Università degli Studi di Genova

Facoltà di Scienze M. F. N.

Anno Accademico 2010-2011

Tesi di Laurea Specialistica in Fisica

Studio delle interazioni tra gradi di libertà elastici e fluidodinamici in sistemi di interesse per l'energy harvesting

Alessandro Orchini

Relatori:
Prof. A. Mazzino
Prof. C. Boragno

Correlatore:
Prof. R. Collina

Ringraziamenti

Eccomi all'arrivo.
Venticinque anni ed un giorno per arrivare qui. Felice di nome e di fatto.

Vorrei iniziare ringraziando i Professori Andrea Mazzino e Corrado Boragno, i quali mi hanno permesso (e mi stanno permettendo) di prendere parte al lavoro di ricerca che stanno conducendo.
Al Dott. Joel Guerrero inoltre devo un ringraziamento particolare per lo aiuto che mi ha dato nella comprensione di Overture e più in generale del calcolo computazionale.

Ciò detto, sarò ora più informale, e comincerò mandando un grandissimo abbraccio alla mia famiglia: mamma Susy e papà Fede, che sono per certo tra tutti quelli a cui devo di più e che mi hanno permesso di vivere, e studiare a Genova in questi cinque anni, e sorella Francy con la quale ho condiviso i giochi d'infanzia, nonché la stanza proprio fino a cinque anni fa.

La parte più divertente della vita universitaria la devo ovviamente agli amici, i quali mi hanno accompagnato giorno per giorno e mi hanno insegnato ed aiutato a crescere. Per dare un ordine a tutte le persone che voglio ricordare, tenterò di andare in ordine cronologico di "*ma da quanto ci conosciamo?*", ovvero in ordine di città in cui ho vissuto, il triangolo Savona-Genova-Berlino.

Ad Ari, Ema, Nuccia, Momo, Panda, Xp, Fede e Bute, con cui da almeno dieci anni condivido vita e risate e che sono sempre disponibili in qualunque momento e per qualunque cosa.

A Giulio e Fabio, ai quali devo così tante cose che non possono essere elencate in queste poche righe, sia per quantità che per pudore. A Baggyo, Bongio, Marco, Dolce, Pata, Dome e Cappo, la banda dei teorici con cui ho inalato polmonate di gesso e riempito stanze di fogli nel cercare di capire assieme come diamine funziona questa natura in cui viviamo. Alle coinquiline Vale, Gaia, Lucrezia ed Alice, che mi hanno fatto capire che una casa pulita è il simbolo di una vita sprecata. A Mattia per avermi fatto amare Genova e De André, e ai genovesi Carlo, Fra e Gnappo per avermi fatto amare anche i suoi abitanti. A Silvia per le dissertazioni filosofiche condite da salsa rosa, a Sara per lo splendido viaggio in Turchia, alla Ste e a Nari per le serate a base di CCCP, alla Ale Gaggio per la sua impareggiabile allegria e a Rodrigo per il blues.

A Clemens, Mika e JB e al nostro WG montato pezzo per pezzo, il migliore di tutta Berlin. Ad Anna, Susi, Bubi e Simo, per le feste germaniche passate assieme e per i tentativi più o meno falliti di *Sprechen Deutsch*. A Rita per i concerti e la musica ungherese, e a Marcello ed Alina per l'ospitalità nello Studentendorf di Schlachtensee. A Klara per lo scambio interlinguistico e a Ferdinand e Matze, perfetti esportatori della miglior cultura tedesca, per i lunedì sera assieme ed i pomeriggi al Mauerpark. E ancora a René, Klaas, Malte e ondate di spagnoli, per tutto lo Spaß che abbiamo vissuto.

Anche al Festival della Scienza, a tutta la squadra di Matefitness, a Graziano e a Carol, che mi hanno mostrato come meravigliarmi e far meravigliare bambini ed adulti con la scienza.

