all'altra con velocità proporzionale alla differenza spaziale di concentrazione. Ad ogni istante t , si ha flusso di materia $\phi(x, t)$, nella direzione del gradiente di

concentrazione di q , e quindi

$$\phi(x, t) = -\kappa_q \frac{\partial(q(x, t))}{\partial x} \quad (3.1)$$

Il flusso di sostanza tende quindi a distribuire uniformemente la sostanza, riducendone il gradiente spaziale.

Indicando con $M(x, t + \Delta t)$ la quantità di sostanza nell'intervallo spaziale che va da x a Δx al tempo $t + \Delta t$, potremmo definire $M(x, t + \Delta t)$ considerando la quantità di sostanza presente in precedenza nella zona considerata e i movimenti di sostanza generati dalla differenza di concentrazione spaziale, ovvero sommando la quantità di sostanza che entra e sottraendo quella che esce (come si è soliti fare quando si impone la conservazione di una grandezza). Si ottiene

$$M(x, t + \Delta t) = M(x, t) + \phi(x, t)\Delta t - \phi(x + \Delta x, t)\Delta t$$

ma

$$\begin{aligned} M(x, t + \Delta t) &= q(x, t + \Delta t)\Delta x, \\ M(x, t) &= q(x, t)\Delta x \end{aligned}$$

Potremmo quindi riscrivere, considerando la (3.1)

$$q(x, t + \Delta t)\Delta x = q(x, t)\Delta x - \kappa_q \frac{\partial(q(x, t))}{\partial x} \Delta t + \kappa_q \frac{\partial(q(x + \Delta x, t))}{\partial x} \Delta t$$

Dividendo per $\Delta x \Delta t$ ed effettuando il limite per $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$, otteniamo

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_q \frac{\partial q}{\partial x} \right)$$

che rappresenta l'equazione della diffusione nel caso unidimensionale. Ripetendo lo stesso ragionamento per le altre dimensioni, arriviamo all'equazione

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_q \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa_q \frac{\partial q}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa_q \frac{\partial q}{\partial z} \right)$$

o, in forma più sintetica,

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \boldsymbol{\partial} \cdot (\kappa_q \boldsymbol{\partial} q) + q_s \quad (3.2)$$

dove q è una grandezza specifica, riferita al volume e il termine q_s tiene conto della possibile presenza di sorgenti di Q .

3.1.3 Proprietà dei processi diffusivi

In un liquido, contrariamente a quanto accade per un gas, la viscosità molecolare diminuisce con l'aumento della temperatura. Questo perché un aumento dell'agitazione molecolare riduce l'intensità dei legami che tengono unite le varie molecole, rendendo più agevole lo scorrimento di uno strato sull'altro. I coefficienti di diffusione rimangono invece indipendenti dalla pressione.

I processi di diffusione molecolare avvengono su scale di tempo molto lunghe rispetto a quelle della maggior parte dei moti a cui si è interessati, per cui solitamente si assume

che il primo termine a secondo membro dell'equazione di diffusione sia nullo. Tuttavia, quando il moto è assente, sono proprio questi i processi che diventano responsabili della distribuzione di una data proprietà nel fluido. È possibile dimostrare che, in assenza di sorgenti esterne, la diffusione comporta sempre una riduzione dei gradienti; in altre parole, in assenza di sorgenti o pozzi di una certa sostanza, la diffusione molecolare agisce distribuendola in maniera uniforme in tutto lo spazio occupato dal fluido.

3.1.4 Soluzioni caratteristiche dell'equazione di diffusione

In assenza di sorgenti, ossia quando $q_s = 0$, un possibile soluzione è data da

$$G(x, t) = \frac{1}{(4\pi\kappa_q)^{3/2}} e^{-r^2/(4\kappa_q t)}$$

dove $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. La soluzione $G(x, t)$ rappresenta una gaussiana tridimensionale centrata nell'origine, di varianza

$$\sigma^2 = 2\kappa_q t$$

Partendo quindi da una situazione in cui la sostanza q è tutta concentrata in un unico punto (l'origine), q si espande nel tempo ad una velocità $(2\kappa_q/t)^{1/2}$. Il raggio della regione occupata dalla sostanza diffusa aumenta con la radice quadrata del tempo, mentre la velocità di espansione diminuisce con la stessa proporzione. Il processo risulta molto lento visti i valori estremamente piccoli dei coefficienti κ_q . La soluzione omogenea trovata può anche essere scomposta nel prodotto di tre soluzioni unidimensionali

$$G = \frac{e^{-x^2/(4\kappa_q t)}}{(4\pi\kappa_q t)^{1/2}} \cdot \frac{e^{-y^2/(4\kappa_q t)}}{(4\pi\kappa_q t)^{1/2}} \cdot \frac{e^{-z^2/(4\kappa_q t)}}{(4\pi\kappa_q t)^{1/2}} = G_x \cdot G_y \cdot G_z$$

dove ogni G_i è soluzione dell'equazione di diffusione unidimensionale

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \kappa_q \frac{\partial^2 q}{\partial x_i^2}$$

A partire dalla soluzione omogenea, è possibile trovare la soluzione nel caso in cui $q_s \neq 0$. Si dimostra che, nel caso in cui siano presenti delle sorgenti, per seguire l'evoluzione della distribuzione di una certa sostanza che diffonde, è sufficiente considerare la distribuzione inizialmente presente o successivamente introdotta dall'esterno come la somma di diverse sorgenti puntiformi, seguirne separatamente l'evoluzione e infine sommare i vari contributi così ottenuti. I processi di diffusione risultano quindi relativamente facili da prevedere, almeno fino a che non intervengano fenomeni avvertiti.

3.2 La turbolenza

Si può verificare sperimentalmente che un fluido in movimento mantiene un regime *laminare* (ovvero il suo flusso può essere pensato come sovrapposizione di tante lamine di fluido in movimento uniforme le une rispetto alle altre) fino a che la velocità non supera certi valori critici, in generale dipendenti dalla geometria e dalle proprietà fisiche del problema. Superati tali valori, si instaurano irregolari fluttuazioni attorno ad un andamento medio e il moto viene detto *turbolento*.

I moti caotici a livello molecolare sono sempre presenti, per cui anche se un flusso

ci appare stazionario, bisogna considerare che sono sempre presenti delle perturbazioni infinitesime continuamente variabili. Queste perturbazioni possono mantenersi limitate nel tempo, ed in tale caso il flusso viene detto *neutrale* o *stabile*. In altri casi le perturbazioni possono crescere, fino a raggiungere un'intensità paragonabile a quella del flusso di base. In questo caso si parla di flusso *instabile*.

La turbolenza è il risultato di un flusso instabile. Fenomenologicamente, il passaggio da stabilità ad instabilità è aleatorio, ma può essere favorito da vibrazioni, superfici scabrose od altre perturbazioni. Inoltre, la velocità alla quale il flusso diventa turbolento è in genere più alta della velocità necessaria per riportare un moto turbolento allo stato laminare.

Dal punto di vista matematico, si dimostra che i responsabili dei fenomeni di instabilità sono i termini avvevativi (non lineari) della derivata totale della velocità.

3.2.1 Il numero di Reynolds

Il passaggio ad una situazione di instabilità, ovvero l'insorgenza di turbolenza, può essere quantificato attraverso il rapporto fra gli ordini di grandezza dei termini non lineari e di quelli viscosi. La stima può essere effettuata assumendo che:

- l'ordine di grandezza delle fluttuazioni di velocità non dipenda dalla direzione;
- le fluttuazioni di velocità intorno al valor medio siano dello stesso ordine di grandezza della velocità U ;
- le fluttuazioni avvengano su scala spaziale L .

La stima dei termini non lineari può essere espressa come

$$\mathbf{u} \cdot \partial u_a \simeq U \frac{U}{L} \simeq \frac{U^2}{L}$$

dove u_a rappresenta una componente della velocità (u , v oppure w). Per i termini dissipativi possiamo scrivere

$$\nu \partial^2 u_a \simeq \nu \frac{U}{L^2}$$

Il rapporto fra le due stime porta alla definizione del *numero di Reynolds*

$$Re = \frac{U^2/L}{\nu U/L^2} = \frac{UL}{\nu} \quad (3.3)$$

Re è una quantità adimensionale. In generale, se più problemi hanno lo stesso numero di Reynolds, allora anche la loro soluzione deve essere geometricamente e temporalmente simile. Questa legge viene denominata *legge di similarità* e significa quindi che, a parità di altre condizioni, la transizione alla turbolenza avviene per lo stesso numero di Reynolds.

In casi particolari si può mantenere il regime laminare anche fino a $Re > 100.000$. Un esempio in ambito oceanografico può essere quello della corrente del Golfo, che ha una velocità tipica di 1 m s^{-1} e una larghezza di circa 100 km ; assumendo ν pari a $10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, in numero di Reynolds risultante è pari a

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{1 \times 10^5}{10^{-6}} = 10^{11}$$

e pertanto il moto non può che essere turbolento. La turbolenza è la normalità sia in oceano come in atmosfera.

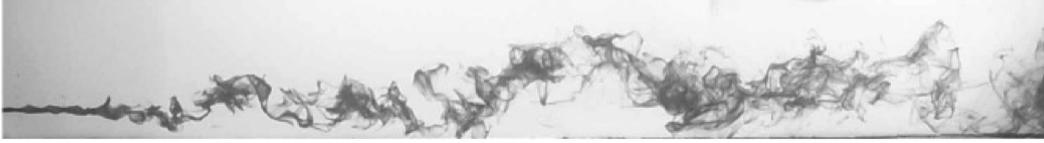


Figura 3.1 – Dispersione di un tracciante chimico rilasciato all'interno di un canale con flusso turbolento (alla profondità di $1/4$ dell'altezza del canale).

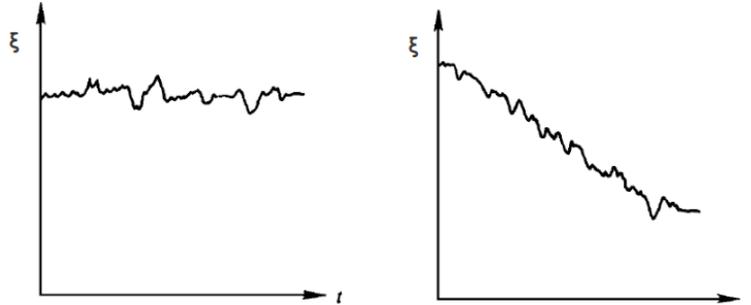


Figura 3.2 – Serie temporale stazionaria (sinistra) e non stazionaria (destra).

3.2.2 I processi stocastici

Un esempio di flusso turbolento è osservabile nella figura sottostante (figura 3.1). Anche una semplice valutazione qualitativa dell'immagine fa comprendere come alcune informazioni possano essere poco rappresentative del flusso; per esempio, il valore mediato nel tempo della concentrazione del tracciante, può non rappresentare la reale concentrazione di sostanza in un determinato momento.

Le variabili in un flusso turbolento sono pertanto delle variabili *stocastiche* o *random*, infatti quando il moto è instabile risulta impossibile descrivere la sua evoluzione nel dettaglio, dato che le fluttuazioni avvengono in un enorme *range* di scale spaziali e temporali senza alcuna regolarità.

In questo paragrafo vengono introdotte alcune definizioni che sono necessarie per la descrizione di un moto turbolento.

Prendiamo una qualsiasi variabile $\xi(\mathbf{r}, t)$ in un flusso turbolento e consideriamo innanzi tutto il caso in cui le sue caratteristiche medie non variano nel tempo, come per esempio a sinistra in figura 3.2. In questo caso si parla di processo *stazionario*. Per un tale processo, è possibile calcolare la *media temporale* attraverso l'integrale

$$\bar{\xi} = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt \quad (3.4)$$

dove T è un periodo di tempo sufficientemente lungo da contenere un numero elevato di quelle fluttuazioni temporali che vogliamo trascurare.

Se invece le caratteristiche variano nel tempo, ovvero il processo è *non stazionario* come mostrato a destra in figura 3.2, non è più possibile utilizzare l'integrale (3.4), poiché non sappiamo specificare quanto grande debba essere l'intervallo di mediazione T : se scegliessimo un valore troppo grande, non riusciremmo a calcolare una buona media locale; se invece T fosse eccessivamente piccolo, non otterremmo un valore medio

rappresentativo. In tale situazione, la definizione di media può essere ricavata dalla ripetizione dello stesso esperimento, condotto nelle stesse identiche condizioni, per un numero indefinito di volte. Una *collezione* di esperimenti, condotti sotto le stesse condizioni sperimentali, viene chiamata *insieme*. In ogni istante ed in ogni punto dello spazio possiamo allora definire una *media di insieme*

$$\langle \xi(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i(\mathbf{r}, t)$$

dove N è il numero di osservazioni. Da questo segue che la derivata ad un certo tempo è pari a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\rangle &= \frac{1}{N} \left[\frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \frac{\partial \xi_2}{\partial t} + \frac{\partial \xi_3}{\partial t} + \dots \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{N} (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots) \right] = \frac{\partial \langle \xi \rangle}{\partial t} \end{aligned}$$

Questo mostra che l'ordine di derivazione e di mediazione possono essere interscambiabili. Seguendo lo stesso ragionamento, è possibile mostrare che anche l'operazione di integrazione è commutabile con quella di mediazione. Si ottengono così le seguenti regole:

$$\left\langle \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \xi \rangle}{\partial t} \quad (3.5)$$

$$\left\langle \int_a^b \xi dt \right\rangle = \int_a^b \langle \xi \rangle dt$$

che possono essere ripetute in maniera analoga per lo spazio

$$\left\langle \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial \langle \xi \rangle}{\partial x_i} \quad (3.6)$$

$$\left\langle \int_a^b \xi d\mathbf{r} \right\rangle = \int_a^b \langle \xi \rangle d\mathbf{r}$$

Per un processo stazionario, la media temporale e la media d'insieme coincidono. Similmente al concetto di processo stazionario/non stazionario, definiamo un processo *omogeneo* quello per il quale le caratteristiche medie non variano nello spazio. In quest'ultimo caso, la media spaziale coincide con la media d'insieme.

3.2.3 Correlazioni

L'*autocorrelazione* di una singola variabile $\xi(t)$ ai tempi t_1 e t_2 è definita come

$$R(t_1, t_2) = \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle \quad (3.7)$$

Nel caso generale, quando la serie temporale non è stazionaria, applichiamo l'operatore di media d'insieme. Il risultato del prodotto (3.7) è piccolo quando un valore positivo di $\xi(t_1)$ è associato con valori sia positivi che negativi di $\xi(t_2)$; in tale caso la correlazione è debole. Se invece i segni sono concordi fra $\xi(t_1)$ e $\xi(t_2)$, ossia sono entrambi positivi od entrambi negativi, vi è una forte correlazione ed il valore di $R(t_1, t_2)$ aumenta. Ricordando che in un processo stazionario la variabile è indipendente dal tempo, è possibile spostare l'origine di una qualsiasi grandezza e possiamo pertanto scrivere

$$R(\tau) = \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = \overline{\xi(t)\xi(t+\tau)}$$

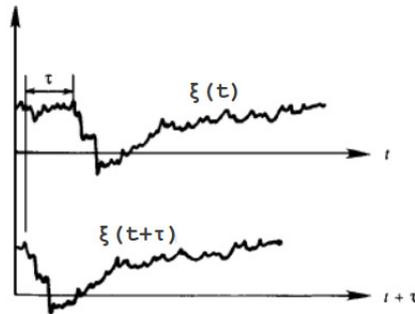


Figura 3.3 – Calcolo dell'autocorrelazione nel caso di un processo stazionario attraverso la formula $\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle$.

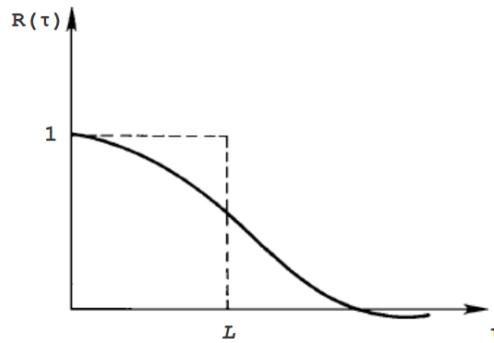


Figura 3.4 – Funzione di autocorrelazione $R(\tau)$ e misura della “memoria” del processo attraverso l'integrale di altezza 1 e lunghezza L .

In questo caso media d'insieme e media temporale coincidono e possiamo quindi usare entrambe le notazioni. Per stimare la correlazione, è possibile allineare le serie temporali $\xi(t)$ e $\xi(t+\tau)$ e moltiplicarle verticalmente, come illustrato in figura 3.3.

Un tipico grafico di $R(\tau)$ è mostrato in figura 3.4. Si osserva che $R(0) = 1$ e $R \rightarrow 0$ per $\tau \rightarrow \infty$, infatti un processo perde la correlazione con i suoi stati precedenti all'aumentare del tempo. Ma allora, per quanto tempo un processo può considerarsi autocorrelato? Fino a quando viene mantenuta l'autocorrelazione? Una stima di tale misura si ottiene sostituendo la distribuzione di $R(\tau)$ con un rettangolo di altezza 1 e lunghezza

$$L = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau \quad (3.8)$$

Questo integrale fornisce una misura del tempo in cui $R(\tau)$ è autocorrelato, ovvero il proprio stato attuale mantiene una correlazione con lo stato negli istanti temporali precedenti; in altre parole, L è una misura della “memoria” del processo.

È possibile definire anche una *cross-correlazione* fra due variabili stazionarie $\xi(t)$ e $\chi(t)$ attraverso la relazione

$$C(\tau) = \langle \xi(t)\chi(t+\tau) \rangle = \overline{\xi(t)\chi(t+\tau)}$$

Nello stesso modo in cui è stata definita la correlazione nel tempo della variabile ξ , possiamo definire l'autocorrelazione come una funzione della separazione spaziale tra

misure della stessa variabile effettuate in due punti distinti. Consideriamo $\xi(\mathbf{x}_0, t)$ e $\xi(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}, t)$ le misure della variabile ξ nei punti \mathbf{x}_0 e $\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}$. La correlazione spaziale può quindi essere definita come

$$R(x) = \langle \xi(\mathbf{x}_0, t)\xi(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}, t) \rangle$$

3.2.4 Le equazioni fondamentali mediate

Un flusso turbolento soddisfa le equazioni di Navier-Stokes istantaneamente ma, come già introdotto nel paragrafo 3.2.2, risulta impossibile predire il flusso nel dettaglio visto il grande numero di scale temporali che dovrebbero essere risolte. Ci interessiamo quindi alle caratteristiche medie del flusso e procediamo con il calcolo delle equazioni del moto mediate per un flusso turbolento.

Per risolvere il problema della sovrapposizione delle diverse scale temporali, ipotizziamo che esista la possibilità di scomporre il moto medio nella somma di due componenti: il moto medio, lentamente variabile, e le fluttuazioni turbolente, rapidamente variabili. Quindi, data una qualunque variabile ξ associata al campo di moto, possiamo scrivere

$$\xi = \langle \xi \rangle + \xi'$$

dove $\langle \xi \rangle$ rappresenta il valore medio e ξ' la deviazione dal valore medio (la fluttuazione). È importante sottolineare che quando si parla di moti lentamente o rapidamente variabili, si fa riferimento al periodo di mediazione. La decomposizione appena descritta viene chiamata *decomposizione di Reynolds*. Si può osservare che

$$\langle \langle \xi \rangle \rangle = \langle \xi \rangle \quad \text{e} \quad \langle \xi' \rangle = 0 \quad (3.9)$$

Le equazioni fondamentali per il moto medio sono ottenute sostituendo ad ogni variabile ξ la sua decomposizione e facendo la media di tali equazioni.

L'equazione di continuità mediata

Applicando le regole (3.5) alla forma incompressibile dell'equazione di continuità ($\partial \cdot \mathbf{u} = 0$) dopo aver utilizzato la decomposizione di Reynolds $u_i = U_i + u'_i$, otteniamo

$$\begin{aligned} \langle \partial_i U_i + \partial_i u'_i \rangle &= \langle \partial_i U_i \rangle + \langle \partial_i u'_i \rangle = \\ &= \partial_i \langle U_i \rangle + \partial_i \langle u'_i \rangle = 0 \end{aligned}$$

ma siccome $\langle u'_i \rangle = 0$ rimane

$$\partial_i \langle U_i \rangle = \partial_i U_i = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

Abbiamo quindi scritto l'equazione di continuità per il flusso medio

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.10)$$

Sottraendo la (3.10) dall'equazione di continuità per il flusso totale $\partial \cdot \mathbf{u} = 0$, otteniamo l'equazione di continuità per le fluttuazioni turbolente

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0$$

Si giunge alla conclusione che sia la componente a variazione lenta sia quella a variazione rapida sono entrambe non divergenti, infatti obbediscono, separatamente, all'equazione di continuità.

L'equazione del moto mediata

L'applicazione della decomposizione di Reynolds all'equazione del moto comporta non solo la sostituzione di u_i con $U_i + u'_i$, ma anche di p con $P + p'$. La densità ρ rimane invece costante. Otteniamo quindi

$$\frac{\partial}{\partial t}(U_i + u'_i) + (U_j + u'_j) \frac{\partial}{\partial x_j}(U_i + u'_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i}(P + p') + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(U_i + u'_i) + g_i$$

su cui interveniamo con il processo di mediazione. Analizziamo di seguito i singoli elementi dell'equazione mediata, tenendo sempre presente che, seguendo le regole (3.9), le medie d'insieme delle fluttuazioni turbolente sono nulle e che il simbolo di mediazione è omesso per le componenti medie:

- termine di derivata temporale:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(U_i + u'_i) \right\rangle &= \frac{\partial U_i}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial t} \right\rangle = \\ &= \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \langle u'_i \rangle = \frac{\partial U_i}{\partial t} \end{aligned}$$

- termine avvevivo: si scompone in 4 termini, solo due dei quali non si annullano.

$$\begin{aligned} \left\langle (U_j + u'_j) \frac{\partial}{\partial x_j}(U_i + u'_i) \right\rangle &= \\ &= U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i \rangle + \langle u'_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \left\langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle = \\ &= U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle \end{aligned}$$

infatti $u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(u'_i u'_j) - u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j}$, dove l'ultimo elemento al secondo membro si annulla sotto mediazione secondo le regole (3.9).

- termine di pressione:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(P + p') = \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle p' \rangle = \frac{\partial P}{\partial x_i}$$

- termine viscoso:

$$\left\langle \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(U_i + u'_i) \right\rangle = \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2}$$

Possiamo quindi riscrivere l'equazione del moto mediata come

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} + g_i \quad (3.11)$$

oppure

$$\frac{dU_i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \langle u'_i u'_j \rangle \right] + g_i \quad (3.12)$$

Il tensore degli sforzi per la forma mediata dell'equazione del moto, $\langle \tau_{ij} \rangle$, è definito come

$$\langle \tau_{ij} \rangle = -P\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \rho \langle u'_i u'_j \rangle$$

il quale, rispetto alla forma che si ottiene per l'equazione del moto (2.6), presenta un fattore di stress aggiuntivo: $-\rho \langle u'_i u'_j \rangle$. Questo fattore di stress, chiamato *tensore dello stress di Reynolds* o *tensore degli sforzi turbolenti*, può essere esplicitato nella forma matriciale

$$R = -\rho \begin{pmatrix} \langle u'u' \rangle & \langle u'v' \rangle & \langle u'w' \rangle \\ \langle v'u' \rangle & \langle v'v' \rangle & \langle v'w' \rangle \\ \langle w'u' \rangle & \langle w'v' \rangle & \langle w'w' \rangle \end{pmatrix}$$

Il tensore degli sforzi turbolenti può essere interpretato come l'elemento che fornisce informazioni sul tasso di trasferimento della quantità di moto tra i vari strati di fluido attraverso le fluttuazioni turbolente.

Il tensore deriva dalla presenza di un termine avvertivo non-lineare, $\partial \langle u'_i u'_j \rangle / \partial x_j$, che rappresenta la causa della mancata chiusura delle equazioni nel campo incognito della velocità media. Infatti, con la presenza del termine non-lineare, sono state introdotte delle nuove incognite nel sistema di equazioni. L'utilizzo di parametrizzazioni empiriche, denominate appunto "chiusure", permette di rappresentare le fluttuazioni turbolente (ossia le medie dei prodotti delle fluttuazioni) in funzione delle velocità medie, rendendo così il sistema risolvibile. Si cercano quindi relazioni empiriche che abbiano fondamenti di validità dalla conferma sperimentale. Tuttavia il problema della rappresentazione parametrica della turbolenza in funzione del moto medio non ha ancora trovato una risposta soddisfacente.

Un esempio di parametrizzazione è illustrato nel seguente esempio, che dimostra inoltre come il prodotto medio delle fluttuazioni della velocità in un flusso turbolento non sia nullo. Consideriamo un flusso tale che la variazione della componente della velocità U con la quota sia positiva. Una particella che sale di quota si trova quindi in uno strato ($z + dz$) dove le particelle hanno velocità superiore e tende pertanto a rallentarle; la correlazione $\langle u'w' \rangle$ è quindi negativa. Allo stesso modo una particella che scende di quota, ovvero che passa da un livello z ad un livello ($z - dz$), tende ad accelerare le particelle di tale strato, avendo essa una velocità superiore; nuovamente, la correlazione $\langle u'w' \rangle$ è negativa. Possiamo quindi scrivere: $\langle u'w' \rangle \propto -\partial U / \partial z$.

La struttura del tensore degli stress di Reynolds R può essere sviluppata in similitudine a quella del tensore degli sforzi viscosi τ , definito nel paragrafo 2.4.2. Si ricorda che τ descrive il trasferimento della quantità di moto per diffusione molecolare ed è proporzionale al tensore di deformazione e_{ij} definito dalla (2.8). R viene quindi definito

come

$$R = \rho \begin{pmatrix} 2A_H \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} & A_H \left(\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right) & A_V \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + A_H \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial x} \\ A_H \left(\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right) & 2A_H \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} & A_V \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial z} + A_H \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial y} \\ A_V \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} + A_H \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial x} & A_V \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial z} + A_H \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial y} & 2A_V \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Bisogna notare la presenza di due differenze rispetto al caso molecolare. Innanzi tutto non abbiamo un unico coefficiente di proporzionalità tra gli sforzi turbolenti ed i gradienti di velocità, ma due diversi coefficienti, A_H e A_V , in riferimento alle variazioni orizzontali e verticali della velocità. Questo si rende necessario dal momento che nel caso dei moti oceanici e atmosferici di grande scala, le variazioni orizzontali e verticali della velocità sono molto differenti. In generale non esiste alcuna necessità di distinguere fra le due direzioni orizzontali del moto, infatti la turbolenza è isotropa orizzontalmente, a meno che non intervengano determinanti fattori geometrici nel bacino che contiene il fluido. I coefficienti A_H e A_V , che svolgono lo stesso ruolo del coefficiente di viscosità cinematica molecolare $\nu = \mu/\rho$, vengono detti *coefficienti di viscosità turbolenta*. In secondo luogo, questi coefficienti non possono essere considerati costanti, come vale per μ , ma sono variabili con le coordinate spaziali. Infatti essi sono una proprietà *del moto* e non *del mezzo*, come avveniva per il coefficiente di viscosità molecolare.

In regime turbolento bisogna quindi considerare sia i coefficienti di viscosità molecolare che turbolenta. Quest'ultimi sono però diversi ordini di grandezza superiori ai primi, che possono pertanto essere trascurati, o meglio inglobati nei coefficienti A_H e A_V . L'equazione di Navier-Stokes in regime turbolento diventa

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\partial} \mathbf{u} = -\frac{\partial p}{\rho} + \mathbf{g} + \nu \partial^2 \mathbf{u} + A_H \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + A_H \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} + A_V \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \quad (3.13)$$

3.3 I modelli di avvezione-diffusione

Per determinare le conseguenze del trasporto di una generica quantità di sostanza q in un fluido in movimento, dobbiamo considerare sia l'effetto della diffusione sia dell'avvezione. Il movimento viene descritto dall'equazione di *avvezione-diffusione*, che si ottiene sostituendo nell'equazione di diffusione (3.2) la semplice derivata parziale con la derivata lagrangiana, ovvero seguendo la particella secondo un approccio lagrangiano. L'equazione pertanto diverrà

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\partial} q = \boldsymbol{\partial} \cdot (\kappa \boldsymbol{\partial} q) + q_q \quad (3.14)$$

in cui il coefficiente κ_q di diffusione molecolare viene sostituito con κ , il coefficiente di diffusione turbolenta. Infatti, come spiegato nel precedente paragrafo, gli effetti dovuti alla diffusione molecolare sono trascurabili se confrontati con quelli dovuti alla turbolenza.

Il problema dell'avvezione-dispersione può essere affrontato con due differenti approcci matematici:

- *Euleriano*: si assume un sistema di riferimento fisso; i bilanci di quantità di moto, energia, massa dipendono dai flussi del fluido attraverso le pareti di un volume

V fisso rispetto agli assi coordinati: su tale sistema viene integrata l'equazione di avvezione-dispersione.

