

Università degli Studi di Genova

Facoltà di Scienze M.F.N.

Anno accademico 2001-2002

Tesi di Laurea in Fisica

**Un modello
risolubile analiticamente
di Large Eddy Simulation
di campi scalari passivi**

Relatori: Prof. R. Festa

Correlatore: Prof. R. Collina

Dott. A. Mazzino

Candidato: Marco Martins Afonso

Indice

1	Richiami matematici preliminari	1
1.1	La derivata funzionale	1
1.2	Il teorema di Furutsu-Novikov	2
1.3	Derivate in coordinate cartesiane e polari	4
2	Funzione di covarianza del campo scalare passivo	7
2.1	Introduzione	7
2.2	Il Modello di Kraichnan	8
2.3	Equazioni per la covarianza del campo scalare	10
3	Large Eddy Simulation	17
3.1	Introduzione	17
3.2	L'operazione di filtro	18
3.3	La funzione di covarianza per il campo a grande scala	20
3.4	Le equazioni per il campo scalare a grande scala	21
3.4.1	Coefficiente di diffusione efficace	31
3.4.2	Equazioni per la funzione di covarianza a grande scala	35
3.4.3	Soluzione perturbativa del modello LES per la funzione di covarianza	41
4	Conclusioni e possibili sviluppi	47
A	Il caso unidimensionale	53

Introduzione

Lo studio della turbolenza riveste un'importanza sempre maggiore nell'ambito della fluidodinamica, anche perché è legato a concetti matematici di dinamica caotica che si sono sviluppati solo negli ultimi decenni (si pensi, per esempio, alle teorie frattali e multifrattali [1]). Il contributo maggiore rimane comunque quello dato da Kolmogorov a metà del '900 (la famosa teoria di Kolmogorov del 1941 [2], nota come K41), anche se già Leonardo da Vinci aveva un'idea piuttosto precisa dei fenomeni fisici chiamati in causa [1].

Un ruolo molto importante nel definire i differenti scenari che emergono nello studio dei flussi turbolenti è giocato dal “numero di Reynolds” (Re) definito dal rapporto adimensionale $Re \equiv UL/\nu$, dove U ed L sono rispettivamente la velocità caratteristica e la lunghezza caratteristica del fluido¹ e ν la sua viscosità.

Per valori di $Re \ll 1$, i termini lineari nelle equazioni che descrivono la dinamica del flusso predominano: avremo flussi laminari con un comportamento “semplice”, spesso descrivibile da soluzioni esatte delle equazioni per il flusso. Nella regione intermedia, $Re \approx O(1)$, gli effetti non lineari competono con quelli puramente dissipativi: il fluido sviluppa comportamenti non stazionari, il campo di velocità si complica, l'analisi di Fourier del suo spettro di frequenze mostra un numero crescente di modi, fino ad un certo valore critico Re_c (fortemente dipendente dalle condizioni geometriche e dal tipo di forzante esterna e, quindi, non universale).

Per $Re > Re_c$ il fluido mostra una netta transizione: lo spettro diventa con-

¹Se si fa riferimento, per fissare le idee, ad un flusso attraverso un cilindro di raggio R , la lunghezza caratteristica, L , sarà proprio il raggio R , mentre la velocità caratteristica, U , può essere definita come il valor medio del modulo della velocità all'interno dell'intero volume.

tinuo, il moto altamente non banale (almeno per le sue caratteristiche temporali), le caratteristiche di trasporto vengono notevolmente amplificate. Per $Re \rightarrow \infty$ (vale a dire $Re \gg Re_c$, tale regime è detto di turbolenza “completamente sviluppata”), l'apparente aleatorietà si estende anche al comportamento spaziale del campo di velocità: il numero di frequenze temporali e di scale spaziali eccitate tende all'infinito. È facile dimostrare che in tale regime il numero di gradi di libertà, N , necessari per definire la dinamica del flusso tende all'infinito come $Re^{9/4}$ (si veda, per esempio, [1]).

Da un punto di vista puramente fenomenologico, la turbolenza sviluppata consiste essenzialmente in una gerarchia di strutture turbolente (*eddy*) su diverse scale spazio temporali. L'instabilità degli *eddy* a grande scala, ne causa la nascita di altri a scala più piccola i quali, a loro volta, diventando instabili, ne generano altri a scala ancora più piccola. Fu sulla base di tale semplice idea che Kolmogorov costruì la sua celebre teoria K41.

Da un punto di vista più quantitativo, sarebbe in linea di principio possibile costruire la meccanica statistica della turbolenza a partire dai principi primi (cioè le equazioni per il campo turbolento); sfortunatamente ogni teoria analitica della turbolenza che parte dai principi primi deve scontrarsi necessariamente con problemi di “chiusura”. Se infatti si scrivono le equazioni per un momento statistico di ordine n si vede immediatamente che in tali equazioni compaiono momenti statistici di ordine $n + 1$; le equazioni per i momenti statistici di ordine $n + 1$ a loro volta contengono momenti statistici di ordine $n + 2$ e così via. Tali difficoltà, tipiche dei sistemi non lineari, come vedremo sono presenti, anche per sistemi turbolenti lineari nel campo turbolento incognito ma con interazioni non lineari con il campo di velocità. Il forte carattere non gaussiano del campo di velocità a piccola scala nella turbolenza sviluppata, vanifica, d'altra parte, ogni approccio perturbativo al problema della chiusura delle equazioni del moto.

Da un punto di vista concettuale, non ci sono comunque problemi nel costruire un approccio numerico (cioè al calcolatore) al problema della turbolenza, vale a dire nel risolvere numericamente le equazioni differenziali alle derivate parziali per i flussi turbolenti. Malgrado il campo di velocità sia turbolento (e quindi molto irregolare nello spazio e nel tempo), l'operazione di derivata è ben definita: infatti le differenze di velocità a piccolissime scale, grazie alla viscosità ν , sono “lisce”.

Una simulazione diretta di un flusso turbolento deve tener conto esplicitamente di tutte le scale di moto eccitate. Queste vanno dalle maggiori, le cui dimensioni vengono imposte dalle condizioni al contorno (la cosiddetta

“scala integrale”), alle più piccole, associate agli effetti dissipativi dovuti ai moti molecolari (“scala di dissipazione di Kolmogorov”).

Ad esempio, una simulazione diretta dell’atmosfera che tenga conto di tutte le scale, dalle scale planetarie, tipicamente dell’ordine di alcune migliaia di km alla scala dissipativa, la cui dimensione tipica è dell’ordine di qualche millimetro, richiederebbe $\sim 10^9$ gradi di libertà.

Inoltre, come conseguenza del fatto che il numero di gradi di libertà eccitati in un flusso turbolento va come $Re^{9/4}$ al limite di viscosità nulla (cioè numeri di Reynolds tendenti ad infinito), una simulazione capace di descrivere in modo adeguato tutte le scale di moto eccitate richiederebbe infiniti gradi di libertà (cosa evidentemente impossibile per ogni calcolatore). Possiamo quindi concludere che per un fluido debolmente viscoso non è possibile, almeno per ora o in un futuro prossimo, simulare esplicitamente tutte le scale eccitate in un moto turbolento.

Il problema sopra citato non preclude però la possibilità di descrivere numericamente un flusso turbolento. L’idea di fondo, che non chiude le porte a tale possibilità, è contenuta nella visione della turbolenza dovuta a Richardson, base della teoria di Kolmogorov K41. Secondo tale schema, l’energia iniettata nel sistema a grande scala, diciamo L , crea delle forti correlazioni tra punti del campo di velocità che distano circa di L . Tali correlazioni sono associate alla presenza di strutture vorticosi (*eddy*). L’essenza dello schema dovuto a Richardson per la turbolenza completamente sviluppata ($Re \rightarrow \infty$) è che l’energia fluisca dalla grande scala (piccoli numeri d’onda) verso la piccola scala (grandi numeri d’onda, dove i termini dissipativi molecolari cominciano ad essere importanti), attraverso un processo di “frammentazione” delle *eddy* stesse. Il processo è “locale”, nel senso che le *eddy* ad una data scala r_1 sono generate dalla frammentazione delle *eddy* “madri” alla scala r_2 immediatamente superiore ad r_1 .

Il processo di frammentazione è “autosimilare”, vale a dire che non dipende dalla scala r a cui si osserva il fenomeno.

Tale processo di cascata si arresta alla scala di Kolmogorov, solitamente indicata con η , dove i moti molecolari dissipano l’energia proveniente dalle grandi scale.

Siccome spesso non interessa descrivere la dinamica a scale dell’ordine di η , l’idea è quella di fermare artificialmente il flusso di energia ad una scala r tale che $\eta \ll r \ll L$. Così facendo, viene descritta solamente la dinamica delle *eddy* tra r ed L mentre viene “parametrizzato” (cioè trattato statisticamente) l’effetto delle piccole *eddy* alle scale comprese tra η ed r . Il risultato è che il

sistema risulterà notevolmente ridotto in termini di gradi di libertà.

La strategia che mira a descrivere le sole grandi scale di moto parametrizzando l'effetto statistico su queste giocate dalle piccole scale di moto è nota come *Large-eddy simulation* (brevemente LES).

Sulla base di quanto detto nella parte iniziale di questa introduzione siamo in grado di capire immediatamente quale sia l'anello debole in uno schema di LES. Non esistendo infatti equazioni chiuse per le piccole scale di moto, le parametrizzazioni oggi utilizzate per la descrizione delle piccole scale sono di natura empirica e quindi non basate sui principi primi. Risulta quindi difficile, se non spesso impossibile, quantificare l'impatto della chiusura (empirica) sui campi a grande scala.

Lo scopo principale di questa tesi è quello di introdurre un modello di LES dove la parametrizzazione delle piccole scale di moto discende dai principi primi. Questo ci permetterà di controllare completamente l'effetto statistico di tale chiusura sulle grandi scale di moto e quindi di giustificare su basi rigorose (o "affondare") la strategia LES. In questa tesi il sistema turbolento che indagheremo sarà quello della turbolenza di campi scalari passivi. Per definizione, con campo scalare passivo si intende una quantità scalare (l'umidità o la concentrazione di un inquinante in atmosfera, per fissare le idee) che non influenza lo stato del campo di velocità. In altri termini, il campo di velocità influenza la dinamica dello scalare, mentre non accade il contrario. Al fine di trattare il problema analiticamente, supporremo che il campo di velocità nel quale il campo scalare è immerso sia di natura stocastica (e quindi con proprietà statistiche assegnate). Al fine di avere equazioni chiuse per i vari momenti statistici del campo scalare passivo, assumeremo che il campo di velocità sia δ -correlato nel tempo, vale a dire con memoria molto corta (in realtà istantanea) del passato. Tale modello è noto come *modello di scalare passivo di Kraichnan* [3] e ha raccolto negli ultimi anni un'enorme attenzione da parte della comunità scientifica della turbolenza [4].

Più in dettaglio, la tesi è organizzata come segue. Nel Capitolo 1 vengono richiamati alcuni concetti matematici necessari nel seguito: in particolare verrà introdotto il teorema di Furutsu-Novikov, il cui utilizzo sarà molto frequente; vengono inoltre fissate alcune semplici notazioni. Nel Capitolo 2, partendo dall'equazione che descrive (entro un campo di velocità assegnato) l'evoluzione dei campi scalari passivi, si giungerà all'espressione della funzione di covarianza di questi ultimi, valida a tutte le scale.

Nel Capitolo 3 si introduce la LES definendo l'operazione di filtro (una sorta

di proiezione sulle grandi scale che attenua le fluttuazioni presenti su scale piú ridotte), in modo da ottenere subito l'andamento della funzione di covarianza a grande scala; questo risultato esatto servirà da confronto con l'espressione che verrà ricavata al termine del capitolo (nel caso tridimensionale) in modo autonomo, cioè da un'equazione chiusa nel campo filtrato. Per poter scrivere quest'ultima occorre manipolare l'equazione di partenza introducendo opportuni indicatori accanto ai contributi recati dalle piccole scale, per poter poi operare una parametrizzazione dei loro effetti sulle scale piú grandi: si potrà quindi valutare l'errore commesso in questi passaggi.

Il Capitolo 4 è un breve riepilogo dei risultati piú salienti e presenta, oltre alle conclusioni, alcuni possibili spunti per sviluppare questo lavoro. In appendice viene infine riportata una veloce descrizione del caso unidimensionale, sottolineando le differenze che ne richiedono una trattazione a parte.

Capitolo 1

Richiami matematici preliminari

1.1 La derivata funzionale

In questo capitolo richiamiamo sinteticamente le definizioni di alcuni strumenti matematici indispensabili, iniziando da alcuni concetti di analisi funzionale. Un *funzionale* è un'applicazione che mappa funzioni in numeri: data una funzione f , si indicano i funzionali agenti su di essa con $I[f]$. Gli esempi piú comuni di funzionali sono gli integrali definiti, ma essi possono comunque assumere forme piú generali. Un funzionale può naturalmente dipendere da un parametro, e quindi essere esso stesso una comune funzione del parametro. Ad esempio, la Delta di Dirac (unidimensionale) è come noto definita dalla relazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \delta(x - y) f(y) = f(x) ;$$

in questo contesto introduciamo la funzione *Theta di Heaviside* data da

$$T_H(x) = \int_{-\infty}^x dy \delta(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 1/2 & \text{per } x = 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases} .$$

Si definisce *derivata funzionale* di I rispetto a f nel punto x il limite

$$\frac{\delta I[f]}{\delta f(y)} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I[f(x) + \epsilon \delta(x - y)] - I[f(x)]}{\epsilon} .$$

Ecco alcuni esempi:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta f(y)} f(x) &= \frac{\delta}{\delta f(y)} \int dz \delta(x-z) f(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [f(x) + \epsilon \delta(x-y) - f(x)] = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \epsilon \delta(x-y) = \\ &= \delta(x-y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta f(y)} \int_{-\infty}^x dz f(z) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\int_{-\infty}^x dz (f(z) + \epsilon \delta(z-y)) - \int_{-\infty}^x dz f(z) \right] = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \epsilon \int_{-\infty}^x dz \delta(z-y) = \\ &= T_H(x-y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta f(y)} \int dx g(f(x)) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \int dx g(f(x) + \epsilon \delta(x-y)) - \int dx g(f(x)) \right\} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \int dx [g(f(x)) + \epsilon \delta(x-y) g'(f(x)) + o(\epsilon^2)] - \right. \\ &\quad \left. - \int dx g(f(x)) \right\} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \epsilon \int dx \delta(x-y) g'(f(x)) + o(\epsilon^2) \right\} \\ &= g'(f(y)) . \end{aligned}$$

È utile sottolineare il fatto che la derivata funzionale commuta con le derivate ordinarie e parziali. Per maggiori dettagli si veda ad esempio [5].

1.2 Il teorema di Furutsu-Novikov

Riteniamo opportuno passare velocemente in rassegna i concetti di base relativi alle variabili casuali, perché lo studio della turbolenza richiede necessariamente una descrizione statistica del fenomeno [1]. In seguito enunceremo anche il teorema di Furutsu-Novikov [1],[6], che rappresenta uno strumento indispensabile per scrivere le equazioni per la covarianza del campo scalare in forma chiusa.

Data una variabile casuale reale X , si definisce la sua distribuzione cumulativa $P(x) = \text{prob}\{X < x\}$. Supporremo che la distribuzione sia differenziabile, cosí che $dP(x) = p(x)dx$; $p(x)$ è la funzione densità di probabilità di X , cioè $p(x)dx$ rappresenta la probabilità che X assuma un valore casuale compreso nell'intervallo reale $[x, x + dx]$.

Il *valor medio* della variabile casuale X è dato da

$$\langle X \rangle = \int_{\mathbb{R}} dP(x) x ;$$

se esso è nullo, si dice che X è *centrata*.

Il *momento di ordine n* della variabile casuale X è dato analogamente da

$$\langle X^n \rangle = \int_{\mathbb{R}} dP(x) x^n ;$$

in particolare, se $n = 2$ e $\langle X \rangle = 0$, si ottiene la *varianza* $\sigma^2 = \langle X^2 \rangle$.

Una variabile casuale centrata è detta *gaussiana* se la sua densità di probabilità risulta pari a

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} .$$

Se la variabile casuale \mathbf{X} è a valori vettoriali d -dimensionali le definizioni precedenti sono del tutto analoghe, ma in questo caso (se $\langle \mathbf{X} \rangle = 0$) si può introdurre il tensore di *covarianza* $\Gamma_{\mu\nu} = \langle X_\mu X_\nu \rangle$; per conservare l'invarianza della proprietà di gaussianità per trasformazioni lineari si dice inoltre che \mathbf{X} è *gaussiana* se e solo se tale è la quantità scalare $\mathbf{a} \cdot \mathbf{X} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$. La *correlazione* è data dal rapporto

$$\frac{\langle X_\mu X_\nu \rangle}{\sqrt{\langle X_\mu^2 \rangle \langle X_\nu^2 \rangle}} \quad (\text{non sommata su } \mu, \nu) .$$

Una generalizzazione dei concetti fin qui esposti è costituita dai *campi casuali*, insiemi di variabili casuali (scalari o vettoriali) funzioni di una o piú variabili spazio-temporali. Anche in questo caso l'estensione delle definizioni precedenti è ovvia, fatte salve alcune differenze: per esempio si può scrivere una funzione di covarianza spazio-temporale (spesso impropriamente detta correlazione) se i due campi sono calcolati in punti e istanti diversi ($\Gamma_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \langle X_\mu(\mathbf{r}, t) X_\nu(\mathbf{r}', t') \rangle$), oppure (facendo coincidere questi

ultimi) un oggetto del tipo $\langle X_\mu(\mathbf{r}, t) X_\nu(\mathbf{r}, t) \rangle$ che per campi stazionari e omogenei non dipende da (\mathbf{r}, t) ; con le ultime due quantità, o piú semplicemente conoscendo la sola covarianza e il suo valore a punti uniti, è possibile costruire la generica *funzione di struttura di ordine n* : nel seguito considereremo esclusivamente funzioni di struttura di ordine 2, definite come $S_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \langle [X_\mu(\mathbf{r}, t) - X_\mu(\mathbf{r}', t')][X_\nu(\mathbf{r}, t) - X_\nu(\mathbf{r}', t')] \rangle$. Un campo stocastico $\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)$ è detto *campo gaussiano* se per ogni funzione di prova $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ risulta gaussiana la quantità

$$\int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{r} \int_{\mathbb{R}} dt \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{X}(\mathbf{r}, t) .$$

Sia \mathbf{X} una variabile vettoriale gaussiana centrata, e $f(\mathbf{X})$ una sua funzione differenziabile; allora, se tutte le medie esistono, si ha:

$$\langle X_\mu f(\mathbf{X}) \rangle = \langle X_\mu X_\nu \rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial X_\nu} \right\rangle . \quad (1.1)$$

La dimostrazione della relazione precedente è alquanto banale nel caso unidimensionale:

$$\langle X f(X) \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \sigma^2 \int_{\mathbb{R}} dx f(x) \partial_x e^{-x^2/2\sigma^2} = \langle X^2 \rangle \left\langle \frac{\partial f}{\partial X} \right\rangle ,$$

e facilmente estensibile a piú dimensioni sempre integrando per parti.

La generalizzazione da variabili a campi gaussiani (e quindi da funzioni a funzionali) è immediata: il teorema di Furutsu-Novikov (che in questa sede non dimostriamo; si veda [6] per la dimostrazione dettagliata) asserisce infatti che, dato un campo vettoriale gaussiano centrato $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ e un suo funzionale $I[\mathbf{v}]$, risulta:

$$\langle v_\mu(\mathbf{r}, t) I[\mathbf{v}(\mathbf{r}', t')] \rangle = \int d^d \mathbf{r}'' \int dt'' \langle v_\mu(\mathbf{r}, t) v_\nu(\mathbf{r}'', t'') \rangle \left\langle \frac{\delta I[\mathbf{v}(\mathbf{r}', t')]}{\delta v_\nu(\mathbf{r}'', t'')} \right\rangle . \quad (1.2)$$

Tale relazione verrà utilizzata diffusamente nel seguito.