- *Lagrangiano*: il fluido viene interpretato come un insieme di particelle discrete ed a ciascuna particella vengono attribuite caratteristiche proprie, come una data concentrazione di un inquinante ed una certa aleatorietà nella dinamica; in tale schema ci si avvale del concetto di *traiettoria* come cammino di una particella immaginaria; lungo le traiettorie vengono simulate tutte le trasformazioni che le caratteristiche della particella subiscono in funzione delle condizioni ambientali.

3.3.1 L'approccio euleriano

L'approccio euleriano è basato sulla conservazione della massa di un inquinante di concentrazione $c(x, y, z, t) \equiv c(\mathbf{r}, t)$. Riscrivendo l'equazione di avvezione-dispersione nella forma

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\partial} c = \boldsymbol{\partial} \cdot (\kappa_c \boldsymbol{\partial} c) + q_c$$

si assume, come fatto in precedenza, che la velocità \mathbf{u} possa essere scomposta nella somma di una componente media e di una fluttuante, cioè

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}'$$

dove $\langle \mathbf{u} \rangle$ rappresenta la porzione di flusso che può essere descritta con misure sperimentali o calcolata con modelli idrodinamici, mentre \mathbf{u}' è una variabile stocastica che contiene le informazioni sulla diffusione turbolenta. Analogamente per la concentrazione si pone

$$c = \langle c \rangle + c'$$

e naturalmente valgono le regole

$$\langle \langle \mathbf{u} \rangle \rangle = \langle \mathbf{u} \rangle, \quad \langle \mathbf{u}' \rangle = 0, \quad \langle \langle c \rangle \rangle = \langle c \rangle, \quad \langle c' \rangle = 0$$

La decomposizione e mediazione dei vari termini, applicando le regole appena riportate, porta ad ottenere la seguente equazione mediata:

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \boldsymbol{\partial} \langle c \rangle = -\boldsymbol{\partial} \cdot \langle c' \mathbf{u}' \rangle + \boldsymbol{\partial} \cdot (\kappa_c \boldsymbol{\partial} \langle c \rangle) + \langle q_c \rangle$$

nella quale il termine $\langle c' \mathbf{u}' \rangle$ rappresenta la diffusione turbolenta, la cui definizione viene effettuata in maniera empirica solitamente attraverso la *teoria K*, in cui si pone

$$\langle c' \mathbf{u}' \rangle = -K \boldsymbol{\partial} \langle c \rangle$$

dove K è un tensore di ordine due chiamato *tensore di diffusività turbolenta* ed i suoi elementi vengono stimati con misure sperimentali o dedotti da modelli. Di solito, viste le caratteristiche generali dei moti dei fluidi geofisici, si distingue tra fenomeni di diffusività orizzontale e verticale; la precedente equazione, riscritta per componenti, diventa quindi

$$\begin{aligned} \langle c' u' \rangle &= -A_H \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x} \\ \langle c' v' \rangle &= -A_H \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y} \\ \langle c' w' \rangle &= -A_V \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial z} \end{aligned}$$

dove A_H e A_V sono rispettivamente i coefficienti di diffusività turbolenta orizzontale e verticale.

3.3.2 L'approccio lagrangiano

L'approccio lagrangiano si basa sulla equazione per la dispersione di una singola specie di inquinante caratterizzata dalla concentrazione $c(x, y, z, t)$

$$\langle c(\mathbf{r}, t) \rangle = \int_{-\infty}^t \int_V P(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) q_c(\mathbf{r}_0, t_0) \quad (3.15)$$

dove $P(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$ stabilisce la probabilità che una particella che si trova in \mathbf{r}_0 al tempo t_0 si trovi in \mathbf{r} al tempo t ; q_c è il termine che tiene conto delle sorgenti di inquinante.

3.3.3 I modelli a particelle

La dispersione può essere alternativamente simulata con i modelli lagrangiani a particelle, che si differenziano in:

- a "particella singola": il moto di ciascuna particella risulta indipendente da quello delle altre;
- a "due (o più) particelle": si riproduce la dispersione relativa tra le particelle.

Nei modelli a particella singola, le particelle vengono fatte spostare ad ogni passo temporale con una velocità \mathbf{v} in modo tale che sia valida la relazione

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t) dt$$

La velocità \mathbf{v} viene calcolata come

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{det} + \mathbf{v}'$$

dove

- \mathbf{v}_{det} rappresenta la parte deterministica del trasporto, basata sulle misure euleriane di corrente o fornita da un modello idrodinamico;
- \mathbf{v}' è la velocità di diffusione, una perturbazione numerica artificiale legata all'intensità della turbolenza ed alle caratteristiche dei vortici più piccoli che non rientrano nel valore del campo medio. Rappresenta quindi la componente utilizzata per descrivere i fenomeni turbolenti che non riescono ad essere risolti alla scala del campo medio scelto.

È possibile ottenere una stima di \mathbf{v}' attraverso una valutazione stocastica. Di solito, infatti, la distribuzione delle velocità delle particelle che si disperdono in un flusso turbolento, viene ottenuta utilizzando i cosiddetti *modelli autoregressivi*. Questi modelli descrivono il valore della velocità ad un certo istante come combinazione lineare dei valori assunti negli istanti precedenti più un termine completamente random all'istante considerato. Un modello autoregressivo di ordine p , indicato di solito con la sigla $AR(p)$, valuta la velocità \mathbf{v}' al passo temporale n con la formula

$$\mathbf{v}'_n = \alpha_1 \mathbf{v}'_{n-1} + \alpha_2 \mathbf{v}'_{n-2} + \dots + \alpha_p \mathbf{v}'_{n-p} + \boldsymbol{\mu}$$

dove $\boldsymbol{\mu}$ è una velocità stocastica puramente casuale e stazionaria.

I modelli markoviani

Un processo viene detto “markoviano” se le sue proprietà dipendono unicamente dalle condizioni iniziali. Questo significa che una variabile al tempo t assumerà un valore dipendente unicamente dal valore che essa stessa assume all’istante precedente ($t - 1$). In termini matematici, questo significa che il sistema obbedisce al primo ordine di equazioni differenziali; seguendo questo ragionamento, le equazioni del moto di un fluido - le equazioni di Navier-Stokes - in presenza di una forzante stocastica, rappresentano un processo markoviano, infatti l’evoluzione nel tempo del campo di velocità è determinata unicamente dalle condizioni iniziali.

Possiamo distinguere diversi modelli markoviani in base a quali variabili possiedono tale proprietà. Il modello più utilizzato per descrivere la dispersione è il cosiddetto **modello “random walk”**, in cui la descrizione del moto browniano, cui si è accennato all’inizio di questo capitolo, è effettuata attraverso un processo autoregressivo di ordine zero, $AR(0)$: la componente casuale della velocità della particella, essendo il risultato di urti casuali con le molecole del fluido, è puramente random ad ogni istante, cioè

$$\mathbf{v}'_n = \boldsymbol{\mu}$$

Il valore che $\boldsymbol{\mu}$ assume ad ogni singolo istante temporale è scorrelato con il valore assunto all’istante precedente. Questo significa che la particella che si muove nel fluido, riceve ad ogni istante temporale un impulso random, dovuto all’azione della turbolenza, senza mantenere alcuna memoria dell’impulso subito al tempo precedente. L’impulso viene ovviamente tradotto in una componente random dello spostamento, che va ad aggiungersi allo spostamento dovuto al flusso di velocità medio seguendo la formula

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n = \mathbf{v}_{det}\Delta t + \boldsymbol{\varrho}$$

dove $\boldsymbol{\varrho} = \boldsymbol{\mu}\Delta t$. Ad ognuna delle componenti di $\boldsymbol{\varrho} = (\varrho_x, \varrho_y, \varrho_z)$ viene assegnato un valore secondo una funzione di densità di probabilità ottenuta dalla manipolazione dei numeri pseudorandom generati dal calcolatore.

Capitolo 4

Metodi Perturbativi a Scale Multiple

4.1 Introduzione

Nella maggior parte degli studi scientifici e delle applicazioni ingegneristiche si ha a che fare con problemi matematicamente complessi e non si dispone di metodologie in grado di fornirne soluzioni esatte. Per questo motivo è stata sviluppata un'ampia gamma di tecniche capaci di fornire soluzioni approssimate che riproducano le caratteristiche essenziali della soluzione esatta in particolari regimi di interesse.

Gran parte di questa gamma è costituita dai metodi perturbativi. Il primo passo nell'utilizzo di questi metodi è l'individuazione, nel contesto del problema in esame, di un parametro che sia piccolo nel regime di interesse. Esprimendo la soluzione esatta come serie di potenze del parametro perturbativo si ottiene un sistema di equazioni equivalente per le funzioni coefficienti dello sviluppo in serie. Poiché il parametro è piccolo, la speranza è quella di ottenere la maggior parte dell'informazione sulla soluzione del problema nel regime di interesse troncando lo sviluppo agli ordini più bassi.

In molti casi la procedura descritta produce il risultato richiesto, tuttavia in altri casi il troncamento della serie agli ordini più bassi esibisce differenze sostanziali rispetto alla soluzione esatta e la procedura non è più efficace.

Nel presente capitolo viene esposto il meccanismo con cui emergono queste difficoltà e viene proposta la Teoria Perturbativa Multi-Scala come soluzione possibile del problema.

4.1.1 Termini secolari

Si consideri la seguente equazione differenziale per il moto di un oscillatore armonico forzato

$$\ddot{y} + y = \cos \omega t.$$

L'integrale generale è dato dalla somma di quello dell'equazione omogenea associata e di una soluzione particolare dell'equazione completa, ovvero quando $|\omega| \neq 1$:

$$y(t) = A \cos t + B \sin t + \frac{\cos \omega t}{1 - \omega^2}$$

In questa famiglia di funzioni quando $|\omega| = 1$ la soluzione non è definita, e per $|\omega| \rightarrow 1$ diverge. Ciò accade perché, in corrispondenza di tale valore, il termine non omogeneo è soluzione dell'equazione omogenea associata. Fisicamente siamo in presenza di un

fenomeno di risonanza dovuto alla coincidenza tra la frequenza della forzante esterna e quella del moto della particella libera. La soluzione corretta quando $|\omega| = 1$ è

$$y(t) = A \cos t + B \sin t + \frac{1}{2}t \sin t$$

Come si vede, l'ampiezza delle oscillazioni diverge per $t \rightarrow \infty$, cioè si ha la suddetta risonanza. In questo caso compare un termine del tipo $t \sin t$, dove un fattore crescente (t) moltiplica una funzione oscillante con la stessa frequenza della forzante che compare nell'equazione differenziale. Termini con queste caratteristiche sono detti *secolari*, e nell'integrale generale di un'equazione differenziale a coefficienti costanti non omogenea compaiono usualmente, moltiplicati almeno di un fattore t rispetto al termine non omogeneo che li genera.

La comparsa di termini secolari rappresenta un problema quando si ricercano soluzioni approssimate per ODE (equazioni differenziali ordinarie) ricorrendo a sviluppi perturbativi. In questi casi la teoria perturbativa standard non è più in grado di riprodurre le caratteristiche fondamentali della soluzione a grandi tempi.

4.1.2 Il fallimento della teoria perturbativa standard

Nei paragrafi seguenti sono riportati due esempi significativi (si veda ad esempio [4] e [5]) che mostrano le problematiche che in certi casi insorgono quando si tenta di utilizzare la teoria perturbativa standard per cercare soluzioni approssimate di ODE.

Oscillatore lineare debolmente smorzato Consideriamo la seguente equazione lineare che descrive il moto di un oscillatore smorzato e in cui il termine di smorzamento è controllato da un parametro piccolo ϵ :

$$\ddot{y} + 2\epsilon\dot{y} + y = 0$$

con condizioni iniziali: $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$. La ben nota soluzione del problema è la seguente:

$$y(t, \epsilon) = (1 - \epsilon^2)^{-1/2} e^{-\epsilon t} \sin \left[(1 - \epsilon^2)^{1/2} t \right]. \quad (4.1)$$

Tentiamo ora di risolvere lo stesso problema utilizzando uno sviluppo perturbativo nel parametro piccolo ϵ . Scriviamo la soluzione come serie di potenze di ϵ

$$y(t, \epsilon) = y_0(t) + \epsilon y_1(t) + \epsilon^2 y_2(t) + \dots$$

sostituiamo nell'equazione di partenza, raggruppiamo i termini di ordine uguale in ϵ e otteniamo una gerarchia di equazioni per le funzioni $y_k(t)$ che possono essere risolte iterativamente:

$$O(1) : \quad \ddot{y}_0 + y_0 = 0$$

$$O(2) : \quad \ddot{y}_1 + 2\dot{y}_0 + y_1 = 0$$

...

Poiché ϵ è piccolo, nello spirito ottimistico della teoria perturbativa, ignoriamo i contributi alla soluzione del tipo $O(\epsilon^2)$ e superiori.

Dalle condizioni iniziali su $y(t)$ e $\dot{y}(t)$ derivano le seguenti condizioni iniziali sui coefficienti dello sviluppo:

$$y_0(0) = 0, \quad y_1(0) = 0, \quad \dot{y}_0(0) = 1, \quad \dot{y}_1(0) = 0,$$

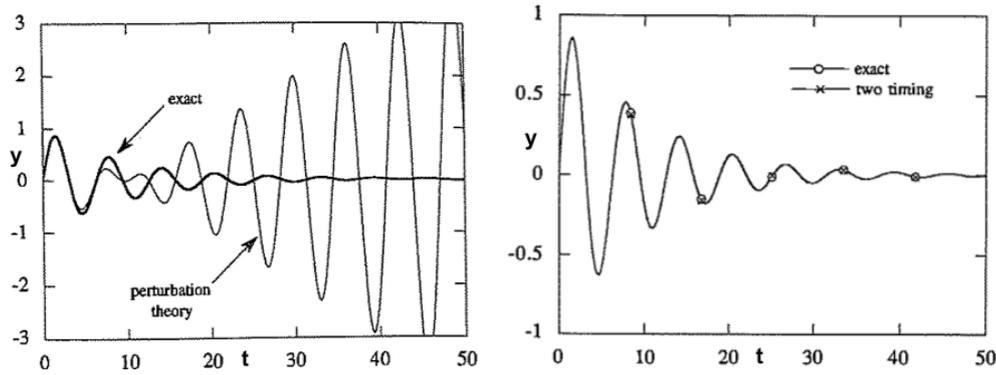


Figura 4.1 – A sinistra: confronto tra soluzione esatta e approssimata utilizzando la teoria perturbativa standard, qui $\epsilon = 0.1$. Si vede come la teoria perturbativa funzioni bene per $t \ll 1/\epsilon$ dopo di che cade brutalmente in errore. A destra: confronto tra soluzione esatta e approssimata con tecnica multiscala. Anche a tempi grandi l'accordo è ottimo e l'errore è più piccolo dello spessore della curva tracciata.

con queste condizioni iniziali la soluzione per l'ordine 0 è:

$$y_0(t) = \sin t.$$

Otteniamo pertanto l'equazione all'ordine 1

$$\ddot{y}_1 + y_1 = -2 \cos t.$$

Il termine forzante nel membro di destra è soluzione dell'equazione omogenea associata, pertanto, come precedentemente annunciato, la soluzione all'ordine 1 presenta la comparsa di un termine secolare:

$$y_1(t) = -t \sin t.$$

La soluzione ottenuta in teoria delle perturbazioni standard all'ordine 1 è quindi

$$y(t, \epsilon) = \sin t - \epsilon t \sin t + O(\epsilon^2) \quad (4.2)$$

Dal grafico in figura 4.1, risulta evidente come lo sviluppo al primo ordine non riproduca affatto il comportamento della soluzione esatta a grandi tempi infatti, mentre il primo diverge per via del termine secolare, nella realtà l'ampiezza $A = (1 - \epsilon^2)^{-1/2} e^{-\epsilon t}$ delle oscillazioni decade esponenzialmente a zero per $t \rightarrow \infty$.

Confrontando le espressioni esatta ed approssimata emerge che:

- la soluzione esatta esibisce due scale temporali ben distinte: una veloce $t \sim O(1)$ per le oscillazioni sinusoidali e una lenta $t \sim 1/\epsilon$ per il tempo di decadimento delle stesse. Lo sviluppo troncato non rappresenta per nulla questa seconda.
- l'esatta frequenza delle oscillazioni $\omega = (1 - \epsilon^2)^{1/2} \sim 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2$ differisce leggermente da quella approssimata $\omega = 1$. Per tempi molto lunghi $t \sim O(1/\epsilon^2)$ l'errore sulla frequenza può dare origine ad un effetto cumulativo non trascurabile (questa rappresenta una terza scala ancora più lenta).

Effettivamente si può dimostrare che la (4.2) è la prima parte di uno sviluppo in serie di potenze di ϵ che converge alla funzione (4.1) e la (4.2) è effettivamente una buona approssimazione della soluzione esatta per t fissato ed $\epsilon \rightarrow 0$. Tuttavia la convergenza non è di tipo uniforme e la bontà dell'approssimazione al variare di t è assicurata quando $\epsilon t \ll 1$.

Poiché usualmente cerchiamo soluzioni a ϵ fissato, ciò significa che la (4.2) rappresenta una buona approssimazione fintanto che $t \ll 1/\epsilon$. Questo è il motivo per cui, su scale temporali maggiori, la teoria perturbativa standard non riproduce l'andamento effettivo.

Si può mostrare che termini secolari compaiono nello sviluppo perturbativo a tutti gli ordini, un po' come accade più semplicemente per la funzione esponenziale

$$e^{-\epsilon t} = 1 - \epsilon t + \frac{1}{2}\epsilon^2 t^2 + \dots$$

Anche in questo caso i troncamenti della serie a qualunque ordine risultano divergenti, ma nella somma infinita i termini divergenti si compensano dando luogo ad una funzione che per $t > 0$ non diverge. Analogamente accade per i termini secolari della teoria perturbativa.

Oscillatore debolmente non lineare (Equazione di Duffing) Un altro classico esempio di questo tipo di difficoltà è rappresentato dal problema di Cauchy per l'equazione di Duffing :

$$\ddot{y} + y + \epsilon y^3 = 0 \quad y(0) = 1 \quad \dot{y}(0) = 0$$

dove ϵ è un parametro piccolo. L'equazione è non lineare e in generale non risolvibile esattamente. Cerchiamo pertanto una soluzione approssimata tramite una serie perturbativa del tipo:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon^n y_n(t), \quad y_0(0) = 1 \quad \dot{y}_0(0) = 0 \quad y_n(0) = \dot{y}_n(0) = 0 \quad n \geq 1$$

Sostituendo la serie nell'equazione di Duffing e applicando il principio di identità delle serie di potenze otteniamo, come per l'esempio precedente, una gerarchia di equazioni, una per ogni ordine in ϵ :

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 + y_0 &= 0 \\ \ddot{y}_1 + y_1 &= -y_0^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Tenendo conto delle condizioni iniziali, si ha così per l'ordine 0:

$$y_0(t) = \cos t$$

Sostituendo nell'ordine 1 e utilizzando l'identità $\cos^3 t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} \cos 3t + \frac{3}{4} \cos t$, si può scrivere l'integrale generale

$$y_1(t) = A \cos t + B \sin t + \frac{1}{32} \cos 3t - \frac{3}{8} t \sin t$$

dove compare il termine secolare dovuto al fatto che $\cos t$ è soluzione dell'omogenea per y_1 . La soluzione approssimata, ottenuta in teoria delle perturbazioni, è quindi

$$y(t) = \cos t + \epsilon \left[\frac{1}{32} \cos 3t - \frac{1}{32} \cos t - \frac{3}{8} t \sin t \right] + O(\epsilon^2) \quad \epsilon \rightarrow 0^+$$

Come prima, fissato un t , la precedente equazione approssima la soluzione a meno di termini di infinitesimo uguale o maggiore di ϵ^2 per $\epsilon \rightarrow 0^+$. Fissato ϵ , per tempi maggiori di $t \sim \frac{1}{\epsilon}$ nuovamente la soluzione approssimata esibisce un andamento secolare, mostrandosi quindi illimitata. Lo sviluppo sembra avere due scale differenti di variazione nel tempo: una piccola del periodo delle funzioni oscillanti e una *infinita* nell'aumento dell'ampiezza.

Malgrado questa apparenza ciò è errato. Consideriamo a proposito la costante del moto dell'equazione di Duffing costruita moltiplicando l'equazione stessa per il fattore \dot{y} :

$$\dot{y}\ddot{y} + \dot{y}y + \epsilon y\dot{y}^3 = 0$$

da cui

$$\frac{1}{2} \left[(\dot{y})^2 + y^2 + \frac{1}{2} \epsilon y^4 \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad (\dot{y})^2 + y^2 + \frac{1}{2} \epsilon y^4 = C \geq 0$$

e pertanto

$$|y| = \sqrt{C - (\dot{y})^2 - \frac{1}{2} \epsilon y^4} \leq \sqrt{C} \quad \forall t$$

Questo dimostra la limitatezza della soluzione per tutti i tempi e che, nuovamente, nella serie perturbativa i termini secolari, seppur divergenti per grandi t , vengono *risommati* producendo una somma della serie limitata.

4.2 Multiscala per Equazioni Differenziali Ordinarie

Nella sezione precedente abbiamo visto che, in una serie perturbativa, i termini secolari possono compensarsi anche tendendo all'infinito. Serve un metodo che quindi approssimi *asintoticamente* la soluzione del problema posto (per t arbitrariamente grandi), e tenga conto della suddetta sommazione, cosa che lo sviluppo perturbativo troncato non può fare perché, come visto, vale per una scala di tempi *molto più piccoli*, cioè impone un limite superiore all'intervallo di validità dei tempi.

Una soluzione a questo problema è data dalla *teoria perturbativa a scale multiple*. Supponiamo che la soluzione esatta abbia un andamento in cui siano ben distinguibili differenti scale di variazione, ad esempio, nel caso di due scale, una che caratterizzi l'andamento globale, come una modulazione in ampiezza o un comportamento asintotico, e l'altra che caratterizzi andamenti tipici su intervalli molto più piccoli, come uno pseudoperiodo di oscillazioni.

Nel caso più semplice di due scale potremmo quindi descrivere la funzione attraverso due variabili di tempi differenti, rappresentanti le due suddette scale di tempi. Costruiamo la serie perturbativa nella forma

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon^n y_n(t, T)$$

dove t rappresenta una variabile *veloce*, rispetto alla quale la soluzione dovrà risultare *periodica*, e T una variabile *lenta*, cioè che cresca *infinitamente* più lentamente rispetto alla t nel limite $\epsilon \rightarrow 0^+$, come ad esempio $T = \epsilon t^1$. Si può provare a inserire questa serie nell'equazione differenziale posta e, una volta usata la regola di derivazione delle funzioni composte, trattare t e T come variabili indipendenti per poi imporre l'assenza di termini secolari al primo ordine. Successivamente, si ritorna alla sola dipendenza da t risostituendo $T = \epsilon t$, che è esattamente la scala a cui lo sviluppo perturbativo ordinario diventava critico.

La tecnica appena descritta fornisce un candidato come soluzione approssimata asintotica a grandi t , quando ovviamente questo sviluppo sia affidabile (lontano da eventuali singolarità, nei punti dove la suddetta separazione di scala sia valida, etc.). Nel seguito mostreremo l'applicazione di questo metodo in tre esempi significativi [5].

4.2.1 Equazione di Duffing

Riconsideriamo il problema di Cauchy

$$\ddot{y} + y + \epsilon y^3 = 0 \quad y(0) = 1 \quad \dot{y}(0) = 0$$

Tentiamo lo sviluppo perturbativo multiscala. Supponiamo che y dipenda da t e T . Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte e ponendo $T = \epsilon t$, si hanno le seguenti relazioni tra le derivate:

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial T} \frac{dT}{dt} = \partial_t + \epsilon \partial_T$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \rightarrow \partial_t^2 + 2\epsilon \partial_t \partial_T + \epsilon^2 \partial_T^2.$$

Dopo aver effettuato questa sostituzione trattiamo t e T come variabili indipendenti. Inseriamo la serie perturbativa della forma $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon^n y_n(t, T)$ e otteniamo:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \partial_t y_0 + \epsilon(\partial_t y_1 + \partial_T y_0) + O(\epsilon^2) \\ \ddot{y} &= \partial_t^2 y_0 + \epsilon(2\partial_t \partial_T y_0 + \partial_t^2 y_1) + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Dall'equazione differenziale completa, dopo aver sostituito la serie, si ottiene per gli ordini 0 e 1:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 y_0 + y_0 &= 0 \\ \partial_t^2 y_1 + y_1 &= -y_0^3 - 2\partial_t \partial_T y_0 \end{aligned}$$

L'integrale generale dell'ordine 0, rimanendo nell'ambito di funzioni a valori reali, è

$$y_0(t, T) = A(T)e^{it} + A^*(T)e^{-it} \quad (4.3)$$

con $A(T)$ una qualsiasi funzione complessa di T . La periodicità nella variabile veloce è quindi automaticamente verificata.

Questa soluzione compare a sua volta come termine non omogeneo nell'ordine 1. Imponiamo in quest'ultimo l'assenza di termini secolari, ossia che il termine a secondo

¹La periodicità nella variabile veloce è richiesta in quanto si può dimostrare [6] che, in generale con N variabili, definite le funzioni nelle nuove variabili veloci X_i/ϵ^{N_i} e lente X_i , la soluzione a scale multiple tende a quella esatta in un senso *debole* quando $\epsilon \rightarrow 0^+$.

membro non appartenga al kernel dell'operatore a primo membro (operazione necessaria per rendere possibile la periodicità nella variabile veloce anche all'ordine 1). Esso vale:

$$-y_0^3 - 2\partial_t \partial_T y_0 = e^{it} [-3A^2 A^* - 2i\partial_T A] + e^{-it} [-3AA^{*2} + 2i\partial_T A^*] - e^{3it} A^3 - e^{-3it} A^{*3}$$

Notiamo subito che i termini e^{it} e e^{-it} sono soluzioni nel kernel di $\partial_t^2 + \mathbf{I}$, e darebbero quindi origine a termini secolari. Imponiamo allora che i loro coefficienti siano nulli:

$$\begin{aligned} -3A^2 A^* - 2i\partial_T A &= 0 \\ -3AA^{*2} + 2i\partial_T A^* &= 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Queste due equazioni non sono indipendenti: una è la complessa coniugata dell'altra, pertanto non vi è sovrabbondanza rispetto all'incognita A , ed è sempre possibile soddisfarle. L'imposizione di una di esse assicura che, almeno fino all'ordine 1 in ϵ , non saranno presenti termini secolari nello sviluppo multiscala.

L'equazione del primo ordine ci serve quindi per imporre la condizione di non secularità dell'ordine 0 e fissare quindi tale termine dello sviluppo. Scegliamo di fermare lo sviluppo al primo ordine: se volessimo ottenere il termine di ordine 1, dovremmo infatti considerare l'equazione differenziale dell'ordine 2 per y_2 e imporre che il termine non omogeneo (che dipenderà quindi da y_0 e y_1) non sia soluzione di tale equazione: questo imporrebbe allora il vincolo sulle costanti dell'integrale generale dell'equazione dell'ordine 1 per y_1 . Questo processo può andare avanti iterativamente.

Scriviamo $A(T)$ in coordinate polari nel piano complesso $R(T)e^{i\theta(T)}$ e inseriamo nelle (4.4). Ricordando che θ e R sono funzioni reali otteniamo:

$$-3R^3 e^{i\theta} - 2ie^{i\theta} \partial_T R + 2e^{i\theta} \partial_T \theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \partial_T R = 0 \\ \partial_T \theta = \frac{3}{2} R^2 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema $A(T)$ diventa $R(0)e^{i[\theta(0)+3R^2(0)\frac{T}{2}]}$. Possiamo ora scrivere la soluzione generale approssimata all'ordine 0, ponendo finalmente $T = \epsilon t$ coerentemente con la scelta iniziale. Ne risulta:

$$y(t) = 2R(0) \cos \left[\theta(0) + \left(\frac{3}{2} R^2(0) \epsilon + 1 \right) t \right] + O(\epsilon) \quad \epsilon \rightarrow 0^+,$$

Dobbiamo infine porre le condizioni iniziali del problema di Cauchy per determinare le due costanti: $y(0) = 1$ porta a diverse possibili soluzioni che data la periodicità del seno e le sue proprietà per parità sono tutte equivalenti a $\theta(0) = 0$, $R(0) = \frac{1}{2}$; la condizione ulteriore $\dot{y}(0) = 0$ è compatibile con queste ultime. Notare che derivando rispetto a t compare un ulteriore termine proporzionale a ϵ che, essendo noi all'ordine 0, andrebbe in ogni caso trascurato. In definitiva:

$$y(t) = \cos \left[\left(\frac{3}{8} \epsilon + 1 \right) t \right] + O(\epsilon) \quad \epsilon \rightarrow 0^+,$$

La soluzione approssimata all'ordine 0 dello sviluppo a scale multiple risulta analoga alla soluzione dell'ordine 0 dello sviluppo perturbativo ordinario (che era $y(t) = \cos t$), eccetto che per la presenza di una *frequenza rinormalizzata* $\omega = 1 + 3\epsilon$. In questo caso, si può mostrare esplicitamente [5] che la somma dei termini maggiormente divergenti agli

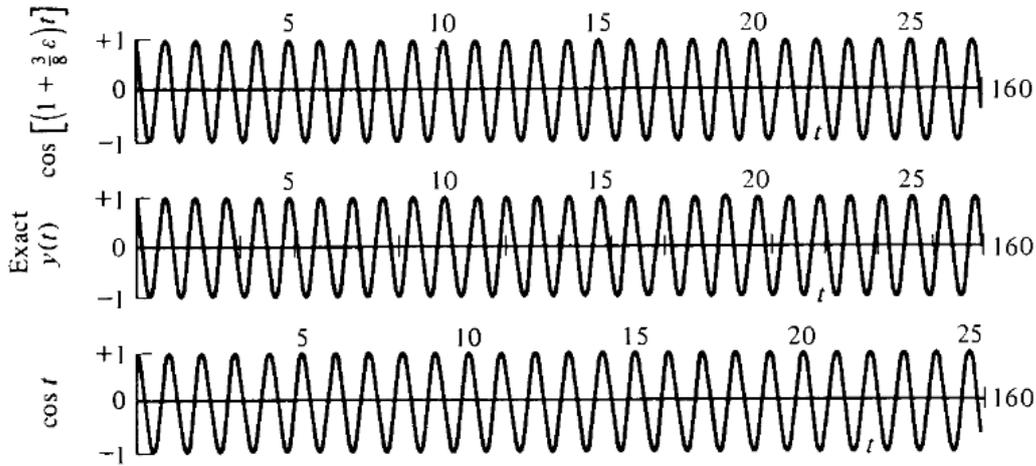


Figura 4.2 – Confronto tra soluzione multi scala, esatta e in teoria delle perturbazioni ordinaria.

ordini successivi in ϵ della serie perturbativa ordinaria restituisce l'espressione ottenuta con le scale multiple: i termini secolari a questo ordine sono quindi stati risommati. Nel grafico in figura 4.2 è presentato il caso $\epsilon = 0.2$ per $t \in [1, 160]$. Ancora per $t \gg 1$ si osserva l'indistinguibilità tra il grafico approssimato col multiscala e la soluzione dell'equazione completa ottenuta numericamente. La curva in basso invece è il normale coseno della teoria ordinaria delle perturbazioni. Come si vede, l'accordo tra coseno e soluzione esatta è buono sul primo semiperiodo, mentre, dopo un periodo, lo sfasamento comincia a risultare evidente, e a $t=160$ il coseno è rimasto indietro di due periodi completi. Risulta evidente quindi come già l'ordine 0 del multiscala sia sufficiente ad ottenere un'approssimazione molto precisa della soluzione esatta.

Il calcolo ad ordini successivi in genere risulta molto più complesso. Inoltre, l'introduzione di più di due scale non è mai banale poiché lascia spesso molta libertà e può portare a risultati ambigui.

4.2.2 Un ciclo limite

Si abbia un problema di Cauchy per la seguente *equazione dell'oscillatore di Rayleigh*:

$$\ddot{y} + y = \epsilon \left[\dot{y} - \frac{1}{3} \dot{y}^3 \right]. \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 2a$$

In questo caso, all'ordine 0 in teoria delle perturbazioni ordinaria, si avrebbe $y(t) = 2a \sin t + O(\epsilon)$. Come nell'esempio precedente, per catturare l'effetto della risommazione dei termini secolari a grandi t , imponiamo uno sviluppo a scale multiple fino al primo ordine $y(t) = y_0(t, T) + \epsilon y_1(t, T) + O(\epsilon^2)$, dove $\epsilon t = T$. La derivata seconda rispetto al tempo è già stata calcolata nell'esempio precedente, e le equazioni per l'ordine sono quindi 0 e 1

$$\partial_t^2 y_0 + y_0 = 0 \quad \partial_t^2 y_1 + y_1 = -2\partial_t \partial_T y_0 + \partial_t y_0 - \frac{1}{3} (\partial_t y_0)^3$$

La soluzione all'ordine 0 per funzioni a valori reali è, come prima, $A(T)e^{it} + A^*(T)e^{-it}$. Il termine non omogeneo dell'ordine 1 è perciò:

$$-2i\partial_T A e^{it} + 2i\partial_T A^* e^{-it} + iA e^{it} - iA^* e^{-it} + \frac{i}{3} [A^3 e^{3it} - A^{*3} e^{-3it} - 3A^2 A^* e^{it} + 3A^{*2} A e^{-it}]$$

Se si impone l'assenza dei termini secolari, ovvero l'annullarsi dei coefficienti di e^{it} e e^{-it} , si hanno le equazioni

$$-2i\partial_T A + iA - iA^2 A^* = 0 \quad 2i\partial_T A^* - iA^* + iA^{*2} A = 0,$$

che, come prima, sono l'una complessa coniugata dell'altra.

Scrivendo in forma polare $A(T) = R(T)e^{i\theta(T)}$ e inserendo in una delle due si ottiene:

$$-2i\partial_T R e^{i\theta} + 2R\partial_T \theta e^{i\theta} + iR e^{i\theta} - iR^3 e^{i\theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} R\partial_T \theta = 0 \\ -2\partial_T R + R - R^3 = 0 \end{cases}$$

da cui abbiamo, come soluzioni,

$$R = 0 \quad \cup \quad \begin{cases} \theta = \theta(0) \\ T = \ln \frac{R}{R(0)} - \ln \frac{1 - R^2}{1 - R(0)^2} \end{cases} \implies \begin{cases} \theta = \theta(0) \\ R = \sqrt{\frac{1}{\frac{1 - R(0)^2}{R(0)^2} e^{-T} + 1}} \end{cases}$$

In definitiva possiamo scrivere l'integrale generale approssimato all'ordine 0 dello sviluppo a scale multiple (dove è incluso anche il caso $R=0$) come:

$$y(t) = \frac{2R(0) \cos [t + \theta(0)]}{\sqrt{[1 - R(0)^2]e^{-\epsilon t} + R(0)^2}} + O(\epsilon), \quad \epsilon \rightarrow 0^+$$

Imponiamo ora le condizioni iniziali: $y(0)=0$ comporterebbe $R(0)=0$ oppure $\theta(0) = \pm \frac{\pi}{2}$; $\dot{y}(t)$ all'ordine 0 è $-\frac{2R(0) \sin[t+\theta(0)]}{\sqrt{[1-R(0)^2]e^{-\epsilon t} + R(0)^2}} + O(\epsilon)$, e per essere $\dot{y}(0) = 2a$ bisogna che sia $R(0) = \mp a$, opposto quindi al segno di $\theta(0) = \pm \frac{\pi}{2}$.

Abbiamo quindi l'approssimazione cercata:

$$y(t) = \frac{2a \sin t}{\sqrt{[1 - a^2]e^{-\epsilon t} + a^2}} + O(\epsilon), \quad \epsilon \rightarrow 0^+ \quad (4.5)$$

Questa volta, confrontando con la soluzione all'ordine 0 della teoria delle perturbazioni ordinaria $y = 2a \sin t + O(\epsilon)$, gli effetti della risommazione all'ordine 1 dei termini secolari che comparirebbero in tale sviluppo si riflettono nell'ampiezza modulata della soluzione multiscala. Anche in questo caso, lo pseudoperiodo delle oscillazioni fornisce una piccola scala tipica del problema.

Osserviamo che nella modulazione in ampiezza l'effetto del segno di a è irrilevante, mentre nel numeratore della (4.5) due valori di a con stesso modulo ma segno opposto si rifletterebbero nella variazione del segno dell'oscillazione, o se si preferisce, in uno sfasamento di π di quest'ultima. Per $a=0$ ritroviamo la soluzione nulla. Per $|a|=1$, la modulazione dell'ampiezza viene soppressa e la soluzione è la stessa predetta dalla soluzione perturbativa all'ordine 0 ordinaria, cioè dall'equazione differenziale priva del termine proporzionale a ϵ . Per $|a|>1$, l'argomento della radice $[1 - a^2]e^{-\epsilon t} + a^2$, e quindi la radice stessa, è crescente; essendo a denominatore, l'ampiezza allora sarà

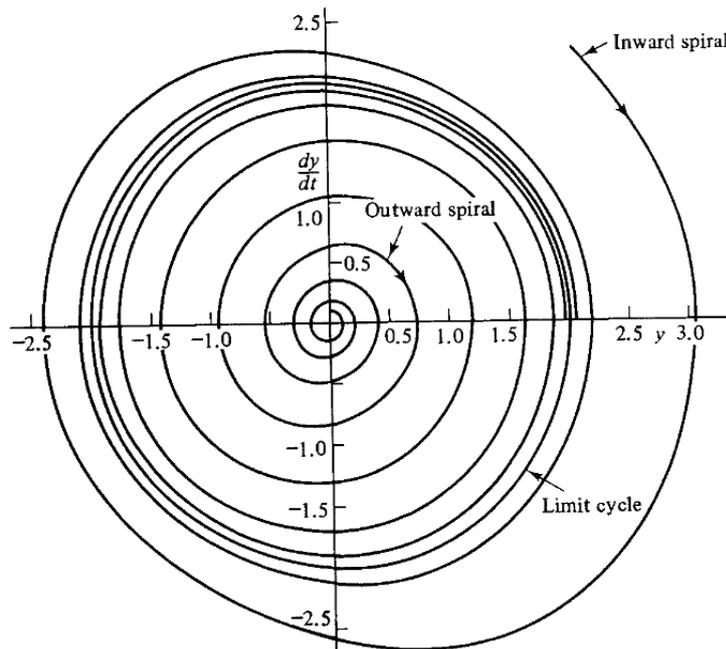


Figura 4.3 – Esempi di approccio ad un ciclo limite nello spazio delle fasi dell'oscillatore di Rayleigh.

decrecente; viceversa è per $|a| < 1$.

Quest'equazione manifesta un comportamento interessante che compare in molti sistemi dinamici non lineari e autonomi (cioè indipendenti da t esplicitamente), tra cui appunto l'oscillatore di Rayleigh. Le soluzioni, in tutti i casi, si avvicinano per $t \rightarrow +\infty$ alla soluzione $y = 2 \sin t$ asintoticamente (eccezione ovviamente per il caso $a = 1$, in cui il sistema è già su tale soluzione). Tale configurazione, che è periodica, rappresenta quindi un *ciclo limite* (figura 4.3), chiamato così poiché nello spazio delle fasi (y, \dot{y}) è rappresentato da un'orbita chiusa. Infatti, data la periodicità di y , dopo un periodo la traiettoria si ritroverà nelle stesse (y, \dot{y}) , e data l'invarianza per traslazioni temporali dell'equazione di evoluzione del sistema, la dinamica da quel punto in poi sarà la stessa del periodo precedente per tutto il periodo successivo.

Di seguito sono riportati (figura 4.4) i confronti tra grafico del multiscala a ordine 0 e della soluzione numerica completa, per $\epsilon = 0.2$ e rispettivamente $a = 0.2$, $a = 2$, per $t \in [0, 15\pi]$.

4.2.3 Approssimazione WKB

Consideriamo l'equazione delle onde nel dominio delle frequenze di Fourier della forma:

$$\epsilon^2 \partial_X^2 y(X, \omega) + \left[\frac{\omega}{c(X, \omega)} \right]^2 y = 0$$

L'equazione è stata espressa nella notazione delle variabili a grande scala poiché, se si effettua la sostituzione $X = \epsilon x$, si ottiene:

$$\partial_x^2 y(x, \omega) + \left[\frac{\omega}{c(\epsilon x, \omega)} \right]^2 y = 0 \quad (4.6)$$

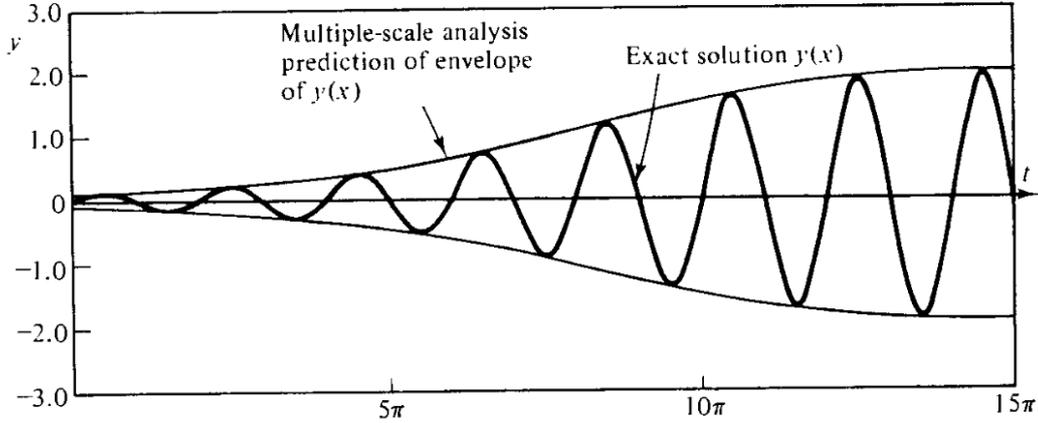


Figura 4.4 – Confronto tra soluzione esatta e involucro predetto con le scale multiple per l'approccio ad un ciclo limite.

cioè c varia su una scala di lunghezze molto grande in quanto dipende da ϵx .

Nuovamente inseriamo in quest'ultima uno sviluppo del tipo $y = y_0(x, X) + \epsilon y_1(x, X) + O(\epsilon^2)$. Così facendo otteniamo, per i vari ordini e per ogni modo a frequenza angolare ω fissata,

$$\partial_x^2 y_0 + \left[\frac{\omega}{c(X)} \right]^2 y_0 = 0 \quad \partial_x^2 y_1 + \left[\frac{\omega}{c(X)} \right]^2 y_1 = -2\partial_x \partial_X y_0$$

L'integrale generale reale dell'ordine 0 è $A(X)e^{i\frac{\omega}{c(X)}x} + A^*(X)e^{-i\frac{\omega}{c(X)}x}$. Inserendo nel termine non omogeneo del primo ordine si ottiene (indicando per brevità $\frac{\omega}{c(X)}$ con $K(X)$):

$$\partial_x^2 y_1 + K^2(X)y_1 = -2ie^{iK(X)x} \{ \partial_X [A(X)K(X)] + ixA(X)K(X)\partial_X K(X) \} + \\ + 2ie^{-iK(X)x} \{ \partial_X [A^*(X)K(X)] - ixA^*(X)K(X)\partial_X K(X) \}$$

Per cancellare la presenza dei termini secolari è necessario che gli argomenti in parentesi davanti ad essi si annullino; tuttavia, data la presenza della variabile x , l'unica possibilità è che sia $A(X) = 0$. Il metodo multiscala pertanto sembra fallire. La ragione per la quale accade ciò è che nel limite $\epsilon \rightarrow 0^+$, il termine $\frac{\omega}{c(\epsilon x)}$ dipendente da ϵ non si cancella; cioè non abbiamo un'equazione differenziale di partenza del tipo $f_1(y, y', \dots, y^{(n)}) + \epsilon f_2(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, ossia che contenga una perturbazione.

Possiamo tentare di ricondurci a una forma di questo tipo effettuando un cambio di variabili $\xi = \xi(x)$ nella (4.6), con ξ invertibile e inversa derivabile, quindi $\xi' \neq 0$. Si hanno allora le derivate:

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^2\xi}{dx^2} \frac{d}{d\xi} + \left[\frac{d\xi}{dx} \right]^2 \frac{d^2}{d\xi^2}$$

La (4.6) allora diventa:

$$\xi'' \frac{dy}{d\xi} + \xi'^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + K^2(\epsilon x)y = 0 \Rightarrow \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{K^2(\epsilon x)}{\xi'^2} y + \frac{\xi''}{\xi'^2} \frac{dy}{d\xi} = 0$$

e la si può ricondurre alla semplicissima forma dell'oscillatore armonico perturbato $\frac{d^2y}{d\xi^2} + y + \epsilon \frac{dy}{d\xi} = 0$ imponendo che $K^2(\epsilon x) = \xi'^2$, cioè

$$\xi = \pm \int_{x_0}^x K(\epsilon x') dx' = \pm \frac{1}{\epsilon} \int_{\epsilon x_0}^{\epsilon x} K(X') dX'.$$

Tenendo conto che $\xi'' = \pm \frac{dK(\epsilon x)}{dx} = \pm \epsilon \frac{dK(X)}{dX}$ si ha in definitiva:

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} + y \pm \epsilon \frac{1}{K^2(X)} \frac{dK(X)}{dX} \frac{dy}{d\xi} = 0 \quad (4.7)$$

La (4.7) è la nuova equazione su cui applicare il multiscala.

Sostituendo uno sviluppo del tipo $y = y_0(\xi, X) + \epsilon y_1(\xi, X) + O(\epsilon^2)$, dove ovviamente $X = \epsilon x(\xi)$.

Se $\frac{dX}{d\xi} = \epsilon \frac{dx}{d\xi} = \frac{\epsilon}{\xi'} = \pm \frac{\epsilon}{K(X)}$ la derivata rispetto a ξ è $\frac{d}{d\xi} = \partial_\xi \pm \frac{\epsilon}{K(X)} \partial_X$. Allora per le derivate prime e seconde si ha:

$$\frac{dy}{d\xi} = \partial_\xi y_0 + \epsilon (\partial_\xi y_1 \pm \frac{1}{K(X)} \partial_X y_0) + O(\epsilon^2) \Rightarrow \frac{d^2y}{d\xi^2} \Rightarrow \partial_\xi^2 y_0 + \epsilon (\pm \frac{2}{K(X)} \partial_\xi \partial_X y_0 + \partial_\xi^2 y_1) + O(\epsilon^2)$$

Quindi all'ordine 0 e 1:

$$\partial_\xi^2 y_0 + y_0 = 0 \quad \partial_\xi^2 y_1 + y_1 = \mp \left[\frac{\partial_X K(X)}{K^2(X)} \partial_\xi y_0 + \frac{2}{K(X)} \partial_\xi \partial_X y_0 \right]$$

Inserendo le soluzioni dell'ordine 0 $A(X)e^{i\xi} + A^*(X)e^{-i\xi}$ nell'ordine 1:

$$\partial_\xi^2 y_1 + y_1 = \mp i e^{i\xi} \left[\frac{2}{K(X)} \partial_X A + \frac{\partial_X K(X)}{K^2(X)} A \right] \pm i e^{-i\xi} \left[\frac{2}{K(X)} \partial_X A^* + \frac{\partial_X K(X)}{K^2(X)} A^* \right]$$

Porre l'assenza dei termini secolari è ora possibile e le due equazioni che si ottengono, come nei casi precedenti, sono l'una la complessa coniugata dell'altra. E' sufficiente allora che:

$$2\partial_X A + \frac{\partial_X K(X)}{K(X)} A = 0 \implies \ln A(X) = -\frac{1}{2} \ln |K(X)| + cost.$$

Le due soluzioni linearmente indipendenti approssimate all'ordine 0 del multiscala sono quindi, a meno di fasi complesse riassorbite nei coefficienti:

$$y = \frac{C_\pm}{\sqrt{K(X)}} e^{\pm i\xi} + O(\epsilon) \quad \epsilon \rightarrow 0^+.$$

Ricordando che $\xi = \pm \frac{1}{\epsilon} \int_{X_0}^X K(X') dX'$ si ottiene

$$y = \frac{C_\pm}{\sqrt{K(X)}} e^{\pm i \frac{1}{\epsilon} \int_{X_0}^X K(X') dX'} + O(\epsilon) \quad \epsilon \rightarrow 0^+$$

che è la nota *approssimazione WKB*² di estrema importanza in svariati campi della fisica, dall'ottica geometrica, all'approssimazione semiclassica in meccanica quantistica e teoria quantistica dei campi.

²Ritornando alla notazione iniziale $K(X, \omega) = \left[\frac{\omega}{c(X, \omega)} \right]$, esprimendo ogni modo normale nel dominio dei tempi si ottiene $y_0 \propto e^{i\omega t \pm i \frac{1}{\epsilon} \int_{X_0}^X \frac{\omega}{c(X', \omega)} dX'}$; per le superfici a fase costante si ha $\omega t \pm \frac{1}{\epsilon} \int_{X_0}^X \frac{\omega}{c(X', \omega)} dX' = cost.$, da cui derivando quest'ultima espressione rispetto a X si ha $\mp c(X, \omega) = \dot{X}$; i due esponenziali pertanto rappresentano le onde monocromatiche *entranti e uscenti* viaggianti in ogni punto con *velocità di fase* $c(X, \omega)$ in approssimazione WKB.

4.3 Multiscala per equazioni differenziali alle derivate parziali

I precedenti metodi possono essere analogamente utilizzati in problemi alle derivate parziali di svariato tipo. Negli esempi affrontati finora era presente un'equazione differenziale contenente un termine perturbativo e una piccola scala del problema dato, fornita da una qualche periodicità intrinseca del problema stesso. La tecnica multiscala può essere utilizzata anche in assenza di una dipendenza esplicita dell'equazione dal parametro perturbativo (che ad esempio può comparire attraverso le condizioni iniziali). Tipicamente saremo interessati all'andamento delle soluzioni a grande scala, in modo che esse risultino omogenee, senza oscillazioni su piccola scala, come se fossero viste da lontano.

La chiave cruciale nelle applicazioni seguenti sarà ancora la periodicità nelle variabili veloci dell'espansione multiscala, che appunto fornirà la cosiddetta piccola scala. Nei casi precedenti, essa era fornita intrinsecamente dal problema, poiché si aveva sempre a che fare con (o, nel caso della WKB, ci si riconduceva a) equazioni dell'oscillatore armonico perturbato: in tale situazione, l'ordine 0 dello sviluppo, che comprendeva solo le variabili veloci, consisteva proprio nell'equazione imperturbata. Pertanto le soluzioni erano degli esponenziali immaginari nelle variabili veloci con coefficienti dipendenti dalle variabili lente che, eventualmente, modificavano la periodicità della soluzione una volta tornati alle variabili originarie (equazione di Duffing). Differentemente, nei prossimi casi, questa periodicità non sarà intrinseca ma verrà imposta di volta in volta in base a considerazioni sulle simmetrie del problema.

Dopo una spiegazione matematica del problema saranno esposti diversi esempi che, gradualmente, introdurranno nuove peculiarità per giungere all'obiettivo finale di applicare le scale multiple nello studio di problemi di trasporto a grande scala per l'applicazione in modelli oceanografici.

4.3.1 Posizione del problema e condizione di risolubilità

Matematicamente si ha un'equazione differenziale o un sistema di equazioni differenziali del tipo $A\Phi = g(\Phi)$, con Φ e $g(\Phi)$ perciò eventualmente *vettori di funzioni* $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; A è quindi un operatore differenziale di ordine k , o eventualmente una matrice le cui componenti a loro volta sono operatori differenziali siffatti, della forma:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^k f_i^\alpha \partial_i^\alpha + \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha+\beta=2}^k f_{ij}^{\alpha\beta} \partial_i^\alpha \partial_j^\beta, + \dots, \quad f_i^\alpha, f_{ij}^{\alpha\beta}, \dots : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

eventualmente quindi a coefficienti non costanti, con $f_i^\alpha, f_{ij}^{\alpha\beta}, \dots, g$ invarianti rispetto a traslazioni $x_i \rightarrow x_i + L_a, \forall x_a$ di un certo L_a in ogni variabile x_a da cui dipendono esplicitamente. Ovviamente $\Phi \in C^k(\mathbb{R}^n)$, in modo tale che le derivate parziali che compaiono nell'equazione differenziale esistano su tutto il dominio \mathbb{R}^n della funzione incognita stessa.

Dette x_1, \dots, x_n le variabili in questione, per trovare un'espressione asintotica a grandi scale della soluzione, si introduce uno sviluppo dell'incognita del tipo

$$\Phi = \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon^i \Phi_i(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_n),$$

dove sono state esplicitate le derivate rispetto alle variabili originarie comprendendo anche le nuove variabili lente legate a quelle veloci da funzioni $X_n = \epsilon^k x_n$, $k > 0$ scelte in base allo specifico problema affrontato.

Si effettuano poi le seguenti ipotesi:

- si suppone che i termini dello sviluppo a scale multiple abbiano le stesse caratteristiche di periodicità delle funzioni periodiche del problema originario rispetto alle x_n per le traslazioni $x_n \rightarrow x_n + L_n$, $\forall x_n$. Data anche l'ipotesi di esistenza delle derivate che compaiono in A su tutto \mathbb{R}^n , segue che anche queste ultime hanno le suddette periodicità, come si ottiene facilmente calcolando i limiti dei rapporti incrementali; il problema quindi equivale a restringersi, nelle variabili veloci, all'iper-rettangolo n -dimensionale $C := [0, L_1] \times \dots \times [0, L_n]$, con le condizioni al contorno periodiche per Φ e le sue derivate parziali fino all'ordine precedente a quello corrispondente che compare in A (analogamente al problema di Cauchy di ordine k in una variabile, dove si impongono condizioni iniziali fino alla derivata $k - 1$ -esima) eventualmente destre o sinistre se calcolate in direzione ortogonale alle facce dell'iper-rettangolo C di periodicità;
- supponiamo che il dominio di A , o delle sue componenti nel caso Φ sia un vettore di funzioni, consista nelle funzioni con le proprietà suddette e che stiano anche in $H := L^2[C]$; questo copre di fatto tutti i casi di nostro interesse, dove le funzioni incognite (velocità, temperature, concentrazioni di inquinanti,...) sono sempre limitate nell'intervallo del periodo e quindi rientrano sicuramente in questa categoria; come noto, questo è uno spazio di Hilbert dotato di prodotto scalare $\int_C f_1(x)f_2(x)d^n x$, $f_1, f_2 \in H$, avendo a che fare con funzioni reali.

A questo punto si estrae ordine per ordine la gerarchia di equazioni differenziali nelle nuove variabili. All' i -esimo livello le uniche derivate che agiranno sull' i -esimo termine dello sviluppo Φ_i saranno quelle nelle variabili x_n , poiché non portano ulteriori potenze di ϵ . Le equazioni differenziali saranno quindi ad ogni ordine della forma:

$$A\Phi_i = \Psi(\Phi_0, \dots, \Phi_i) \quad (4.8)$$

dove A è l'operatore differenziale iniziale rispetto alle sole variabili veloci agente sulla funzione i -esima dello sviluppo, più un eventuale termine Ψ non omogeneo.

Il sistema (4.8), con le condizioni al contorno e il dominio dell'operatore A suddetto, rappresenta il problema da risolvere. Riguardo a ciò, si ha il seguente:

Teorema 1 (Condizione di risolubilità della (4.8)). *Siano i termini a coefficienti non costanti di A riscrivibili come somma di termini di derivata $\partial_i \xi_i$, con le ξ_i quantità ancora di periodi L_n , e sia invertibile la restrizione di A alle funzioni del dominio originario a media nulla. Se sotto tali ipotesi la (4.8) ammette una qualche soluzione Φ , deve necessariamente essere:*

$$\langle \Psi \rangle = 0, \quad \langle \Psi \rangle := \frac{\int_C \Psi d^n x}{\int_C d^n x} \quad (4.9)$$

Viceversa, se è data una Ψ tale che $\langle \Psi \rangle = 0$ la (4.9) è sufficiente a garantire l'esistenza di soluzioni per le (4.8). Se quindi A ha tutte le suddette caratteristiche, le (4.9) rappresentano una condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità del problema.

Dimostrazione. La dimostrazione della necessarietà nella prima parte dell'enunciato è banale: se tutti i termini a coefficienti non costanti vengono scritti come $\sum_i \partial_i \xi_i$, l'integrale su C sarà nullo per il teorema fondamentale del calcolo integrale applicato alla variabile x_i , essendo le ξ_i periodiche su C . Per la stessa ragione si annullano quindi le derivate pure che compongono A (o le sue componenti, se è una matrice di operatori differenziali). Pertanto integrando la (4.8) su C si ottiene la (4.9).

Dimostriamo ora la seconda parte. Scriviamo $\Phi = \langle \Phi \rangle + \tilde{\Phi}$, dove quindi $\langle \tilde{\Phi} \rangle = 0$. Se l'operatore ristretto, che chiameremo \tilde{A} , è invertibile, è ben definito $\tilde{A}^{-1}\tilde{\Phi}$. Possiamo quindi farlo agire da sinistra sulla (4.8), ottenendo:

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{-1}\Psi &= \tilde{A}^{-1}A(\langle \Phi \rangle + \tilde{\Phi}) = \tilde{A}^{-1}\tilde{A}\tilde{\Phi} + \tilde{A}^{-1}A\langle \Phi \rangle \Rightarrow \tilde{\Phi} = \tilde{A}^{-1}\Psi - \tilde{A}^{-1}A\langle \Phi \rangle \\ &\Rightarrow \Phi = \tilde{A}^{-1}\Psi + (\mathbf{I} - \tilde{A}^{-1}A)\langle \Phi \rangle \end{aligned} \quad (4.10)$$

con $\langle \Phi \rangle$ costante arbitraria. Siamo quindi riusciti a scrivere un'espressione esplicita della soluzione Φ data la Ψ a media nulla. Ciò completa la dimostrazione. \square

Il significato del precedente teorema è profondo e ha diversi aspetti. Innanzitutto, notiamo che dalla (4.10) sappiamo anche scrivere il nucleo ponendo $\Psi = 0$ e tenendo conto che $A\langle \Phi \rangle = 0$, in quanto operatore differenziale che agisce su una costante o su un vettore di costanti, da cui $\Phi = \langle \Phi \rangle$: il nucleo dell'operatore A che soddisfa le ipotesi del teorema sono le funzioni costanti nelle variabili veloci.