1.3 Derivate in coordinate cartesiane e polari

Fissiamo ora alcune notazioni che utilizzeremo frequentemente nel seguito: data una variabile a poniamo $\partial_a \equiv \partial/\partial a$, e indichiamo con $\partial_\mu f$ la componente μ -esima del gradiente di f qualora sia evidente o non essenziale il

campo vettoriale rispetto a cui si deriva.

Applicando la regola di derivazione composta si deduce facilmente l'espressione della derivata seconda cartesiana di una funzione dipendente soltanto da $r = |\mathbf{r}|$:

$$\begin{aligned}\partial_\mu f(|\mathbf{r}|) &= \partial_{r_\mu} f(r) = \frac{\partial r}{\partial r_\mu} \frac{\partial f(r)}{\partial r} = \frac{r_\mu}{r} \partial_r f(r) \implies \\ \partial_\mu \partial_\nu f(|\mathbf{r}|) &= \partial_{r_\mu} \partial_{r_\nu} f(r) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{r_\mu r_\nu}{r^2} \right) \frac{1}{r} \partial_r f(r) + \frac{r_\mu r_\nu}{r^2} \partial_r^2 f(r). \quad (1.3)\end{aligned}$$

Riteniamo sottintesa la somma sugli indici ripetuti, quindi per esempio scriviamo la traccia della matrice Delta di Kronecker come $\delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\nu} = d$, dove d è la dimensione.

Dalla (1.3), moltiplicando per $\delta_{\mu\nu}$, si ottiene l'espressione dell'operatore laplaciano agente su funzioni della sola coordinata radiale:

$$\partial^2 f(|\mathbf{r}|) = \left(\frac{d-1}{r} \partial_r + \partial_r^2 \right) f(r); \quad (1.4)$$

in particolare, se $d = 3$, la (1.4) diventa:

$$\partial^2 f(|\mathbf{r}|) = \left(\frac{2}{r} \partial_r + \partial_r^2 \right) f(r). \quad (1.5)$$

Nel caso tridimensionale indicheremo con ϑ e φ rispettivamente l'angolo polare e quello azimutale, per cui l'integrale esteso a tutto lo spazio viene espresso come

$$\int d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dr \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 f(r, \vartheta, \varphi);$$

le formule di passaggio fra le coordinate, come noto, sono

$$\begin{cases} r_1 = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r_2 = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r_3 = r \cos \vartheta \end{cases} .$$

Poiché ci sarà piuttosto utile in seguito, ricordiamo infine la formula per calcolare il volume V_0 di una calotta sferica di altezza h e raggio della

circonferenza di base ρ :

$$V_0 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{h}{2} \right)^3 - \pi \frac{h}{2} \rho^2 .$$

Nel seguito occorrerà valutare il volume dell'intersezione fra due sfere di uguale raggio, che è evidentemente costituita da due calotte sferiche uguali aventi in comune il cerchio di base: in questi casi, per evitare confusione, chiameremo “semialtezza” la distanza h precedentemente menzionata.

Capitolo 2

Funzione di covarianza del campo scalare passivo

2.1 Introduzione

Lo studio del comportamento dei campi scalari passivi in flussi turbolenti offre esempi quotidiani di notevole importanza: si pensi, per esempio, alla concentrazione di un inquinante in atmosfera. Un campo passivo non influenza la dinamica del campo di velocità: questo disaccoppiamento fa sì che il contributo avvevativo (solitamente causa di non-linearità in fluidodinamica) sia semplicemente lineare. Turbolenza significa impossibilità di analisi puramente deterministiche, quindi necessità di studiare grandezze statistiche, fra le quali la funzione di covarianza, che fornisce una misura delle fluttuazioni del sistema.

Restringiamo innanzitutto la nostra attenzione a un flusso stocastico *stazionario, omogeneo e isotropo*. In senso probabilistico stazionarietà significa che grandezze come le covarianze dipendono dai tempi t e t' non separatamente bensì solo mediante la loro differenza; analogamente l'omogeneità indica che non vi è un'origine spaziale privilegiata, per cui la covarianza è funzione di $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ anziché di \mathbf{r} e \mathbf{r}' singolarmente, e l'isotropia (assenza di direzioni privilegiate) fa sì che la dipendenza sia solo dal modulo di tale vettore cioè dalla distanza reciproca. Riguardo la covarianza $\Gamma_{\mu\nu}$ si ha quindi la semplificazione

$$\Gamma_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \Gamma_{\mu\nu}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') ,$$

da cui seguono anche le relazioni sulle derivate prime e seconde:

$$\partial_{r_\lambda} \Gamma_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -\partial_{r'_\lambda} \Gamma_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \implies$$

$$\partial^2 \Gamma_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \partial_\lambda \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \partial_{\mathbf{r}}^2 \Gamma_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \partial_{\mathbf{r}'}^2 \Gamma_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') .$$

2.2 Il Modello di Kraichnan

L'equazione che descrive l'evoluzione di un campo scalare passivo $\theta(\mathbf{x}, t)$ associato a un generico campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ e soggetto a una forzante (cioè sorgente di campo) $f_L(\mathbf{x}, t)$ è:

$$\partial_t \theta(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\partial} \theta(\mathbf{x}, t) = K_0 \partial^2 \theta(\mathbf{x}, t) + f_L(\mathbf{x}, t) , \quad (2.1)$$

in cui K_0 indica il *coefficiente di diffusione*, espressione macroscopica dei moti microscopici delle molecole.

Al fine di riprodurre una situazione turbolenta trattiamo le quantità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ e $f_L(\mathbf{x}, t)$ come campi casuali, di cui quindi occorre definire le proprietà statistiche. In generale, partendo dalla (2.1), non è possibile ottenere la chiusura del problema nella funzione di covarianza di θ : si trova infatti che nell'espressione dell'incognita a un dato istante interverrebbe la sua storia passata. Per poter scrivere equazioni chiuse richiediamo quindi due condizioni molto importanti: $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ e $f_L(\mathbf{x}, t)$ siano campi *gaussiani* (centrati) e *δ -correlati nel tempo*.

In particolare, assumiamo che la funzione di struttura della velocità abbia forma fattorizzata:

$$\langle [v_\mu(\mathbf{x}, t) - v_\mu(\mathbf{x}', t')] [v_\nu(\mathbf{x}, t) - v_\nu(\mathbf{x}', t')] \rangle = 2 \delta(t - t') D_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') ,$$

e traduciamo la condizione di incompressibilità $\boldsymbol{\partial} \cdot \mathbf{v} = 0$ nella forma

$$D_{\mu\nu}(\mathbf{r}) = D_0 r^\xi \left[(\xi + d - 1) \delta_{\mu\nu} - \xi \frac{r_\mu r_\nu}{r^2} \right] ,$$

vale a dire una legge a potenza (con esponente ξ) con opportuni coefficienti fissati dall'incompressibilità del campo di velocità.

$D_{\mu\nu}$ rappresenta un generale tensore doppio isotropo, simmetrico e a divergenza nulla ($\partial_\mu D_{\mu\nu} = 0$). In esso compare inoltre l' *esponente di rugosità*

ξ , che nel seguito assumeremo compreso nell'intervallo aperto $(0, 2)$: nella celebre teoria K41 di Kolmogorov [2] esso risulta pari a $4/3$, mentre i due casi estremi $\xi = 0$ e $\xi = 2$ rappresentano rispettivamente una situazione di rumore bianco e un campo di velocità liscio. Tali estremi non verranno da noi considerati perché troppo idealizzati rispetto alla situazione che si può incontrare in sistemi turbolenti realistici.

Assumiamo infine, per la funzione di covarianza della forzante, la forma fattorizzata

$$\langle f_L(\mathbf{x}, t) f_L(\mathbf{x}', t') \rangle = \delta(t - t') F_L(\Delta x) ,$$

con $\Delta x = |\Delta \mathbf{x}| = |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$, e implementiamo la condizione che f_L sia *concentrata a grande scala* attribuendo a $F_L(\Delta x)$ un valore costante positivo F_0 per $\Delta x < L$ e nullo altrimenti¹; la forma esatta di $F_L(\Delta x)$ nell'intorno di $\Delta x = L$ non è rilevante (si veda [7]), dunque possiamo pensare per semplicità a un gradino.

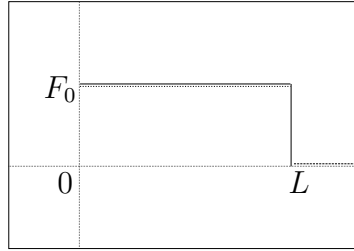


Figura 2.1: La funzione di covarianza spaziale F_L della forzante.

L'insieme delle equazioni (2.1) e della specifica forma per la funzione di struttura del campo di velocità e della forzante definiscono quello che è noto come *modello di Kraichnan* [3],[4].

¹La forzante risulta così concentrata a grande scala nel senso che tale è la parte spaziale S_∞ della sua funzione di struttura S :

$$S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \langle [f_L(\mathbf{x}, t) - f_L(\mathbf{x}', t)]^2 \rangle = \delta(t - t') S_\infty(\Delta x) \implies$$

$$S_\infty(\Delta x) = 2[\langle f_L^2 \rangle - \langle f_L(\mathbf{x}) f_L(\mathbf{x}') \rangle] = \begin{cases} 0 & \text{per } \Delta x < L \\ F_0 & \text{per } \Delta x > L \end{cases}$$

2.3 Equazioni per la covarianza del campo scalare

Nell'analisi che seguirà tratteremo sempre covarianze spaziali valutate allo stesso istante di tempo, t . La stazionarietà eliminerà poi ogni dipendenza temporale da t . Moltiplicando la (2.1) per $\theta(\mathbf{x}', t)$ e sommandola alla stessa equazione calcolata però in (\mathbf{x}', t) e moltiplicata per $\theta(\mathbf{x}, t)$, e quindi mediando, si ottiene

$$\begin{aligned}
& \langle \theta(\mathbf{x}', t) \partial_t \theta(\mathbf{x}, t) + \theta(\mathbf{x}, t) \partial_t \theta(\mathbf{x}', t) \rangle + \\
& + \langle \theta(\mathbf{x}', t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\partial} \theta(\mathbf{x}, t) + \theta(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}', t) \cdot \boldsymbol{\partial} \theta(\mathbf{x}', t) \rangle = \\
& = \langle \theta(\mathbf{x}', t) K_0 \partial^2 \theta(\mathbf{x}, t) + \theta(\mathbf{x}, t) K_0 \partial^2 \theta(\mathbf{x}', t) \rangle + \\
& + \langle \theta(\mathbf{x}', t) f_L(\mathbf{x}, t) + \theta(\mathbf{x}, t) f_L(\mathbf{x}', t) \rangle . \tag{2.2}
\end{aligned}$$

La prima riga della (2.2), grazie alla linearità dell'operazione di media, può essere riscritta semplicemente come derivata temporale della covarianza; un discorso analogo vale anche per la terza riga, ma in questo caso accanto al laplaciano appare un fattore 2 perché

$$\begin{aligned}
& \langle \theta(\mathbf{x}', t) K_0 \partial_{\mathbf{x}}^2 \theta(\mathbf{x}, t) \rangle + \langle \theta(\mathbf{x}, t) K_0 \partial_{\mathbf{x}'}^2 \theta(\mathbf{x}', t) \rangle = \\
& = K_0 [\partial_{\mathbf{x}}^2 \langle \theta(\mathbf{x}', t) \theta(\mathbf{x}, t) \rangle + \partial_{\mathbf{x}'}^2 \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle] = \\
& = K_0 [\partial_{\mathbf{x}}^2 \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle + \partial_{\mathbf{x}}^2 \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle] .
\end{aligned}$$

Restano dunque da esprimere la seconda e la quarta riga di (2.2): per far ciò integriamo formalmente nel tempo la (2.1):

$$\begin{aligned}
\theta(\mathbf{x}, t) &= \theta(\mathbf{x}, -\infty) - \int_{-\infty}^t d\tau \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \boldsymbol{\partial} \theta(\mathbf{x}, \tau) + \\
& + \int_{-\infty}^t d\tau K_0 \partial^2 \theta(\mathbf{x}, \tau) + \int_{-\infty}^t d\tau f_L(\mathbf{x}, \tau)
\end{aligned}$$

e calcoliamo le derivate funzionali di θ rispetto a \mathbf{v} e f_L per poi applicare il teorema di Furutsu-Novikov. Tenendo conto dell'indipendenza fra \mathbf{v} e f_L si

ottiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\theta(\mathbf{x}, t)}{\delta v_\nu(\mathbf{x}'', t'')} &= \int_{-\infty}^t d\tau \left[-\frac{\delta v_\mu(\mathbf{x}, \tau)}{\delta v_\nu(\mathbf{x}'', t'')} \partial_\mu \theta(\mathbf{x}, \tau) + (\dots) \frac{\delta\theta(\mathbf{x}, \tau)}{\delta v_\nu(\mathbf{x}'', t'')} \right] = \\
&= \int_{-\infty}^t d\tau [-\delta_{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') \delta(\tau - t'') \partial_\mu \theta(\mathbf{x}, \tau) + (\dots) T_H(\tau - t'')] = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau [-\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') \delta(\tau - t'') \partial_\nu \theta(\mathbf{x}, \tau) + (\dots) T_H(\tau - t'')] T_H(t - \tau) = \\
&= -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') \partial_\nu \theta(\mathbf{x}, t'') T_H(t - t'') + \int_{t''}^t d\tau (\dots)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\theta(\mathbf{x}, t)}{\delta f_L(\mathbf{x}'', t'')} &= \int_{-\infty}^t d\tau \left[\frac{\delta f_L(\mathbf{x}, \tau)}{\delta f_L(\mathbf{x}'', t'')} + (\dots) \frac{\delta\theta(\mathbf{x}, \tau)}{\delta f_L(\mathbf{x}'', t'')} \right] = \\
&= \int_{-\infty}^t d\tau [\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') \delta(\tau - t'') + (\dots) T_H(\tau - t'')] = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau [\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') \delta(\tau - t'') + (\dots) T_H(\tau - t'')] T_H(t - \tau) = \\
&= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') T_H(t - t'') + \int_{t''}^t d\tau (\dots) .
\end{aligned}$$

I termini indicati da (\dots) (che non sarebbero calcolabili esplicitamente) non ci interessano in dettaglio, è sufficiente sapere che sono regolari; ciò grazie alla causalità, responsabile dell'apparizione di $T_H(\tau - t'')$, e all'ipotesi di δ -correlazione temporale che qui di seguito fa comparire $\delta(t - t'')$: questi due fattori, in combinazione con $T_H(t - \tau)$, rendono infatti coincidenti i due estremi di integrazione dei termini con (\dots) . Nel valutare l'espressione seguente occorre anche considerare l'annullamento del termine in cui la δ spaziale cade sotto derivata perché mediante integrazione per parti (l'integrando si annulla all'infinito) quest'ultima può essere trasferita sulla velocità e quindi dà zero

per incompressibilità. Applicando la (1.2) si ha quindi:

$$\begin{aligned}
& \langle \theta(\mathbf{x}', t) v_\mu(\mathbf{x}, t) \partial_{x_\mu} \theta(\mathbf{x}, t) \rangle = \\
& = \int d^d \mathbf{x}'' \int_{-\infty}^{+\infty} dt'' \langle v_\mu(\mathbf{x}, t) v_\nu(\mathbf{x}'', t'') \rangle \left\langle \frac{\delta[\theta(\mathbf{x}', t) \partial_{x_\mu} \theta(\mathbf{x}, t)]}{\delta v_\nu(\mathbf{x}'', t'')} \right\rangle = \\
& = \int d^d \mathbf{x}'' \int_{-\infty}^{+\infty} dt'' \delta(t - t'') \langle v_\mu(\mathbf{x}) v_\nu(\mathbf{x}'') \rangle \times \\
& \quad \times \left\langle \frac{\delta \theta(\mathbf{x}', t)}{\delta v_\nu(\mathbf{x}'', t'')} \partial_{x_\mu} \theta(\mathbf{x}, t) + \theta(\mathbf{x}', t) \partial_{x_\mu} \frac{\delta \theta(\mathbf{x}, t)}{\delta v_\nu(\mathbf{x}'', t'')} \right\rangle = \\
& = \int d^d \mathbf{x}'' \int_{-\infty}^{+\infty} dt'' \delta(t - t'') \langle v_\mu(\mathbf{x}) v_\nu(\mathbf{x}'') \rangle \times \\
& \quad \times \left\langle -\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \partial_{x'_\nu} \theta(\mathbf{x}', t'') \partial_{x_\mu} \theta(\mathbf{x}, t) T_H(t - t'') - \right. \\
& \quad \left. -\theta(\mathbf{x}', t) \partial_{x_\mu} [\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') \partial_{x'_\nu} \theta(\mathbf{x}, t'')] T_H(t - t'') + \int_{t''}^t d\tau (\dots) \right\rangle = \\
& = \int d^d \mathbf{x}'' \langle v_\mu(\mathbf{x}) v_\nu(\mathbf{x}'') \rangle \left\langle -\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \partial_{x'_\nu} \theta(\mathbf{x}', t) \partial_{x_\mu} \theta(\mathbf{x}, t) T_H(0) - \right. \\
& \quad \left. -\theta(\mathbf{x}', t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') \partial_{x_\mu} \partial_{x'_\nu} \theta(\mathbf{x}, t) T_H(0) + \int_t^t d\tau (\dots) \right\rangle = \\
& = -\langle v_\mu(\mathbf{x}) v_\nu(\mathbf{x}') \rangle \frac{1}{2} \langle \partial_{x'_\nu} \theta(\mathbf{x}', t) \partial_{x_\mu} \theta(\mathbf{x}, t) \rangle - \\
& = -\langle v_\mu(\mathbf{x}) v_\nu(\mathbf{x}) \rangle \frac{1}{2} \langle \theta(\mathbf{x}', t) \partial_{x_\mu} \partial_{x'_\nu} \theta(\mathbf{x}, t) \rangle + 0 = \\
& = \frac{1}{2} [\langle v_\mu(\mathbf{x}) v_\nu(\mathbf{x}') \rangle - \langle v_\mu(\mathbf{x}) v_\nu(\mathbf{x}) \rangle] \partial_{x_\mu} \partial_{x'_\nu} \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle = \\
& = -\frac{1}{2} D_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \partial_\mu \partial_\nu \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle \\
& \implies \langle \theta(\mathbf{x}', t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\partial} \theta(\mathbf{x}, t) \rangle + \langle \theta(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}', t) \cdot \boldsymbol{\partial} \theta(\mathbf{x}', t) \rangle = \\
& = -D_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \partial_\mu \partial_\nu \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle \tag{2.3}
\end{aligned}$$

e anche

$$\begin{aligned}
& \langle f_L(\mathbf{x}', t) \theta(\mathbf{x}, t) \rangle = \\
& = \int d^d \mathbf{x}'' \int_{-\infty}^{+\infty} dt'' \langle f_L(\mathbf{x}', t) f_L(\mathbf{x}'', t'') \rangle \left\langle \frac{\delta \theta(\mathbf{x}, t)}{\delta f_L(\mathbf{x}'', t'')} \right\rangle = \\
& = \int d^d \mathbf{x}'' \int_{-\infty}^{+\infty} dt'' \delta(t - t'') F_L(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \times \\
& \quad \times \left\langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') T_H(t - t'') + \int_{t''}^t d\tau (\dots) \right\rangle = \\
& = \int d^d \mathbf{x}'' F_L(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \left[\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') T_H(0) + \int_t^t d\tau (\dots) \right] = \\
& = \int d^d \mathbf{x}'' F_L(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \left[\frac{1}{2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') + 0 \right] = \frac{1}{2} F_L(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \\
& \implies \langle f_L(\mathbf{x}', t) \theta(\mathbf{x}, t) \rangle + \langle f_L(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle = F_L(\Delta x) . \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Sostituendo (2.3) e (2.4) in (2.2), e sfruttando (1.3) e (1.4), si ottiene:

$$\begin{aligned}
& \partial_t \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle = \\
& = D_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \partial_\mu \partial_\nu \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle + 2K_0 \partial^2 \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle + F_L(\Delta x) = \\
& = D_0 \Delta x^\xi \left[(\xi + d - 1) \delta_{\mu\nu} - \xi \frac{\Delta x_\mu \Delta x_\nu}{\Delta x^2} \right] \times \\
& \quad \times \left[\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\Delta x_\mu \Delta x_\nu}{\Delta x^2} \right) \frac{1}{\Delta x} \partial_{\Delta x} + \frac{\Delta x_\mu \Delta x_\nu}{\Delta x^2} \partial_{\Delta x}^2 \right] \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle + \\
& \quad + 2K_0 \left(\frac{d-1}{\Delta x} \partial_{\Delta x} + \partial_{\Delta x}^2 \right) \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle + F_L(\Delta x) = \\
& = [(\xi + d - 1) D_0 \Delta x^\xi + 2K_0] \frac{d-1}{\Delta x} \partial_{\Delta x} \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle + \\
& \quad + [(d-1) D_0 \Delta x^\xi + 2K_0] \partial_{\Delta x}^2 \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle + F_L(\Delta x) = \\
& = \frac{1}{\Delta x^{d-1}} \partial_{\Delta x} \{ \Delta x^{d-1} [2K_0 + (d-1) D_0 \Delta x^\xi] \partial_{\Delta x} \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle \} + F_L(\Delta x) .
\end{aligned}$$