Consideriamo per il momento il caso in cui A non sia una matrice e quindi Φ è una semplice funzione. Allora la condizione di risolubilità $\langle \Psi \rangle = 0$ equivale all'*ortogonalità del termine non omogeneo rispetto al kernel di A nel senso di L^2* . Le costanti sono l'ordine 0 dello sviluppo di Fourier rispetto alle variabili veloci del termine non omogeneo periodico in C ; imporre il suo integrale nullo, significa imporre l'assenza di questa componente. Questo quindi riporta alla stessa situazione analizzata nelle equazioni differenziali con termine perturbativo esaminate nella sezione precedente e la generalizza portando alla luce una visione più astratta. In tal caso questa imposizione veniva effettuata affinché fossero assenti i termini secolari nella serie perturbativa (facendo sì che risultassero risommati). E' in questo passaggio che avviene la rinormalizzazione. La differenza è che fino ad ora il nucleo era costituito dalle funzioni oscillanti, la cui periodicità permetteva proprio l'utilizzo di queste tecniche, mentre in questo caso sono le costanti.

Osserviamo ulteriormente che, avendo l'usale prodotto scalare di L^2 , notiamo che, se ϕ_0 è nel kernel di A^\dagger , si ha:

$$(\phi_0, \Psi) = (\phi_0, A\Phi) = (A^\dagger\phi_0, \Phi) = 0$$

da cui Ψ *dev'essere ortogonale anche al kernel dell'aggiunto di A* . Questo significa che un'operatore A che soddisfa le ipotesi del teorema 1 e l'aggiunto A^\dagger hanno lo stesso kernel, che sono le costanti. Queste due considerazioni sono estendibili anche al caso in cui Φ sia un vettore di funzioni a D componenti. In tal caso, indicizzandole esplicitamente con Φ_μ , questo vivrà in uno spazio vettoriale che è $\prod_{\mu=1}^D L^2[C]$, con le componenti e le loro derivate soddisfacenti le solite condizioni periodiche ai bordi. Si può allora definire in questo insieme il prodotto scalare:

$$(\Phi, \Psi) := \sum_{\mu=1}^D \int_C \Phi_\mu \Psi_\mu d^n x$$

Allora la condizione $\langle \Psi \rangle$, essendo la media intesa componente per componente, implica che il prodotto scalare di Ψ per un generico vettore della forma

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

cioè $\sum_{\mu=1}^D c_\mu \int_C \Psi_\mu d^n x$ sia nullo. Ma i vettori costanti come già detto costituiscono il kernel dell'operatore A citato nel teorema.

Infine, troviamo l'espressione di A^\dagger , che sarà una matrice di operatori differenziali.

$$\begin{aligned} (\Phi, A\Psi) &= \sum_{\mu,\nu=1}^D \int_C \Phi_\mu A_{\mu\nu} \Psi_\nu d^n x = \sum_{\mu,\nu=1}^D \int_C (A_{\mu\nu}^\dagger \Phi_\mu) \Psi_\nu d^n x \\ &= \int_C \sum_{\mu,\nu=1}^D (A_{\mu\nu}^\dagger \Phi_\mu) \Psi_\nu d^n x := (A^\dagger \Phi, \Psi) \end{aligned}$$

avendo indicato con $A_{\mu\nu}^\dagger$ l'aggiunto dell'operatore differenziale componente che sta alla μ -esima riga e ν -esima colonna di A . L'aggiunto di un A siffatto cioè è la matrice le cui componenti sono le aggiunte di quelle della matrice originaria e poi trasposte. La condizione di risolubilità implica che Ψ sia ortogonale anche al kernel di A^\dagger , che è costituito ancora dalle costanti se A soddisfa le ipotesi del teorema 1.

4.3.2 Equazione del calore

Come semplice esempio introduttivo [7], consideriamo l'equazione del calore in un mezzo non omogeneo in una dimensione. Si abbia una sbarra di diffusività termica $k(x)$, la cui struttura a piccola scala è periodica, diciamo di periodo 2π , perciò tali saranno le sue proprietà fisiche e in particolare la stessa $k(x)$; essa sia anche estremamente più lunga di 2π , idealmente, *infinite* volte 2π (come se si guardassero le proprietà della sbarra macroscopicamente rispetto al suo periodo. Possiamo quindi considerare infinitesimo il rapporto tra il periodo di $k(x)$ e la lunghezza della sbarra. Come condizione al contorno del problema si ha che le sue estremità sono mantenute a temperature costanti rispettivamente $\tau(x_1)$ e $\tau(x_2)$.

L'equazione che governa la dinamica è allora:

$$\partial_t \tau = \partial_x [k(x) \partial_x \tau] = -\partial_x J_q \quad (4.11)$$

essendo $J_q = -k(x) \partial_x \tau$.

Approccio euristico Siamo interessati a soluzioni stazionarie, quindi raggiunte dopo il transiente temporale, trattandosi di un processo diffusivo. Naturalmente, che ciò avvenga per l'equazione in questione dovrebbe essere dimostrato: noi lo assumeremo a priori. Se il termine di derivata temporale è nullo, significa che tale è anche la derivata spaziale della corrente di calore, che quindi risulterà assumere il valore costante nello spazio e nel tempo J_q : in regime stazionario si avrebbe cioè $k(x) \partial_x \tau = \text{cost}$. Osserviamo inoltre che data la periodicità della funzione $k(x)$ l'equazione $k(x) \partial_x \tau = \text{cost}$

mostra che la soluzione $\tau(x)$ ha derivate con stessa periodicità di $k(x)$. Ciò suggerisce intuitivamente che la temperatura presenti una qualche modulazione descrivibile con una piccola scala, data dalla periodicità della diffusività termica, e un'altra variazione descritta da una scala molto più grande. Si avrebbe nelle suddette condizioni a grandi scale:

$$\tau(x_2) - \tau(x_1) = -J_q \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{k(x)} \simeq -J_q(x_2 - x_1) \left\langle \frac{1}{k(x)} \right\rangle_x$$

con $\left\langle \frac{1}{k(x)} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{k(x)}$. Allora vista in grande scala la corrente di calore sarà

$$J_q \simeq -\frac{\tau(x_2) - \tau(x_1)}{x_2 - x_1} \frac{1}{\left\langle \frac{1}{k(x)} \right\rangle_x} = -\frac{\tau(x_2) - \tau(x_1)}{x_2 - x_1} k^E$$

cioè l'ordinaria corrente termica del caso omogeneo in cui le proprietà di non uniformità spaziale sono state assorbite in una nuova diffusività termica consistente nella *media armonica* sul periodo della diffusività iniziale a piccola scala.

Approccio multi-scala Vediamo come ottenere questo risultato utilizzando rigorosamente le scale multiple. Effettuiamo uno sviluppo perturbativo della funzione incognita di temperatura del tipo $\tau_0(x, t, X, T) + \epsilon \tau_1(x, t, X, T) + \epsilon^2 \tau_2(x, t, X, T) + O(\epsilon^2)$, essendo τ , e tutte le sue derivate coinvolte, periodica nelle variabili veloci ad ogni ordine. Analogamente a quanto fatto per i problemi perturbati, saremo interessati alla soluzione all'ordine 0. Supponiamo inoltre che le variabili di grande scala siano tali che $X = \epsilon x$, $T = \epsilon^2 t$; la dipendenza quadratica della variabile temporale dal parametro è scelta in base a considerazioni di simmetria e dimensionali del problema: in questo caso si vuole arrivare a un'equazione finale di tipo diffusivo.

Così facendo le derivate risultano essere $\partial_t \rightarrow \partial_t + \epsilon^2 \tilde{\partial}_T$ e $\partial_x \rightarrow \partial_x + \epsilon \tilde{\partial}_X$. Inserendo nella (4.11), otteniamo come al solito la gerarchia dei vari ordini. L'ordine 0 è

$$\partial_t \tau_0(T, X, t, x) = \partial_x [k(x) \partial_x \tau_0(T, X, t, x)]$$

Differentemente da quanto visto negli esempi per le ODE, può capitare che, già l'ordine 0, si abbia un'equazione alle derivate parziali la cui soluzione è ardua, sia per la difficoltà di trovare un'integrale generale sia solamente nel tener conto delle eventuali condizioni al contorno. Tuttavia, in questo caso, semplici considerazioni di simmetria del problema possono chiarire e delineare la questione.

Per un corretto funzionamento della teoria è necessario che, nell'andamento della funzione τ , la scala di modulazione lenta sia ben distinta da quella veloce ed in particolare sia estremamente più grande, in modo da rientrare nel regime $\epsilon \rightarrow 0^+$, condizione senza la quale il multiscala fallisce la sua convergenza alla soluzione esatta.

Per l'ordine 0 in particolare vale il seguente risultato importante. Scriviamo $\tau_0 = \langle \tau_0 \rangle + \tilde{\tau}_0$, dove $\langle \dots \rangle$ è la media spazio-temporale sui periodi in t e x . Chiaramente $\tilde{\tau}_0$ ha media nulla.

Teorema 2. *L'unica soluzione dell'ordine 0 per le fluttuazioni a media nulla con le condizioni di periodicità poste è $\tilde{\tau}_0 = 0$.*

Dimostrazione. Indichiamo con $\langle \dots \rangle_x$ la media solamente sul periodo spaziale. Sappiamo che $\tilde{\tau}_0$ ha integrale sul periodo spaziale C nullo. Essendo $\tilde{\tau}_0$ periodica nelle variabili

spaziali, possiamo svilupparla in serie di Fourier

$$\tilde{\tau}_0(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{\tilde{\tau}}_{0n}(t) e^{i \frac{2\pi n}{C} x}$$

e, essendo assente il coefficiente per $n = 0$, si può scrivere

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |\widehat{\tilde{\tau}}_{0n}(t)|^2 \geq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\tilde{\tau}}_{0n}(t)|^2.$$

Per l'identità di Parseval,

$$\langle \tilde{\tau}_0^2(x, t) \rangle_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\tilde{\tau}}_{0n}(t)|^2$$

e, potendo derivare la serie di Fourier termine a termine, per le supposte condizioni di periodicità della funzione e delle derivate si ha

$$\langle |\partial_x \tilde{\tau}_0(x, t)|^2 \rangle_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2\pi}{C} \right)^2 n^2 |\widehat{\tilde{\tau}}_{0n}(t)|^2.$$

Da ciò, otteniamo la seguente *diseguaglianza di Poincaré*:

$$\langle |\partial_x \tilde{\tau}_0(x, t)|^2 \rangle_x \geq \left(\frac{2\pi}{C} \right)^2 \langle \tilde{\tau}_0^2(x, t) \rangle_x$$

Posto tutto ciò, moltiplichiamo per $\tilde{\tau}_0$ entrambi i membri dell'equazione dell'ordine 0 per la fluttuazione, sfruttiamo la regola di derivazione delle funzioni composte, e integriamo sulle periodicità spaziali:

$$\frac{1}{2} \langle \partial_t \tilde{\tau}_0^2 \rangle_x = \overline{\langle \partial_x [k \tilde{\tau}_0 \partial_x \tilde{\tau}_0] \rangle_x} - \langle k (\partial_x \tilde{\tau}_0)^2 \rangle_x \leq - \langle (\partial_x \tilde{\tau}_0)^2 \rangle_x \min_{x \in C} k$$

Il termine barrato è nullo per il teorema fondamentale del calcolo integrale e poiché si hanno condizioni periodiche su k , τ e sulla sua derivata in x . La disequaglianza invece viene dal fatto che, essendo sia k che $(\partial_x \tau_0)^2$ sempre positive, si ha $\int_C k (\partial_x \tilde{\tau}_0)^2 dx \geq \int_C (\partial_x \tilde{\tau}_0)^2 dx [\min_{x \in C} k]$. Perciò, dalla disequaglianza di Poincaré:

$$\frac{1}{2} \partial_t \langle \tilde{\tau}_0^2 \rangle_x \leq - \left(\frac{2\pi}{C} \right)^2 \langle \tilde{\tau}_0^2 \rangle_x \min_{x \in C} k \implies \langle \tilde{\tau}_0^2 \rangle_x \leq c e^{-2t \left(\frac{2\pi}{C} \right)^2 \min_{x \in C} k} \rightarrow_{t \rightarrow 0} 0$$

Ma la fluttuazione $\tilde{\tau}_0$ è periodica anche nel tempo per costruzione: allora $\tilde{\tau}_0 = 0 \forall t$ \square

La soluzione all'ordine 0 risulta allora $\tau_0 = \langle \tau_0 \rangle$, cioè τ_0 è costante rispetto alle variabili veloci. Inoltre, ciò mostra che il kernel dell'operatore dell'equazione del calore rispetto alle variabili veloci, sulle funzioni periodiche e limitate, è costituito dalle costanti, e pertanto la sua restrizione alle funzioni a media nulla ha kernel vuoto (solo l'elemento 0 è costante a media nulla). L'equazione all'ordine 1 è:

$$-\partial_t \tau_1(x, t, T, X) + \partial_x [k(x) \partial_x \tau_1(x, t, T, X)] = -\partial_x [k(x) \partial_X \tau_0(T, X)] - k(x) \partial_x \partial_X \tau_0(X, T)$$

Essendo l'operatore dell'equazione del calore considerata rientrante nella casistica del teorema 1, possiamo scrivere la condizione di risolubilità. A quest'ordine però, essa porta alla banale identità $0 = 0$.

Mediando l'ordine 1 integrando sul periodo temporale (indicando ciò con $\langle \dots \rangle_t$), si ha che:

$$\partial_x [k \partial_x \langle \tau_1 \rangle_t] = -\partial_x [k \partial_X \tau_0],$$

che risulta un'equazione differenziale ordinaria non omogenea per $\langle \tau_1 \rangle_t$. Siamo quindi nella stessa situazione in cui ci trovavamo nel caso delle equazioni differenziali ordinarie, in cui si volevano risommare i termini secolari. Segue che:

$$\partial_x \langle \tau_1 \rangle_t + \partial_X \tau_0 = \frac{F(X, T)}{k(x)} \implies \langle \partial_X \tau_0 \rangle = F(X, T) \left\langle \frac{1}{k(x)} \right\rangle \quad (4.12)$$

dove si è effettuata la media integrando sulla periodicità spaziale C e si è sfruttato che τ_0 è costante rispetto a x , mentre $\int_C \partial_x \langle \tau_1 \rangle_t dx = 0$ ancora banalmente per il teorema fondamentale del calcolo integrale.

L'ordine 2, infine, è dato da:

$$-\partial_t \tau_2(x, t, X, T) + \partial_x [k(x) \partial_x \tau_2(x, t, T, X)] = -\partial_x [k(x) \partial_X \tau_1(x, T, X)] + \\ -[k(x) \partial_X \partial_x \tau_1(x, T, X)] - \partial_X [k(x) \partial_X \tau_0(T, X)] - \partial_T \tau_0(X, T)$$

Otteniamo ancora la condizione di risolubilità mediando entrambi i membri spazio-temporalmente. Integrando ulteriormente sul periodo temporale e scambiando le due medie si ottiene:

$$\partial_X \langle k \partial_x \langle \tau_1 \rangle_t \rangle + \partial_X \langle k \partial_X \tau_0 \rangle - \partial_T \tau_0 = 0 \quad (4.13)$$

Esplicitiamo F dall'equazione destra delle (4.12) e inseriamola in quella a sinistra, ottenendo:

$$\partial_x \langle \tau_1 \rangle_t + \partial_X \tau_0 = \frac{\partial_X \tau_0}{k(x) \left\langle \frac{1}{k(x)} \right\rangle}$$

Da quest'ultima poi, sostituiamo $\partial_x \langle \tau_1 \rangle_t$ nella (4.13), giungendo finalmente a:

$$\partial_T \langle \tau_0 \rangle = \frac{1}{\left\langle \frac{1}{k(x)} \right\rangle} \partial_X^2 \langle \tau_0 \rangle := k^E \partial_X^2 \langle \tau_0 \rangle \quad (4.14)$$

dove si è tenuto conto del fatto che $\tau_0 = \langle \tau_0 \rangle$.

Abbiamo quindi riottenuto lo stesso risultato al quale eravamo pervenuti in modo euristico. La quantità k^E è detta *diffusività termica vestita* o *rinormalizzata (eddy diffusivity)*, per la quale le medie armoniche spazio-temporale e spaziale coincidono poiché la diffusività originaria non dipendeva dal tempo.

4.4 Applicazione ai problemi di trasporto di un campo scalare passivo

Prenderemo ora in considerazione l'applicazione della tecnica multi-scala al problema della dispersione di un campo scalare passivo $\theta(\mathbf{x}, t)$ (e.g. la concentrazione di un inquinante in ambiente), la cui formulazione è stata data nel Capitolo 3. L'aggettivo *passivo* sta a indicare il fatto che il campo $\theta(\mathbf{x}, t)$ non interviene nella dinamica del campo di

velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ che lo trasporta.

Riportiamo di seguito l'equazione che determina completamente il fenomeno di trasporto, ricavata introducendo l'ipotesi aggiuntiva di incompressibilità del flusso avvevativo ($\boldsymbol{\partial} \cdot \mathbf{v} = 0$):

$$\partial_t \theta(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\partial} \theta(\mathbf{x}, t) = D_0 \partial^2 \theta(\mathbf{x}, t) \quad (4.15)$$

dove D_0 è il coefficiente che rappresenta il processo di diffusione molecolare descritto nel Capitolo 3.

4.4.1 Soluzioni asintotiche al problema del trasporto scalare

Supponiamo che il flusso rappresentato da $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ sia periodico in tutte le direzioni e nel tempo, ed esteso idealmente a tutto lo spazio. Si noti che, indicando con $\langle \dots \rangle$ la media sull'insieme di periodicità spazio-temporale, in tali condizioni è possibile la scomposizione $\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle + \tilde{\mathbf{v}}$, dove il primo addendo del membro a sinistra è una velocità costante e il secondo una velocità a media nulla. Esiste sempre un sistema di riferimento dove si ha $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$, assumeremo pertanto tale proprietà.

Il nostro interesse è rivolto al comportamento asintotico della concentrazione su grandi lunghezze e a grandi tempi [8]

Seguendo nuovamente la procedura che caratterizza la tecnica multi-scala, introduciamo le nuove variabili $\mathbf{X} = \epsilon \mathbf{x}$ e $T = \epsilon^2 t$ ed esprimiamo la soluzione come serie perturbativa nelle potenze di ϵ (che è il rapporto tra le scale):

$$\theta(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T) = \theta_0(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T) + \epsilon \theta_1(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T) + \epsilon^2 \theta_2(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T) + \dots$$

con la consueta relazione di periodicità tra le variabili veloci spaziali e temporali dello scalare, le sue derivate coinvolte e le periodicità del flusso. Esplicitando le derivate nelle nuove variabili

$$\partial_t \rightarrow \partial_t + \epsilon^2 \partial_T, \quad \partial_i \rightarrow \partial_i + \epsilon \nabla_i, \quad \partial^2 \rightarrow \partial_i^2 + 2\epsilon \partial_i \nabla_i + \epsilon^2 \nabla_i^2$$

(dove i simboli ∂_T e ∇ rappresentano le derivate rispetto alle variabili lente e l'ultima espressione è intesa sommata sull'indice ripetuto) e sostituendo nella (4.15) si ottiene la seguente gerarchia di equazioni:

$$\begin{aligned} \epsilon^0 : \quad & \partial_t \theta_0 + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} \theta_0 - D_0 \partial^2 \theta_0 = 0 \\ \epsilon^1 : \quad & \partial_t \theta_1 + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} \theta_1 - D_0 \partial^2 \theta_1 = -\mathbf{v} \cdot \nabla \theta_0 + 2D_0 \boldsymbol{\partial} \cdot \nabla \theta_0 \\ \epsilon^2 : \quad & \partial_t \theta_2 + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} \theta_2 - D_0 \partial^2 \theta_2 = -\partial_T \theta_0 - \mathbf{v} \cdot \nabla \theta_1 + 2D_0 \boldsymbol{\partial} \cdot \nabla \theta_1 + D_0 \nabla^2 \theta_0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ponendo $\theta_0 = \langle \theta_0 \rangle + \tilde{\theta}_0$ si ottiene, all'ordine 0:

$$\partial_t \tilde{\theta}_0 + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} \tilde{\theta}_0 = D_0 \partial^2 \tilde{\theta}_0 \quad (4.17)$$

A questo stadio della trattazione è conveniente considerare il seguente

Teorema 3. *La (4.17), nelle condizioni di periodicità e media nulla poste, ha solo la soluzione $\tilde{\theta}_0 = 0$.*

Dimostrazione. Indichiamo con $\langle \dots \rangle_{\mathbf{x}}$ la media solamente sui periodi spaziali. Sappiamo che $\tilde{\theta}_0$ ha integrale sui periodi spaziali nullo. Essendo $\tilde{\theta}_0$ periodica nelle variabili spaziali, possiamo svilupparla in serie di Fourier

$$\tilde{\theta}_0(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \widehat{\tilde{\theta}}_{0\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

e, essendo assente il coefficiente per $\mathbf{k} = 0$, vale la disuguaglianza

$$\sum_{\mathbf{k}} k^2 |\widehat{\tilde{\theta}}_{0\mathbf{k}}(t)|^2 \geq \sum_{\mathbf{k}} |\widehat{\tilde{\theta}}_{0\mathbf{k}}(t)|^2.$$

Grazie all'identità di Parseval

$$\langle \tilde{\theta}_0^2(\mathbf{x}, t) \rangle_{\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{k}} |\widehat{\tilde{\theta}}_{0\mathbf{k}}(t)|^2$$

e, poiché è possibile derivare la serie di Fourier termine a termine per le supposte condizioni di periodicità della funzione e delle derivate, si ha che

$$\langle |\partial \tilde{\theta}_0(\mathbf{x}, t)|^2 \rangle_{\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{k}} k^2 |\widehat{\tilde{\theta}}_{0\mathbf{k}}(t)|^2.$$

Da ciò otteniamo la seguente *disuguaglianza di Poincaré*:

$$\langle |\partial \tilde{\theta}_0(\mathbf{x}, t)|^2 \rangle_{\mathbf{x}} \geq \langle \tilde{\theta}_0^2(\mathbf{x}, t) \rangle_{\mathbf{x}}$$

Posto tutto ciò, moltiplichiamo la (4.17) per $\tilde{\theta}_0$, sfruttando la regola di derivazione delle funzioni composte, e integriamo sulle periodicità spaziali:

$$\frac{1}{2} \langle \partial_t \tilde{\theta}_0^2 \rangle_{\mathbf{x}} + \langle \tilde{\theta}_0 \mathbf{v} \cdot \partial \tilde{\theta}_0 \rangle_{\mathbf{x}} = \langle \partial \cdot [\tilde{\theta}_0 \partial \tilde{\theta}_0] \rangle_{\mathbf{x}} - D_0 \langle |\partial \tilde{\theta}_0|^2 \rangle_{\mathbf{x}}$$

Il secondo termine barrato è nullo avendo usato il teorema della divergenza ed il fatto che il flusso uscente da un iper-rettangolo in cui l'integrando assume gli stessi valori sulle facce opposte è nullo. Il primo barrato invece, si annulla poiché:

$$\langle \tilde{\theta}_0 \mathbf{v} \cdot \partial \tilde{\theta}_0 \rangle_{\mathbf{x}} = \langle \partial \cdot [\mathbf{v} \tilde{\theta}_0^2] \rangle_{\mathbf{x}} - \langle \tilde{\theta}_0 \partial \cdot [\mathbf{v} \tilde{\theta}_0] \rangle_{\mathbf{x}} = -\langle \tilde{\theta}_0^2 \partial \cdot \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{x}} - \langle \tilde{\theta}_0 \mathbf{v} \cdot \partial \tilde{\theta}_0 \rangle_{\mathbf{x}}$$

Perciò, dalla disuguaglianza di Poincaré:

$$\frac{1}{2} \langle \partial_t \tilde{\theta}_0^2 \rangle_{\mathbf{x}} \leq -D_0 \langle \tilde{\theta}_0^2 \rangle_{\mathbf{x}} \implies \langle \tilde{\theta}_0^2 \rangle_{\mathbf{x}} \leq C e^{-2D_0 t} \rightarrow_{t \rightarrow \infty} 0.$$

La fluttuazione dalla media $\tilde{\theta}_0$ è periodica anche nel tempo per costruzione e allora $\tilde{\theta}_0 = 0 \quad \forall t$ □

Da ciò segue che $\theta_0 = \langle \theta_0 \rangle$, cioè è costante nelle variabili veloci. Per questo motivo, nelle (4.16), tutti i termini contenenti operatori di derivazione rispetto alle variabili veloci che agiscono su θ_0 o sulle sue derivate rispetto alle variabili lente, risultano nulli. Il teorema 3 mostra in generale che, nell'insieme delle funzioni con le già dette caratteristiche di periodicità, le costanti rappresentano il kernel dell'operatore dello scalare passivo, e quindi, analogamente all'equazione del calore, sarà possibile scriverne la condizione di risolubilità ad ogni ordine.

Osserviamo che, a differenza di quanto visto per le ODE, la richiesta di non singolarità della soluzione assume la connotazione di una condizione di risolubilità, in quanto nell'insieme delle funzioni periodiche e continue non possono rientrare funzioni singolari. L'ordine 1 delle (4.16) diventa quindi:

$$\partial_t \theta_1 + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} \theta_1 - D_0 \partial^2 \theta_1 = -\mathbf{v} \cdot \nabla \langle \theta_0 \rangle$$

Effettuando la media di entrambi i membri sul dominio di periodicità spazio-temporale si giunge alla forma indeterminata $0 = 0$, questo per via del fatto che $\nabla \langle \theta_0 \rangle$ è costante nelle variabili veloci e $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$. Se consideriamo l'ordine 2 in ϵ abbiamo:

$$\partial_t \theta_2 + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} \theta_2 - D_0 \partial^2 \theta_2 = -\partial_T \langle \theta_0 \rangle - \mathbf{v} \cdot \nabla \theta_1 + D_0 \nabla^2 \langle \theta_0 \rangle + 2D_0 \boldsymbol{\partial} \cdot \nabla \theta_1$$

da cui discende la condizione di risolubilità:

$$\partial_T \langle \theta_0 \rangle + \nabla \cdot \langle \mathbf{v} \theta_1 \rangle = D_0 \nabla^2 \langle \theta_0 \rangle \quad (4.18)$$

Come conseguenza della linearità delle equazioni, la soluzione all'ordine 1 è data dalla somma dell'integrale generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare dell'equazione completa:

$$\theta_1(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T) = \theta_1^{hom}(\mathbf{X}, T) + \theta_1'(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T)$$

Osserviamo che, per il teorema 3, l'integrale generale dell'equazione omogenea è costante rispetto alle variabili veloci (e quindi $\theta_1^{hom} = \langle \theta_1 \rangle$). Inoltre, data la separazione delle variabili veloci e lente nel termine non omogeneo, possiamo pensare di cercare una soluzione particolare in cui la dipendenza dalle variabili lente e veloci sia fattorizzata nel modo seguente:

$$\theta_1'(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, T) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$$

sostituendo questa espressione nell'equazione all'ordine 1 si ha che:

$$\begin{aligned} \partial_t F_i w_i + v_j \partial_j F_i w_i - D_0 \partial_j \partial_j F_i w_i &= -v_i \nabla_i \langle \theta_0 \rangle \\ F_i \partial_t w_i + F_i v_j \partial_j w_i - F_i D_0 \partial^2 w_i &= -v_i \nabla_i \langle \theta_0 \rangle. \end{aligned}$$

Da cui, vista la separazione nella dipendenza dalle variabili, seguono l'identificazione:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, T) = \nabla \langle \theta_0 \rangle$$

e le seguenti equazioni per le componenti del campo ausiliario $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$:

$$\partial_t w_i + (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial}) w_i - D_0 \partial^2 w_i = -v_i \quad (4.19)$$

Abbiamo così giustificato l'utilizzo dell'espressione:

$$\theta_1(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T) = \langle \theta_1 \rangle(\mathbf{X}, T) + \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \langle \theta_0 \rangle(\mathbf{X}, T).$$

Inserendo l'ultima espressione nella (4.18), sfruttando ancora che $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$ e che l'operatore di media sulle variabili veloci commuta con la derivazione rispetto alle lente, si ha che:

$$\partial_T \langle \theta_0 \rangle = +\cancel{\nabla \cdot \langle \mathbf{v} \theta_1 \rangle} + \nabla \cdot \langle \mathbf{v} (\mathbf{w} \cdot \nabla \langle \theta_0 \rangle) \rangle = D_0 \nabla \cdot \nabla \langle \theta_0 \rangle$$

ed esplicitando i vari termini in notazione indiciale

$$\partial_T \langle \theta_0 \rangle = D_{ij} \nabla_i \nabla_j \langle \theta_0 \rangle$$

dove

$$D_{ij} \equiv D_0 \delta_{ij} - \langle v_i w_j \rangle.$$

Per come si presenta il tensore D_{ij} non è simmetrico, tuttavia nell'equazione di evoluzione esso compare saturato sugli indici con un operatore differenziale simmetrico. Per questo motivo nell'equazione contribuisce solamente la sua parte simmetrica:

$$D_{ij}^E = D_0 \delta_{ij} - \frac{1}{2} [\langle v_i w_j \rangle + \langle v_j w_i \rangle]$$

e l'equazione per l'ordine zero dello sviluppo multi scala assume la forma finale

$$\partial_T \langle \theta_0 \rangle = D_{ij}^E \nabla_i \nabla_j \langle \theta_0 \rangle \quad (4.20)$$

Il tensore D_{ij}^E prende il nome di *tensore di diffusività vestita* o *rinormalizzata* (*eddy diffusivity tensor*), la cui anisotropia è dovuta al fatto che il flusso non è invariante per rotazioni (lo diverrebbe se fosse nullo). Chiaramente per conoscerlo bisogna risolvere l'equazione ausiliaria (4.19).