In una situazione stazionaria la derivata temporale che appare a primo membro si annulla, quindi il problema si riduce a un'equazione differenziale ordi-

itaria del second'ordine nell'incognita $C(\Delta x) \equiv \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x^{d-1}} \partial_{\Delta x} \{ \Delta x^{d-1} [2K_0 + (d-1)D_0 \Delta x^\xi] \partial_{\Delta x} C(\Delta x) \} + F_L(\Delta x) &= 0 \implies \\ \Delta x^{d-1} [2K_0 + (d-1)D_0 \Delta x^\xi] \partial_{\Delta x} C(\Delta x) &= - \int_0^{\Delta x} d\rho \rho^{d-1} F_L(\rho) + a \implies \\ C(\Delta x) &= - \int_0^{\Delta x} dr \frac{1}{r^{d-1} [2K_0 + (d-1)D_0 r^\xi]} \left(\int_0^r d\rho \rho^{d-1} F_L(\rho) + a \right) + b. \end{aligned}$$

Per calcolare l'integrale interno poniamo ora il primo vincolo sui punti \mathbf{x} e \mathbf{x}' limitandoci a considerare² $\Delta x < L$:

$$\begin{aligned} C(\Delta x) &= - \int_0^{\Delta x} dr \frac{1}{r^{d-1} [2K_0 + (d-1)D_0 r^\xi]} \left(\int_0^r d\rho \rho^{d-1} F_0 + a \right) + b = \\ &= - \int_0^{\Delta x} dr \frac{1}{r^{d-1} [2K_0 + (d-1)D_0 r^\xi]} \left(F_0 \frac{r^d}{d} + a \right) + b = \\ &= - \int_0^{\Delta x} dr \frac{F_0 r + a d r^{1-d}}{d [2K_0 + (d-1)D_0 r^\xi]} + b. \end{aligned}$$

Le costanti additive a e b possono essere fissate sfruttando le due richieste fisiche di regolarità nell'origine e di scorrelazione all'infinito:

$$C(0) \text{ regolare} \implies a = 0 \quad (\text{perché } d \geq 2)$$

$$\begin{aligned} 0 = C(\infty) &= - \int_0^\infty dr \frac{1}{r^{d-1} [2K_0 + (d-1)D_0 r^\xi]} \int_0^r d\rho \rho^{d-1} F_L(\rho) + b \implies \\ b &= \int_0^\infty dr \frac{1}{r^{d-1} [2K_0 + (d-1)D_0 r^\xi]} \int_0^r d\rho \rho^{d-1} F_L(\rho) = \\ &= \int_0^L dr \frac{1}{r^{d-1} [2K_0 + (d-1)D_0 r^\xi]} \int_0^r d\rho \rho^{d-1} F_0 + \\ &+ \int_L^\infty dr \frac{1}{r^{d-1} [2K_0 + (d-1)D_0 r^\xi]} \int_0^L d\rho \rho^{d-1} F_0 = \\ &= \int_0^L dr \frac{F_0 r}{d [2K_0 + (d-1)D_0 r^\xi]} + \int_L^\infty dr \frac{F_0 L^d}{d r^{d-1} [2K_0 + (d-1)D_0 r^\xi]}. \end{aligned}$$

²in realtà L può essere posto grande a piacere, per cui si tratta di una limitazione solo computazionale e non fisica

Il primo integrale a ultimo membro (presente anche nell'espressione di $C(\Delta x)$ con un diverso estremo superiore), cos  come il secondo, non   risolvibile analiticamente, per cui occorre operare una semplificazione definendo la *scala di dissipazione*³ $\eta \equiv (2K_0/(d-1)D_0)^{1/\xi}$ e spezzando l'intervallo di integrazione in due parti, in ognuna delle quali si tiene conto a denominatore solo dell'addendo dominante:

$$\begin{aligned}
b &\simeq \int_0^\eta dr \frac{F_0 r}{2dK_0} + \int_\eta^L dr \frac{F_0 r}{d(d-1)D_0 r^\xi} + \int_L^\infty dr \frac{F_0 L^d}{d r^{d-1} (d-1) D_0 r^\xi} = \\
&= \frac{F_0}{2dK_0} \int_0^\eta dr r + \frac{F_0}{d(d-1)D_0} \int_\eta^L dr r^{1-\xi} + \frac{F_0 L^d}{d(d-1)D_0} \int_L^\infty dr r^{1-d-\xi} = \\
&= \frac{F_0}{2dK_0} \frac{\eta^2}{2} + \frac{F_0}{d(d-1)D_0} \frac{L^{2-\xi} - \eta^{2-\xi}}{2-\xi} - \frac{F_0 L^d}{d(d-1)D_0} \frac{L^{2-d-\xi}}{2-d-\xi} = \\
&= \frac{F_0 \eta^2}{4dK_0} - \frac{F_0 \eta^{2-\xi}}{d(d-1)D_0(2-\xi)} + \frac{F_0 L^{2-\xi}}{d(d-1)D_0} \left(\frac{1}{2-\xi} + \frac{1}{\xi+d-2} \right),
\end{aligned}$$

quindi

$$b \simeq -\frac{F_0 \xi \eta^{2-\xi}}{2d(d-1)D_0(2-\xi)} + \frac{F_0 L^{2-\xi}}{(d-1)D_0(2-\xi)(\xi+d-2)}.$$

In conclusione si ottiene:

$$\begin{aligned}
C(\Delta x) &\simeq -\frac{F_0}{d} \left[\int_0^\eta dr \frac{r}{2K_0} + \int_\eta^{\Delta x} dr \frac{r}{(d-1)D_0 r^\xi} \right] + b = \\
&= -\frac{F_0}{d} \left[\frac{1}{2K_0} \int_0^\eta dr r + \frac{1}{(d-1)D_0} \int_\eta^{\Delta x} dr r^{1-\xi} \right] + b = \\
&= -\frac{F_0}{2dK_0} \frac{\eta^2}{2} - \frac{F_0}{d(d-1)D_0} \left(\frac{\Delta x^{2-\xi}}{2-\xi} - \frac{\eta^{2-\xi}}{2-\xi} \right) + b = \\
&= c - \frac{F_0}{d(d-1)D_0(2-\xi)} \Delta x^{2-\xi} \tag{2.5}
\end{aligned}$$

dove la costante c risulta pari a

$$c = -\frac{F_0 \eta^2}{4dK_0} + \frac{F_0 \eta^{2-\xi}}{d(d-1)D_0(2-\xi)} + b \simeq \frac{F_0 L^{2-\xi}}{(d-1)D_0(2-\xi)(\xi+d-2)}.$$

³il nome   evidentemente dovuto al fatto che fisicamente al di sotto di questa lunghezza la viscosit  diventa il fenomeno prevalente, ma anche in questo caso l'unica conseguenza della finitezza del parametro consiste nell'evitare divergenze matematiche, per cui η pu  essere immaginato piccolo a piacere

L'equazione (2.5) esprime l'andamento della funzione di covarianza di uno scalare passivo in un campo turbolento per separazioni $\eta \ll \Delta x \ll L$, vale a dire comprese in quello che si chiama *intervallo inerziale*.

Avendo separato nell'integrale il contributo delle separazioni minori della scala di dissipazione, $C(\Delta x)$ non soddisfa piú esattamente l'equazione stazionaria

$$D_{\mu\nu}(\Delta\mathbf{x}) \partial_\mu \partial_\nu C(\Delta x) + 2K_0 \partial^2 C(\Delta x) + F_L(\Delta x) = 0 ,$$

in quanto risulta

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial_\nu C(\Delta x) &= -\frac{F_0}{d(d-1)D_0} \Delta x^{-\xi} \left(\delta_{\mu\nu} - \xi \frac{\Delta x_\mu \Delta x_\nu}{\Delta x^2} \right) \\ \implies D_{\mu\nu}(\Delta\mathbf{x}) \partial_\mu \partial_\nu C(\Delta x) &= -F_0 ; \end{aligned} \quad (2.6)$$

ciò non costituisce alcun problema per $\Delta x \gg \eta$, anzi (come si vedrà piú avanti) indica la possibilità che la normale diffusione molecolare (K_0) diventi trascurabile rispetto a una diffusione turbolenta.

Si noti altresí che, per quanto detto in precedenza su L , la costante c può diventare grande a piacere, rendendo trascurabile l'addendo dipendente da Δx ; ancora una volta, però, la grandezza fisicamente rilevante è la funzione di struttura spaziale, in cui tale contributo si elide:

$$\begin{aligned} \langle [\theta(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{x}')]^2 \rangle &= 2[\langle \theta^2 \rangle - \langle \theta(\mathbf{x}) \theta(\mathbf{x}') \rangle] = 2[b - C(\Delta x)] = \\ &= -\frac{F_0 \xi \eta^{2-\xi}}{d(d-1)D_0(2-\xi)} + \frac{2F_0}{d(d-1)(2-\xi)D_0} \Delta x^{2-\xi} ; \end{aligned}$$

nell'ultima espressione è ora il primo addendo a diventare trascurabile (a causa della piccolezza di η) rispetto al secondo. Nel seguito, comunque, considereremo c una normale costante finita e studieremo esclusivamente funzioni di covarianza.

Si noti che per $\xi = 4/3$ (corrispondente ad un campo di velocità che segue la legge di Kolmogorov K41 [2]) si ha che

$$\langle [\theta(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{x}')]^2 \rangle \propto \Delta x^{2/3}$$

che corrisponde ad uno spettro di energia dello scalare che scala a potenza come $k^{-5/3}$. Tale andamento corrisponde alla famosa legge di Kolmogorov, Obukhov, Corrsin del 1951 per lo scalare passivo [8].

Capitolo 3

Large Eddy Simulation

3.1 Introduzione

Una delle caratteristiche principali dei sistemi turbolenti è l'enorme numero di gradi di libertà che vengono in essi eccitati dinamicamente [9].

Da un punto di vista numerico, ciò pone un serio limite alla descrizione deterministica dei sistemi turbolenti. La potenza di calcolo a disposizione non permette infatti, ad oggi (e probabilmente neppure in un vicino futuro), di descrivere dinamicamente tutte le scale attive nel sistema, dalla più grande scala, L , dove l'energia viene iniettata nel sistema, sino alla più piccola scala, η , dove l'energia viene dissipata per effetto dei moti molecolari.

Di fatto, nelle applicazioni si è spesso interessati alla conoscenza della dinamica delle sole grandi scale di moto. Ciò non semplifica comunque il problema visto che, come osservato nel precedente capitolo, la struttura delle equazioni fa sí che non si possano scrivere equazioni chiuse nel solo campo a grande scala. Non è quindi possibile ridurre ai soli modi a grande scala la dinamica di un sistema turbolento. Tale fatto apre la strada al ben noto problema delle *parametrizzazioni* (si veda ad esempio [10]), problema di centrale importanza in turbolenza. L'idea è quella di descrivere deterministicamente le sole grandi scale, parametrizzando appunto (in modo empirico) l'effetto dinamico delle piccole scale sulle grandi.

I modelli di turbolenza che seguono tale strategia sono noti come modelli di *Large-eddy simulation* (o più brevemente LES) e sono quanto di più avanzato esiste oggi nell'approccio deterministico alla turbolenza.

Nei prossimi paragrafi porremo l'attenzione su un modello di LES di campi

scalari passivi. Come vedremo, la specificità del modello che sceglieremo ci permetterà di affrontare analiticamente il problema e quindi di giustificare in modo rigoroso la strategia della LES. I risultati che verranno esposti nel seguito sono il primo approccio analitico al problema della LES che, ad oggi, risiedeva su basi di natura empirica e quindi scarsamente sotto controllo.

3.2 L'operazione di filtro

I risultati ricavati finora sono del tutto generali e riguardano le caratteristiche “puntuali” del campo. Per procedere nella direzione di una discretizzazione del problema su reticolo, in modo da permettere un'analisi numerica al calcolatore, occorre innanzitutto operare delle medie sui campi considerando anche i valori assunti attorno al punto di calcolo in una zona con dimensioni caratteristiche pari alla lunghezza di griglia della simulazione, così da poter poi ritenere ininfluenti eventuali fluttuazioni su scale più ridotte. La *Large Eddy Simulation* consiste proprio in questo: noi affronteremo il problema della consistenza dell'approccio LES, considerando in generale lo studio delle grandezze spazialmente “mediate” e concentrandoci in particolare sulla funzione di covarianza dello scalare passivo, ma rimanendo sempre nell'ambito di una formulazione continua dell'argomento.

Partendo da $\theta(\mathbf{x}, t)$ definiamo il corrispondente *campo a grande scala* $[\theta](\mathbf{x}, t)$ come il prodotto di convoluzione

$$[\theta](\mathbf{x}, t) \equiv \int d^d \mathbf{y} P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \theta(\mathbf{y}, t) = \int d^d \mathbf{r} P_l(\mathbf{r}) \theta(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t).$$

Il *filtro* P_l deve possedere una forma tale da rendere trascurabili le fluttuazioni su scale minori della sua lunghezza caratteristica l ; inoltre, per conservare l'isotropia del problema, consideriamo esclusivamente funzioni della sola coordinata radiale ($P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = P_l(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$): per esempio si può pensare a un filtro di forma gaussiana (di larghezza l) o, ragionando in componenti di Fourier, a un passa-basso con valore di taglio pari a $1/l$. Per poter calcolare esplicitamente gli integrali, però, la situazione più semplice è una media a finestra mobile, con $P_l(r)$ pari a un valore costante positivo P_0 per $r < l$ e nullo altrimenti (P_0 è evidentemente determinato dalla condizione di normalizzazione $\int d^d \mathbf{r} P_l(\mathbf{r}) = 1 \forall P_l$ che nel caso tridimensionale comporta $P_0 = 3/4\pi l^3$).

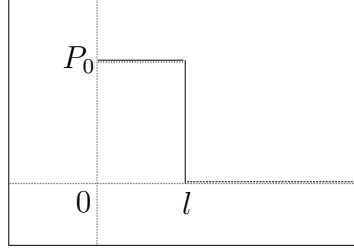


Figura 3.1: Il filtro P_l corrispondente a una media a finestra mobile.

Ripetiamo il discorso precedente anche sulla velocità, passando da $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ a $[\mathbf{v}](\mathbf{x}, t) = \int d^d \mathbf{y} P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{v}(\mathbf{y}, t)$, e definiamo le parti rimanenti (costituite sostanzialmente da contributi a piccola scala) come $\theta^*(\mathbf{x}, t) = \theta(\mathbf{x}, t) - [\theta](\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - [\mathbf{v}](\mathbf{x}, t)$. La situazione è diversa per quanto riguarda la forzante: può accadere che sia $[f_L](\mathbf{x}, t) = \int d^d \mathbf{y} P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f_L(\mathbf{y}, t) \neq f_L(\mathbf{x}, t)$, ma sicuramente, ricordando la forma a gradino di F_L , si ha

$$\begin{aligned} [[F_L]](\Delta x) &= \langle [f_L](\mathbf{x}) [f_L](\mathbf{x}') \rangle = \int d^d \mathbf{y} \int d^d \mathbf{y}' P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) P_l(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') \times \\ &\times \langle f_L(\mathbf{y}) f_L(\mathbf{y}') \rangle = \int d^d \mathbf{y} \int d^d \mathbf{y}' P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) P_l(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') F_L(|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|) = F_L(\Delta x) \end{aligned}$$

a patto di prendere $l < \Delta x \ll L$. La lunghezza del filtro deve ovviamente essere minore della separazione fra i punti in cui si valuta la funzione di covarianza (per noi Δx): quanto il rapporto $l/\Delta x$ possa avvicinarsi a 1 è in un certo senso uno dei nostri obiettivi; d'altro canto assumiamo sempre $\Delta x \gg \eta$, e anche l deve generalmente essere maggiore della scala di dissipazione: ma come abbiamo già detto quest'ultima può essere pensata piccola a piacere e non vi è nessun problema a considerare limiti del tipo

$$l \rightarrow 0 \Rightarrow P_l(\mathbf{r}) \rightarrow \delta(\mathbf{r}) \Rightarrow [\theta](\mathbf{x}, t) \rightarrow \theta(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \theta^*(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0 .$$

Si noti che il “filtraggio” commuta sia con l'operazione di media statistica, grazie alla linearità, sia con tutte le derivate: anche per quelle parziali spaziali si ha infatti (mediante integrazione per parti, con integrando nullo all'infinito) $\partial_\mu [\theta](\mathbf{x}) = \partial_{x_\mu} [\theta](\mathbf{x}) = \int d^d \mathbf{y} \partial_{x_\mu} P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \theta(\mathbf{y}) = \int d^d \mathbf{y} P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_{y_\mu} \theta(\mathbf{y}) = \int d^d \mathbf{y} P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_\mu \theta(\mathbf{y}) = [\partial_\mu \theta](\mathbf{x})$.