Moltiplicando ogni componente i di quest'ultima per w_j , aggiungendo l'analoga espressione con indici scambiati e mediando sulle periodicità delle loro variabili veloci si ottiene:

$$\partial_t \langle w_i w_j \rangle + v_k \partial_k \langle w_i w_j \rangle + \langle v_i w_j \rangle + \langle v_j w_i \rangle - D_0 \langle w_i \partial^2 w_j + w_j \partial^2 w_i \rangle = 0$$

Tenendo conto delle relazioni $w_j \partial^2 w_i = \partial_l (w_i \partial_l w_j) - (\partial_l w_i) (\partial_l w_j)$ diventa:

$$\langle v_i w_j \rangle + \langle v_j w_i \rangle = -2D_0 \langle \partial_l w_i \rangle \langle \partial_l w_j \rangle$$

Perciò la diffusività vestita è scrivibile anche come:

$$D_{ij}^E = D_0 \delta_{ij} + D_0 \langle \partial_l w_i \rangle \langle \partial_l w_j \rangle$$

Studiamo ora la relazione di dispersione dell'equazione rinormalizzata con questa diffusività. Operando la trasformata di Fourier di entrambi i membri, si ottiene facilmente $-i\omega = -D_{ij}^E K_i K_j$. Ma le componenti di D_{ij}^E sono una δ_{ij} sommata a una matrice della forma $A_{li} A_{lj} = A^T A$, dove A_{ij} è reale; pertanto $K_i A_{li} A_{lj} K_j = \mathbf{K}^T A^T A \mathbf{K} = \sum_n \mathbf{K}^T A^T \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^T A \mathbf{K} = \sum_n (\mathbf{e}_n^T A \mathbf{K})^2 \geq 0$, dove \mathbf{e}_n è una base di \mathbb{R}^n e si è usata la relazione di completezza. Pertanto D_{ij}^E risulta definita positiva, e così $-i\omega$ è un numero reale >0 . I modi normali con $\mathbf{K} \neq 0$ decadono nel tempo a 0, lasciando solo il modo costante a $\mathbf{K} = 0$, che rappresenta quindi la generica soluzione asintotica.

Tuttavia, sappiamo che l'equazione della diffusione (4.20) non presenta alcun tipo di andamento caotico, mentre, per lo scalare passivo, ciò si vede sia sperimentalmente sia nell'equazione di partenza (4.15) ad alti valori della quantità adimensionata $Pe = \frac{UL}{D_0}$ (dove U e L sono rispettivamente la velocità e la lunghezza tipica del problema in esame) che prende il nome di numero di Peclét. Questo significa che le perturbazioni che portano ad un andamento caotico non sono previste dall'analisi a scale multiple. Questa tecnica fallisce in tale regime poiché non esiste più una separazione di scala sufficientemente netta da far sì che $\frac{\mathbf{x}}{x} = \epsilon \rightarrow 0$ $\frac{T}{t} = \epsilon^2 \rightarrow 0$, e pertanto lo sviluppo a scale multiple non converge più alla soluzione esatta, fuoriuscendo di fatto dalle sue ipotesi di validità.

4.4.2 Multi-scala per il trasporto scalare preasintotico

Mostreremo ora come operare uno sviluppo perturbativo multiscala per il problema del trasporto scalare che tenga conto anche della presenza di un campo di velocità aggiuntivo, dipendente solo dalle variabili lente e ben separato nelle frequenze spazio-temporali rispetto al campo di piccola scala [9].

Differentemente dal caso asintotico, perché sia possibile includere questo effetto, sarà necessario troncare lo sviluppo perturbativo almeno all'ordine 1. L'equazione di partenza e le ipotesi sulle periodicità delle soluzioni cercate sono le stesse del caso asintotico. Il risultato fondamentale che troveremo sarà la presenza nell'equazione per l'evoluzione a grande scala non più di un tensore costante D_{ij}^E ma di un campo tensoriale di Eddy Diffusivity funzione del posto e del tempo: $D_{ij}^E(\mathbf{X}, T)$. Questo fatto teorico è di importanza fondamentale per gli sviluppi applicativi in contesto ambientale esaminati nel seguito della tesi.

Siamo interessati all'evoluzione del campo $\theta(\mathbf{x}, t)$ a grande scala, $O(\epsilon^{-1})$.

Anche in questo caso introduciamo le nuove variabili

$$\mathbf{X} = \epsilon \mathbf{x} \quad T = \epsilon^2 t \quad \tau = \epsilon t$$

ed operiamo lo sviluppo perturbativo

$$\theta(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T, \tau) = \theta_0(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T, \tau) + \epsilon \theta_1(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T, \tau) + \epsilon^2 \theta_2(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T, \tau) + \dots$$

In termini delle nuove variabili le ipotesi fatte sul campo di velocità avvevativo totale rendono possibile la seguente scomposizione:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{X}, T) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$$

dove $\mathbf{U}(\mathbf{X}, T)$ è supposta periodica su una scatola di lato $O(\epsilon^{-1})$ e $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ in una di lato $O(1)$.

L'introduzione di una ulteriore variabile temporale τ , con velocità di variazione intermedia rispetto a quelle già presenti nel caso asintotico (da qui l'utilizzo del termine preasintotico), permette di ottenere, per l'evoluzione a grande scala, ancora un'equazione di tipo diffusivo-avvevativo, mentre abbiamo visto precedentemente che l'equazione ricavata per lo sviluppo asintotico è formalmente identica all'equazione del calore (purementemente diffusiva).

Nuovamente siamo interessati a soluzioni che abbiano le stesse periodicità di $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

Restando valide anche in questo caso le ipotesi del teorema 3, risulta nuovamente che, nell'insieme di funzioni considerato, la soluzione per l'ordine zero e gli integrali generali delle equazioni omogenee a tutti gli ordini sono le funzioni costanti rispetto alle variabili veloci. In particolare queste funzioni non risentono dell'operazione di media sulle periodicità rispetto alle stesse variabili.

Esplicitando le derivate nelle nuove variabili, sostituendo lo sviluppo nell'equazione e operando l'usuale separazione degli ordini in ϵ si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned} \epsilon^0 : \quad & \partial_t \theta_0 + \mathbf{v} \cdot \partial \theta_0 - D_0 \partial^2 \theta_0 = 0 \\ \epsilon^1 : \quad & \partial_t \theta_1 + \mathbf{v} \cdot \partial \theta_1 - D_0 \partial^2 \theta_1 = -\partial_\tau \theta_0 - \mathbf{v} \cdot \nabla \theta_0 + \underline{2D_0 \partial \cdot \nabla \theta_0} \\ \epsilon^2 : \quad & \partial_t \theta_2 + \mathbf{v} \cdot \partial \theta_2 - D_0 \partial^2 \theta_2 = -\partial_\tau \theta_1 - \partial_T \theta_0 - \mathbf{v} \cdot \nabla \theta_1 + \underline{2D_0 \partial \cdot \nabla \theta_1} + D_0 \nabla^2 \theta_0 \end{aligned}$$

A partire dalle equazioni per gli ordini 1 e 2 e mediando rispetto alle variabili veloci si ottengono anche in questo caso condizioni di solubilità, rispettivamente:

$$\partial_\tau \langle \theta_0 \rangle = -\mathbf{U} \cdot \nabla \langle \theta_0 \rangle \quad (4.21)$$

$$\partial_\tau \langle \theta_1 \rangle + \partial_T \langle \theta_0 \rangle + \langle \mathbf{v} \cdot \nabla \theta_1 \rangle = D_0 \nabla^2 \langle \theta_0 \rangle$$

La linearità delle equazioni permette di scrivere la soluzione ad ogni ordine come somma della soluzione generale dell'equazione omogenea (che è la stessa dell'ordine zero, e quindi indipendente dalle variabili veloci) e di una particolare della specifica equazione completa. Per l'ordine 1 si ha quindi:

$$\theta_1(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T, \tau) = \langle \theta_1 \rangle(\mathbf{X}, T, \tau) + \chi(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T) \cdot \nabla \theta_0(\mathbf{X}, T, \tau).$$

dove $\chi(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T)$ ha media nulla sulle periodicità spazio-temporali e soddisfa le equazioni differenziali:

$$\partial_t \chi_j + [(\mathbf{u} + \mathbf{U}) \cdot \partial] \chi_j - D_0 \partial^2 \chi_j = -u_j \quad (4.22)$$

Sostituendo l'espressione per $\theta_1(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T, \tau)$ nella condizione di risolubilità per l'ordine 2 e tenendo conto che

$$\langle \mathbf{v} \cdot \nabla \theta_1 \rangle = \langle \mathbf{u} \rangle \nabla \langle \theta_1 \rangle + \mathbf{U} \cdot \nabla \langle \theta_1 \rangle + \langle u_i \nabla_i \chi_j \nabla_j \theta_0 \rangle + \mathbf{u} \cdot \nabla \langle \chi \rangle \cdot \nabla \theta_0$$

si ha la seguente equazione:

$$\partial_\tau \langle \theta_1 \rangle + \partial_T \langle \theta_0 \rangle + \mathbf{U} \cdot \nabla \langle \theta_1 \rangle = \nabla_i (D_{ij} \nabla_j \langle \theta_0 \rangle) \quad (4.23)$$

dove sono esplicitate le componenti mediate dello sviluppo perturbativo e avendo definito il tensore

$$D_{ij}(\mathbf{X}, T) \equiv \delta_{ij} D_0 - \langle u_i \chi_j \rangle.$$

Per ottenere l'equazione finale per il troncamento all'ordine ϵ dello sviluppo multiscala $\Theta = \langle \theta_0 \rangle + \epsilon \langle \theta_1 \rangle$ espressa in termini delle variabili veloci è necessario ricostruire le derivate rispetto alle variabili ordinarie:

$$\partial_t \Theta = \partial_t (\langle \theta_0 \rangle + \epsilon \langle \theta_1 \rangle) + \epsilon \partial_\tau (\langle \theta_0 \rangle + \epsilon \langle \theta_1 \rangle) + \epsilon^2 \partial_T (\langle \theta_0 \rangle + \epsilon \langle \theta_1 \rangle)$$

e

$$\partial \Theta = \partial (\langle \theta_0 \rangle + \epsilon \langle \theta_1 \rangle) + \epsilon \nabla (\langle \theta_0 \rangle + \epsilon \langle \theta_1 \rangle).$$

Sommando la (4.23) moltiplicata per ϵ con la (4.21) moltiplicata per ϵ^2 e aggiungendo i termini nulli

$$\partial_t (\langle \theta_0 \rangle + \epsilon \langle \theta_1 \rangle)$$

e i termini di ordine superiore

$$\epsilon^3 [\partial_T - \nabla_i (D_{ij} \nabla_j)] \langle \theta_1 \rangle$$

si ottiene l'equazione desiderata per l'evoluzione a grande scala:

$$\partial_t \Theta(\mathbf{x}, t) + \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \cdot \partial \Theta(\mathbf{x}, t) = \partial_i [D_{ij}(\mathbf{x}, t) \partial_j \Theta(\mathbf{x}, t)].$$

Osserviamo che, come per il caso asintotico, il tensore D_{ij} non è né simmetrico né definito positivo mentre lo è la sua parte simmetrica. Come prima, esprimendo il tensore D_{ij} come somma delle sue parti simmetrica e antisimmetrica $D_{ij}^E + D_{ij}^A$ e manipolando le derivate parziali in modo da ottenere un termine di tipo diffusivo, ottengo la seguente forma alternativa

$$\partial_t \Theta(\mathbf{x}, t) + \partial \cdot [\mathbf{U}^E(\mathbf{x}, t) \Theta(\mathbf{x}, t)] = \partial_i \partial_j [D_{ij}^E(\mathbf{x}, t) \Theta(\mathbf{x}, t)]$$

dove

$$U_i^E(\mathbf{x}, t) \equiv [U_i(\mathbf{x}, t) + \partial_j D_{ij}(\mathbf{x}, t)], \quad D_{ij}^E(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{D_{ij}(\mathbf{x}, t) + D_{ji}(\mathbf{x}, t)}{2}.$$

Come anticipato, il risultato principale ottenuto operando uno sviluppo preasintotico è quello di ottenere una equazione di evoluzione a grande scala che ha ancora una forma di tipo diffusione-trasporto, con la sostituzione dei parametri iniziali (D_0 e $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$) con un campo tensoriale di Eddy Diffusivity e una campo di velocità avvevativo efficace ($D_{ij}^E(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{U}^E(\mathbf{x}, t)$). Si può inoltre osservare come, a differenza della prima, la seconda forma dell'equazione di evoluzione sia scritta in termini di un tensore di diffusione simmetrico ($D_{ij}^E(\mathbf{x}, t)$) come accade in un processo di diffusione usuale, tuttavia ciò comporta la riformulazione del problema in termini di avvezione dovuta ad un campo di velocità efficace compressibile ($\mathbf{U}^E(\mathbf{x}, t)$).

Un approccio intuitivo grossolano al problema potrebbe indurre l'idea errata che, nelle condizioni di separazione di scala prese in considerazione, la rinormalizzazione del coefficiente di diffusione sia dovuta alla componente a piccola scala mentre il trasporto avvevativo sia dovuto al campo di velocità a grande scala. Contrariamente a ciò, il contenuto più importante del risultato ottenuto è proprio che, in virtù della presenza parametrica di \mathbf{U} nell'equazione ausiliaria, la rinormalizzazione del coefficiente di diffusione dipende anche dal campo a grande scala e, poiché il tensore di diffusione D_{ij} compare nell'espressione per la velocità efficace \mathbf{U}^E , le alte frequenze contribuiscono anch'esse al trasporto a grande scala.

Anche in questo caso il problema così riformulato utilizzando la teoria multi-scala necessita di essere chiuso risolvendo l'equazione ausiliaria per χ in modo da poter valutare i valori medi $\langle u_i \chi_j \rangle$ che definiscono il tensore di diffusione.

4.4.3 Un'espressione esplicita approssimata per il calcolo del campo di Eddy Diffusivity

Nel seguito di questa sezione viene mostrato come operare la chiusura del problema definito dallo sviluppo preasintotico multi-scala effettuando un'ulteriore sviluppo perturbativo della funzione ausiliaria χ .

La prima ipotesi aggiuntiva che viene introdotta è quella di campo a grande scala \mathbf{U} molto più intenso di quello a piccola scala \mathbf{u} e il parametro perturbativo utilizzato è quindi il rapporto tra le suddette ampiezze $\epsilon = \frac{u}{U}$.

In secondo luogo ipotizzeremo che il campo di piccola scala sia un campo turbolento, stazionario omogeneo e isotropo (in senso statistico) con spettro di Kolmogorov. A riguardo è possibile dimostrare, in maniera non banale [10], che i risultati formali del multiscale, ottenuti per un campo di velocità periodico, restano ancora validi per un campo casuale (con il quale si vuole riprodurre un comportamento turbolento).

Questa procedura permette il calcolo del campo di Eddy Diffusivity, in generale subordinato alla soluzione dell'equazione differenziale ausiliaria (4.22), risolvendo un'integrale nel dominio delle frequenze in cui la dipendenza dal campo di velocità a grande scala è di tipo parametrico.

Sostituiamo pertanto lo sviluppo:

$$\chi(\mathbf{x}, t, \mathbf{X}, T) = \chi_0 + \epsilon \chi_1 + \epsilon^2 \chi_2 + \dots,$$

dove le funzioni χ_n dipendono dalle variabili sia lente che veloci. Introduciamo lo sviluppo nell'equazione ausiliaria (4.22) ed eguagliamo i termini dello stesso ordine in

ε. Otteniamo così la seguente gerarchia di equazioni:

$$\begin{aligned}\partial_t \chi_0 + (\mathbf{U} \cdot \partial) \chi_0 - D_0 \partial^2 \chi_0 &= 0 \\ \partial_t \chi_1 + (\mathbf{U} \cdot \partial) \chi_1 - D_0 \partial^2 \chi_1 &= -\mathbf{u} \\ &\vdots \\ \partial_t \chi_n + (\mathbf{U} \cdot \partial) \chi_n - D_0 \partial^2 \chi_n &= -(\mathbf{u} \cdot \partial) \chi_{n-1}\end{aligned}$$

L'equazione all'ordine 0 ha la soluzione banale $\chi_0 = \chi_0(\mathbf{X}, T)$ che da contributo nullo al valor medio presente nella definizione della Eddy Diffusivity.

Le equazioni per gli ordini superiori possono essere risolte nello spazio di Fourier. Per l'ordine 1 si ha che:

$$\hat{\chi}_1(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{X}, T) = \frac{-\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \omega)}{i(\omega + \mathbf{U} \cdot \mathbf{k}) + k^2 D_0}.$$

Sostituendo quest'ultima nella definizione del tensore D ed esprimendo i campi in rappresentazione di Fourier si ha, all'ordine 1 in ϵ ,

$$D_{ij} = D_0 \delta_{ij} + \left\langle \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} d\phi d\omega \frac{\hat{u}_i(\mathbf{k}, \phi) \hat{u}_j(\mathbf{q}, \omega)}{i(\omega + \mathbf{U} \cdot \mathbf{q}) + q^2 D_0} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}} e^{i(\phi+\omega)t} \right\rangle. \quad (4.24)$$

Esplicitando l'operatore di media nell'ipotesi di funzioni periodiche come l'integrale sui periodi spazio-temporali si ha che:

$$D_{ij} = D_0 \delta_{ij} + \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} d\phi d\omega \frac{\hat{u}_i(\mathbf{k}, \phi) \hat{u}_j(\mathbf{q}, \omega)}{i(\omega + \mathbf{U} \cdot \mathbf{q}) + q^2 D_0} \frac{1}{\Delta_{\mathbf{x}}} \int d\mathbf{x} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}} \frac{1}{\Delta_t} \int dt e^{(\phi+\omega)t}.$$

Gli integrali nelle variabili spazio-temporali, opportunamente normalizzati al volume della cella di periodicità, forniscono le delta di Dirac $\delta(\mathbf{k} + \mathbf{q})$ e $\delta(\phi + \omega)$ e quindi:

$$\begin{aligned}D_{ij} &= D_0 \delta_{ij} + \int d\mathbf{q} d\omega \frac{\hat{u}_i(-\mathbf{q}, -\omega) \hat{u}_j(\mathbf{q}, \omega)}{i(\omega + \mathbf{U} \cdot \mathbf{q}) + q^2 D_0} = \\ &= D_0 \delta_{ij} + \int d\mathbf{q} d\omega \left\{ \frac{\Re[\hat{u}_i(-\mathbf{q}, -\omega) \hat{u}_j(\mathbf{q}, \omega)] q^2 D_0}{(\omega + \mathbf{U} \cdot \mathbf{q})^2 + q^4 D_0^2} + \frac{\Im[\hat{u}_i(-\mathbf{q}, -\omega) \hat{u}_j(\mathbf{q}, \omega)] (\omega + \mathbf{U} \cdot \mathbf{q})}{(\omega + \mathbf{U} \cdot \mathbf{q})^2 + q^4 D_0^2} \right\}\end{aligned}$$

dove la parte immaginaria dell'integrale è nulla a causa delle proprietà di parità dovute al fatto che $\hat{\mathbf{u}}$ è la trasformata di Fourier di una funzione reale. Questo fatto è in accordo con la realtà del tensore di diffusività.

Riscrivendo le trasformate di Fourier \hat{u}_i esplicitando le parti reale e immaginaria, $\hat{u}_i^R + i\hat{u}_i^I$, e sostituendo nell'espressione per la Eddy Diffusivity, è evidente la separazione tra la parte simmetrica e antisimmetrica del tensore:

$$\begin{aligned}D_{ij} &= D_0 \delta_{ij} + \int d\mathbf{q} d\omega \left\{ \frac{[\hat{u}_i^R(\mathbf{q}, \omega) \hat{u}_j^R(\mathbf{q}, \omega) + \hat{u}_i^I(\mathbf{q}, \omega) \hat{u}_j^I(\mathbf{q}, \omega)] q^2 D_0}{(\omega + \mathbf{U} \cdot \mathbf{q})^2 + q^4 D_0^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{[\hat{u}_i^R(\mathbf{q}, \omega) \hat{u}_j^I(\mathbf{q}, \omega) - \hat{u}_i^I(\mathbf{q}, \omega) \hat{u}_j^R(\mathbf{q}, \omega)] (\omega + \mathbf{U} \cdot \mathbf{q})}{(\omega + \mathbf{U} \cdot \mathbf{q})^2 + q^4 D_0^2} \right\}\end{aligned}$$

con

$$D_{ij}^A = \int \frac{[\hat{u}_i^R(\mathbf{q}, \omega) \hat{u}_j^I(\mathbf{q}, \omega) - \hat{u}_i^I(\mathbf{q}, \omega) \hat{u}_j^R(\mathbf{q}, \omega)] (\omega + \mathbf{U} \cdot \mathbf{q})}{(\omega + \mathbf{U} \cdot \mathbf{q})^2 + q^4 D_0^2}.$$

Pertanto la condizione per cui si annulla la parte antisimmetrica è:

$$\hat{u}_i^R(\mathbf{q}, \omega) \hat{u}_j^I(\mathbf{q}, \omega) - \hat{u}_i^I(\mathbf{q}, \omega) \hat{u}_j^R(\mathbf{q}, \omega) = 0, \quad \forall(i, j)$$

e una condizione sufficiente perché ciò avvenga è che $\hat{\mathbf{u}}^R(\mathbf{q}, \omega) = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \omega$ o $\hat{\mathbf{u}}^I(\mathbf{q}, \omega) = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \omega$. Questo si verifica quando il campo di velocità a piccola scala ha parità definita rispetto all'inversione spazio-temporale. In questo caso la dinamica preasintotica del campo scalare è governata solamente dalla parte simmetrica di D_{ij} .

Campo a piccola scala turbolento

Se, come nel nostro caso, siamo interessati ad un campo di velocità a piccola scala casuale, in modo da simulare le fluttuazioni turbolente, l'espressione (4.24) diventa

$$D_{ij} = D_0 \delta_{ij} + \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} d\phi d\omega \frac{\langle \hat{u}_i(\mathbf{k}, \phi) \hat{u}_j(\mathbf{q}, \omega) \rangle}{i(\omega + \mathbf{U} \cdot \mathbf{q}) + q^2 D_0} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}} e^{(\phi + \omega)t}$$

dove, in questo caso, le parentesi $\langle \cdot \rangle$ assumono il significato di media statistica d'insieme. L'ipotesi di turbolenza stazionaria, omogenea e isotropa, unita all'incompressibilità del campo di velocità a piccola scala, si traduce nel fatto che la trasformata di Fourier del tensore di correlazione $\langle \hat{u}_i(\mathbf{k}, \phi) \hat{u}_j(\mathbf{q}, \omega) \rangle$ sia proporzionale alle delta di dirac $\delta(\phi + \omega)$, $\delta(\mathbf{k} + \mathbf{q})$ e abbia la forma:

$$a(q, \omega) \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2} \right) \delta(\phi + \omega) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q})$$

La formula di chiusura del problema diventa quindi:

$$D_{ij}(\mathbf{X}, T) = D_0 \delta_{ij} + \int d\mathbf{q} d\omega \left[\frac{a(q, \omega) \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2} \right) q^2 D_0}{(\omega + \mathbf{U} \cdot \mathbf{q})^2 + q^4 D_0^2} \right].$$

Questa espressione è sia simmetrica che definita positiva. La traccia del tensore $A_{ij}(q, \omega)$ fornisce il legame tra la funzione $a(q, \omega)$ e lo spettro di energia del campo a piccola scala, infatti:

$$E(q) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(d-1)(s q)^{(d-1)} a(q, \omega) d\omega$$

dove d è la dimensionalità dello spazio fisico.

Inoltre è possibile fattorizzare la dipendenza dalle frequenze temporali nel modo seguente

$$a(q, \omega) = b(q) c(q, \omega)$$

con la condizione di normalizzazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c(q, \omega) d\omega = 1$$

In particolare nel seguito assumeremo

$$c(q, \omega) = H(|\omega| - \omega_l) \frac{\tau}{\pi - 2 \arctan(\omega_l \tau)} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

dove la dipendenza da q è contenuta nella definizione

$$\tau \equiv \frac{\alpha}{q\mathcal{U}}$$

in cui α è un parametro libero di *tuning* utile per una eventuale taratura e \mathcal{U} è la velocità R.M.S. della componente a grande scala (frequenze attive con $q < q_l$). Per $\omega_l = 0$ la funzione $c(q, \omega)$ coincide con la trasformata di Fourier di una funzione di correlazione della forma $\alpha e^{-\frac{q_l}{\tau}}$. La forma per τ è invece stabilita sulla base delle evidenze numeriche riscontrate in [11].

Con queste assunzioni si ha che

$$E(q) = \frac{(d-1)\pi}{2} (2q)^{(d-1)} b(q).$$

Se scegliamo per lo spettro spaziale un andamento in accordo con la teoria di Kolmogorov 1941 abbiamo che:

$$E(q) = C\epsilon^{2/3} q^{-5/3}$$

dove C è la costante di Kolmogorov ed ϵ è il *rate* di dissipazione dell'energia alle scale più piccole. Assumendo inoltre che la turbolenza sia attiva solo su frequenze spaziali maggiori di q_l è possibile esprimere $C\epsilon^{2/3}$ in termini dell'energia cinetica turbolenta \mathcal{K} definita come

$$\mathcal{K} = \int_{q_l}^{\infty} E(q) dq.$$

Da ciò si ottiene, integrando lo spettro di Kolmogorov, che

$$C\epsilon^{2/3} = \frac{2}{3} \mathcal{K} q_l^{2/3}$$

ottenendo quindi l'espressione utile per $b(q)$:

$$b(q) = \frac{\mathcal{K} q_l^{2/3} q^{-2/3-d}}{(d-1)2^{d-3}3\pi}$$

Sostituendo le espressioni ricavate nell'integrale di partenza si raggiunge la forma finale, esplicitamente integrabile,

$$D_{ij}(\mathbf{X}, T) = D_0 \delta_{ij} + \frac{\mathcal{K} q_l^{2/3}}{(d-1)2^{d-3}3\pi} \int d\mathbf{q} d\omega \left[q^{-2/3-d} \frac{\alpha}{q\mathcal{U}} \frac{H(|\omega| - \omega_l)}{\pi - 2 \arctan(\omega_l \tau)} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{\left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2} \right) q^2 D_0}{(\omega + \mathbf{U} \cdot \mathbf{q})^2 + q^4 D_0^2} \right].$$

Il calcolo dell'integrale

Per effettuare il calcolo dell'integrale è comodo considerare il problema in un sistema di coordinate ortogonali in cui un asse è orientato con la direzione locale del campo di velocità a grande scala. Questo definisce una matrice di rotazione per ogni valore delle variabili lente $R_{ij}(\mathbf{X}, T)$ e le rappresentazioni del tensore D nelle diverse coordinate sono legate dalla relazione:

$$D_{ij}(\mathbf{X}, T) = R_{ik}(\mathbf{X}, T) \tilde{D}_{kl}(\mathbf{X}, T) R_{lj}^{-1}(\mathbf{X}, T)$$

Così facendo la matrice che rappresenta il tensore di diffusione risulta diagonale e, se scegliamo l'asse z orientato secondo \mathbf{U} l'integrale da calcolare diventa:

$$\tilde{D}_{kl}(\mathbf{X}, T) = D_0 \delta_{kl} + \int d\mathbf{q} d\omega \left[\frac{a(q, \omega) \left(\delta_{kl} - \frac{q_k q_l}{q^2} \right) q^2 D_0}{(\omega + U \cos \theta q)^2 + q^4 D_0^2} \right]$$

E' immediato notare che, per ragioni di simmetria, le componenti D_{22} (yy) e D_{11} (xx) risultano uguali comunque si scelgano gli assi ortogonali x e y nel piano ortogonale alla direzione z .