3.3 La funzione di covarianza per il campo a grande scala

Nel caso tridimensionale con filtro a gradino il primo importante risultato sui campi a grande scala è immediato: per calcolare la funzione di covarianza di $[\theta]$ è infatti sufficiente operare una doppia integrazione della (2.5) in $[[C]](\Delta x) \equiv \langle [\theta](\mathbf{x}, t) [\theta](\mathbf{x}', t) \rangle$:

$$\begin{aligned}
[[C]](\Delta x) &= \int d^3\mathbf{y} \int d^3\mathbf{y}' P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) P_l(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') \langle \theta(\mathbf{y}, t) \theta(\mathbf{y}', t) \rangle = \\
&= \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{r}' P_l(\mathbf{r}) P_l(\mathbf{r}') C(|(\mathbf{x} - \mathbf{r}) - (\mathbf{x}' - \mathbf{r}')|) = \\
&= \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{s} P_l(r) P_l(|\mathbf{r} + \mathbf{s}|) C(|\Delta\mathbf{x} - \mathbf{s}|) = \\
&= P_0^2 \int d^3\mathbf{s} \left[c - \frac{F_0}{3(3-1)(2-\xi)D_0} |\Delta\mathbf{x} - \mathbf{s}|^{2-\xi} \right] V_0,
\end{aligned}$$

dove V_0 = volume della doppia calotta sferica di raggio $l \sin \vartheta_0$ (con $|\cos \vartheta_0| = s/2l$) e semialtezza $l - s/2$ risultante dall'intersezione delle due sfere di raggio l centrate in $\mathbf{0}$ e $-\mathbf{s}$. Quindi:

$$\begin{aligned}
[[C]](\Delta x) &= c - \left(\frac{3}{4\pi l^3} \right)^2 \frac{F_0}{6(2-\xi)D_0} \int_0^{2l} ds \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi s^2 (\Delta x^2 + s^2 - \\
&\quad - 2\Delta x s \cos \vartheta)^{1-\xi/2} \pi \left(\frac{4}{3} l^3 - l^2 s + \frac{1}{12} s^3 \right) \quad (\Delta\mathbf{x} \text{ asse polare}) = \\
&= c - \frac{F_0}{6(2-\xi)D_0} \frac{9}{4(4-\xi)(5-\xi)(6-\xi)(7-\xi)(8-\xi)(9-\xi) l^6 \Delta x} \times \\
&\quad \times \{ (\Delta x + 2l)^{7-\xi} [\Delta x^2 - 2(7-\xi)l\Delta x + (5-\xi)(8-\xi)l^2] + \\
&\quad + (\Delta x - 2l)^{7-\xi} [\Delta x^2 + 2(7-\xi)l\Delta x + (5-\xi)(8-\xi)l^2] - \\
&\quad - 2\Delta x^{7-\xi} [\Delta x^2 - (8-\xi)(9-\xi)l^2] \} = \\
&= c - \frac{F_0}{6(2-\xi)D_0} \Delta x^{2-\xi} \left[1 + \frac{1}{5} (2-\xi)(3-\xi) \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{175} \xi(\xi-1)(2-\xi)(3-\xi) \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^4 + o\left(\frac{l}{\Delta x} \right)^6 \right]. \tag{3.1}
\end{aligned}$$

Assumendo $l/\Delta x$ come parametro di sviluppo la correzione rispetto alla funzione di covarianza del campo totale non presenta il prim'ordine: si tratta di un risultato notevole perché indica che la "proiezione" a grande scala, oltre a rendere ovviamente il risultato già noto per $l \rightarrow 0$, opera in modo tale da non modificare in modo rilevante (cioè solo al second'ordine) le proprietà statistiche di θ anche in presenza di un avvicinamento della lunghezza del filtro alla separazione sotto esame.

3.4 Le equazioni per il campo scalare a grande scala

Studiamo ora in dettaglio le equazioni dei campi $[\theta]$ e θ^* : una semplice integrazione della (2.1) rende

$$\partial_t[\theta](\mathbf{x}, t) + \int d^d \mathbf{y} P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) \cdot \boldsymbol{\partial} \theta(\mathbf{y}, t) = K_0 \partial^2[\theta](\mathbf{x}, t) + [f_L](\mathbf{x}, t); \quad (3.2)$$

scriviamo le due equazioni una vicino all'altra (tralasciando momentaneamente il punto di calcolo) e sottraiamo la seconda dalla prima:

$$\begin{cases} \partial_t \theta + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} \theta = K_0 \partial^2 \theta + f_L \\ \partial_t [\theta] + [\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} \theta] = K_0 \partial^2 [\theta] + [f_L] \end{cases}$$

$$\implies \partial_t \theta^* + (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} \theta - [\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} \theta]) = K_0 \partial^2 \theta^* + (f_L - [f_L]),$$

cioè, in modo più esteso,

$$\begin{aligned} \partial_t \theta^*(\mathbf{x}, t) + \int d^d \mathbf{y} \{ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \} \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) \cdot \boldsymbol{\partial} \theta(\mathbf{y}, t) = \\ = K_0 \partial^2 \theta^*(\mathbf{x}, t) + \{ f_L(\mathbf{x}, t) - [f_L](\mathbf{x}, t) \}. \end{aligned}$$

Dalla (3.2) è possibile risalire all'equazione per la funzione di covarianza di $[\theta]$ in modo del tutto analogo a quello già adottato nel capitolo precedente, visto che il filtro non altera la proprietà di gaussianità di un campo (per esempio $[f_L]$ permane gaussiano); l'unica differenza consiste nella presenza di alcuni filtri agenti sulle derivate funzionali all'interno del teorema di Furutsu-Novikov:

$$\langle [\theta](\mathbf{x}', t) [\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} \theta](\mathbf{x}, t) \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^d \mathbf{y} \int d^d \mathbf{y}' P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) P_l(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') \langle \theta(\mathbf{y}', t) v_\mu(\mathbf{y}, t) \partial_{y_\mu} \theta(\mathbf{y}, t) \rangle = \\
&= - \int d^d \mathbf{y} \int d^d \mathbf{y}' P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) P_l(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') \frac{1}{2} D_{\mu\nu}(\mathbf{y} - \mathbf{y}') \partial_\mu \partial_\nu \langle \theta(\mathbf{y}, t) \theta(\mathbf{y}', t) \rangle \\
&\quad \implies \langle [\theta](\mathbf{x}', t) [\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} \theta](\mathbf{x}, t) + [\theta](\mathbf{x}, t) [\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} \theta](\mathbf{x}', t) \rangle = \\
&= - \int d^d \mathbf{y} \int d^d \mathbf{y}' P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) P_l(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') D_{\mu\nu}(\mathbf{y} - \mathbf{y}') \partial_\mu \partial_\nu \langle \theta(\mathbf{y}, t) \theta(\mathbf{y}', t) \rangle \\
&\quad \implies \partial_t \langle [\theta](\mathbf{x}, t) [\theta](\mathbf{x}', t) \rangle = 2K_0 \partial^2 \langle [\theta](\mathbf{x}, t) [\theta](\mathbf{x}', t) \rangle + F_L(\Delta x) + \\
&+ \int d^d \mathbf{y} \int d^d \mathbf{y}' P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) P_l(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') D_{\mu\nu}(\mathbf{y} - \mathbf{y}') \partial_\mu \partial_\nu \langle \theta(\mathbf{y}, t) \theta(\mathbf{y}', t) \rangle .(3.3)
\end{aligned}$$

Per completezza scriviamo anche le equazioni per le altre due funzioni di covarianza costruibili a partire da $[\theta]$ e θ^* , in cui (come prevedibile) non compare piú la forzante che riguarda solo la grande scala; ponendo $Q_l(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) - P_l(\mathbf{r})$ si ha $\theta^*(\mathbf{x}, t) = \int d^d \mathbf{y} Q_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \theta(\mathbf{y}, t)$ (e analogamente per \mathbf{v}^*), da cui segue:

$$\begin{aligned}
&\partial_t \langle \theta^*(\mathbf{x}, t) \theta^*(\mathbf{x}', t) \rangle = 2K_0 \partial^2 \langle \theta^*(\mathbf{x}) \theta^*(\mathbf{x}', t) \rangle + \\
&+ \int d^d \mathbf{y} \int d^d \mathbf{y}' Q_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) Q_l(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') D_{\mu\nu}(\mathbf{y} - \mathbf{y}') \partial_\mu \partial_\nu \langle \theta(\mathbf{y}, t) \theta(\mathbf{y}', t) \rangle .(3.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\partial \langle [\theta](\mathbf{x}, t) \theta^*(\mathbf{x}', t) \rangle = 2K_0 \partial^2 \langle [\theta](\mathbf{x}, t) \theta^*(\mathbf{x}', t) \rangle + \\
&+ \int d^d \mathbf{y} \int d^d \mathbf{y}' P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) Q_l(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') D_{\mu\nu}(\mathbf{y} - \mathbf{y}') \partial_\mu \partial_\nu \langle \theta(\mathbf{y}, t) \theta(\mathbf{y}', t) \rangle .(3.5)
\end{aligned}$$

Si osservi che le equazioni (3.3), (3.4) e (3.5), scritte in questa forma, non sono chiuse nelle tre diverse covarianze: esse coinvolgono sempre il campo totale, ma ovviamente non è di alcuna utilità sostituire l'espressione già nota di $C(\Delta x)$ (2.5) che renderebbe banali identità.

Formulazione della strategia di LES

Concentriamoci adesso sul termine avvevto $\mathbf{v} \cdot \partial\theta$, che come si intuisce dalle equazioni precedenti è all'origine dei contributi piú interessanti (e allo stesso tempo difficili da trattare) alle covarianze. Poiché sia la velocità che lo scalare passivo sono composti da due addendi, secondo la separazione effettuata in precedenza, vi è una distinzione naturale in quattro termini di cui solo uno coinvolge esclusivamente la grande scala; accanto agli altri tre introduciamo quindi altrettanti *indicatori* α , β e γ , originariamente posti a 1 ma che lasceremo in forma letterale¹ in modo da studiare l'effetto di ognuno dei contributi che essi moltiplicano:

$$\mathbf{v} \cdot \partial\theta = ([\mathbf{v}] + \mathbf{v}^*) \cdot \partial([\theta] + \theta^*) \mapsto [\mathbf{v}] \cdot \partial[\theta] + \alpha [\mathbf{v}] \cdot \partial\theta^* + \beta \mathbf{v}^* \cdot \partial[\theta] + \gamma \mathbf{v}^* \cdot \partial\theta^* .$$

L'equazione dello scalare passivo può quindi essere riscritta nella forma:

$$\partial_t \theta + [\mathbf{v}] \cdot \partial[\theta] + \alpha [\mathbf{v}] \cdot \partial\theta^* + \beta \mathbf{v}^* \cdot \partial[\theta] + \gamma \mathbf{v}^* \cdot \partial\theta^* = K_0 \partial^2 \theta + f_L , \quad (3.6)$$

dalla quale, seguendo il procedimento descritto nei Capitoli 1 e 2, è possibile trovare le equazioni delle funzioni di covarianza. A tal fine, calcoliamo innanzitutto la media *a tre punti*:

$$\begin{aligned} & \langle \theta(\mathbf{x}', t) \mathbf{v}(\mathbf{z}, t) \cdot \partial\theta(\mathbf{z}', t) \rangle = \\ & = \int d^d \mathbf{z}'' \int_{-\infty}^{+\infty} dt'' \langle v_\mu(\mathbf{z}, t) v_\nu(\mathbf{z}'', t'') \rangle \left\langle \frac{\delta \{ \theta(\mathbf{x}', t) \partial_{z'_\mu} \theta(\mathbf{z}', t) \}}{\delta v_\nu(\mathbf{z}'', t'')} \right\rangle = \\ & = - \langle v_\mu(\mathbf{z}) v_\nu(\mathbf{x}') \rangle \frac{1}{2} \langle \partial_{x'_\nu} \theta(\mathbf{x}', t) \partial_{z'_\mu} \theta(\mathbf{z}', t) \rangle - \\ & \quad - \langle v_\mu(\mathbf{z}) v_\nu(\mathbf{z}') \rangle \frac{1}{2} \langle \theta(\mathbf{x}', t) \partial_{z'_\mu} \partial_{z'_\nu} \theta(\mathbf{z}', t) \rangle = \\ & = - \{ - \langle v_\mu(\mathbf{z}) v_\nu(\mathbf{x}') \rangle + (\langle v_\mu(\mathbf{z}) v_\nu(\mathbf{z}) \rangle - \langle v_\mu(\mathbf{z}) v_\nu(\mathbf{z}') \rangle) + \\ & \quad + \langle v_\mu(\mathbf{z}) v_\nu(\mathbf{z}') \rangle \} \frac{1}{2} \partial_{z'_\mu} \partial_{z'_\nu} \langle \theta(\mathbf{x}', t) \theta(\mathbf{z}', t) \rangle = \\ & = - \frac{1}{2} \{ D_{\mu\nu}(\mathbf{z} - \mathbf{x}') - D_{\mu\nu}(\mathbf{z} - \mathbf{z}') \} \partial_\mu \partial_\nu \langle \theta(\mathbf{z}', t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle . \end{aligned}$$

¹generalmente gli indicatori vengono assunti nell'intervallo chiuso $[0,1]$ oppure pari a 0 o a 1, ma nel nostro caso occorre sempre immaginarli uguali a 1 perché altrimenti non avrebbero piú senso le relazioni $\theta = [\theta] + \theta^*$ e $\mathbf{v} = [\mathbf{v}] + \mathbf{v}^*$.

L'unica differenza rispetto al calcolo che ha condotto alla (2.3) consiste nella presenza di una differenza fra funzioni di struttura della velocità, dovuto all'introduzione di tre punti diversi (\mathbf{x}' , \mathbf{z} e \mathbf{z}') anziché di due. L'espressione utilizzata per la derivata funzionale di θ rispetto a \mathbf{v} è invece la stessa del capitolo precedente, identica cioè a quella che si potrebbe dedurre dalla (3.6) (tutti gli indicatori valgono 1) senza separare ulteriormente i contributi delle grandi e delle piccole scale, perché così richiede il teorema di Furutsu-Novikov; quest'ultima operazione deve invece essere effettuata solo per il calcolo seguente:

$$\begin{aligned}
& \langle \theta(\mathbf{x}', t) [[\mathbf{v}](\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\partial}[\theta](\mathbf{x}, t) + \alpha [\mathbf{v}](\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\partial}\theta^*(\mathbf{x}, t) + \\
& \quad + \beta \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\partial}[\theta](\mathbf{x}, t) + \gamma \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\partial}\theta^*(\mathbf{x}, t)] \rangle = \\
& = \int d^d \mathbf{z} \int d^d \mathbf{z}' \{ P_l(\mathbf{x} - \mathbf{z}) P_l(\mathbf{x} - \mathbf{z}') + \alpha P_l(\mathbf{x} - \mathbf{z}) Q_l(\mathbf{x} - \mathbf{z}') + \beta Q_l(\mathbf{x} - \\
& \quad - \mathbf{z}) P_l(\mathbf{x} - \mathbf{z}') + \gamma Q_l(\mathbf{x} - \mathbf{z}) Q_l(\mathbf{x} - \mathbf{z}') \} \langle \theta(\mathbf{x}', t) \mathbf{v}(\mathbf{z}, t) \cdot \boldsymbol{\partial}\theta(\mathbf{z}', t) \rangle = \\
& = - \int d^d \mathbf{z} \int d^d \mathbf{z}' \{ \gamma \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}') + (\alpha - \gamma) P_l(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}') + \\
& \quad + (\beta - \gamma) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) P_l(\mathbf{x} - \mathbf{z}') + (1 - \alpha - \beta + \gamma) P_l(\mathbf{x} - \mathbf{z}) P_l(\mathbf{x} - \mathbf{z}') \} \times \\
& \quad \times \frac{1}{2} \{ D_{\mu\nu}(\mathbf{z} - \mathbf{x}') - D_{\mu\nu}(\mathbf{z} - \mathbf{z}') \} \partial_\mu \partial_\nu \langle \theta(\mathbf{z}', t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle .
\end{aligned}$$

Il primo membro deriva dalla (3.6), moltiplicata per $\theta(\mathbf{x}', t)$ e mediata sulle grandezze statistiche. Tenendo conto che occorre poi sommare l'equazione calcolata in (\mathbf{x}', t) e moltiplicata per $\theta(\mathbf{x}, t)$ (e mediata) appare anche il termine simmetrizzato per scambio di \mathbf{x} con \mathbf{x}' ; se ne deduce

$$\begin{aligned}
& \partial_t \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle = 2K_0 \partial^2 \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle + F_L(\Delta x) + \\
& \quad + \left\{ \int d^d \mathbf{z} \int d^d \mathbf{z}' \{ \gamma \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}') + (\alpha - \gamma) P_l(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}') + \right. \\
& \quad + (\beta - \gamma) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) P_l(\mathbf{x} - \mathbf{z}') + (1 - \alpha - \beta + \gamma) P_l(\mathbf{x} - \mathbf{z}) P_l(\mathbf{x} - \mathbf{z}') \} \times \\
& \quad \times \frac{1}{2} \{ D_{\mu\nu}(\mathbf{z} - \mathbf{x}') - D_{\mu\nu}(\mathbf{z} - \mathbf{z}') \} \partial_\mu \partial_\nu \langle \theta(\mathbf{z}', t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle + \\
& \quad \left. + \text{termine simmetrizzato del precedente } (\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2K_0 \partial^2 \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle + F_L(\Delta x) + \gamma D_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \partial_\mu \partial_\nu \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle + \\
&+ (\alpha - \gamma) \int d^d \mathbf{r} P_l(\mathbf{r}) \{ D_{\mu\nu}(\Delta \mathbf{x} - \mathbf{r}) - D_{\mu\nu}(\mathbf{r}) \} \partial_\mu \partial_\nu \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle + \\
&+ (\beta - \gamma) \int d^d \mathbf{r} P_l(\mathbf{r}) \{ D_{\mu\nu}(\Delta \mathbf{x}) - D_{\mu\nu}(\mathbf{r}) \} \partial_\mu \partial_\nu \langle \theta(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle + \\
&+ (1 - \alpha - \beta + \gamma) \int d^d \mathbf{r} \int d^d \mathbf{r}' P_l(\mathbf{r}) P_l(\mathbf{r}') \{ D_{\mu\nu}(\Delta \mathbf{x} - \mathbf{r}') - \\
&\quad - D_{\mu\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \} \partial_\mu \partial_\nu \langle \theta(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle . \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Nel caso stazionario il primo membro è nullo ed è possibile sostituire le covarianze con l'espressione (2.5). Inoltre omogeneità e isotropia ci consentono di trattare la covarianza $\langle \theta(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle$ che appare nell'ultima e terzultima riga come una semplice funzione di $|\mathbf{x}' - (\mathbf{x} + \mathbf{r})| = |\Delta \mathbf{x} - \mathbf{r}|$, in modo da poter applicare senza problemi la (2.6) immaginando la derivata come calcolata rispetto all'argomento. Come fatto precedentemente assumiamo $\eta \ll \Delta x \ll L$ ($\Rightarrow F_L(\Delta x) = F_0$) e studiamo in dettaglio ogni singolo addendo:

$$2K_0 \partial^2 C(\Delta x) = 2K_0 \delta_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu C(\Delta x) = -\frac{F_0(3 - \xi)}{3} \frac{\eta^\xi}{\Delta x^\xi} \tag{3.8}$$

$$\gamma D_{\mu\nu}(\Delta \mathbf{x}) \partial_\mu \partial_\nu C(\Delta x) = -\gamma F_0 . \tag{3.9}$$

Gli altri tre addendi contengono integrali (d -dimensionali) singoli o doppi: fissiamo quindi $P_l =$ filtro a gradino e $d = 3$ e calcoliamo preliminarmente le seguenti quantità (nel seguito il segno \pm si riferisce a $w \lesseqgtr l$, con $w > 0$):

$$\begin{aligned}
[D_{\mu\nu}](\mathbf{w}) &= \int d^3 \mathbf{s} P_l(\mathbf{s}) D_{\mu\nu}(\mathbf{w} - \mathbf{s}) = \int d^3 \mathbf{s} P_l(s) D_0 |\mathbf{w} - \mathbf{s}|^\xi \left\{ (\xi + 3 - \right. \\
&\quad \left. - 1) \delta_{\mu\nu} - \xi \frac{(w_\mu - s_\mu)(w_\nu - s_\nu)}{|\mathbf{w} - \mathbf{s}|^2} \right\} \implies (\mathbf{w} \text{ lungo l'asse 3 polare}) \\
[D_{11}](\mathbf{w}) &= P_0 D_0 \int_0^l ds \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi s^2 (w^2 + s^2 - \\
&\quad - 2 w s \cos \vartheta)^{\xi/2} \left\{ (\xi + 2) - \xi \frac{(-s \sin \vartheta \cos \varphi)^2}{w^2 + s^2 - 2 w s \cos \vartheta} \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [D_{22}](\mathbf{w}) = P_0 D_0 \int_0^l ds \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi s^2 (w^2 + s^2 - \\
&\quad - 2 w s \cos \vartheta)^{\xi/2} \left\{ (\xi + 2) - \xi \frac{(-s \sin \vartheta \sin \varphi)^2}{w^2 + s^2 - 2 w s \cos \vartheta} \right\} = \\
&= \frac{3 D_0}{2(\xi + 2)(\xi + 4)(\xi + 6) l^3 w^3} \left\{ (w + l)^{\xi+3} \{ -(\xi + 5)w^3 + (\xi + \right. \\
&\quad \left. + 3)(\xi + 5) l w^2 - (\xi + 3) l^2 w + l^3 \} \pm |w - l|^{\xi+3} \{ -(\xi + 5)w^3 - \right. \\
&\quad \left. - (\xi + 3)(\xi + 5) l w^2 - (\xi + 3) l^2 w - l^3 \} \right\} \quad \& \\
&[D_{33}](\mathbf{w}) = P_0 D_0 \int_0^l ds \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi s^2 (w^2 + s^2 - \\
&\quad - 2 w s \cos \vartheta)^{\xi/2} \left\{ (\xi + 2) - \xi \frac{(w - s \cos \vartheta)^2}{w^2 + s^2 - 2 w s \cos \vartheta} \right\} = \\
&= \frac{3 D_0}{(\xi + 2)(\xi + 4)(\xi + 6) l^3 w^3} \left\{ (w + l)^{\xi+3} \{ -l^3 + \right. \\
&\quad \left. + (\xi + 3) l^2 w + (\xi + 3) l w^2 - w^3 \} \mp |w - l|^{\xi+3} \{ -l^3 - \right. \\
&\quad \left. - (\xi + 3) l^2 w + (\xi + 3)(\xi + 5) l w^2 + w^3 \} \right\} \quad \&
\end{aligned}$$

$$[D_{\mu\nu}](\mathbf{w}) = 0 \quad \text{se } \mu \neq \nu \quad (\text{annullamento dell'integrale angolare}) \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
&[\partial_\mu \partial_\nu C](\Delta x) = \int d^3 \mathbf{r} P_l(\mathbf{r}) \left(-\frac{F_0}{3(3-1)D_0} \right) |\Delta \mathbf{x} - \mathbf{r}|^{-\xi} \left\{ \delta_{\mu\nu} - \right. \\
&\quad \left. - \xi \frac{(\Delta x_\mu - r_\mu)(\Delta x_\nu - r_\nu)}{|\Delta \mathbf{x} - \mathbf{r}|^2} \right\} \implies (\Delta \mathbf{x} \text{ lungo l'asse 3 polare}) \\
&[\partial_1 \partial_1 C](\Delta x) = -\frac{P_0 F_0}{6 D_0} \int_0^l dr \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 (\Delta x^2 + r^2 - \\
&\quad - 2 \Delta x r \cos \vartheta)^{-\xi/2} \left\{ 1 - \xi \frac{(-r \sin \vartheta \cos \varphi)^2}{\Delta x^2 + r^2 - 2 \Delta x r \cos \vartheta} \right\} = \\
&= [\partial_2 \partial_2 C](\Delta x) = -\frac{P_0 F_0}{6 D_0} \int_0^l dr \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 (\Delta x^2 + r^2 - \\
&\quad - 2 \Delta x r \cos \vartheta)^{-\xi/2} \left\{ 1 - \xi \frac{(-r \sin \vartheta \sin \varphi)^2}{\Delta x^2 + r^2 - 2 \Delta x r \cos \vartheta} \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{3F_0}{4D_0(2-\xi)(4-\xi)(6-\xi)l^3\Delta x^3} \left\{ (\Delta x + l)^{3-\xi} \{-l^3 + (3-\xi)l^2\Delta x + \right. \\
&\quad \left. + (3-\xi)l\Delta x^2 - \Delta x^3\} - (\Delta x - l)^{3-\xi} \{l^3 + \right. \\
&\quad \left. + (3-\xi)l^2\Delta x + (3-\xi)l\Delta x^2 + \Delta x^3\} \right\} \quad \& \\
[\partial_3\partial_3 C](\Delta x) &= -\frac{P_0F_0}{6D_0} \int_0^l dr \int_{-1}^1 d(\cos\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 (\Delta x^2 + r^2 - \\
&\quad - 2\Delta x r \cos\vartheta)^{-\xi/2} \left\{ 1 - \xi \frac{(\Delta x - r \cos\vartheta)^2}{\Delta x^2 + r^2 - 2\Delta x r \cos\vartheta} \right\} = \\
&= -\frac{3F_0}{4D_0(2-\xi)(4-\xi)(6-\xi)l^3\Delta x^3} \left\{ (\Delta x + l)^{3-\xi} \{2l^3 - 2(3-\xi)l^2\Delta x + \right. \\
&\quad \left. + (3-\xi)(4-\xi)l\Delta x^2 - (4-\xi)\Delta x^3\} - (\Delta x - l)^{3-\xi} \{-2l^3 - \right. \\
&\quad \left. - 2(3-\xi)l^2\Delta x - (3-\xi)(4-\xi)l\Delta x^2 - (4-\xi)\Delta x^3\} \right\} \quad \& \\
[\partial_\mu\partial_\nu C](\Delta x) &= 0 \quad \text{se } \mu \neq \nu \quad (\text{annullamento dell'integrale angolare}) \quad (3.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[D_{\mu\nu}](\mathbf{0}) &= \int d^3\mathbf{s} P_l(\mathbf{s}) D_{\mu\nu}(\mathbf{s}) = \int d^3\mathbf{s} P_l(s) D_0 s^\xi \left\{ (\xi + 3 - 1) \delta_{\mu\nu} - \xi \frac{s_\mu s_\nu}{s^2} \right\} \\
\Rightarrow [D_{11}](\mathbf{0}) &= P_0 D_0 \int_0^l dr \int_{-1}^1 d(\cos\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi s^2 s^\xi \{(\xi + 2) - \xi(\sin\vartheta \cos\varphi)^2\} = \\
&= [D_{22}](\mathbf{0}) = P_0 D_0 \int_0^l dr \int_{-1}^1 d(\cos\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi s^2 s^\xi \{(\xi + 2) - \xi(\sin\vartheta \sin\varphi)^2\} = \\
&= [D_{33}](\mathbf{0}) = P_0 D_0 \int_0^l dr \int_{-1}^1 d(\cos\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi s^2 s^\xi \{(\xi + 2) - \xi(\cos\vartheta)^2\} = 2D_0 l^\xi \\
&\quad \& \quad [D_{\mu\nu}](\mathbf{0}) = 0 \quad \text{se } \mu \neq \nu \quad (\text{annullamento dell'integrale angolare}) \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Tornando ai tre addendi rimasti in sospeso si nota che in ognuno di essi compaiono due funzioni di struttura della velocità, di cui una calcolata vicino a Δx e una intorno a zero (nel senso che in questo caso si assume per semplicità $l \ll \Delta x$); sfruttando le (3.10), (3.11) e (3.12) si può quindi concludere il

calcolo:

$$\begin{aligned}
& (\alpha - \gamma) \int d^3\mathbf{r} P_l(\mathbf{r}) \{D_{\mu\nu}(\Delta\mathbf{x} - \mathbf{r}) - D_{\mu\nu}(\mathbf{r})\} \partial_\mu \partial_\nu \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle = \\
& = (\alpha - \gamma) \left\{ \partial_1 \partial_1 \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle \{ [D_{11}](\Delta\mathbf{x}) - [D_{11}](\mathbf{0}) \} + \partial_2 \partial_2 \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle \times \right. \\
& \times \left. \{ [D_{22}](\Delta\mathbf{x}) - [D_{22}](\mathbf{0}) \} + \partial_3 \partial_3 \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle \{ [D_{33}](\Delta\mathbf{x}) - [D_{33}](\mathbf{0}) \} \right\} = \\
& = -(\alpha - \gamma) \frac{F_0}{2(\xi + 2)(\xi + 4)(\xi + 6) l^3 \Delta x^{\xi+3}} \left\{ (\Delta x + l)^{\xi+3} \{ -6\Delta x^3 + \right. \\
& + 6(\xi + 3) l \Delta x^2 - \xi(\xi + 3) l^2 \Delta x + \xi l^3 \} - (\Delta x - l)^{\xi+3} \{ -6\Delta x^3 - 6(\xi + \\
& + 3) l \Delta x^2 - \xi(\xi + 3) l^2 \Delta x - \xi l^3 \} \left. \right\} + (\alpha - \gamma) \frac{F_0(3 - \xi)}{3} \frac{l^\xi}{\Delta x^\xi} = \\
& = -(\alpha - \gamma) F_0 \left\{ 1 + \frac{1}{30} \xi(\xi + 3) \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^2 + \frac{1}{840} \xi(\xi + 1)(\xi + \right. \\
& \left. + 3)(2 - \xi) \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^4 + o\left(\frac{l}{\Delta x} \right)^6 \right\} + (\alpha - \gamma) \frac{3 - \xi}{3} F_0 \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^\xi \quad (3.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\beta - \gamma) \int d^3\mathbf{r} P_l(\mathbf{r}) \{D_{\mu\nu}(\Delta\mathbf{x}) - D_{\mu\nu}(\mathbf{r})\} \partial_\mu \partial_\nu \langle \theta(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle = \\
& = (\beta - \gamma) \left\{ D_{11}(\Delta\mathbf{x}) \partial_1 \partial_1 [C](\Delta x) + D_{22}(\Delta\mathbf{x}) \partial_2 \partial_2 [C](\Delta x) + \right. \\
& + D_{33}(\Delta\mathbf{x}) \partial_3 \partial_3 [C](\Delta x) - \int d^3\mathbf{r} P_l(\mathbf{r}) \{ D_{11}(\mathbf{r}) \partial_1 \partial_1 C(|\Delta\mathbf{x} - \mathbf{r}|) + \\
& + D_{22}(\mathbf{r}) \partial_2 \partial_2 C(|\Delta\mathbf{x} - \mathbf{r}|) + D_{33}(\mathbf{r}) \partial_3 \partial_3 C(|\Delta\mathbf{x} - \mathbf{r}|) \} \left. \right\} = \\
& = -(\beta - \gamma) \frac{F_0}{2(2 - \xi)(4 - \xi)(6 - \xi) l^3 \Delta x^{\xi+3}} \left\{ (\Delta x + l)^{3-\xi} \{ -6\Delta x^3 + \right. \\
& + 6(3 - \xi) l \Delta x^2 + \xi(3 - \xi) l^2 \Delta x - \xi l^3 \} - (\Delta x - l)^{3-\xi} \{ -6\Delta x^3 - 6(3 - \\
& - \xi) l \Delta x^2 + \xi(3 - \xi) l^2 \Delta x + \xi l^3 \} \left. \right\} + (\beta - \gamma) \frac{F_0}{2(2 - \xi)(4 - \xi) l^{3-\xi} \Delta x} \left\{ (\Delta x + \right. \\
& \left. + l)^{3-\xi} \{ -\Delta x + (3 - \xi) l \} - (\Delta x - l)^{3-\xi} \{ -\Delta x - (3 - \xi) l \} \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(\beta - \gamma) F_0 \left\{ 1 - \frac{1}{30} \xi (3 - \xi) \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^2 + \frac{1}{840} \xi (\xi + 2)(\xi - 1)(3 - \xi) \times \right. \\
&\times \left. \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^4 + o \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^6 \right\} + (\beta - \gamma) \frac{3 - \xi}{3} F_0 \left\{ \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^\xi + \frac{1}{10} \xi (\xi - 1) \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^{\xi+2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{280} \xi (\xi + 1)(\xi + 2)(\xi - 1) \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^{\xi+4} + o \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^{\xi+6} \right\} \quad (3.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(1 - \alpha - \beta + \gamma) \int d^3 \mathbf{r} \int d^3 \mathbf{r}' P_l(\mathbf{r}) P_l(\mathbf{r}') \{ D_{\mu\nu}(\Delta \mathbf{x} - \mathbf{r}') - \\
&\quad - D_{\mu\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \} \partial_\mu \partial_\nu \langle \theta(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle = \\
&= (1 - \alpha - \beta + \gamma) \left\{ [D_{11}](\Delta \mathbf{x}) \partial_1 \partial_1 [C](\Delta x) + [D_{22}](\Delta \mathbf{x}) \partial_2 \partial_2 [C](\Delta x) + \right. \\
&\quad \left. + [D_{33}](\Delta \mathbf{x}) \partial_3 \partial_3 [C](\Delta x) - \int d^3 \mathbf{r} P_l(\mathbf{r}) \{ [D_{11}](\mathbf{r}) \partial_1 \partial_1 C(|\Delta \mathbf{x} - \mathbf{r}|) + \right. \\
&\quad \left. + [D_{22}](\mathbf{r}) \partial_2 \partial_2 C(|\Delta \mathbf{x} - \mathbf{r}|) + [D_{33}](\mathbf{r}) \partial_3 \partial_3 C(|\Delta \mathbf{x} - \mathbf{r}|) \} \right\} = \\
&= -(1 - \alpha - \beta + \gamma) \frac{3 F_0}{4(\xi + 2)(\xi + 4)(\xi + 6)(2 - \xi)(4 - \xi)(6 - \xi) l^6 \Delta x^6} \times \\
&\times \left\{ (\Delta x + l)^6 \{ 9 \Delta x^6 - 54 l \Delta x^5 + 7(\xi + 3)(3 - \xi) l^2 \Delta x^4 + 6(10 - \xi^2) l^3 \Delta x^3 - \right. \\
&\quad \left. - (45 - \xi^2) l^4 \Delta x^2 + 18 l^5 \Delta x - 3 l^6 \} + (\Delta x - l)^6 \{ 9 \Delta x^6 + 54 l \Delta x^5 + 7(\xi + \right. \\
&\quad \left. + 3)(3 - \xi) l^2 \Delta x^4 - 6(10 - \xi^2) l^3 \Delta x^3 - (45 - \xi^2) l^4 \Delta x^2 - 18 l^5 \Delta x - 3 l^6 \} + \right. \\
&\quad \left. + (\Delta x + l)^{\xi+3} (\Delta x - l)^{3-\xi} \{ -9 \Delta x^6 + 18 \xi l \Delta x^5 + 11(\xi + 3)(3 - \xi) l^2 \Delta x^4 - \right. \\
&\quad \left. - 2 \xi (8 - \xi^2) l^3 \Delta x^3 + (9 - 5 \xi^2) l^4 \Delta x^2 + 6 \xi l^5 \Delta x - 3 l^6 \} + \right. \\
&\quad \left. + (\Delta x - l)^{\xi+3} (\Delta x + l)^{3-\xi} \{ -9 \Delta x^6 - 18 \xi l \Delta x^5 + 11(\xi + 3)(3 - \xi) l^2 \Delta x^4 + \right. \\
&\quad \left. + 2 \xi (8 - \xi^2) l^3 \Delta x^3 + (9 - 5 \xi^2) l^4 \Delta x^2 - 6 \xi l^5 \Delta x - 3 l^6 \} \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - \alpha - \beta + \gamma) \frac{2^\xi 12 F_0}{2(\xi + 4)(\xi + 6)(2 - \xi)(4 - \xi) l^{3-\xi} \Delta x} \{(\Delta x + \\
& \quad + l)^{3-\xi} [-\Delta x + (3 - \xi) l] - (\Delta x - l)^{3-\xi} [-\Delta x - (3 - \xi) l]\} = \\
& = -(1 - \alpha - \beta + \gamma) F_0 \left\{ 1 + \frac{1}{15} \xi^2 \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^2 + \frac{1}{525} \xi^2 (22 - 3 \xi^2) \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^4 + \right. \\
& \quad \left. + o\left(\frac{l}{\Delta x} \right)^6 \right\} + (1 - \alpha - \beta + \gamma) \frac{2^\xi 8 (3 - \xi)}{(\xi + 4)(\xi + 6)} F_0 \left\{ \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^\xi + \frac{1}{10} \xi (\xi - \right. \\
& \quad \left. - 1) \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^{\xi+2} + \frac{1}{280} \xi (\xi + 1)(\xi + 2)(\xi - 1) \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^{\xi+4} + o\left(\frac{l}{\Delta x} \right)^{\xi+6} \right\}. \quad (3.15)
\end{aligned}$$

In ognuno dei tre addendi, in corrispondenza della già notata presenza di due $D_{\mu\nu}$, vi sono dunque due serie di termini: una di ordine intero (pari) e un'altra comprendente l'ordine ξ (ed eventualmente $\xi + 2n$). La seconda serie potrebbe apparentemente causare dei problemi per la presenza di ordini non interi (e in effetti ciò accade nel caso unidimensionale "compressibile"), ma la restrizione di ξ all'intervallo $(0, 2)$ e l'assenza di ordini dispari (dovuta a ragioni di parità) rende possibile un ordinamento univoco del tipo $0, \xi, 2, \xi + 2, 4, \xi + 4, 6$, eccetera. Dalle (3.9), (3.13), (3.14) e (3.15), che ricordiamo essere sommate fra loro nella (3.7), raccogliamo gli sviluppi dei contributi che moltiplicano i singoli indicatori, lasciando per il momento da parte l'addendo 1 che compare nell'ultima delle quattro perché originato esclusivamente dalla grande scala ($[\mathbf{v}] \cdot \boldsymbol{\partial}[\theta]$ in (3.6)):

- termini con α :

$$\begin{aligned}
& - \frac{(3 - \xi) \{24(2^\xi - 1) - 10\xi - \xi^2\}}{3(\xi + 4)(\xi + 6)} F_0 \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^\xi - \frac{1}{30} \xi (3 - \xi) F_0 \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^2 - \\
& - \frac{2^\xi 4 \xi (-3 + 4\xi - \xi^2)}{5(\xi + 4)(\xi + 6)} F_0 \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^{\xi+2} - \frac{1}{4200} \xi (3 - \xi) (10 - 47\xi - \\
& - 19\xi^2) F_0 \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^4 - \frac{2^\xi \xi (\xi + 1)(\xi - 1)(3 - \xi)}{35(\xi + 4)(\xi + 6)} F_0 \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^{\xi+4} + \\
& \quad + o\left(\frac{l}{\Delta x} \right)^6 \quad (3.16)
\end{aligned}$$

- termini con β :

$$\begin{aligned}
& -\frac{(3-\xi)\{24(2^\xi-1)-10\xi-\xi^2\}}{3(\xi+4)(\xi+6)}F_0\left(\frac{l}{\Delta x}\right)^\xi + \frac{1}{30}\xi(\xi+3)F_0\left(\frac{l}{\Delta x}\right)^2 - \\
& -\frac{\xi(-3+4\xi-\xi^2)\{24(2^\xi-1)-10\xi-\xi^2\}}{30(\xi+4)(\xi+6)}F_0\left(\frac{l}{\Delta x}\right)^{\xi+2} + \\
& + \frac{1}{4200}\xi(\xi+3)(10+47\xi-19\xi^2)F_0\left(\frac{l}{\Delta x}\right)^4 - \\
& -\frac{\xi(\xi+1)(\xi-1)(3-\xi)\{24(2^\xi 6+1)-2(2^\xi 12-5)\xi+\xi^2\}}{840(\xi+4)(\xi+6)(6-\xi)}F_0\left(\frac{l}{\Delta x}\right)^{\xi+4} + \\
& + o\left(\frac{l}{\Delta x}\right)^6 \tag{3.17}
\end{aligned}$$

- termini con γ :

$$\begin{aligned}
& -\frac{2(3-\xi)\{-24(2^{\xi-1}-1)+10\xi+\xi^2\}}{3(\xi+4)(\xi+6)}F_0\left(\frac{l}{\Delta x}\right)^\xi + \\
& + \frac{\xi(-3+4\xi-\xi^2)\{24(2^\xi-1)-10\xi-\xi^2\}}{30(\xi+4)(\xi+6)}F_0\left(\frac{l}{\Delta x}\right)^{\xi+2} - \\
& -\frac{1}{300}\xi^2(\xi+3)(3-\xi)F_0\left(\frac{l}{\Delta x}\right)^4 + \\
& + \frac{\xi(\xi+1)(\xi-1)(3-\xi)\{24(2^\xi 6+1)-2(2^\xi 12-5)\xi+\xi^2\}}{840(\xi+4)(\xi+6)(6-\xi)}F_0\left(\frac{l}{\Delta x}\right)^{\xi+4} + \\
& + o\left(\frac{l}{\Delta x}\right)^6 \tag{3.18}
\end{aligned}$$