Consideriamo la componente relativa alla direzione parallela a \mathbf{U} , passando in coordinate sferiche nello spazio dei numeri d'onda, si ha

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{33}(\mathbf{X}, T) = D_0 + 2\pi \int_{q_l}^{\infty} q^2 dq \int_{-1}^{+1} dx \int_{\omega_l}^{\infty} d\omega \left[\frac{q^2 D_0}{(\omega + qxU)^2 + q^4 D_0^2} + \right. \\ \left. + \frac{q^2 D_0}{(-\omega + qxU)^2 + q^4 D_0^2} \right] \frac{\tau}{\pi - 2 \arctan(\omega_l \tau)} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{E(q)}{\pi(d-1)2^{d-2}3\pi} [1 - x^2]. \end{aligned}$$

Tenendo conto del fatto che

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} dx \left[\frac{q^2 D_0}{(\omega + qxU)^2 + q^4 D_0^2} + \frac{q^2 D_0}{(-\omega + qxU)^2 + q^4 D_0^2} \right] [1 - x^2] = \\ = 2 \int_{-1}^{+1} dx \frac{q^2 D_0}{(\omega + qxU)^2 + q^4 D_0^2} [1 - x^2] \end{aligned}$$

possiamo effettuare l'integrazione rispetto a ω e, per semplificare la notazione, definire la funzione

$$\begin{aligned} \Omega(x, q, \tau) \equiv \int_{\omega_l}^{\infty} d\omega \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{q^2 D_0}{(\omega + qxU)^2 + q^4 D_0^2} = \\ = \frac{1}{q^4 \tau^4 (x^2 U^2 + D_0^2 q^2)^2 + 2\tau^2 q^2 (x^2 U^2 - D_0^2 q^2) + 1} \times \\ \times \left\{ \tau D_0^2 q^2 [\tau^2 q^2 (x^2 U^2 + D_0^2 q^2) - 1] \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\tau \omega_l) \right) + \right. \\ \left. + [\tau^2 q^2 (x^2 U^2 - D_0^2 q^2) + 1] \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{xqU + \omega_l}{D_0 q^2} \right) \right) \right\} + \\ - \tau^2 x D_0 q^3 U \ln \left(\frac{\tau^2 (xqU + \omega_l)^2 + D_2 q^4 \tau^2}{1 + \tau^2 \omega_l^2} \right) \end{aligned}$$

In termini della nuova funzione Ω l'espressione per D_{33} assume la forma finale:

$$\tilde{D}_{33}(\mathbf{X}, T) = D_0 + \int_{q_l}^{\infty} dq \int_{-1}^{+1} dx \frac{\alpha}{\mathcal{U}q} \frac{1}{\pi - 2 \arctan(\frac{\omega_l \alpha}{\mathcal{U}q})} [1 - x^2] \frac{2}{3} \mathcal{K} q_l^{2/3} q^{-5/3} \Omega(x, q, \frac{\alpha}{\mathcal{U}q})$$

e, allo stesso modo, si ottengono le espressioni per D_{11} e D_{22} :

$$\tilde{D}_{11} = \tilde{D}_{22} = D_0 + \int_{q_l}^{\infty} dq \int_{-1}^{+1} dx \frac{\alpha}{\mathcal{U}q} \frac{1}{\pi - 2 \arctan(\frac{\omega_l \alpha}{\mathcal{U}q})} x^2 \frac{2}{3} \mathcal{K} q_l^{2/3} q^{-5/3} \Omega(x, q, \frac{\alpha}{\mathcal{U}q})$$

Espressioni analoghe possono essere ottenute per il problema bidimensionale. In questo caso scegliamo per convenzione di allineare l'asse x (o 1) con la velocità locale a grande scala e otteniamo l'espressione

$$\tilde{D}_{kl}(\mathbf{X}, T) = D_0 \delta_{kl} + \int_{q_l}^{\infty} q dq \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left[\frac{a(q, \omega) \left(\delta_{kl} - \frac{q_k q_l}{q^2} \right) q^2 D_0}{(\omega + U \cos \theta q)^2 + q^4 D_0^2} \right].$$

Utilizzando nuovamente la funzione Ω e ricordando che $x = \cos \theta$, si ha che

$$\tilde{D}_{22} = D_0 + \frac{2}{\pi} \int_{q_l}^{\infty} dq \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\alpha}{\mathcal{U}q} \frac{1}{\pi - 2 \arctan\left(\frac{\omega_l \alpha}{\mathcal{U}q}\right)} \frac{2}{3} \mathcal{K} q_l^{2/3} q^{-5/3} \Omega(\cos \theta, q, \frac{\alpha}{\mathcal{U}q}) \cos^2 \theta \quad (4.25)$$

e

$$\tilde{D}_{11} = D_0 + \frac{2}{\pi} \int_{q_l}^{\infty} dq \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\alpha}{\mathcal{U}q} \frac{1}{\pi - 2 \arctan\left(\frac{\omega_l \alpha}{\mathcal{U}q}\right)} \frac{2}{3} \mathcal{K} q_l^{2/3} q^{-5/3} \Omega(\cos \theta, q, \frac{\alpha}{\mathcal{U}q}) \sin^2 \theta \quad (4.26)$$

Commenti

L'espressione ricavata contiene un integrale che può essere risolto numericamente. Nell'ottica di un utilizzo in applicazioni ambientali, la risoluzione di una formula di questo tipo risulta significativamente più agile rispetto alla soluzione diretta dell'equazione ausiliaria (4.22) (equazione differenziale stocastica). Inoltre i parametri presenti nella formula, come \mathcal{U} e \mathcal{K} sono facilmente accessibili in tutti i modelli di flussi geofisici sia appartenenti alla famiglia LES che alla RANS.

Tuttavia, per quanto risulti sensata (in certi casi) l'ipotesi assunta sulle ampiezze del campo di velocità alle diverse scale, un'analisi adimensionale accurata del problema mostra come questa formula risulti in realtà valida in un regime diverso da quello definito dai valori dei parametri che tipicamente compaiono in processi di dispersione in mare o atmosfera.

Vediamo questo fatto esplicitamente: consideriamo l'equazione (4.22):

$$\partial_t \chi_j + [(\mathbf{u} + \mathbf{U}) \cdot \boldsymbol{\partial}] \chi_j - D_0 \partial^2 \chi_j = -u_j$$

e riscriviamola in termini delle grandezze adimensionate:

$$\tilde{t} = \frac{t}{T}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \tilde{\chi} = \frac{\chi}{L}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{u^*}, \quad \tilde{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{U}}{\mathcal{U}}$$

da cui segue, per le derivate, che

$$\partial_t = \frac{1}{T} \partial_{\tilde{t}}, \quad \boldsymbol{\partial} = \frac{1}{L} \tilde{\boldsymbol{\partial}}$$

Ciò che si ottiene è la seguente equazione (nella quale, per comodità, si è omessa la tilde sopra alle variabili adimensionalizzate):

$$\partial_t \chi_j + \left(\frac{u^* T}{L} \right) (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\partial}) \chi_j + \left(\frac{\mathcal{U} T}{L} \right) (\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\partial}) \chi_j - \left(\frac{D_0 T}{L^2} \right) \partial^2 \chi_j = - \left(\frac{u^* T}{L} \right) u_j$$

Gli ordini di grandezza dei parametri in gioco nel caso di applicazioni in mare (con particolare riferimento al modello messo appunto nella tesi) sono, ad esempio:

$$D_0 \sim 10^{-9}, \quad L \sim 10^3, \quad \mathcal{U} \sim 10^{-1}, \quad T \sim 10 \quad e \quad u^* \sim \sqrt{2\mathcal{K}} \sim 10^{-2}$$

da cui seguono gli ordini di grandezza per le quantità adimensionate:

$$\left(\frac{u^*T}{L}\right) \sim 10^{-4}, \quad \left(\frac{\mathcal{U}T}{L}\right) \sim 10^{-3}, \quad \left(\frac{D_0T}{L^2}\right) \sim 10^{-14}$$

L'equazione in forma adimensionale mette in evidenza l'ordine di grandezza di ciascuno dei termini che compaiono, dato dal coefficiente adimensionato antistante il termine stesso. Emerge subito come, diversamente da quanto effettuato nel precedente sviluppo perturbativo, non sia possibile trascurare il secondo termine che compare in quanto molto maggiore del termine diffusivo.

Dall'analisi appena effettuata risulta chiaro che il problema dell'applicabilità di questa formula in flussi ambientali risiede, di fatto, nei valori tipici molto piccoli assunti dal coefficiente di diffusività molecolare.

Capitolo 5

Il Modello Oceanografico

Gran parte del lavoro di tesi è stato dedicato alla messa a punto di un modello oceanografico per la simulazione del campo di corrente nell'area del Mar Mediterraneo centro-occidentale, con particolare attenzione allo studio delle correnti superficiali nella zona del Mar Ligure.

Per questa seconda parte di modellistica oceanografica è stato utilizzato il modello open-source ROMS (Regional Ocean Modeling System), largamente utilizzato dalla comunità oceanografica internazionale.

Nel seguito del capitolo sono illustrate le caratteristiche del modello utilizzato e della specifica configurazione messa a punto, nonché alcuni dei risultati ottenuti per il campo di corrente.

5.1 Formulazione del Modello ROMS

5.1.1 Generalità sui Modelli Oceanografici

Sulla base degli sforzi fatti in passato a livello di modellistica e della conoscenza che abbiamo dei processi fisici coinvolti nella dinamica oceanica, è attualmente impossibile mettere a punto un modello di oceano universale, che descriva accuratamente tutti i fenomeni presenti dalle grandi alle piccole scale, in tutti i bacini del mondo. Questo è dovuto sia alla limitatezza delle prestazioni dei calcolatori, che ad una descrizione incompleta dei processi fisici come, ad esempio, la turbolenza.

Per questo motivo gli sforzi in campo modellistico hanno necessariamente subito una differenziazione sulla base delle specifiche applicazioni di interesse.

I criteri sulla base dei quali ha avuto luogo la differenziazione dei modelli sono molteplici (figura 5.1):

- Geografia: è chiaro come vi siano differenze sostanziali tra modelli che descrivono aree geografiche differenti come ad esempio l'intero sistema oceanico mondiale, i grandi bacini di Pacifico e Atlantico, il bacino chiuso del Mar Mediterraneo, il Golfo del Messico, ...
- Processi fisici descritti: esistono modelli che descrivono fenomeni prettamente idrodinamici, termodinamici o entrambi.
- Modellizzazione della superficie: libera o a coperchio rigido

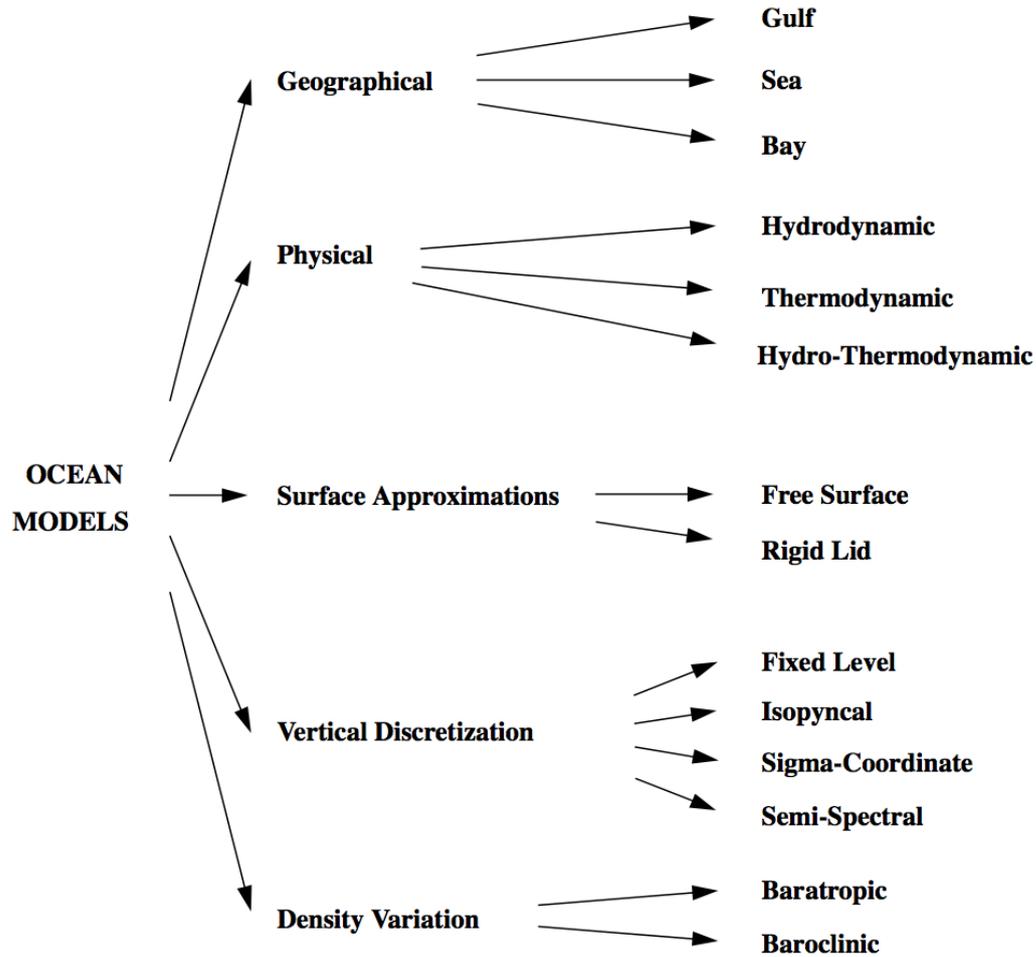


Figura 5.1 – Schema riassuntivo dei criteri di classificazione di un modello oceanografico.

- Trattazione del grado di libertà verticale
- Considerazione delle variazioni di densità

5.1.2 Le equazioni del moto

ROMS appartiene alla classe dei modelli numerici tridimensionali, a superficie libera, con coordinate che seguono il terreno e che risolvono le equazioni di Navier-Stokes mediate alla Reynolds utilizzando le approssimazioni idrostatica e di Boussinesq. Le equazioni del modello scritte in coordinate cartesiane sono le seguenti:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla u - fv = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{u'w'} - \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + F_u + D_u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v + fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{v'w'} - \nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + F_v + D_v$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\rho}{\rho_0} g$$

l'incompressibilità del campo di velocità si traduce nell'annullamento della sua divergenza:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

mentre il trasporto dei campi scalari C , sia attivi che passivi, è descritto dall'equazione di diffusione-avvezione:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla C = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{C'w'} - D_0 \frac{\partial C}{\partial z} \right) + F_C + D_C$$

è inoltre necessaria un'equazione di stato che ponga in relazione i campi scalari attivi (temperatura e salinità) con la densità del fluido:

$$\rho = \rho(T, S, P).$$

La barra sovrastante le variabili e l'apice ne indicano rispettivamente la media temporale e la fluttuazione rispetto ad essa. Il seguente elenco riporta il significato delle variabili del problema:

- $C(x, y, z, t)$: temperatura, salinità ed eventuali campi scalari passivi
- D_u, D_v, D_C : termini diffusivi opzionali
- F_u, F_v, F_C : termini forzanti e di sorgente
- $f(x, y)$: parametro di Coriolis
- g : accelerazione di gravità
- $h(x, y)$: profondità riferita al livello medio del mare
- $H_z(x, y, z)$: spaziatura tra i livelli verticali della griglia
- ν, ν_θ : viscosità e diffusività molecolari
- K_M, K_C : eddy viscosity e diffusivity verticali
- P : pressione totale ($P \sim -\rho_0 g z$)
- $\phi(x, y, z, t)$: pressione dinamica (P/ρ_0)
- $\rho_0 + \rho(x, y, z, t)$: densità locale totale
- $S(x, y, z, t)$: salinità
- t : tempo
- $T(x, y, z, t)$: temperatura potenziale
- u, v, w : componenti di del campo di velocità
- x, y : coordinate orizzontali
- z : coordinata verticale

- $\zeta(x, y, t)$: elevazione della superficie libera

Queste equazione vengono chiuse parametrizzando gli stress di Reynolds e i flussi turbolenti dei traccianti nel modo seguente:

$$\overline{u'w'} = -K_M \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \overline{v'w'} = -K_M \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \overline{C'w'} = -K_C \frac{\partial C}{\partial z}.$$

Nell'approssimazione di Boussinesq vengono trascurate le variazioni di densità nelle equazioni della quantità di moto fatta eccezione per il loro contributo alla forza di galleggiamento (buoyancy) nell'equazione per la componente verticale della quantità di moto. Inoltre l'approssimazione idrostatica comporta l'ulteriore assunzione che il gradiente di pressione verticale bilanci la forza di galleggiamento.

Le forzanti e la dissipazione orizzontale sono incluse nei termini F e D mentre il mixing verticale e orizzontale sarà spiegato nel seguito.

5.1.3 Condizioni al contorno

Condizioni al contorno verticali

Le condizioni al contorno verticali, in termini delle variabili precedentemente definite, possono essere espresse nel modo seguente:

- in superficie, ovvero per $z = \zeta(x, y, t)$:

$$\begin{aligned} K_M \frac{\partial u}{\partial z} &= \tau_s^x(x, y, t) \\ K_M \frac{\partial v}{\partial z} &= \tau_s^y(x, y, t) \\ K_C \frac{\partial C}{\partial z} &= \frac{Q_C}{\rho_0 C P} \\ w &= \frac{\partial \zeta}{\partial t} \end{aligned}$$

- sul fondo, ovvero per $z = -h(x, y)$:

$$\begin{aligned} K_M \frac{\partial u}{\partial z} &= \tau_b^x(x, y, t) \\ K_M \frac{\partial v}{\partial z} &= \tau_b^y(x, y, t) \\ K_C \frac{\partial C}{\partial z} &= 0 \\ -w + \vec{v} \cdot \nabla h &= 0 \end{aligned}$$

dove

- Q_C è il flusso di concentrazione superficiale dello scalare C
- $\tau_s^x(x, y, t), \tau_s^y(x, y, t)$ sono le componenti dello stress superficiale dovuto al vento
- $\tau_b^x(x, y, t), \tau_b^y(x, y, t)$ rappresentano lo stress sul fondo

Lo stress superficiale è calcolato a partire dal campo di vento secondo la formula (quadratica nella velocità):

$$\boldsymbol{\tau}_s = \rho_{aria} C \sqrt{U_{10}^2 + V_{10}^2} \mathbf{V}_{10}$$

dove U_{10} e V_{10} sono le componenti della velocità del vento \mathbf{V}_{10} a 10 m di altezza sulla superficie del mare e C è una costante.

Sul fondo del bacino invece la velocità orizzontale è soggetta ad uno stress che può essere scelto tra lineare, quadratico o logaritmico. Nel nostro specifico caso è stato scelto di utilizzare uno stress quadratico, la cui relazione con il campo di velocità sul fondo è analoga al caso superficiale:

$$\boldsymbol{\tau}_b = \rho_{H_2O} C_D \sqrt{u^2 + v^2} \mathbf{v}$$

dove ora \mathbf{v} con le componenti orizzontali della corrente sul fondo e C_D è una costante il cui valore è solitamente fissato a 10^{-3} . Sebbene sia inoltre possibile assegnare un flusso verticale di concentrazione sul fondo, questo viene usualmente posto nullo.

Condizioni al contorno orizzontali

ROMS ha la possibilità di implementare diverse tipologie di condizioni al contorno, sia con bordi aperti o chiusi, sia di tipo periodico. Una illustrazione approfondita di tutte le possibilità è contenuta in [12]. In base alla scelta effettuata ROMS necessita dei valori dei campi ai bordi forniti in maniera analitica o attraverso file NetCDF opportunamente strutturati.

Opportune tecniche di *nudging* permettono inoltre di poter rilassare i valori interni del campo a quelli forniti da studi climatologici o da modelli a scala maggiore, con la possibilità di determinare punto per punto il tempo caratteristico di rilassamento.

5.1.4 Coordinate verticali

ROMS risolve le equazioni del moto utilizzando un sistema di coordinate verticali, non ortogonali, le cui superfici coordinate seguono la forma della batimetria, un esempio in sezione è riportato in figura 5.2. Dal punto di vista della discretizzazione verticale è inoltre possibile, attraverso una funzione di stretching, variare con una certa libertà la distribuzione del numero di livelli lungo la direzione verticale. In questo modo può essere ottenuta una migliore risoluzione in superficie o sul fondo in base alle finalità del modello (figura 5.2).

Il legame tra le usuali coordinate e le terrain-following è espresso dalle seguenti trasformazioni:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x \\ \hat{y} &= y \\ \sigma &= \sigma(x, y, z) \\ z &= z(x, y, \sigma) \\ \hat{t} &= t \end{aligned} \tag{5.1}$$

dove $-1 \leq \sigma \leq 0$ e $\sigma = 0$, $\sigma = -1$ corrispondono rispettivamente alla superficie libera e al fondo del bacino.

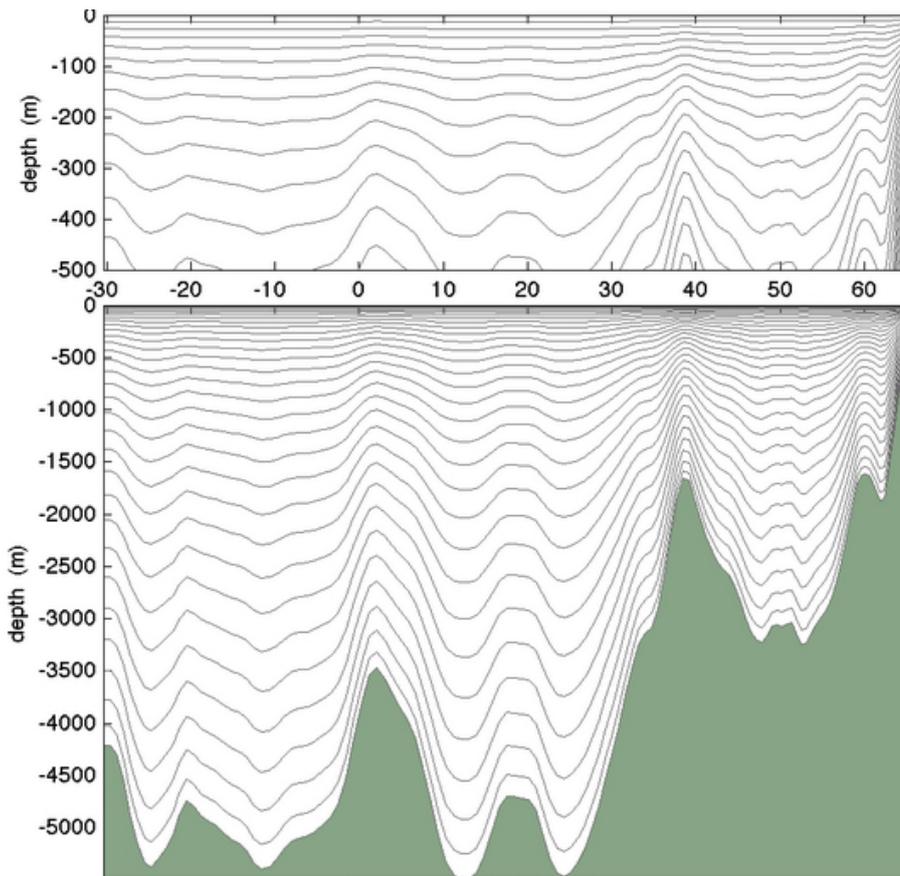


Figura 5.2 – Esempio che illustra una sezione verticale delle superfici sigma. E' evidente la caratteristica fondamentale delle coordinate terrain-following di adattarsi al profilo della batimetria [13]. Inoltre possiamo notare come, in questo caso particolare, i livelli discreti siano stati posizionati in modo tale da ottenere una maggiore risoluzione verticale in superficie. Infatti piu di un terzo del numero totale di livelli rimane ad una profondità minore di 500 metri, indipendentemente dalla batimetria sottostante.

Seguono dalle trasformazioni (5.1) le relazioni tra le derivate nelle due rappresentazioni:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_z &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_\sigma - \left(\frac{1}{H_z}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \\ \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_z &= \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_\sigma - \left(\frac{1}{H_z}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right) \frac{\partial}{\partial \sigma} = \frac{1}{H_z} \frac{\partial}{\partial \sigma}, \quad H_z \equiv \frac{\partial z}{\partial \sigma}\end{aligned}$$

Le suddette trasformazioni mappano il reticolo di calcolo irregolare dello spazio fisico in uno regolare nello spazio delle $(\hat{x}, \hat{y}, \sigma)$ ed è su questo reticolo ideale che il kernel di ROMS risolve le seguenti equazioni dinamiche, opportunamente modificate dall'introduzione dei necessari fattori di forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla u - fv = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \left(\frac{g\rho}{\rho_0}\right) \frac{\partial z}{\partial x} - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{H_z} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{K_M}{H_z} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right] + F_u + D_u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v - fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \left(\frac{g\rho}{\rho_0}\right) \frac{\partial z}{\partial y} - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{H_z} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{K_M}{H_z} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right] + F_v + D_v$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} = \left(-\frac{gH_z\rho}{\rho_0} \right)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial(H_z u)}{\partial x} + \frac{\partial(H_z v)}{\partial y} + \frac{\partial(H_z \Omega)}{\partial \sigma} = 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla C = \frac{1}{H_z} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{K_C}{H_z} \frac{\partial C}{\partial \sigma} \right] + F_C + D_C$$

$$\rho = \rho(T, S, P).$$

dove

$$\vec{v} = (u, v, \Omega), \quad \vec{v} \cdot \nabla = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \Omega \frac{\partial}{\partial \sigma},$$

$$\Omega(x, y, \sigma, t) = \frac{1}{H_z} \left[w - \left(\frac{z+h}{\zeta+h} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial t} - u \frac{\partial z}{\partial x} - v \frac{\partial z}{\partial y} \right],$$

$$w = u \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} + \Omega H_z$$

e con le nuove condizioni al contorno:

- in superficie, ovvero per $\sigma = 0$:

$$\frac{K_M}{H_z} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \tau_s^x(x, y, t)$$

$$\frac{K_M}{H_z} \frac{\partial v}{\partial \sigma} = \tau_s^y(x, y, t)$$

$$\frac{K_C}{H_z} \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{Q_C}{\rho_0 C P}$$

$$\Omega = 0$$

- sul fondo, ovvero per $\sigma = -1$:

$$\begin{aligned}\frac{K_M}{H_z} \frac{\partial u}{\partial \sigma} &= \tau_b^x(x, y, t) \\ \frac{K_M}{H_z} \frac{\partial v}{\partial \sigma} &= \tau_b^y(x, y, t) \\ \frac{C_M}{H_z} \frac{\partial C}{\partial \sigma} &= 0 \\ \Omega &= 0\end{aligned}$$

Tra i vantaggi della scelta di coordinate terrain-following si ha, una implementazione notevolmente semplificata delle condizioni al contorno, e la necessità di un minor numero di livelli verticali per risolvere la dinamica in acque basse o sul fondo del dominio rispetto a modelli che utilizzano le usuali coordinate-z.

Per contro, questo tipo di coordinate introduce sistematicamente un errore di tipo numerico (dovuto alla discretizzazione) nel calcolo dei gradienti di pressione orizzontali, ponendo di fatto un limite sulla libertà di scelta dei livelli verticali e richiedendo maggiore attenzione anche nel fissare la risoluzione orizzontale in relazione alla ripidità della batimetria.

Per quanto riguarda il dettaglio delle trasformazione $z = z(t, x, y, \sigma)$, ROMS ha la possibilità di effettuare la mappatura tra lo spazio fisico e il dominio ideale delle coordinate σ (in cui il modello integra le equazioni del moto) in diversi modi. Nel caso particolare della applicazione messa a punto nella tesi, la forma esplicita utilizzata per la trasformazione è la seguente:

$$z(x, y, \sigma, t) = S(x, y, \sigma) + \zeta(x, y, t) \left[1 + \frac{S(x, y, \sigma)}{h(x, y)} \right]$$

dove

$$S(x, y, \sigma) = h_c \sigma + [h(x, y) - h_c] C(\sigma)$$

è una funzione nonlineare di trasformazione verticale e $C(\sigma)$ è una funzione di stretching verticale (figura 5.). Questa funzione, una volta effettuata la discretizzazione della variabile σ , offre la possibilità di modificare localmente la risoluzione verticale della griglia di calcolo. Anche per la funzione di stretching sono possibili diverse scelte, l'espressione utilizzata nel nostro caso è la seguente:

$$C(\sigma) = (1 - \theta_B) \frac{\sinh(\theta_S \sigma)}{\sinh \theta_S} + \theta_B \left[\frac{\tanh[\theta_S(\sigma + \frac{1}{2})]}{2 \tanh \frac{1}{2} \theta_S} - \frac{1}{2} \right]$$

dove θ_S e θ_B sono parametri che controllano la risoluzione superficiale e sul fondo. La funzione $C(\sigma)$ va intesa ristretta all'intervallo $-1 \leq \sigma \leq 0$ ed ha le seguenti proprietà:

- $-1 \leq C(\sigma) \leq 0$ dove per $\sigma = 0$ (superficie libera) $C(\sigma) = 0$ e per $\sigma = -1$ (fondo del bacino) $C(\sigma) = -1$
- è monotona, adimensionale e non lineare
- è continua e infinitamente differenziabile in σ

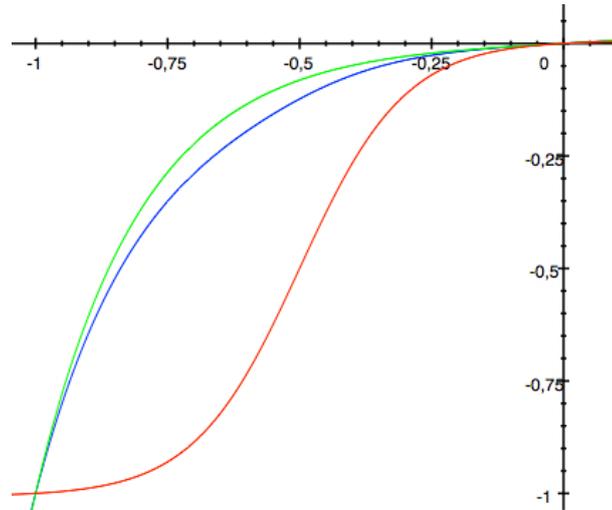


Figura 5.3 – Esempi di funzioni di stretching $C(\sigma)$. Il parametro θ_S è tenuto fisso al valore 5 mentre viene variato il parametro θ_B che gestisce la risoluzione sul fondo. I valori significativi sono quelli compresi tra -1 e 0 , sia nelle ascisse (σ) che nelle ordinate ($C(\sigma)$). La curva verde è associata al valore $\theta_B = 0$ pertanto la risoluzione verticale sul fondo è minima. Aumentando θ_B (curva blu) la risoluzione sul fondo aumenta progressivamente a spese di quella superficiale, fino ad equipararla per $\theta_B = 1$ (curva rossa)

Per capire qualitativamente come funziona la trasformazione di coordinate utilizzata consideriamo il caso in cui la superficie libera sia in quiete ($\zeta(x, y, t) = 0$). In questo caso la coordinata zeta coincide proprio con il valore assunto dalla funzione $S(x, y, \sigma, t)$. Analizziamo cosa accade in un punto fissato della griglia orizzontale in cui la batimetria assume il valore (positivo) h . Nell'effettuare la discretizzazione verticale viene fissato un numero intero di livelli n , corrispondenti a valori di σ , equispaziati nell'intervallo $[-1, 0]$. La profondità locale dell' i -esimo livello sigma sarà data da due contributi, uno indipendente dalla batimetria locale: $i \frac{h_c}{n}$, che è multiplo di una frazione di h_c , e un'altro costituito da una frazione dell'altezza della colonna d'acqua rimanente al di sotto di h_c , opportunamente riscalato in base alla funzione $C(\sigma)$: $i \frac{h-h_c}{n} C(\sigma)$. Alla luce di quanto detto, il parametro h_c assume il significato di profondità entro cui è assicurata in linea di massima una certa risoluzione, indipendentemente dalle variazioni nella batimetria.