3.4.1 Coefficiente di diffusione efficace

Poiché l'ordine zero si elide in tutti e tre i casi, l'ordine dominante dei precedenti sviluppi è ovviamente $(l/\Delta x)^\xi$, cioè (una volta fissata la lunghezza del filtro) si ha essenzialmente dipendenza $\Delta x^{-\xi}$: è evidente l'analogia con quanto accade nel termine (3.8), in cui però a numeratore si trova la scala di dissipazione η ; possiamo perciò definire, accanto a K_0 , un coefficiente di diffusione *efficace* (cioè rinormalizzato per effetto delle piccole scale di moto) K_{eff} che tenga conto di tale contributo: a tal fine sommiamo i termini di ordine ξ presenti nelle (3.16), (3.17) e (3.18) (visto che i coefficienti α , β e γ

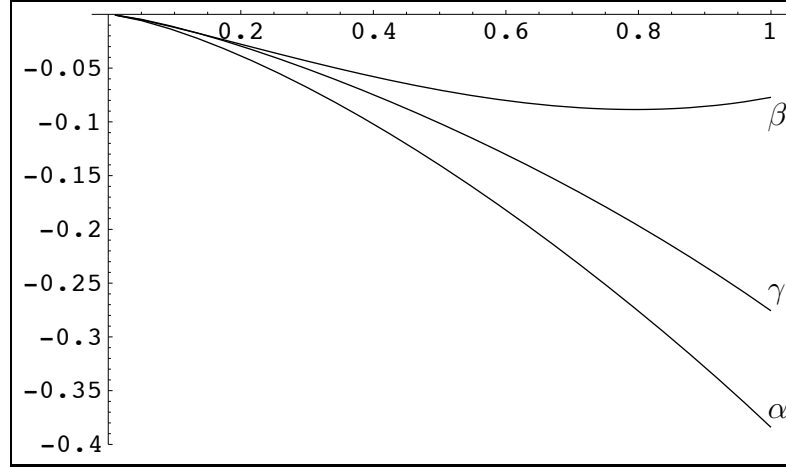


Figura 3.2: L'andamento dei tre termini con gli indicatori (3.16), (3.17) e (3.18) (rapportati a F_0 e tenendo conto di tutti gli ordini) per $\xi = 4/3$ nell'intervallo $0 < (l/\Delta x) < 1$ (rappresentato in ascissa).

che li moltiplicano sono uguali a 1) e otteniamo:

$$\begin{aligned} & -\frac{(3-\xi)\{24(2^\xi-1)-10\xi-\xi^2\}F_0}{3(\xi+4)(\xi+6)}\left(\frac{l}{\Delta x}\right)^\xi \times 2 - \\ & -\frac{2(3-\xi)\{-24(2^{\xi-1}-1)+10\xi+\xi^2\}F_0}{3(\xi+4)(\xi+6)}\left(\frac{l}{\Delta x}\right)^\xi = \\ & = -\frac{2^\xi 8(3-\xi)F_0}{(\xi+4)(\xi+6)}\frac{l^\xi}{\Delta x^\xi}. \end{aligned}$$

Confrontando questo risultato con il contributo diffusivo originario

$$2K_0\partial^2 C(\Delta x) \mapsto -\frac{F_0 K_0(3-\xi)}{3D_0\Delta x^\xi} = -\frac{F_0(3-\xi)}{3}\frac{\eta^\xi}{\Delta x^\xi}$$

si deduce semplicemente

$$K_{\text{eff}} = \frac{2^\xi 24 D_0}{(\xi+4)(\xi+6)} l^\xi \implies K_{\text{tot}} = K_0 + K_{\text{eff}}.$$

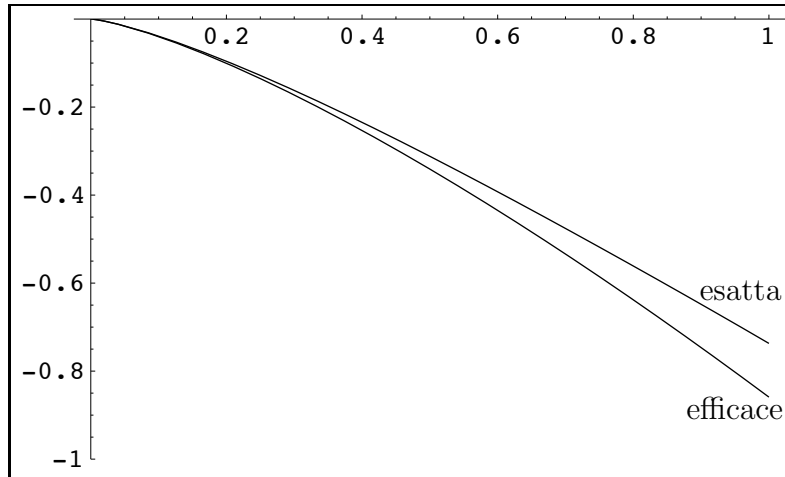


Figura 3.3: In ordinata sono rappresentate la curva “esatta” (somma dei contributi (3.16), (3.17) e (3.18) considerando tutti gli ordini) e la curva “efficace” che tiene conto solo dell’ordine $(l/\Delta x)^\xi$, rapportate a F_0 e valutate per $\xi = 4/3$ nell’intervallo $0 < (l/\Delta x) < 1$ (rappresentato in ascissa).

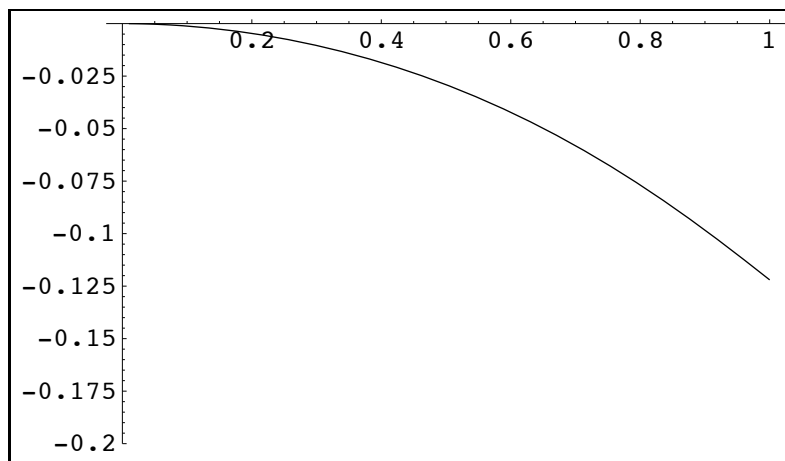


Figura 3.4: L’errore commesso nella parametrizzazione (differenza fra le curve efficace – esatta del grafico precedente) rapportato a F_0 nell’intervallo $0 < (l/\Delta x) < 1$ (rappresentato in ascissa) per $\xi = 4/3$: limitandosi a $(l/\Delta x) < 1/2$ l’errore non supera il 3%.

In questo modo i tre termini di *sottogriglia* che contengono gli indicatori

sono stati accorpati nel coefficiente di diffusione totale, commettendo un errore del second'ordine in $(l/\Delta x)$; la nuova equazione per lo scalare passivo è dunque

$$\partial_t \theta(\mathbf{x}, t) + [\mathbf{v}](\mathbf{x}, t) \cdot \partial[\theta](\mathbf{x}, t) = K_{\text{tot}} \partial^2 \theta(\mathbf{x}, t) + f_L(\mathbf{x}, t). \quad (3.19)$$

Per completezza scriviamo anche le equazioni per le tre funzioni di covarianza costruibili a partire da $[\theta]$ e θ^* dopo la separazione dei termini con gli indicatori:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle [\theta](\mathbf{x}, t) [\theta](\mathbf{x}', t) \rangle &= 2K_0 \partial^2 \langle [\theta](\mathbf{x}, t) [\theta](\mathbf{x}', t) \rangle + F_L(\Delta x) + \\ &+ \frac{1}{2} \int d^d \mathbf{y} \int d^d \mathbf{y}' \int d^d \mathbf{z} \int d^d \mathbf{z}' \{ P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) P_l(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') + P_l(\mathbf{x}' - \mathbf{y}) P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}') \} \times \\ &\times \{ P_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}) P_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}') + \alpha P_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}) Q_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}') + \beta Q_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}) P_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}') + \\ &+ \gamma Q_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}) Q_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}') \} \{ D_{\mu\nu}(\mathbf{z} - \mathbf{y}') - D_{\mu\nu}(\mathbf{z} - \mathbf{z}') \} \partial_\mu \partial_\nu \langle \theta(\mathbf{z}', t) \theta(\mathbf{y}', t) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t \langle \theta^*(\mathbf{x}, t) \theta^*(\mathbf{x}', t) \rangle &= 2K_0 \partial^2 \langle \theta^*(\mathbf{x}, t) \theta^*(\mathbf{x}', t) \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \int d^d \mathbf{y} \int d^d \mathbf{y}' \int d^d \mathbf{z} \int d^d \mathbf{z}' \{ Q_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) Q_l(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') + Q_l(\mathbf{x}' - \mathbf{y}) Q_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}') \} \times \\ &\times \{ P_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}) P_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}') + \alpha P_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}) Q_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}') + \beta Q_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}) P_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}') + \\ &+ \gamma Q_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}) Q_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}') \} \{ D_{\mu\nu}(\mathbf{z} - \mathbf{y}') - D_{\mu\nu}(\mathbf{z} - \mathbf{z}') \} \partial_\mu \partial_\nu \langle \theta(\mathbf{z}', t) \theta(\mathbf{y}', t) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t \langle [\theta](\mathbf{x}, t) \theta^*(\mathbf{x}', t) \rangle &= 2K_0 \partial^2 \langle [\theta](\mathbf{x}, t) \theta^*(\mathbf{x}', t) \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \int d^d \mathbf{y} \int d^d \mathbf{y}' \int d^d \mathbf{z} \int d^d \mathbf{z}' \{ P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) Q_l(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') + P_l(\mathbf{x}' - \mathbf{y}) Q_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}') \} \times \\ &\times \{ P_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}) P_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}') + \alpha P_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}) Q_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}') + \beta Q_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}) P_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}') + \\ &+ \gamma Q_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}) Q_l(\mathbf{y} - \mathbf{z}') \} \{ D_{\mu\nu}(\mathbf{z} - \mathbf{y}') - D_{\mu\nu}(\mathbf{z} - \mathbf{z}') \} \partial_\mu \partial_\nu \langle \theta(\mathbf{z}', t) \theta(\mathbf{y}', t) \rangle. \end{aligned}$$

In realtà anche queste equazioni, come le (3.3), (3.4) e (3.5), non sono di grande interesse, perché contengono ancora la funzione di covarianza di θ (totale); d'ora in poi ci concentreremo quindi esclusivamente sul campo a grande scala, in modo da eliminare questa presenza residua.

3.4.2 Equazioni per la funzione di covarianza a grande scala

Avendo accorpato i termini di sottogriglia nel coefficiente di diffusione, l'unico contributo avvevativo rimanente coinvolge esclusivamente campi a grande scala ($[\mathbf{v}] \cdot \boldsymbol{\partial}[\theta]$); anziché studiare la (3.19) è dunque molto più significativo considerare la corrispondente equazione filtrata

$$\partial_t[\theta](\mathbf{x}, t) + [[\mathbf{v}](\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\partial}[\theta](\mathbf{x}, t)] = K_{\text{tot}} \partial^2[\theta](\mathbf{x}, t) + [f_L](\mathbf{x}, t), \quad (3.20)$$

avente la struttura di una LES ma in cui la particolare parametrizzazione delle piccole scale adottata (attraverso il coefficiente di diffusione efficace) qui è derivata dai principi primi, cioè dall'equazione per il campo scalare θ . Dall'equazione precedente si nota come la funzione di covarianza di $[\theta]$ è ottenibile autonomamente da un'equazione chiusa che non coinvolge più il campo totale θ : è chiaro che, ottenuto questo obiettivo, ci si potrà dimenticare completamente delle fluttuazioni su scale minori di quella del filtro e trattare il campo proiettato con la stessa "dignità" di quello originario. In altri termini diventa così possibile porre l'attenzione sulle sole grandi scale di moto, obiettivo principale della tecnica LES.

La residua proiezione che agisce sul termine avvevativo della (3.20) attenua le eventuali fluttuazioni su piccola scala derivanti dal prodotto fra i due campi a grande scala $[\mathbf{v}]$ e $[\theta]$; ci si può aspettare che tali fluttuazioni siano di per sé già piuttosto piccole, quindi è opportuno studiare la differenza $[\mathbf{v}] \cdot \boldsymbol{\partial}[\theta] - [[\mathbf{v}] \cdot \boldsymbol{\partial}[\theta]]$. Quantità di questo tipo vengono dette *stress di Leonard* ([11, 12]) e con alcune specie di filtri risultano identicamente nulle; nel nostro caso mostreremo che l'effetto di tale termine è del second'ordine in $(l/\Delta x)$ per $d = 3$. Studiamo quindi la corrispondente covarianza

$$\begin{aligned} & \langle [\theta](\mathbf{x}', t) \{ [\mathbf{v}](\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\partial}[\theta](\mathbf{x}, t) - [[\mathbf{v}] \cdot \boldsymbol{\partial}[\theta]](\mathbf{x}, t) \} \rangle = \\ & = -\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{r}' \int d^3\mathbf{s} \int d^3\mathbf{s}' \{ \delta(\mathbf{r}) - P_l(\mathbf{r}) \} P_l(\mathbf{r}') P_l(\mathbf{s}) P_l(\mathbf{s}') \times \\ & \times \{ D_{\mu\nu}(\Delta\mathbf{x} - \mathbf{r} + \mathbf{r}' - \mathbf{s}') - D_{\mu\nu}(\mathbf{s} - \mathbf{s}') \} \partial_\mu \partial_\nu C(|\Delta\mathbf{x} - \mathbf{r} + \mathbf{r}' - \mathbf{s}|). \end{aligned}$$

Sviluppando l'ultima riga in serie di Taylor nell'intorno di zero rispetto a $\mathbf{r}/\Delta x$ (che in modulo è minore di $l/\Delta x \ll 1$) si ottiene una quantità regolare in $r = 0$, i cui ordini 0 e 1 hanno integrale nullo grazie alla presenza di $\delta(\mathbf{r}) - P_l(\mathbf{r})$. L'errore che si compie elidendo l'ulteriore proiezione del termine avvevativo nella (3.20) è dunque di ordine $(l/\Delta x)^2$, proprio come l'errore

derivante dall'aver accorpato tutti gli addendi con gli indicatori in un unico termine diffusivo efficace (passaggio dalla (3.6) alla (3.19)), e quindi non altera ulteriormente il ragionamento.

Consideriamo quindi come nuovo punto di partenza l'equazione

$$\partial_t[\theta](\mathbf{x}, t) + [\mathbf{v}](\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\partial}[\theta](\mathbf{x}, t) = K_{\text{tot}} \partial^2[\theta](\mathbf{x}, t) + [f_L](\mathbf{x}, t) : \quad (3.21)$$

appare evidente che essa ha la stessa struttura della (2.1) a patto di sostituire i campi "totali" θ , \mathbf{v} e f_L con i corrispondenti campi proiettati a grande scala $[\theta]$, $[\mathbf{v}]$ e $[f_L]$.

Tale risultato generalizza quello ottenuto in [13], attraverso metodi perturbativi a scale multiple [14], in presenza di separazione di scala tra quella a cui la dinamica è osservata e la scala tipica associata al campo di velocità. Si noti appunto che il campo di velocità da noi considerato ha spettro a legge di potenza e quindi non esiste di fatto separazione di scala con le grandi scale di moto.

Dall'equazione (3.21) si ha quindi che i passaggi necessari per giungere all'equazione per la funzione di covarianza a grande scala sono del tutto analoghi (visto che, come già notato, $[f_L]$ ha covarianza uguale a quella di f_L e $[\mathbf{v}]$ risulta anch'essa gaussiana) se si definisce

$$\begin{aligned} [[D_{\mu\nu}]](\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \langle [v_\mu](\mathbf{x})[v_\nu](\mathbf{x}) \rangle - \langle [v_\mu](\mathbf{x})[v_\nu](\mathbf{x}') \rangle = \\ &= \int d^d \mathbf{y} \int d^d \mathbf{y}' \{ P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}') - P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) P_l(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') \} \langle v_\mu(\mathbf{y}) v_\nu(\mathbf{y}') \rangle = \\ &= \int d^d \mathbf{y} \int d^d \mathbf{y}' \{ P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}') - P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) P_l(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') \} \times \\ &\quad \times \{ \langle v_\mu(\mathbf{y}) v_\nu(\mathbf{y}') \rangle - \langle v_\mu(\mathbf{y}) v_\nu(\mathbf{y}) \rangle \} = \\ &= - \int d^d \mathbf{y} \int d^d \mathbf{y}' \{ P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}') - P_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) P_l(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') \} D_{\mu\nu}(\mathbf{y} - \mathbf{y}') = \\ &= \int d^d \mathbf{r} \int d^d \mathbf{r}' P_l(\mathbf{r}) P_l(\mathbf{r}') \{ -D_{\mu\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + D_{\mu\nu}(\Delta \mathbf{x} - \mathbf{r} + \mathbf{r}') \} . \end{aligned}$$

L'aggiunta del termine $\langle v_\mu(\mathbf{y}) v_\nu(\mathbf{y}) \rangle$ è resa possibile dal fatto che esso è indipendente da \mathbf{y} e quindi può essere posto a fattore davanti agli integrali, che a loro volta si elidono a vicenda nella differenza.