5.1.5 Risoluzione numerica delle equazioni

Discretizzazione del dominio

Lungo le direzioni orizzontali (ξ, η) viene adottata una tradizionale approssimazione al secondo ordine centrata. I punti orizzontali in cui sono valutate le variabili sono disposti secondo una griglia C di Arakawa, dove i campi scalari e le componenti del campo di velocità sono valutate su griglie differenti, reciprocamente sfalsate (*staggered grid*), vedi figura (5.4). Anche per la direzione verticale viene effettuata la discretizzazione approssimando alle differenze finite del secondo ordine e vengono utilizzate griglie sfasate per la componente verticale del campo di velocità e le altre grandezze, figura (5.5).

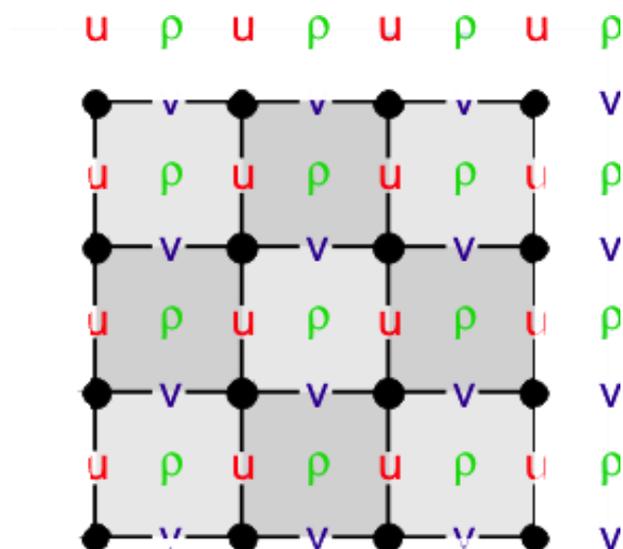


Figura 5.4 – Griglia C di Arakawa: la discretizzazione orizzontale del dominio avviene per mezzo di questa tipica griglia staggered. I punti di calcolo delle grandezze scalari si trovano a centro cella (punti ρ) mentre le componenti orizzontali del campo di velocità vengono calcolate sulle rispettive griglie sfalzate u e v

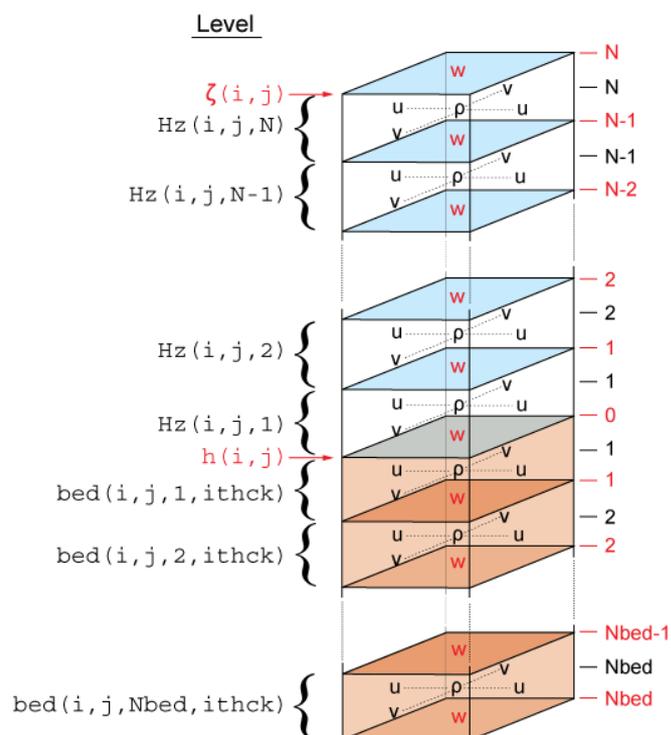


Figura 5.5 – Discretizzazione verticale: anche lungo la direzione verticale i punti in cui viene calcolata la componente verticale del campo di velocità (punti w) sono sfalzati (appartengono a superfici sigma diverse) rispetto ai livelli in cui giacciono le griglie orizzontali di Arakawa. In figura sono anche riportati livelli aggiuntivi sul fondo che possono essere opzionalmente usati nelle applicazioni che studiano il trasporto di sedimenti.

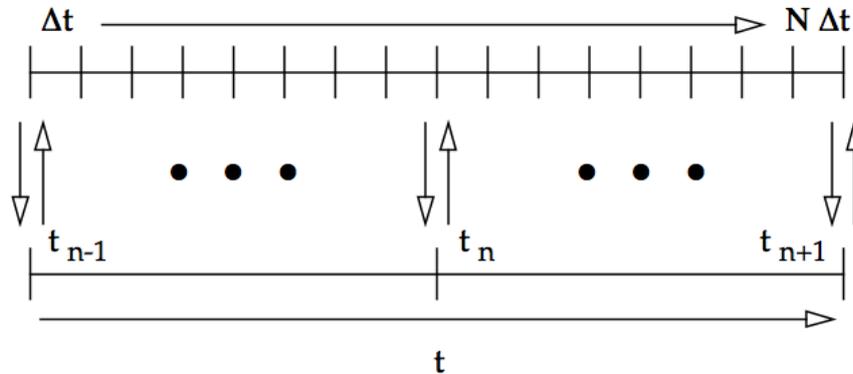


Figura 5.6 – Rappresentazione schematica dello *split-explicit time step* utilizzato da ROMS. L'asse superiore rappresenta le iterazioni barotropiche effettuate con passo Δt , mentre quello inferiore quelle barocline, più lente. Le frecce verticali indicano le interazioni tra i due modi in cui avviene la correzione.

Time-step

Nell'effettuare il passo temporale del modello, abbiamo a disposizione i valori dei campi salvati all'istante $n - 1$, una stima degli stessi all'istante corrente n , e vogliamo ottenerne una stima allo step $n + 1$.

Per ragioni di efficienza ROMS effettua l'evoluzione temporale con uno *split-explicit time step*, ovvero integra le equazioni integrate sulla colonna d'acqua con un passo temporale più breve rispetto a quello utilizzato per l'integrazione delle equazioni tridimensionali complete. Mantenendo comunque un rapporto intero M tra i due intervalli. Il dettaglio di come viene effettuato il calcolo dipende dalla specifica versione di ROMS, tuttavia, in ogni caso, al termine degli M passi veloci, opportune medie dei campi bidimensionali barotropici vengono calcolate. Tali medie sono confrontate con i valori integrati sulla verticale dei campi baroclini tridimensionali e una procedura di correzione tende a far accordare i valori di questi ultimi (calcolati con un passo maggiore) con i primi (figura 5.6).

5.2 Configurazione del modello

L'applicazione messa a punto durante la tesi riguarda un'ampia area, delimitata dalle linee coordinate terrestri corrispondenti ai seguenti valori di latitudine e longitudine:

latitudine minima: $37^{\circ}, 33'$ N
 latitudine massima: $44^{\circ}, 29'$ N
 longitudine minima: $1^{\circ}, 0'$ O
 longitudine massima: $15^{\circ}, 13'$ E.

Dal punto di vista geografico i limiti Sud e Nord dell'area simulata corrispondono a paralleli che passano rispettivamente attraverso la Sicilia (a mezza altezza tra Catania e Siracusa) e nell'entroterra Ligure, mentre in direzione Est-Ovest, il dominio è delimitato rispettivamente dai meridiani che attraversano l'Italia in prossimità di Salerno e la Spagna ad ovest di Valencia (figura 5.7).



Figura 5.7 – Immagine dal satellite del dominio fisico di calcolo del modello (eccezione fatta per la parte di Mar Adriatico)

La discretizzazione orizzontale del dominio fisico sopra definito avviene per mezzo di una griglia telescopica (a passo variabile), in cui la risoluzione spaziale aumenta verso l'interno fino a raggiungere una passo spaziale costante, di circa $1/64$ di grado, nella zona di massima risoluzione. Le dimensioni del reticolo, in termini di numero di punti, sono 314 nella direzione N-S e 590 in quella E-O, per un totale di 185260 punti di griglia orizzontale (di cui 108724 effettivi punti di mare).

La discretizzazione verticale è realizzata con 50 livelli sigma, distribuiti nella verticale come mostrato in figura (5.8), avendo scelto come valori dei parateri di stretching $\theta_S = 5.0$ e $\theta_B = 0.1$. Poichè per gli scopi applicativi della tesi l'attenzione è rivolta allo studio della circolazione superficiale, i valori così scelti dei parametri di stretching comportano l'addensarsi dei livelli nella parte superiore della colonna d'acqua. La batimetria utilizzata (figura 5.9) proviene dal database *ETOPO1 global relief* [14] ed ha una risoluzione nominale di $1'$ di grado. Per l'inizializzazione del modello è stata utilizzata una simulazione di spinup di due anni a partire da campi di velocità ed elevazione della superficie marina ovunque nulli. Per i campi scalari di temperatura e salinità sono stati invece utilizzati i valori climalogici ottenuti mediando su tutti i mesi di Gennaio del periodo 2004-2010 mentre sono state utilizzate ciclicamente le forzanti atmosferiche climatologiche mensili del Comprehensive Ocean-Atmosphere Data Set (COADS) [15]

Al termine della fase di spin-up il modello lavora a regime, utilizzando le forzanti atmosferiche provenienti dal modello WRF del DICCA Unige. Questi dati sono forniti con una risoluzione temporale di un'ora e spaziale di $1/10$ di grado [16].

Lo stress sul fondo del bacino è calcolato utilizzando una relazione quadratica analoga a quella per lo stress superficiale del vento: Le condizioni ai bordi per l'idrologia e le velocità provengono dal modello Mediterraneo MFS [17] L'implementazione delle condizioni al contorno è realizzata utilizzando, per i campi barotropici, la condizione di radiazione di Flather [18]:

$$\bar{u} = \bar{u}^{ext} - \sqrt{\frac{g}{D}}(\zeta - \zeta^{ext})$$

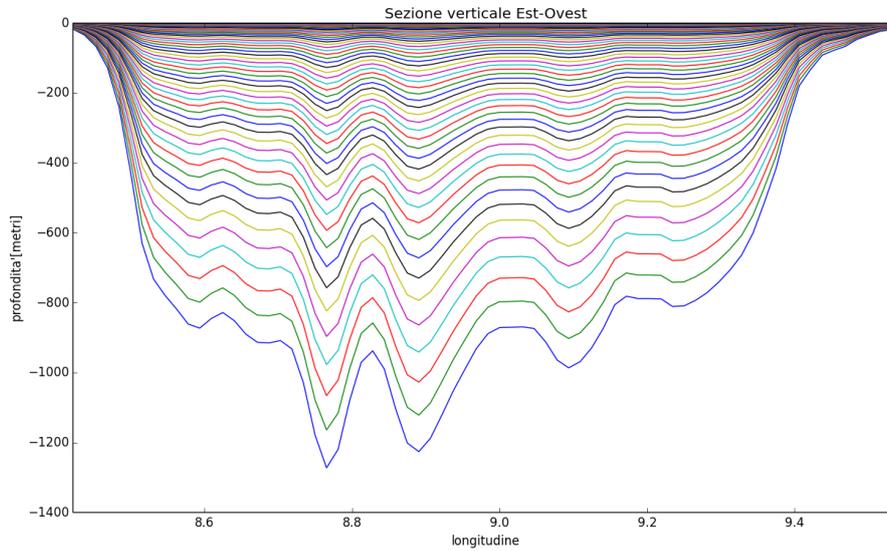


Figura 5.8 – Sezione verticale nella direzione Est-Ovest delle superfici sigma del modello, effettuata ad una latitudine fissa di circa 44.2°N , immediatamente al largo di Genova. Sono visibili, intorno al valore di longitudine 8.8°O , i profili dei canyon sottomarini in corrispondenza delle foci dei fiumi Polcevera e Bisagno. Si noti infine come la risoluzione verticale sia fortemente spinta in superficie.

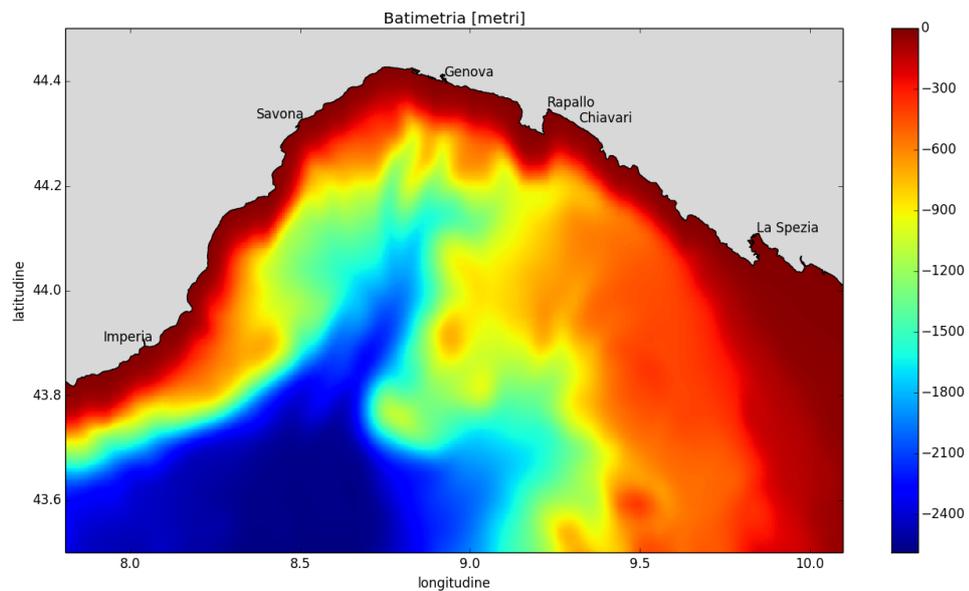


Figura 5.9 – Batimetria della parte di dominio corrispondente al Mar Ligure. Emerge chiaramente la complessità morfologica di questo bacino.

(dove \bar{u}^{ext} e il ζ^{ext} sono i valori di velocità integrata sulla verticale e innalzamento della superficie libera, provenienti dal file esterno utilizzato per produrre le condizioni al contorno, e D è l'altezza totale della colonna d'acqua). Questa scelta permette di espellere dal dominio le differenze rispetto ai valori esterni con la velocità tipica delle onde di gravità esterne.

Differentemente i campi baroclini vengono rilassati a quelli MFS attraverso tecniche di *nudging* entro 10 punti dai bordi del dominio. La scala temporale di rilassamento è pari a un giorno ed aumenta linearmente verso l'interno fino a raggiungere il valore di 10 giorni.

Lo schema numerico avvertivo utilizzato da ROMS è uno schema sopraflusso del terzo ordine ed è descritto nel dettaglio in [19].

La simulazione è attuata con l'algoritmo standard GLS (generic length scale) di ROMS [20] che definisce nella direzione verticale una chiusura turbolenta di tipo $K - \epsilon$ con funzioni di stabilità Canuto-A [21].

Infine l'applicazione realizza l'evoluzione temporale utilizzando un time-step barotropico (veloce) di 1 secondo e uno baroclinico di 30 secondi.

Il criterio utilizzato per la determinazione dei passi temporali è basato sulla condizione di stabilità computazionale di Courant-Friedrichs-Levy (CFL). Per quanto riguarda il modo barotropico si ha che:

$$\Delta t_{fast} \leq \frac{1}{C_t} \left| \frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2} \right|^{-1/2}$$

dove δx e δy sono le spaziatore di griglia nelle direzioni x e y e $C_t = 2\sqrt{gH} + U_{max}$, con H altezza caratteristica del fondale e U_{max} velocità massima attesa. Tipicamente il passo temporale barotropico scelto è circa il 90% di questo limite.

Analogamente per il time step baroclinico si ha che:

$$\Delta t_{slow} \leq \frac{1}{C_T} \left| \frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2} \right|^{-1/2}$$

dove $C_T = 2C + U_{max}$ e C è la massima velocità possibile per le onde di gravità interne. Valori tipici di C_T si aggirano intorno ai 2 m/s e il rapporto tra i passi temporali lento e veloce può raggiungere, in applicazioni costiere, anche valori compresi tra 50 e 80.

Per concludere nelle figure 5.10, 5.11, 5.12 e 5.13 sono riportati rispettivamente: il campo e il grafico in scala di colori, di velocità e stress superficiali relativamente al giorno 4 Gennaio 2004, ore 18.00. In merito al campo di velocità è ben visibile la corrente ligure provenzale [22] che percorre l'arco ligure parallelamente alla costa e in senso antiorario (da Est verso Ovest). Per quanto riguarda lo stress superficiale fornito dal modello atmosferico WRF, il flusso maggiore si ha in corrispondenza della città di Genova e in direzione Nord-Sud.

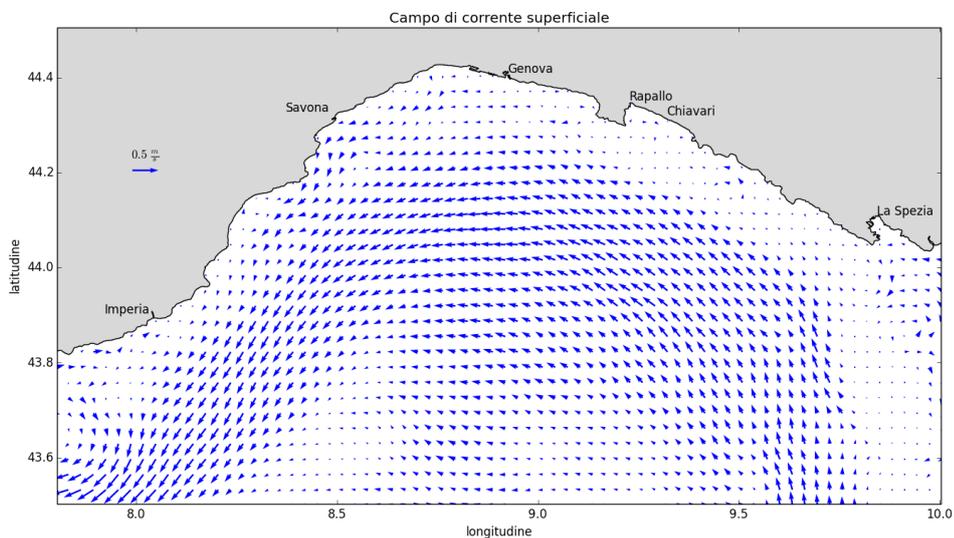


Figura 5.10 – Campo di corrente superficiale simulato dal modello oceanografico per il giorno 4 Gennaio 2004, ore 18.00.

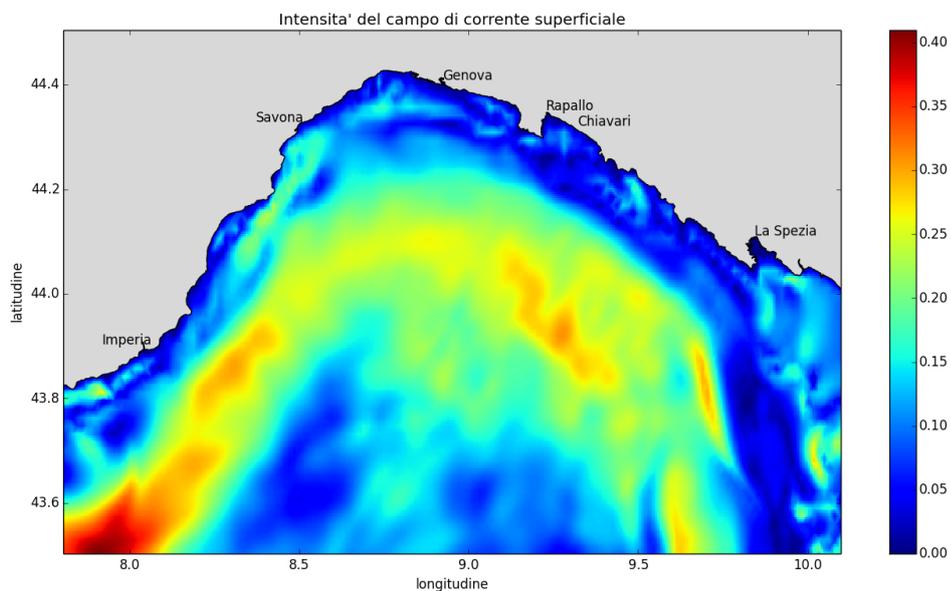


Figura 5.11 – Intensità del campo di corrente superficiale simulato dal modello oceanografico per il giorno 4 Gennaio 2004, ore 18.00.

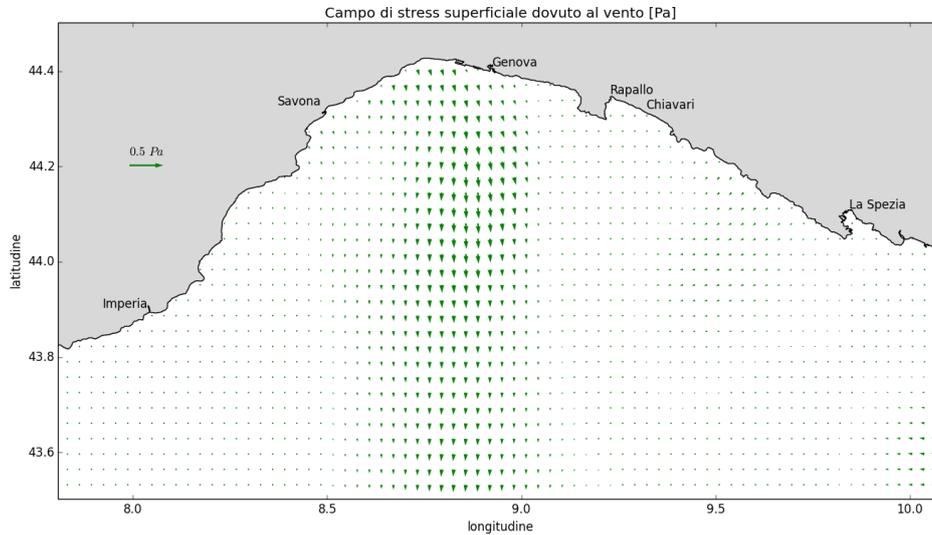


Figura 5.12 – Campo di stress superficiale (in Pascal) dovuto al vento e fornito dal modello atmosferico per il giorno 4 Gennaio 2004, ore 18.00.

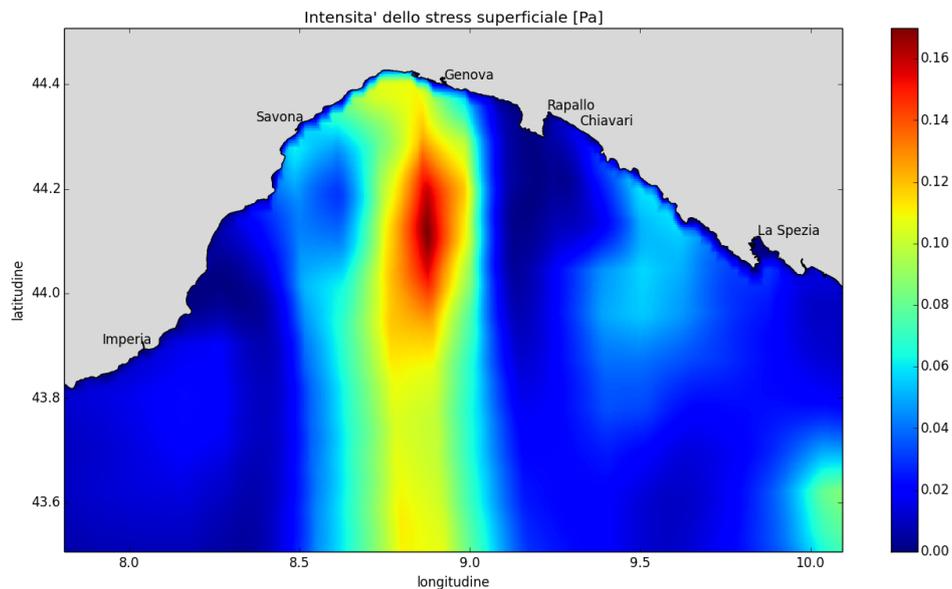


Figura 5.13 – Intensità del campo di stress superficiale (in Pascal) dovuto al vento e fornito dal modello atmosferico per il giorno 4 Gennaio 2004, ore 18.00.

Capitolo 6

Applicazione al modello oceanografico

6.1 Introduzione

In questo capitolo vedremo come valutare il campo di Eddy Diffusivity in una situazione realistica. Applicheremo i risultati teorici ottenuti, ad un ipotetico fenomeno di dispersione ambientale nel campo di corrente in superficie fornito dal modello oceanografico messo a punto.

Come già sottolineato, la difficoltà principale nello studio di fenomeni dispersivi in contesto ambientale, risiede nella limitata conoscenza del campo di velocità avvettivo. I valori di tale campo sono noti infatti su griglie spaziali a grana grossa, con passi reticolari molto maggiori delle scale tipiche a cui avviene la diffusione molecolare e su cui è attiva la gran parte dello spettro turbolento. Da qui la necessità di introdurre una diffusività rinormalizzata.

Mentre la maggior parte dei modelli attualmente in uso effettua stime semi-empiriche dei coefficienti di diffusione effettivi (come ad esempio la chiusura di Smagorinsky), la teoria multi-scala riconduce il problema della valutazione delle Eddy Diffusivity direttamente ai principi primi.

Come mostrato al termine del capitolo 4, le formule integrali (4.25) e (4.26), ricavate nella sezione 4.4.3 risolvendo perturbativamente l'equazione ausiliaria (4.22), non possono essere applicate nel caso di dispersione in flussi ambientali. Pertanto, in questo capitolo, valuteremo il campo di Eddy Diffusivity per mezzo di una tecnica di tipo Lagrangiano.

Il risultato finale di tutta la procedura è la realizzazione di una mappa dell'andamento del campo di diffusività efficace su tutto il dominio di interesse. Noto tale campo è immediato il calcolo del campo \mathbf{U}^E e la conseguente valutazione della correzione al campo di velocità avvettivo.

6.2 Una tecnica per il calcolo del campo di Eddy Diffusivity

Supponiamo di suddividere lo spazio attorno ad ogni punto di griglia del modello oceanografico in molte celle di dimensioni molto inferiori rispetto al passo di griglia, all'interno delle quali sono attivi campi di velocità turbolenti, scorrelati tra una cella e l'altra. La dimensione di queste celle definisce quindi il numero d'onda minimo su cui

ho attiva la dinamica turbolenta. Ci troviamo nelle condizioni di separazione di scala in cui abbiamo sviluppato fino ad ora tutta la teoria.

Se rilasciamo una nuvola di particelle di tracciante all'interno di una cella, dopo un certo tempo, queste saranno uscite dalla cella di partenza e risentiranno di campi avvevativi a piccola scala totalmente scorrelati.

Sotto queste ipotesi quindi, il trasporto avvevativo di ciascuna particella sarà soggetto ad un contributo costante di *drift* dato dal valore, nella zona considerata, della velocità a grande scala (risolta dal modello oceanografico), unito al trasporto turbolento del campo di piccola scala.