Integrando formalmente nel tempo la (3.21) si ha

$$\begin{aligned} [\theta](\mathbf{x}, t) &= [\theta](\mathbf{x}, -\infty) - \int_{-\infty}^t d\tau [\mathbf{v}](\mathbf{x}, \tau) \cdot \boldsymbol{\partial}[\theta](\mathbf{x}, \tau) + \\ &+ \int_{-\infty}^t d\tau K_{\text{tot}} \partial^2[\theta](\mathbf{x}, \tau) + \int_{-\infty}^t d\tau [f_L](\mathbf{x}, \tau), \end{aligned} \quad (3.22)$$

da cui si ricava l'espressione della derivata funzionale

$$\begin{aligned} \frac{\delta[\theta](\mathbf{x}, t)}{\delta[v_\nu](\mathbf{x}'', t'')} &= \int_{-\infty}^t d\tau \left\{ -\frac{\delta[v_\mu](\mathbf{x}, \tau)}{\delta[v_\nu](\mathbf{x}'', t'')} \partial_\mu \theta(\mathbf{x}, \tau) + (\dots) \frac{\delta\theta(\mathbf{x}, \tau)}{\delta[v_\nu](\mathbf{x}'', t'')} \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^t d\tau \left\{ -\delta_{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') \delta(\tau - t'') \partial_\mu \theta(\mathbf{x}, \tau) + (\dots) T_H(\tau - t'') \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left\{ -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') \delta(\tau - t'') \partial_\nu \theta(\mathbf{x}, \tau) + (\dots) T_H(\tau - t'') \right\} T_H(t - \tau) = \\ &= -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') \partial_\nu \theta(\mathbf{x}, t'') T_H(t - t'') + \int_{t''}^t d\tau (\dots) \end{aligned}$$

(in cui i puntini indicano termini non essenziali perché si annullano nell'integrale temporale: si veda (2.3)). Sostituendo all'interno del teorema di Furutsu-Novikov si ottiene:

$$\begin{aligned} \langle [\theta](\mathbf{x}', t) [v_\mu](\mathbf{x}, t) \partial_{x_\mu} [\theta](\mathbf{x}, t) \rangle &= \\ &= \int d^d \mathbf{x}'' \int_{-\infty}^{+\infty} dt'' \langle [v_\mu](\mathbf{x}, t) [v_\nu](\mathbf{x}'', t'') \rangle \left\langle \frac{\delta \{ [\theta](\mathbf{x}', t) \partial_{x_\mu} [\theta](\mathbf{x}, t) \}}{\delta [v_\nu](\mathbf{x}'', t'')} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2} \{ \langle [v_\mu](\mathbf{x}) [v_\nu](\mathbf{x}') \rangle - \langle [v_\mu](\mathbf{x}) [v_\nu](\mathbf{x}) \rangle \} \partial_\mu \partial_\nu \langle [\theta](\mathbf{x}, t) [\theta](\mathbf{x}', t) \rangle = \\ &= -\frac{1}{2} [[D_{\mu\nu}]](\mathbf{x} - \mathbf{x}') \partial_\mu \partial_\nu \langle [\theta](\mathbf{x}, t) [\theta](\mathbf{x}', t) \rangle \\ \implies \langle [\theta](\mathbf{x}', t) [\mathbf{v}](\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\partial}[\theta](\mathbf{x}, t) \rangle &+ \langle [\theta](\mathbf{x}, t) [\mathbf{v}](\mathbf{x}', t) \cdot \boldsymbol{\partial}[\theta](\mathbf{x}', t) \rangle = \\ &= -[[D]]_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \partial_\mu \partial_\nu \langle [\theta](\mathbf{x}, t) [\theta](\mathbf{x}', t) \rangle. \end{aligned}$$

Per la funzione di covarianza della grande scala si ha dunque:

$$\partial_t \langle [\theta](\mathbf{x}, t) [\theta](\mathbf{x}', t) \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= [[D]]_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \partial_\mu \partial_\nu \langle [\theta](\mathbf{x}, t) [\theta](\mathbf{x}', t) \rangle + 2K_{\text{tot}} \partial^2 \langle [\theta](\mathbf{x}, t) [\theta](\mathbf{x}', t) \rangle + \\
&+ F_L(\Delta x) = \int d^d \mathbf{r} \int d^d \mathbf{r}' P_l(\mathbf{r}) P_l(\mathbf{r}') [-D_{\mu\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + D_{\mu\nu}(\Delta \mathbf{x} - \mathbf{r} + \mathbf{r}')] + \\
&\quad + 2K_{\text{tot}} \partial^2 \langle [\theta](\mathbf{x}, t) [\theta](\mathbf{x}', t) \rangle + F_L(\Delta x), \tag{3.23}
\end{aligned}$$

che, a differenza della (3.3), è un'equazione chiusa in $\langle [\theta](\mathbf{x}, t) [\theta](\mathbf{x}', t) \rangle$.

Focalizziamo ora l'attenzione sul caso tridimensionale con filtro a gradino ed esplicitiamo la funzione di struttura della velocità a grande scala:

$$\begin{aligned}
&\int d^3 \mathbf{r} \int d^3 \mathbf{r}' P_l(\mathbf{r}) P_l(\mathbf{r}') \{-D_{\mu\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + D_{\mu\nu}(\Delta \mathbf{x} - \mathbf{r} + \mathbf{r}')\} = \\
&= \int d^3 \mathbf{r} \int d^3 \mathbf{s} P_l(r) P_l(|\mathbf{r} + \mathbf{s}|) \{-D_{\mu\nu}(\mathbf{s}) + D_{\mu\nu}(\Delta \mathbf{x} - \mathbf{s})\} = \\
&= P_0^2 \int d^3 \mathbf{s} \{-D_{\mu\nu}(\mathbf{s}) + D_{\mu\nu}(\Delta \mathbf{x} - \mathbf{s})\} V_0 = \\
&= P_0^2 \int_0^{2l} ds \int_{-1}^1 d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi s^2 D_0 \left\{ -s^\xi \left((\xi + 3 - 1) \delta_{\mu\nu} - \xi \frac{s_\mu s_\nu}{s^2} \right) + |\Delta \mathbf{x} - \mathbf{s}|^\xi \times \right. \\
&\quad \left. \times \left((\xi + 3 - 1) \delta_{\mu\nu} - \xi \frac{(\Delta x_\mu - s_\mu)(\Delta x_\nu - s_\nu)}{(\Delta \mathbf{x} - \mathbf{s})^2} \right) \right\} \pi \left(\frac{4}{3} l^3 - l^2 s + \frac{1}{12} s^3 \right).
\end{aligned}$$

Calcoliamo gli integrali in componenti separando i due addendi racchiusi da parentesi graffe. La prima parte è calcolabile in modo semplice, perché diagonale con tre componenti uguali:

$$\begin{aligned}
D_{\mu\nu}^{(1)} &= -P_0^2 \int d^3 \mathbf{s} D_{\mu\nu}(\mathbf{s}) V_0 \implies \\
D_{\mu\nu}^{(1)} &= 0 \quad \text{se } \mu \neq \nu \quad (\text{annullamento dell'integrale angolare}) \quad \& \\
D_{11}^{(1)} &= -P_0^2 D_0 \int_0^{2l} ds \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi s^2 s^\xi \{(\xi + 2) - \xi(\sin \vartheta \cos \varphi)^2\} V_0 = \\
= D_{22}^{(1)} &= -P_0^2 D_0 \int_0^{2l} ds \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi s^2 s^\xi \{(\xi + 2) - \xi(\sin \vartheta \sin \varphi)^2\} V_0 = \\
= D_{33}^{(1)} &= -P_0^2 D_0 \int_0^{2l} ds \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi s^2 s^\xi \{(\xi + 2) - \xi(\cos \vartheta)^2\} V_0 = \\
&= -\frac{2^\xi 48 D_0 l^\xi}{(\xi + 4)(\xi + 6)}.
\end{aligned}$$

La seconda parte, viceversa, è piú complicata anche per la presenza di $\Delta \mathbf{x}$, che però assumiamo lungo l'asse 3 in modo da avere (oltre che diagonalità) uguaglianza delle componenti 1 e 2:

$$\begin{aligned}
D_{\mu\nu}^{(2)} &= P_0^2 \int d^3 \mathbf{s} D_{\mu\nu}(\Delta \mathbf{x} - \mathbf{s}) V_0 \implies \\
D_{\mu\nu}^{(2)} &= 0 \quad \text{se } \mu \neq \nu \quad (\text{annullamento dell'integrale angolare}) \quad \& \\
D_{11}^{(2)} &= P_0^2 D_0 \int_0^{2l} ds \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi s^2 (\Delta x^2 + s^2 - 2\Delta x s \cos \vartheta)^{\xi/2} \times \\
&\quad \times \left\{ (\xi + 2) - \xi \frac{(-s \sin \vartheta \cos \varphi)^2}{(\Delta x^2 + s^2 - 2\Delta x s \cos \vartheta)^2} \right\} V_0 = \\
= D_{22}^{(2)} &= P_0^2 D_0 \int_0^{2l} ds \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi s^2 (\Delta x^2 + s^2 - 2\Delta x s \cos \vartheta)^{\xi/2} \times \\
&\quad \times \left\{ (\xi + 2) - \xi \frac{(-s \sin \vartheta \sin \varphi)^2}{(\Delta x^2 + s^2 - 2\Delta x s \cos \vartheta)^2} \right\} V_0 = \\
&= \frac{9D_0}{4(\xi + 2)(\xi + 4)(\xi + 5)(\xi + 6)(\xi + 7)(\xi + 9) l^6 \Delta x^3} \left\{ -2\Delta x^{\xi+7} \{(\xi + \right. \\
&\quad \left. + 8)\Delta x^2 - (\xi + 6)^2(\xi + 9) l^2\} + (\Delta x + 2l)^{\xi+5} \{(\xi + 8)\Delta x^4 - 2(\xi + 5)(\xi + \right. \\
&\quad \left. + 8) l \Delta x^3 + (\xi + 6)(\xi^2 + 11\xi + 26) l^2 \Delta x^2 - 2(\xi + 5)^2 l^3 \Delta x + 4(\xi + 5) l^4\} + \right. \\
&\quad \left. + (\Delta x - 2l)^{\xi+5} \{(\xi + 8)\Delta x^4 + 2(\xi + 5)(\xi + 8) l \Delta x^3 + (\xi + 6)(\xi^2 + 11\xi + \right. \\
&\quad \left. + 26) l^2 \Delta x^2 + 2(\xi + 5)^2 l^3 \Delta x + 4(\xi + 5) l^4\} \right\} = D_0 \Delta x^\xi \left\{ (\xi + 2) + \frac{1}{5} \xi^2 (\xi + \right. \\
&\quad \left. + 3) \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^2 + \frac{3}{175} \xi (2 - \xi)^2 (\xi + 1) (\xi + 3) \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^4 + o \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^6 \right\} \quad \& \\
D_{33}^{(2)} &= P_0^2 D_0 \int_0^{2l} ds \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi s^2 (\Delta x^2 + s^2 - 2\Delta x s \cos \vartheta)^{\xi/2} \times \\
&\quad \times \left\{ (\xi + 2) - \xi \frac{(\Delta x - s \cos \vartheta)^2}{(\Delta x^2 + s^2 - 2\Delta x s \cos \vartheta)^2} \right\} V_0 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{9D_0}{2(\xi+3)(\xi+4)(\xi+5)(\xi+6)(\xi+7)(\xi+9)l^6\Delta x^3} \left\{ -2\Delta x^{\xi+7} \{ \Delta x^2 - \right. \\
&\quad -(\xi+9)l^2 \} + (\Delta x+2l)^{\xi+6} \{ \Delta x^3 - 2(\xi+6)l\Delta x^2 + (\xi+5)(\xi+ \\
&\quad +6)l^2\Delta x - 2(\xi+5)l^3 \} + (\Delta x-2l)^{\xi+6} \{ \Delta x^3 + 2(\xi+6)l\Delta x^2 + \\
&\quad +(\xi+5)(\xi+6)l^2\Delta x + 2(\xi+5)l^3 \} \left. \right\} = 2D_0\Delta x^\xi \left\{ 1 + \frac{1}{5}\xi(\xi+ \right. \\
&\quad +3) \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^2 + \frac{3}{175}\xi(2-\xi)^2(\xi+1)(\xi+3) \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^4 + o\left(\frac{l}{\Delta x} \right)^6 \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Nella (3.23) compare solo la traccia del prodotto fra $[[D_{\mu\nu}]](\Delta\mathbf{x})$ (diagonale) e la matrice delle derivate seconde parziali di $[[C]](\Delta x)$: ciò significa che di quest'ultima intervengono solo i termini diagonali, che avendo assunto Δx lungo l'asse 3 diventano (per la (1.3))

$$\begin{cases} \partial_1\partial_1[[C]](\Delta x) = \partial_2\partial_2[[C]](\Delta x) = \frac{1}{\Delta x}\partial_{\Delta x}[[C]](\Delta x) \\ \partial_3\partial_3[[C]](\Delta x) = \partial_{\Delta x}^2[[C]](\Delta x) \end{cases}.$$

3.4.3 Soluzione perturbativa del modello LES per la funzione di covarianza

Purtroppo, a causa della forma di $[[D_{\mu\nu}]](\Delta\mathbf{x})$, la risoluzione analitica esatta della (3.23) non è possibile. Sfruttiamo allora l'espansione in serie della funzione di struttura filtrata (precedentemente scritta) per cercare una soluzione del tipo

$$[[C]](\Delta x) = c - \frac{F_0}{6(2-\xi)D_0} \Delta x^{2-\xi} \left\{ C_0 + C_1 \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^\xi + C_2 \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^2 + C_3 \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^{\xi+2} + C_4 \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^4 + C_5 \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^{\xi+4} + o \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^6 \right\}. \quad (3.24)$$

La (3.24) è ovviamente suggerita dalla (3.1), ma prevede la possibile presenza di termini di ordine anche non intero come eventuale conseguenza della struttura di $D_{\mu\nu}^{(1)}$; in realtà, per consistenza interna, occorre che i coefficienti di tali addendi (C_1 , C_3 e C_5) siano nulli. Se così non fosse, infatti, sostituendo la (3.24) si originerebbero termini di ordine 2ξ , $2\xi + 2$ e $2\xi + 4$ non bilanciabili, a meno di introdurli direttamente come $[[C]](\Delta x) = \dots + C'_1(l/\Delta x)^{2\xi} + C'_3(l/\Delta x)^{2\xi+2} + C'_5(l/\Delta x)^{2\xi+4}$. In questo modo però il problema si riproporrebbe all'ordine 3ξ e via dicendo: il circolo vizioso consisterebbe nel fatto che nel nostro modello ξ è libero di avvicinarsi indefinitamente a 0, per cui potrebbe crescere a dismisura il numero di termini di ordine multiplo di ξ che occorrerebbe necessariamente considerare in $[[C]]$ per poter affermare che il resto è del sest'ordine (cioè non si conoscerebbe il massimo intero m tale che $m\xi < 6$).

Calcoliamo subito le derivate prima e seconda dell'espansione suddetta:

$$\partial_{\Delta x} [[C]](\Delta x) = -\frac{F_0}{6(2-\xi)D_0} \Delta x^{1-\xi} \left\{ (2-\xi) C_0 - 2(\xi-1) C_1 \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^\xi - \xi C_2 \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^2 - 2\xi C_3 \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^{\xi+2} - (\xi+2) C_4 \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^4 \right\}$$

$$\partial_{\Delta x}^2 [[C]](\Delta x) = \frac{F_0}{6(2-\xi)D_0} \Delta x^{-\xi} \left\{ (\xi-1)(2-\xi) C_0 - 2(\xi-1)(2\xi-1) C_1 \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^\xi - \xi(\xi+1) C_2 \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^2 - 2\xi(2\xi+1) C_3 \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^{\xi+2} - (\xi+2)(\xi+3) C_4 \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^4 \right\}.$$

Per quanto detto, nello stato stazionario la (3.23) diventa

$$\begin{aligned}
0 &= [[D_{11}]](\mathbf{x} - \mathbf{x}') \partial_1 \partial_1 \langle [\theta](\mathbf{x}, t) [\theta](\mathbf{x}', t) \rangle + [[D_{22}]](\mathbf{x} - \mathbf{x}') \times \\
&\quad \times \partial_2 \partial_2 \langle [\theta](\mathbf{x}, t) [\theta](\mathbf{x}', t) \rangle + [[D_{33}]](\mathbf{x} - \mathbf{x}') \partial_3 \partial_3 \langle [\theta](\mathbf{x}, t) [\theta](\mathbf{x}', t) \rangle + \\
&\quad + 2K_{\text{tot}} \partial^2 \langle [\theta](\mathbf{x}, t) [\theta](\mathbf{x}', t) \rangle + F_L(\Delta x) = \\
&= 2 \left(D_{11}^{(1)} + D_{11}^{(2)} \right) \frac{1}{\Delta x} \partial_{\Delta x} [[C]](\Delta x) + \left(D_{33}^{(1)} + D_{33}^{(2)} \right) \partial_{\Delta x}^2 [[C]](\Delta x) + \\
&\quad + 2(K_0 + K_{\text{eff}}) \left(\frac{2}{\Delta x} \partial_{\Delta x} + \partial_{\Delta x}^2 \right) [[C]](\Delta x) + F_L(\Delta x). \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Assumendo Δx nel range inerziale, l'ultimo addendo è pari a F_0 e il primo dei due coefficienti di diffusione è trascurabile rispetto al secondo a causa della piccolezza di η :

$$K_0 = \frac{(d-1)D_0}{2} \eta^\xi = D_0 \eta^\xi \ll K_{\text{eff}} = \frac{2^\xi 24 D_0}{(\xi+4)(\xi+6)} l^\xi.$$

Sostituendo $[[D_{\mu\nu}]]$ e $[[C]]$ con i corrispondenti sviluppi, si ricavano, ordine per ordine, i valori dei coefficienti C_k ($k = 0, \dots, 5$):

- ordine 0:

$$\begin{aligned}
0 &= -2 \frac{F_0}{6(2-\xi)} (\xi+2)(2-\xi) C_0 + \frac{F_0}{6(2-\xi)} 2(\xi-1)(2-\xi) C_0 + F_0 \\
&\implies C_0 = 1
\end{aligned}$$

- ordine ξ :

$$\begin{aligned}
0 &= -2 \frac{F_0}{6(2-\xi)} \left\{ -\frac{2^\xi 48}{(\xi+4)(\xi+6)} (2-\xi) C_0 - 2(\xi-1)(\xi+2) C_1 \right\} + \\
&+ \frac{F_0}{6(2-\xi)} \left\{ -\frac{2^\xi 48}{(\xi+4)(\xi+6)} (\xi-1)(2-\xi) C_0 - 4(\xi-1)(2\xi-1) C_1 \right\} + \\
&\quad + 2 \frac{2^\xi 24}{(\xi+4)(\xi+6)} \frac{F_0}{6(2-\xi)} \{-2(2-\xi) C_0 + (\xi-1)(2-\xi) C_0\} \\
&\implies C_1 = 0
\end{aligned}$$

- ordine 2:

$$\begin{aligned}
0 &= -2 \frac{F_0}{6(2-\xi)} \left\{ \frac{1}{5} \xi^2 (\xi+3)(2-\xi) C_0 - \xi(\xi+2) C_2 \right\} + \\
&+ \frac{F_0}{6(2-\xi)} 2 \left\{ \frac{1}{5} \xi(\xi+3)(\xi-1)(2-\xi) C_0 - \xi(\xi+1) C_2 \right\} \\
&\implies C_2 = \frac{1}{5} (\xi+3)(2-\xi)
\end{aligned}$$

- ordine $\xi+2$:

$$\begin{aligned}
0 &= -2 \frac{F_0}{6(2-\xi)} \left\{ -\frac{2}{5} \xi^2 (\xi+3)(\xi-1) C_1 + \frac{2^\xi 48}{(\xi+4)(\xi+6)} \xi C_2 - \right. \\
&- 2 \xi(\xi+2) C_3 \left. \right\} + \frac{F_0}{6(2-\xi)} \left\{ -\frac{4}{5} \xi(\xi+3)(\xi-1)(2\xi-1) C_1 + \right. \\
&+ \frac{2^\xi 48}{(\xi+4)(\xi+6)} \xi(\xi+1) C_2 - 4 \xi(2\xi+1) C_3 \left. \right\} + \\
&+ 2 \frac{2^\xi 24}{(\xi+4)(\xi+6)} \frac{F_0}{6(2-\xi)} \{ 2 \xi C_2 - \xi(\xi+1) C_2 \} \\
&\implies C_3 = 0
\end{aligned}$$

- ordine 4:

$$\begin{aligned}
0 &= -2 \frac{F_0}{6(2-\xi)} \left\{ \frac{3}{175} \xi(\xi+1)(\xi+3)(2-\xi)^3 C_0 - \right. \\
&- \frac{1}{5} \xi^3 (\xi+3) C_2 - (\xi+2)^2 C_4 \left. \right\} + \\
&+ \frac{F_0}{6(2-\xi)} 2 \left\{ -\frac{3}{175} \xi(\xi+1)(\xi+3)(\xi-1)(2-\xi)^2 C_0 - \right. \\
&- \frac{1}{5} \xi^2 (\xi+1)(\xi+3) C_2 - (\xi+2)(\xi+3) C_4 \left. \right\} \\
&\implies C_4 = \frac{\xi(\xi+3)(2-\xi)(6\xi^2 + 22\xi + 2)}{175(\xi+2)}
\end{aligned}$$