Il problema definito in rappresentazione euleriana dall'equazione di diffusione-trasporto

$$\partial_t \theta + \mathbf{U} \cdot \nabla \theta = \partial^2 \theta$$

(dove \mathbf{U} è la velocità fornita dal modello) è equivalente, in un contesto lagrangiano, alla seguente equazione di Langevin:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{U} + \mathbf{v}$$

(dove \mathbf{v} è un campo casuale tale da riprodurre l'effetto della turbolenza sulla piccola scala).

A partire da ciò possiamo effettuare esperimenti numerici a U fissato, in cui l'osservabile interessante sarà la media, sull'insieme delle particelle rilasciate, dello spostamento quadratico dalla posizione iniziale:

$$\sigma^2(t) \equiv \langle (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0))^2 \rangle.$$

Come abbiamo già sottolineato, la caratteristica dei fenomeni diffusivi è che la varianza della distribuzione di concentrazione di tracciante cresca linearmente con il tempo e con la diffusività:

$$\sigma^2 = Dt.$$

Osservando come evolve nel tempo l'osservabile σ^2 nelle direzioni parallela e perpendicolare alla velocità di drift possiamo ricavare i coefficienti di diffusione turbolenta effettuando un fit lineare dei dati in funzione del tempo ed estraendo la pendenza della retta fittata sui dati.

Per riprodurre l'effetto del campo di velocità turbolento ho utilizzato un modello cinematico basato sulla seguente scomposizione del campo di velocità bidimensionale in modi oscillatori:

$$u(x, y, t) = \sum_{i=1}^N A_i(i) \sin[k_i x - k_i \epsilon_i \sin(\omega_i t)] \cos[k_i y - k_i \epsilon_i \sin(\omega_i t + \theta_i)]$$

$$v(x, y, t) = - \sum_{i=1}^N A_i(i) \cos[k_i x - k_i \epsilon_i \sin(\omega_i t)] \sin[k_i y - k_i \epsilon_i \sin(\omega_i t + \theta_i)]$$

dove x e y sono le coordinate spaziali in cui si trova la particella di tracciante considerata all'istante t ; A_i e k_i sono rispettivamente le ampiezze del campo di velocità e del numero d'onda corrispondente al modo i -esimo; N è il numero di modi considerati; ϵ_i e ω_i sono rispettivamente l'ampiezza e la pulsazione delle oscillazioni temporali e θ_i sono fasi arbitrarie.

I modi spaziali possono essere distribuiti secondo un dato fattore di densità, per esempio $k_{i+1} = \rho k_i$ con $\rho = \sqrt{2}$. Le ampiezze di velocità sono prodotte casualmente nel tempo secondo l'equazione di Langevin del tipo:

$$\frac{dA_i}{dt} = -\frac{A_i}{\tau_i} + \sqrt{\frac{2\langle A_i^2 \rangle}{\tau_i}} \eta_i,$$

dove, per ogni i , η_i è un rumore bianco gaussiano a media nulla, con $\langle \eta_i(t)\eta_i(t') \rangle \propto \delta(t-t')$.

Queste assunzioni permettono di avere un'autocorrelazione esponenziale per le ampiezze, con tempi caratteristici di rilassamento τ_i . I tempi di rilassamento possono essere a loro volta funzione dei modi spaziali (ad esempio $\tau_i \sim \alpha/A_{rms}k_i$ dove A_{rms} è la velocità quadratica media) in modo da simulare un decadimento della funzione di correlazione temporale a due punti del campo di velocità di tipo esponenziale e dipendente dalla scala.

Nel nostro caso assegneremo un fattore di scala tra le ampiezze dei modi in accordo con la teoria di Kolmogorov: $\langle A_i^2 \rangle \sim (\epsilon k_i)^{-2/3}$, dove ϵ è la frequenza media di dissipazione turbolenta equivalente.

6.3 Mappe di diffusività

La procedura descritta nella sezione precedente permette di ottenere, per ogni valore della velocità a grande scala, i corrispondenti valori di diffusività rinormalizzate, rendendo così possibile la determinazione a grande scala di un campo tensoriale di diffusività. La procedura è indipendente dall'orientazione locale del vettore velocità a grande scala e fornisce come risultato i due coefficienti di diffusione parallelo e perpendicolare a tale vettore. Queste due grandezze determinano infatti completamente la matrice associata al tensore D^E nel sistema di coordinate in cui l'asse x è orientato secondo U e in cui la matrice risulta diagonale.

Pertanto, similmente a quanto visto per il calcolo dell'integrale nella sezione 4.4.3, per ottenere la matrice associata al tensore D^E nelle usuali coordinate cartesiane, è necessario operare la trasformazione:

$$D_{ij}(\mathbf{X}, T) = R_{ik}(\mathbf{X}, T) \tilde{D}_{kl}(\mathbf{X}, T) R_{lj}^{-1}(\mathbf{X}, T) \quad (6.1)$$

dove \tilde{D}_{ij} è la matrice diagonale nel sistema di coordinate localmente ruotato. Si ha quindi che:

$$\tilde{D}_{ij} = \begin{pmatrix} \tilde{D}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{D}_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

e

$$D_{ij} = R_{il} \tilde{D}_{lk} R_{kj}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{D}_{11} \cos^2 \theta + \tilde{D}_{22} \sin^2 \theta & (\tilde{D}_{22} - \tilde{D}_{11}) \cos \theta \sin \theta \\ (\tilde{D}_{22} - \tilde{D}_{11}) \cos \theta \sin \theta & \tilde{D}_{22} \cos^2 \theta + \tilde{D}_{11} \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

dove θ è l'angolo formato dal vettore \mathbf{U} rispetto alla direzione positiva dell'asse x nell'usuale sistema di coordinate cartesiane.

Stabilito ciò, la procedura per la produzione delle mappe di diffusività consiste nei seguenti passaggi:

1. si sceglie un istante di tempo sul quale effettuare la mappa, si estrae e si effettua una trattazione preliminare (*pre-processing*) del campo di velocità corrispondente, simulato dal modello oceanografico

2. si estrapolano i valori massimo e minimo del modulo della velocità che compaiono nel campo scelto e si calcolano i valori di Eddy Diffusivities corrispondenti ad un certo numero di valori di U , scelti in tale intervallo, con la procedura lagrangiana sopra descritta.
3. per ogni punto del dominio di calcolo se ne stima la Eddy diffusivity, interpolando sui valori calcolati al punto precedente e in base al valore di U relativo al nodo di griglia considerato.
4. per ogni punto si effettua la trasformazione (6.1) ottenendo la rappresentazione del tensore nell'usuale sistema di coordinate cartesiane.
5. si effettuano i grafici delle componenti del campo tensoriale ottenuto.

La fase di *pre-processing* effettua sostanzialmente i seguenti passaggi:

1. media pesata sulla profondità dei valori di velocità calcolati sui 5 livelli sigma più superficiali, in modo da ottenere un campo di velocità avvevivo bidimensionale.
2. interpolazione delle griglie *staggered*, su cui ROMS effettua e fornisce i campi di output, su un' unica griglia centrale
3. calcolo dei parametri utili per l'applicazione della tecnica lagrangiana di calcolo delle eddy diffusivities.

Per effettuare tutto ciò sono stati prodotti, nell'ambito della tesi, alcuni script nel linguaggio di programmazione interpretato Python.

Le figure da 6.1 a 6.5 mostrano i campi di Eddy Diffusivity, calcolati sulla parte di dominio corrispondente al Mar Ligure e relativamente al campo di corrente superficiale simulato per il giorno 4 Gennaio 2004, ore 18.00 (figure 5.10 e 5.11).

I valori rinormalizzati di diffusività ottenuti sono di ordini di grandezza superiori ai coefficienti di diffusione molecolare tipici dei processi diffusivi liquido in liquido, coerentemente con quanto noto per i processi dispersivi in campi turbolenti.

Il significato delle mappe così ottenute è quello di fornire un'informazione, per quanto grezza, di come diffonderebbe una ipotetica nuvola di tracciante posta in una determinata zona del dominio.

Ciò che manca tuttavia in tali mappe è l'informazione sulla parte di trasporto avvevivo. Per avere accesso anche a questa informazione è necessario, in linea di principio, calcolare la correzione al campo di velocità avvevivo dovuta all'interazione con la piccola scala. Il calcolo di questa correzione risulta immediato una volta noto il campo tensoriale D_{ij} ed è dato dalle relazioni

$$\begin{aligned} U^E &= U + \partial_x D_{xx}^E + \partial_y D_{xy}^E \\ V^E &= U + \partial_x D_{xy}^E + \partial_y D_{yy}^E \end{aligned}$$

(ricordiamo che, nel caso di turbolenza stazionaria, omogenea e isotropa, la parte antisimmetrica del tensore D_{ij} scompare). La figura in scala colori 6.6 da un'idea dell'ordine di grandezza delle derivate dei campi di diffusività nel caso del flusso preso in esame e della conseguente correzione relativa sul campo di velocità avvevivo. Infatti:

$$\frac{\Delta U}{U} \sim \frac{\partial D}{U} \sim \frac{10^{-6}}{10^{-1}} \sim 10^{-5},$$

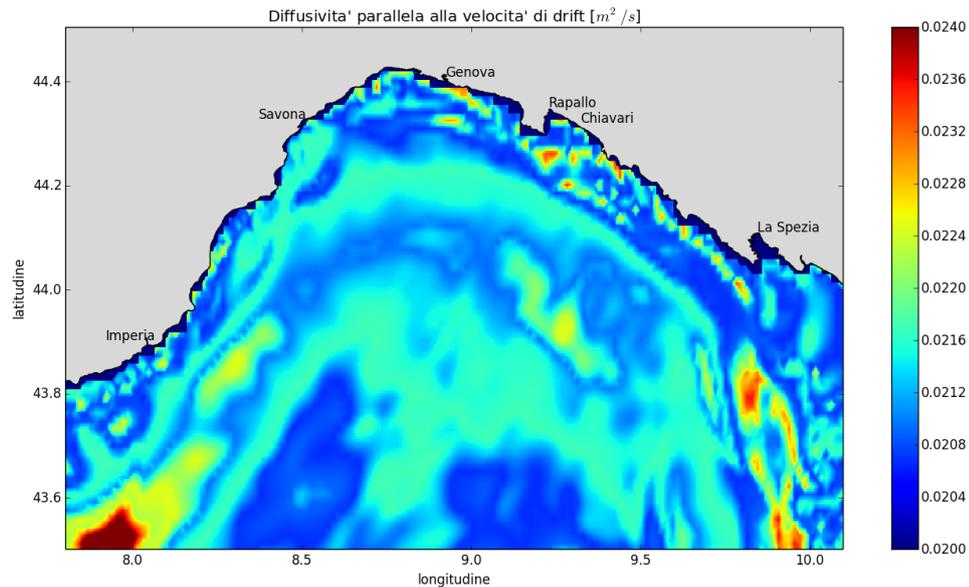


Figura 6.1 – *Componente parallela alla velocità avvettiva nel sistema di coordinate localmente ruotato.*

molto minore dell'errore numerico dal quale è affetta la previsione su \mathbf{U} del modello oceanografico. Per quanto questo non sia un fatto generale, risulta evidente come, nello specifico caso in esame, tale effetto correttivo sulle velocità sia molto piccolo, lasciando di fatto inalterato il campo fornito in uscita dal modello oceanografico.

6.4 Conclusioni e sviluppi futuri

In conclusione, il contenuto innovativo della tesi sta nell'aver ottenuto, grazie alla teoria multiscala, una stima delle diffusività rinormalizzate (dovute alla presenza di un campo di velocità di sottogriglia turbolento) a partire da principi primi e senza l'utilizzo di approcci empirici o semi-empirici.

Lo studio di un fenomeno di dispersione ambientale, in particolare in ambito marino, conferisce al lavoro una forte connotazione applicativa.

Le mappe di diffusività ottenute, integrate con la conoscenza del campo avvettivo a grande scala, rappresentano comunque un'informazione solo parziale sul processo di dispersione, la cui comprensione completa richiede la messa a punto di un modello specifico. L'equazione efficace per i modi a grande scala, ottenuta utilizzando l'approccio multiscala, e la valutazione delle corrispondenti grandezze rinormalizzate, secondo le modalità delineate nel presente lavoro, forniscono il punto di partenza per la messa a punto di un tale modello, la cui realizzazione costituisce il principale obiettivo a seguito della presente tesi.

Quello che si vuole fornire è uno strumento numerico che sia utile nella gestione del territorio e di eventuali situazioni eccezionali di rischio ambientale.

Sarà inoltre possibile effettuare la validazione e calibrazione del modello per confronto con i dati osservazionali provenienti da boe e radar, fase imprescindibile nella messa a punto di un modello realistico.

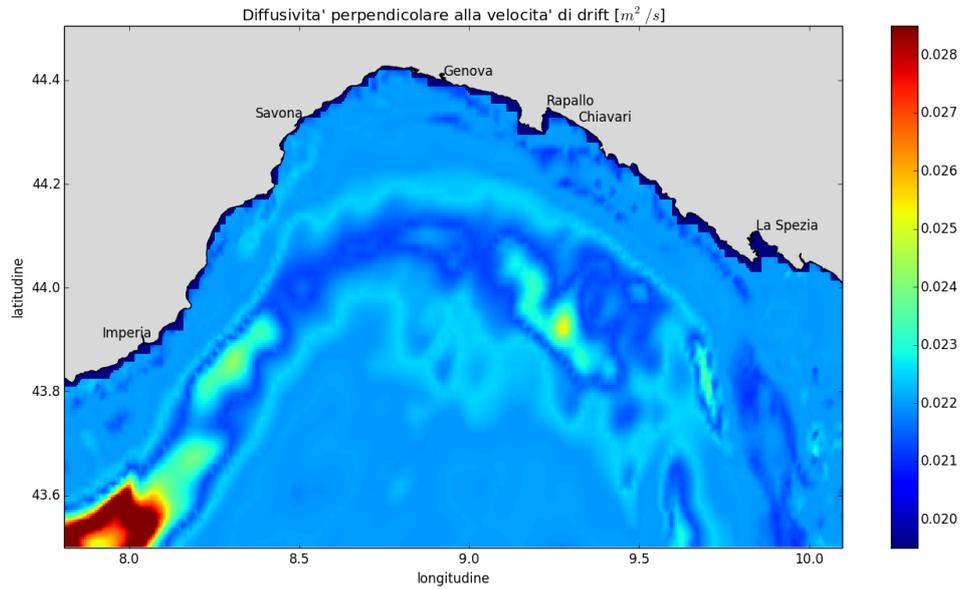


Figura 6.2 – Componente perpendicolare alla velocità avvettiva nel sistema di coordinate localmente ruotato.

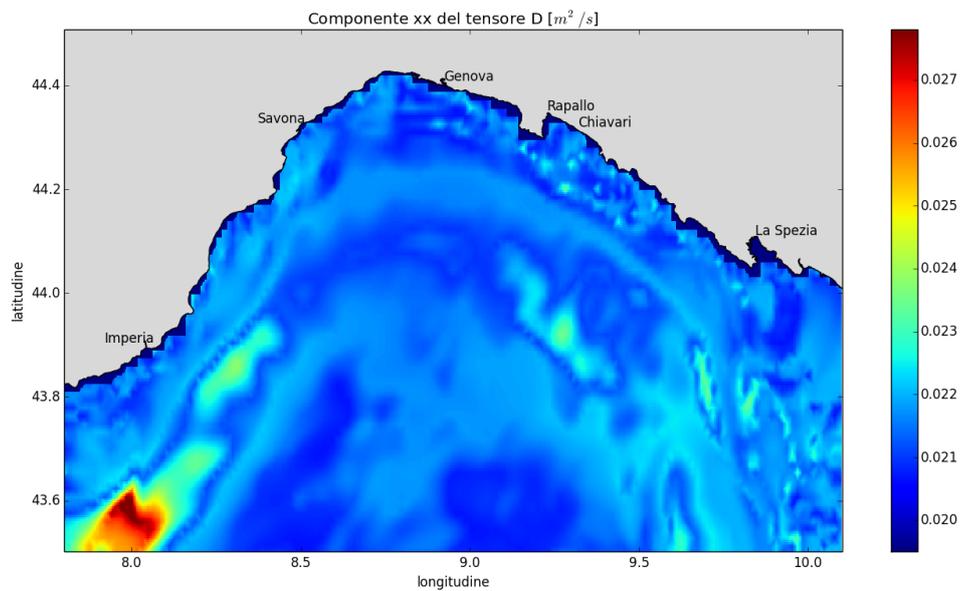


Figura 6.3 – Componente D_{xx} del tensore di Eddy Diffusivity nell'usuale sistema cartesiano (con l'asse x orientato nella direzione Ovest-Est)

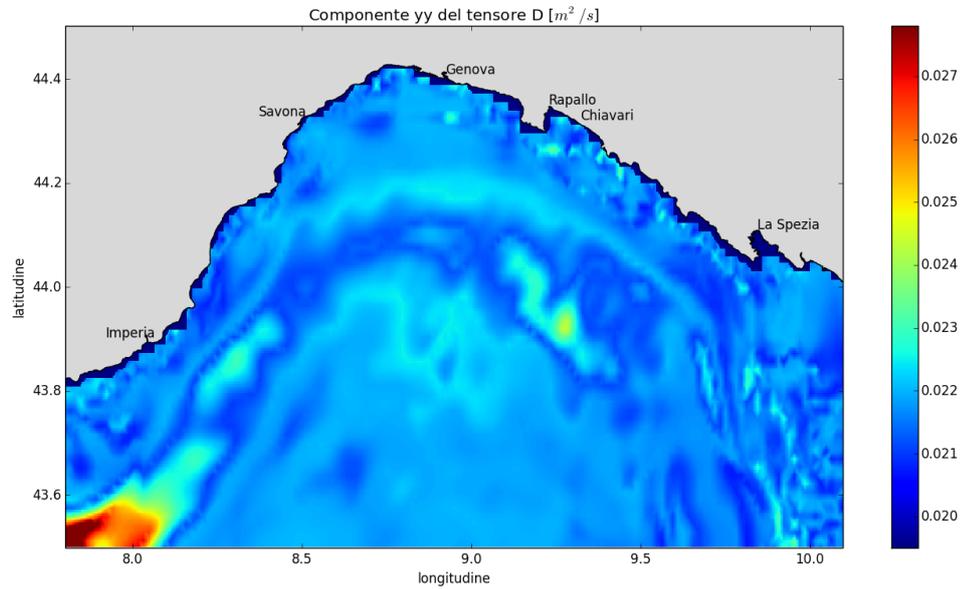


Figura 6.4 – Componente D_{yy} del tensore di Eddy Diffusivity nell'usuale sistema cartesiano (con l'asse x orientato nella direzione Ovest-Est)

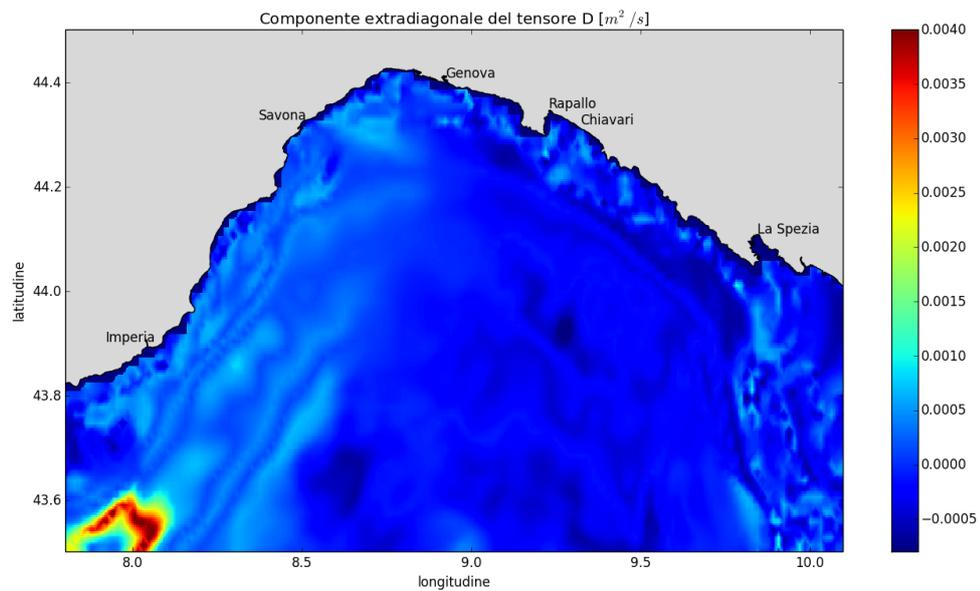


Figura 6.5 – Componente D_{xy} del tensore di Eddy Diffusivity nell'usuale sistema cartesiano (con l'asse x orientato nella direzione Ovest-Est)

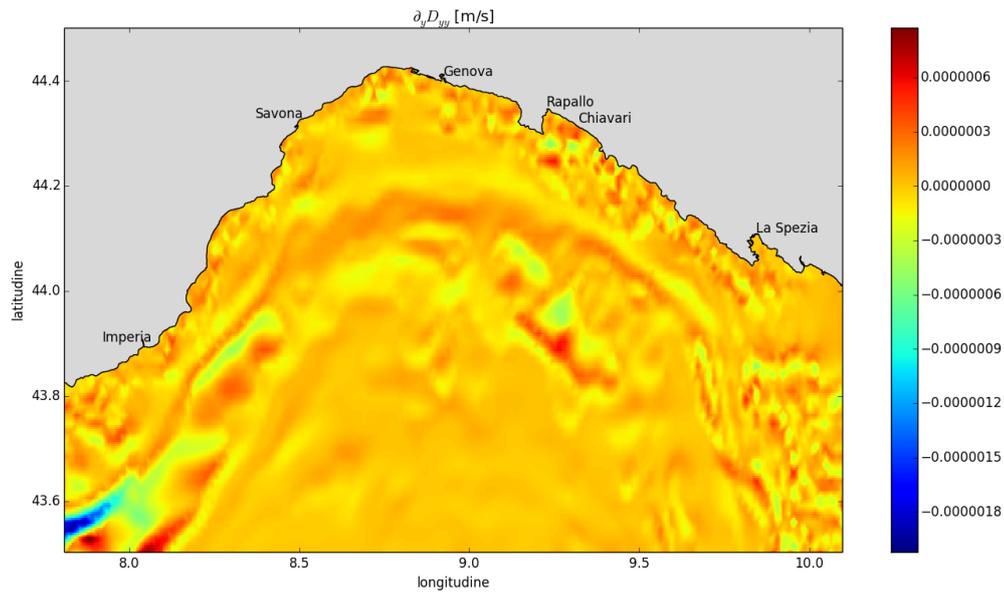


Figura 6.6 – Derivata nella direzione y del campo D_{yy} , la massima correzione possibile al campo di velocità è dell'ordine di 10^{-6} .

E' inoltre in fase di conclusione la messa a punto di un ulteriore modello oceanografico con risoluzione maggiore su un dominio più ristretto all'area circostante il promontorio di Portofino. La ragione di questa scelta è duplice. Da un lato si tratta di un'area marina protetta, per la quale può costituire motivo di interesse lo studio di fenomeni di dispersione. Dall'altro il promontorio rappresenta una netta discontinuità nel flusso di corrente tipico del Mar Ligure e può quindi dare luogo a fenomeni interessanti, anche per l'influenza che possono avere sui processi di trasporto scalare (vortici su scale di lunghezza tipica di quella del promontorio stesso).

Tra le ulteriori possibilità in prospettiva futura rientra anche l'applicazione delle tecniche descritte a processi di dispersione in flussi atmosferici e con campi di velocità avvevativi non necessariamente compressibili.

Bibliografia

- [1] P. K. Kundu, I. M. Cohen, “Fluid Mechanics.” Elsevier Academic Press (2008).
- [2] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, “Fluid Mechanics: Landau and Lifshitz: Course of Theoretical Physics.” Elsevier (2013).
- [3] H. B. Fischer, “Mixing in inland and coastal waters.” Academic Press (1979).
- [4] S. H. Strogatz, “Non linear dynamics and chaos, with applications to physics, biology, chemistry and engineering,” Perseus Books Group (1994).
- [5] C. M. Bender, S. A. Orszag, “Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers,” MacGraw Hill, New York (1978).
- [6] A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolau, “Asymptotic Analysis for Periodic Structures.” North Holland Publishing Company (1978).
- [7] U. Frisch, “Turbulence: the legacy of AN Kolmogorov.” Cambridge University Press (1995).
- [8] L. Biferale, A. Crisanti, M. Vergassola, A. Vulpiani, “Eddy diffusivities in scalar transport.” *Physics of Fluids* **7**(11) (1995), 2725-2734.
- [9] A. Mazzino, S. Musacchio, A. Vulpiani, “Multiple-scale analysis and renormalization for preasymptotic scalar transport.” *Physical Review E* **71**(1) (2005), 011113.
- [10] M. Avellaneda, A. J. Majda, “An integral representation and bounds on the effective diffusivity in passive advection by laminar and turbulent flows.” *Communications in Mathematical Physics* **138**(2) (1991), 339-391.
- [11] Y. Kaneda, T. Ishihara, K. Gotoh, “Taylor expansions in powers of time of Lagrangian and Eulerian two-point two-time velocity correlations in turbulence.” *Physics of Fluids* **11**(8) (1999), 2154-2166.
- [12] P. Marchesiello, J. C. McWilliams, A. F. Shchepetkin, “Open boundary conditions for long-term integration of regional ocean models.” *Ocean Modelling* **3** (2001), 1-20.
- [13] A. F. Shchepetkin, J. C. McWilliams, “The Regional Ocean Modeling System: A split-explicit, free-surface, topography following coordinates ocean model.” *Ocean Modelling*, **9** (2005), 347-404.

-
- [14] “ETOPO1 Global Relief”: www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/global.html
- [15] A. Da Silva et al. 1994 “Algorithms and Procedures. Vol. 1, Atlas of Surface Marine Data.” NOAA Atlas NESDIS **6**, (1994), 83 pp.
- [16] M. C. Bove, P. Brotto, F. Cassola, E. Cuccia, D. Massabò, A. Mazzino, A. Piazzalunga and P. Prati, “An integrated PM2.5 source apportionment study: Positive Matrix Factorisation vs. the chemical transport model CAMx.” *Atmospheric Environment* **94** (2014), 274-286.
- [17] “MFS”: <http://gnoo.bo.ingv.it/mfs/myocean/>
- [18] R. A. Flather, “A tidal model of the northwest European continental shelf.” *Memoires de la Societe Royale de Sciences de Liege*, **6** (1976), 141-164.
- [19] A. F. Shchepetkin, J. C. McWilliams, “Quasi-monotone advection schemes based on explicit locally adaptive dissipation.” *Monthly Weather Rev.*, **126** (1998), 1541-1580.
- [20] L. Umlauf, H. Burchard, “A generic length-scale equation for geophysical turbulence models.” *J. Marine Res.*, **61** (2003), 235-265.
- [21] V. M. Canuto, A. Howard, Y. Cheng, M. S. Dubovikov, “Ocean turbulence I: one-point closure model. Momentum and heat vertical diffusivities.” *J. Phys. Oceanogr.*, **31** (2001), 1413-1426.
- [22] M. Astraldi, G. M. R. Manzella, “Some observations on current measurements on the East Ligurian Shelf, Mediterranean Sea.” *Continental Shelf Research*, **2**(2) (1983), 183-193.

Ringraziamenti

Per prima cosa vorrei ringraziare il Prof. Mazzino e il Dott. Magaldi per la disponibilità e la professionalità con cui mi hanno accompagnato verso questo risultato, ma anche per essersi dimostrati persone eccezionali e per aver valorizzato sin da subito il mio lavoro. Grazie!

Un ringraziamento va anche al Prof. Collina per i preziosi consigli e per la disponibilità dimostrata (anche quando le forze della natura hanno tentato di opporsi).

Grazie anche a Simone e Laura per il supporto fornito durante la tesi, a Mattia, con il quale ho condiviso buona parte delle fatiche, e grazie a tutti coloro che al DICCA mi hanno accolto fin da subito, permettendomi di lavorare in un ottimo ambiente.

Grazie all'amico Salvatore che mi ha trasmesso per primo la passione per questa meravigliosa scienza e l'insaziabile desiderio di "capire" che la contraddistingue; nonché per le feconde discussioni di fisica, sempre accompagnate da un ottimo tè.

Grazie ai compagni fisici: Impi, Sebi, Fede, Gio, . . . con i quali ho condiviso gioie e dolori di questa avventura, a partire dai pomeriggi di laboratorio (quando esci che la luna è bella alta nel cielo. . .), fino alle cene seguite da espertissime partite a "trump in five".

Un enorme grazie va alla mia Chiara che ha sopportato il mio umore variabile durante il periodo pre-laurea e mi sostiene quotidianamente, grazie di esistere!

Grazie ai miei genitori e ai miei fratelli; allo zio Fabio (e a Zeus), che da anni ormai ha dovuto accettare il fatto di non essere l'unico "genio" in famiglia ;-p, grazie per aver fatto le veci della nonna Dalci durante la clausura veneta che ha preceduto la consegna della tesi.

Grazie a tutte le persone che in questi mesi di lavoro mi sono state vicine: Fausto e Graziella, Baddi e Lucia, Mariagiulia e Matteo, Robbi, Lanci, Ermanno e Katia, Ale, Sara, Claudio, Marco, Arjan, Baccio, Daniele e Valentina.

Infine ringrazio tutte le persone che, in un modo o nell'altro, hanno dato in questi anni il loro contributo alla mia crescita.