- ordine $\xi + 4$:

$$\begin{aligned}
0 = & -2 \frac{F_0}{6(2-\xi)} \left\{ -\frac{6}{175} \xi(\xi+1)(\xi+3)(\xi-1)(2-\xi)^2 C_1 - \right. \\
& \left. -\frac{2}{5} \xi^3(\xi+3) C_3 + \frac{2^\xi 48}{(\xi+4)(\xi+6)} (\xi+2) C_4 - 2(\xi+1)(\xi+2) C_5 \right\} + \\
& + \frac{F_0}{6(2-\xi)} \left\{ \frac{12}{175} \xi(\xi+1)(\xi+3)(\xi-1)(2-\xi)(2\xi-1) C_1 - \frac{4}{5} \xi^2(\xi+3) \times \right. \\
& \left. \times (2\xi+1) C_3 + \frac{2^\xi 48}{(\xi+4)(\xi+6)} (\xi+2)(\xi+3) C_4 - 4(\xi+1)(2\xi+3) C_5 \right\} + \\
& + 2 \frac{2^\xi 24}{(\xi+4)(\xi+6)} \frac{F_0}{6(2-\xi)} \{2(\xi+2) C_4 - (\xi+2)(\xi+3) C_4\} \\
& \implies C_5 = 0
\end{aligned}$$

- ordine 2ξ (verifica):

$$\begin{aligned}
0 = & -2 \frac{F_0}{6(2-\xi)} \frac{2^\xi 96}{(\xi+4)(\xi+6)} (\xi-1) C_1 + \\
& + \frac{F_0}{6(2-\xi)} \frac{2^\xi 96}{(\xi+4)(\xi+6)} (\xi-1)(2\xi-1) C_1 + \\
& + 2 \frac{2^\xi 24 D_0}{(\xi+4)(\xi+6)} \frac{F_0}{6(2-\xi)} \{4(\xi-1) - 2(\xi-1)(2\xi-1)\} C_1 = 0
\end{aligned}$$

- ordine $2\xi + 2$ (verifica):

$$\begin{aligned}
0 = & -2 \frac{F_0}{6(2-\xi)} \frac{2^\xi 96}{(\xi+4)(\xi+6)} \xi C_3 + \\
& + \frac{F_0}{6(2-\xi)} \frac{2^\xi 96}{(\xi+4)(\xi+6)} \xi(2\xi+1) C_3 + \\
& + 2 \frac{2^\xi 24 D_0}{(\xi+4)(\xi+6)} \frac{F_0}{6(2-\xi)} \{4\xi - 2\xi(2\xi+1)\} C_3 = 0
\end{aligned}$$

- ordine $2\xi + 4$ (verifica):

$$\begin{aligned}
0 = & -2 \frac{F_0}{6(2-\xi)} \frac{2^\xi 96}{(\xi+4)(\xi+6)} (\xi+1) C_5 + \\
& + \frac{F_0}{6(2-\xi)} \frac{2^\xi 96}{(\xi+4)(\xi+6)} (\xi+1)(2\xi+3) C_5 + \\
& + 2 \frac{2^\xi 24 D_0}{(\xi+4)(\xi+6)} \frac{F_0}{6(2-\xi)} \{4(\xi+1) - 2(\xi+1)(2\xi+3)\} C_5 = 0
\end{aligned}$$

In conclusione si ottiene:

$$\begin{aligned}
[[C]](\Delta x) = c - \frac{F_0}{6(2-\xi)D_0} \Delta x^{2-\xi} \left\{ 1 + \frac{1}{5} (\xi+3)(2-\xi) \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^2 + \right. \\
\left. + \frac{\xi(\xi+3)(2-\xi)(6\xi^2 + 22\xi + 2)}{175(\xi+2)} \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^4 + o\left(\frac{l}{\Delta x} \right)^6 \right\}. \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Poiché i termini di ordine non intero si annullano, lo sviluppo (3.24) è quindi significativo e restituisce il risultato noto per $l \rightarrow 0$. Il peso della correzione del second'ordine (in confronto al valore unitario dell'ordine zero) può essere valutato nel seguente grafico.

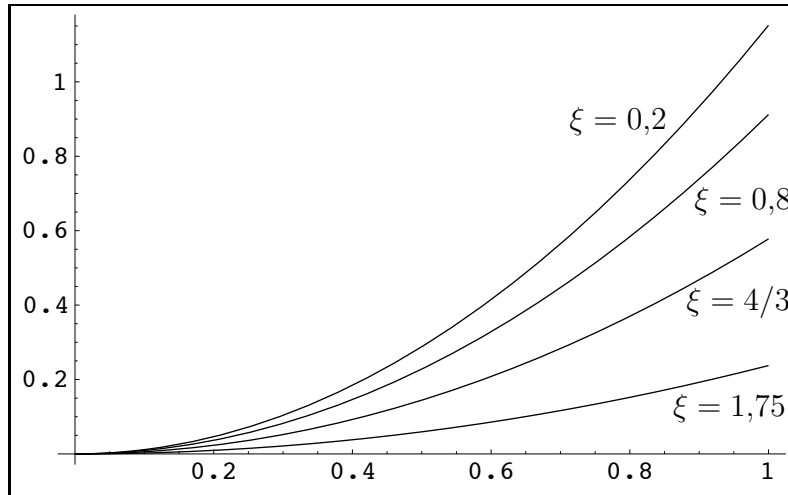


Figura 3.5: L'addendo di ordine 2 della (3.26) per differenti valori di ξ nell'intervallo $0 < (l/\Delta x) < 1$ (rappresentato in ascissa).

Capitolo 4

Conclusioni e possibili sviluppi

Abbiamo già osservato nell'introduzione a questa tesi che una delle caratteristiche fondamentali dei sistemi turbolenti è l'enorme numero di gradi di libertà eccitati nel sistema. Come già notato, tale numero cresce con il numero di Reynolds come $Re^{9/4}$ e diventa praticamente infinito nel limite di turbolenza *completamente sviluppata* cioè quando $Re \rightarrow \infty$.

Da un punto di vista applicativo tale fatto causa grossi problemi visto che le attuali potenze di calcolo dei calcolatori non permettono la manipolazione (integrazione numerica) di un così grande numero di variabili.

La via di uscita a tale problema è costituita dalla strategia della *Large-Eddy Simulation* (LES) dove le sole grandi scale di moto sono descritte deterministicamente. Il prezzo da pagare consiste nel dover descrivere l'effetto statistico delle piccole scale sulle grandi scale, cosa che ad oggi si sa fare solo per via empirica.

Lo scopo di questa tesi è stato quello di riformulare e risolvere (analiticamente) il problema della LES nell'ambito di un modello di turbolenza di scalare passivo: il cosiddetto *modello di Kraichnan*. In tale modello, grazie alla gaussianità del campo di velocità che trasporta lo scalare e alla sua δ -correlazione temporale, è possibile dedurre equazioni *chiuse* per le funzioni di covarianza del campo scalare. È possibile fare ciò per ogni ordine delle funzioni di covarianza, sebbene in questa tesi si sia ristretta l'analisi alle sole funzioni di covarianza del secondo ordine.

Vediamo più in dettaglio i risultati ottenuti. Ricordiamo a tal fine che l'equazione per lo scalare passivo (2.1) è:

$$\partial_t \theta(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \partial \theta(\mathbf{x}, t) = K_0 \partial^2 \theta(\mathbf{x}, t) + f_L(\mathbf{x}, t)$$

e che l'oggetto statistico di interesse è la funzione di covarianza a grande scala $[[C]](\Delta x) = \langle [\theta](\mathbf{x}, t) [\theta](\mathbf{x}', t) \rangle$. Per ottenere tale quantità è prima di tutto necessario determinare la funzione di covarianza "completa" (cioè a tutte le scale), $C(\Delta x) = \langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{x}', t) \rangle$. Questa ha una forma di legge a potenza e vale (si veda (2.5)):

$$C(\Delta x) = c - \frac{F_0}{d(d-1)D_0(2-\xi)} \Delta x^{2-\xi} .$$

Fissando la dimensione dello spazio fisico, $d = 3$, e scegliendo un filtro a gradino, la covarianza del campo filtrato presenta una correzione del second'ordine in $(l/\Delta x)$ (si veda (3.1)):

$$[[C]](\Delta x) = c - \frac{F_0}{6(2-\xi)D_0} \Delta x^{2-\xi} \left\{ 1 + \frac{1}{5}(2-\xi)(3-\xi) \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^2 + o\left(\frac{l}{\Delta x} \right)^4 \right\} .$$

Si noti che tale espressione è esatta, vale a dire ottenuta senza alcuna approssimazione dalla soluzione per C valida a tutte le scale.

Il secondo passo è stato quello di riformulare per il modello di scalare passivo di cui sopra la strategia di LES. In altri termini l'obiettivo è stato quello di riottenere una espressione per $[[C]](\Delta x)$ del tipo di quella sopra riportata, ma derivante da una equazione chiusa nel campo a grande scala $[\theta]$. Per fare ciò abbiamo dovuto filtrare l'equazione per lo scalare passivo e separare i contributi di grande scala da quelli di piccola scala che danno origine, in questo modello, a parametrizzazioni del tipo *diffusività efficace*. Più in dettaglio, con l'introduzione degli indicatori (3.6) è stato possibile tenere traccia separatamente degli effetti del termine avvevativo riguardante esclusivamente la grande scala e di quelli che coinvolgono anche le piccole scale: questi ultimi recano un contributo di ordine $(l/\Delta x)^\xi$, che può quindi essere accorpato al termine diffusivo commettendo un errore del second'ordine (si veda (3.19)):

$$\partial_t \theta + [\mathbf{v}] \cdot \partial[\theta] + \alpha [\mathbf{v}] \cdot \partial \theta^* + \beta \mathbf{v}^* \cdot \partial[\theta] + \gamma \mathbf{v}^* \cdot \partial \theta^* = K_0 \partial^2 \theta + f_L$$

(esatta)

↓

(errore del second'ordine)

$$\partial_t \theta + [\mathbf{v}] \cdot \partial[\theta] = K_{\text{tot}} \partial^2 \theta + f_L .$$

L'ultima equazione è stata poi proiettata a grande scala e in essa si è trascurato lo stress di Leonard, grazie al fatto che questo fornisce correzioni

del second'ordine (nella larghezza del filtro) le quali risultano quindi influenti. In altri termini, a meno di termini del secondo ordine, le due seguenti equazioni ((3.20) e (3.21)) risultano equivalenti:

$$\begin{aligned}\partial_t[\theta] + [[\mathbf{v}] \cdot \boldsymbol{\partial}[\theta]] &= K_{\text{tot}} \partial^2[\theta] + [f_L] \\ \partial_t[\theta] + [\mathbf{v}] \cdot \boldsymbol{\partial}[\theta] &= K_{\text{tot}} \partial^2[\theta] + [f_L] .\end{aligned}$$

A questo punto abbiamo determinato e risolto l'equazione per $[[C]]$ a partire dall'ultima equazione per $[\theta]$, e la abbiamo paragonata alla soluzione esatta per lo stesso campo $[[C]]$. Più in dettaglio, la funzione di covarianza a grande scala presenta gli stessi ordini che appaiono nell'espressione esatta seppur con diversi coefficienti (si veda (3.26)):

$$[[C]](\Delta x) = c - \frac{F_0}{6(2-\xi)D_0} \Delta x^{2-\xi} \left\{ 1 + \frac{1}{5} (\xi + 3)(2 - \xi) \left(\frac{l}{\Delta x} \right)^2 + o\left(\frac{l}{\Delta x} \right)^4 \right\} .$$

Le conclusioni salienti possono quindi essere così riassunte.

- Esiste una equazione “efficace” per la dinamica a grande scala del campo scalare passivo.
- In tale equazione compare, all'ordine più basso nella larghezza del filtro, un coefficiente di diffusione efficace che abbiamo determinato dai principi primi.
- È stato possibile controllare la bontà dell'approssimazione in cui l'effetto delle piccole scale sulle grandi scale è descritto attraverso un coefficiente di diffusione efficace.
- La descrizione attraverso il coefficiente di diffusione efficace fornisce ottimi risultati solo per campi di velocità estremamente “rugosi”, cioè per $\xi \rightarrow 0$. Mano a mano che ci si allontana dal limite $\xi \rightarrow 0$ l'approssimazione diventa scadente e le correzioni di ordine superiore nella larghezza del filtro diventano importanti.

Possibili sviluppi

Il passo più importante del capitolo precedente è consistito nella parametrizzazione degli effetti della piccola scala attraverso un coefficiente di diffusione rinormalizzato: così facendo si è tenuto conto del contributo preminente

(ordine $(l/\Delta x)^\xi$) ma non dei successivi. Un possibile raffinamento di tale idea è il seguente: considerare il coefficiente efficace non costante, in modo da avere un termine diffusivo del tipo $\partial_\mu(K_{\mu\nu}(\mathbf{x})\partial_\nu)\theta(\mathbf{x})$. L'idea è quella di identificare la forma di $K_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ studiando il contributo del secondo ordine in $[[C]]$.

Un'ulteriore variazione sul tema potrebbe essere la riformulazione del problema in modo da consentire ai coefficienti α , β e γ di scostarsi leggermente dall'unità come

$$\begin{cases} \alpha = 1 - \varepsilon_\alpha \\ \beta = 1 - \varepsilon_\beta \\ \gamma = 1 - \varepsilon_\gamma \end{cases},$$

per poi studiare gli effetti di tale innovazione al prim'ordine nei vari ε . Ciò permetterebbe di capire la sensibilità delle grandi scale di moto alle parametrizzazioni delle piccole scale.

Ulteriormente, risulterebbe di grande interesse estendere l'analisi svolta in questa tesi alle funzioni di covarianza di ordine superiore al secondo. Il quesito molto interessante è se il coefficiente di diffusione che permette la migliore descrizione di $[[C]]$ faccia altrettanto per la descrizione delle funzioni di covarianza di ordine superiore. Se così non fosse la strategia di LES risulterebbe indebolita per quel che concerne lo studio delle fluttuazioni di campi turbolenti. Sarebbe infatti necessario disporre di diversi coefficienti di diffusione efficaci a seconda dell'ordine delle funzioni di covarianza che si considerano.

Infine, appare possibile indagare se gli effetti di persistenza dell'anisotropia a piccola scala recentemente individuati in turbolenza (si veda [15, 16, 17, 18]) siano veramente rilevanti nella parametrizzazione delle piccole scale di moto.

Bibliografia

- [1] U. Frisch: *Turbulence*, Cambridge University Press (1995).
- [2] A.N. Kolmogorov, 1941: *C.R. Acad. Sci. URSS*, **30**, 301.
- [3] R.H. Kraichnan, 1994: Anomalous scaling of a randomly advected passive scalar, *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 1016–1019.
- [4] G. Falkovich, K. Gawedzki and M. Vergassola, 2001: Particles and fields in fluid turbulence, *Rev. Mod. Phys.*, **73**, 913–975.
- [5] L. Schwartz: *Théorie des Distributions*, Hermann Paris (1966).
- [6] E.A. Novikov, 1965: Functionals and the random-force method in turbulence theory, *Soviet Physics JETP*, **20**, 1290.
- [7] U. Frisch, A. Mazzino and M. Vergassola, 1998: Intermittency in passive scalar advection, *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 5532–5537.
- [8] A.S. Monin and A.M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*. MIT Press, Cambridge, MA, 1975.
- [9] M. Lesieur, 1997: *Turbulence in Fluids, Third revised and enlarged edition*, Kluwer Academic Publishers, 515 pp.
- [10] C. Meneveau and J. Katz, 2000: Scale-Invariance and turbulence models for Large-eddy simulation, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **32**, 1–32.
- [11] C.-H. Moeng, 1984: A large-eddy-simulation model for the study of planetary boundary-layer turbulence, *J. Atmos. Sci.*, **41**, 2052–2062.
- [12] C.-H. Moeng and P.P. Sullivan, 1994: A comparison of shear and buoyancy driven Planetary Boundary Layer flows. *J. Atmos. Sci.*, **51**, 999–1021.

-
- [13] L. Biferale, A. Crisanti, M. Vergassola and A. Vulpiani, 1995: Eddy Diffusivity in scalar transport, *Phys. Fluids*, **7**, 2725.
- [14] A. Bensoussan, J.-L. Lions and G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for periodic structures*. North Holland, Amsterdam (1985).
- [15] L.Ts. Adzhemyan, N.V. Antonov, A. Mazzino e P. Muratore-Ginanneschi, 2001: Pressure and intermittency in passive vector turbulence, *Europhys Lett.*, **55**, 801–806.
- [16] N.V. Antonov, Y. Honkonen, A. Mazzino e P. Muratore-Ginanneschi, 2000: Manifestation of anisotropy persistence in the hierarchies of magnetohydrodynamical scaling exponents, *Phys. Rev. E*, **62**, R5891–R5894.
- [17] N.V. Antonov, A. Lanotte e A. Mazzino, 2000: Persistence of small-scale anisotropies and anomalous scaling in a model of magnetohydrodynamics turbulence, *Phys. Rev. E*, **61**, 6586–6605.
- [18] A. Lanotte e A. Mazzino, 1999: Anisotropic nonperturbative zero modes in passively advected magnetic fields, *Phys. Rev. E*, **60**, R3483–R3486.

Appendice A

Il caso unidimensionale

Il caso unidimensionale, come detto in precedenza, richiede una trattazione a parte perché non può più sussistere la condizione di incompressibilità del campo di velocità ($\boldsymbol{\partial} \cdot \mathbf{v} = 0$): essa infatti si ridurrebbe a $\partial_x v(x) = 0$, cioè v sarebbe un campo uniforme (addirittura identicamente nullo a causa della richiesta di gaussianità, che riguarda campi “centrati”) e la dinamica diverrebbe banale.

A questo punto è evidente che il termine avvevativo presente nell’equazione dello scalare passivo (2.1), finora scrivibile indifferentemente come $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial}\theta$ o $\boldsymbol{\partial} \cdot (\mathbf{v}\theta)$, assume due significati differenti a seconda che la derivata spaziale agisca o meno anche sulla velocità; inoltre occorre modificare la funzione di struttura spaziale della velocità, che si può assumere semplicemente pari a $D(r) = D_0|r|^\xi$ (con $\langle [v(x,t) - v(x',t')]^2 \rangle = 2\delta(t-t')D(x-x')$). Senza entrare eccessivamente nei dettagli (il procedimento è analogo a quello dei capitoli precedenti, cambia solo la forma della derivata funzionale che appare nel teorema di Furutsu-Novikov) trattiamo separatamente i due casi.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \partial_t \theta(x,t) + v(x,t) \partial_x \theta(x,t) = K_0 \partial_x^2 \theta(x,t) + f_L(x,t) \\ & \implies 0 = \partial_t \langle \theta(x,t) \theta(x',t) \rangle = \\ & = D(\Delta x) \partial_x^2 \langle \theta(x,t) \theta(x',t) \rangle + 2K_0 \partial_x^2 \langle \theta(x,t) \theta(x',t) \rangle + F_L(\Delta x) \\ & \implies C(\Delta x) = c_1 + c_2 \Delta x + c_3 \Delta x^{2-\xi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad & \partial_t \theta(x, t) + \partial_x [v(x, t) \theta(x, t)] = K_0 \partial_x^2 \theta(x, t) + f_L(x, t) \\
& \implies 0 = \partial_t \langle \theta(x, t) \theta(x', t) \rangle = \\
& = \partial_x^2 [D(\Delta x) \langle \theta(x, t) \theta(x', t) \rangle] + 2K_0 \partial_x^2 \langle \theta(x, t) \theta(x', t) \rangle + F_L(\Delta x) \\
& \implies C(\Delta x) \simeq c_0 \Delta x^{-\xi} .
\end{aligned}$$

Il caso bidimensionale, al contrario, non presenta alcun problema: oltre a una maggiore attinenza con la realtà, il motivo per cui ci si è soffermati prevalentemente su $d = 3$ risiede banalmente nel fatto che il passaggio da coordinate cartesiane a polari presenta, nella situazione tridimensionale, un fattore jacobiano $\cos \vartheta$ molto utile per ricondursi (negli integrali) da funzioni trigonometriche ad algebriche.