Ed infine (e soprattutto) a Carolina, che ha sopportato le mie lamentele durante la stesura della tesi e che mi è stata sempre vicina in questi due anni di specializzazione, ed a tutti i momenti felici che passeremo insieme.

A tutti voi, che almeno una volta nella vita mi avete fatto sorridere:

Grazie di cuore.

Indice

Introduzione **7**

1 Principi di Meccanica dei Fluidi **11**
1.1 Ipotesi del Continuo 11
1.2 Descrizione Euleriana e Lagrangiana 12
1.2.1 Derivata Materiale 13
1.3 Fenomeni di Trasporto 14
1.4 Deformazioni 15
1.5 Vorticità 17
1.6 Moto Relativo 18
1.7 Leggi di Conservazione 19
1.8 Equazioni di Navier-Stokes 21

2 Flusso Potenziale ed Aerodinamica **23**
2.1 Flusso Potenziale 24
2.2 Flusso Incompressibile su un Profilo Sottile 26
2.3 Caso Quasi Statico 30
2.4 Caso non Stazionario: Teoria di Theodorsen 32

3 Metodo Numerico **39**
3.1 Overture 39
3.2 Overlapping Grids 40
3.3 Discretizzazione 45
3.3.1 Condizioni al Contorno 49
3.4 Corpo Rigido 50

4 Modelli Teorici e Risultati Numerici **55**
4.1 Benchmarks 55
4.2 Analisi di Stabilità con Grado di Libertà Elastico 61
4.3 Effetto della Scia e Verifiche Numeriche 68
4.4 Vincolo Rigido 74

4.5 Confronto con i Dati Sperimentali in Galleria del Vento 82

5 Conclusioni **85**

Bibliografia **91**

.

Introduzione

Grazie allo sviluppo di tecnologie sempre più efficienti, siamo in grado di ricavare energia dai fenomeni naturali, energia che può essere usata per alimentare dispositivi di potenza media o essere integrata nella rete elettrica assieme a quella prodotta da impianti convenzionali.
In quest'ottica si colloca la ricerca sull'*energy harvesting*: con questo termine si intende il processo di raccolta di energia dall'ambiente e la sua trasformazione in energia elettrica per permetterne l'uso su ampia scala. Gli studi in questo settore sono diretti sia verso il miglioramento dei metodi attuali di sfruttamento delle energie rinnovabili, sia verso la ricerca di soluzioni innovative capaci di utilizzare fonti o strumenti non ancora presi in considerazione.

La maggior parte degli *energy harvesters* sviluppati trova applicazione nel campo dell'elettronica, in cui piccole potenze sono sufficienti all'alimentazione dei dispositivi: basti pensare alla diffusione di materiali piezoelettrici in questo settore, i quali hanno permesso di rendere autonomi alcuni apparecchi per mezzo di fonti virtualmente inesauribili.
Un'applicazione interessante ed innovativa per questi materiali è stata proposta da Wang *et al.* in [1]: inserendo un corpo in una tubatura si genera una scia di vortici di von Kármán, le cui fluttuazioni di pressione sono sfruttate per sollecitare un film di materiale piezoelettrico (PVDF) incollato ad una protuberanza in modo da costituire la configurazione mostrata in Figura 1.

Nell'esperimento il flusso incidente ha una velocità di 1.083 m/s, e numero di Reynolds $Re = 1.64 \cdot 10^4$, la pressione varia con un'ampiezza di circa 0.3 kPa ed una frequenza di 52 Hz. Il film di materiale piezoelettrico subisce deformazioni di circa 20 μm grazie alle quali si genera una tensione alternata con voltaggio di 120 mV.
Questo semplice dispositivo è in grado di produrre una potenza di 0.7 μW: sebbene sia molta bassa, bisogna tenere in considerazione le dimensioni ridotte del dispositivo usato nell'esperimento e la possibilità di utilizzare un materiale con costante piezoelettrica più elevata. Inoltre non si è lavorato

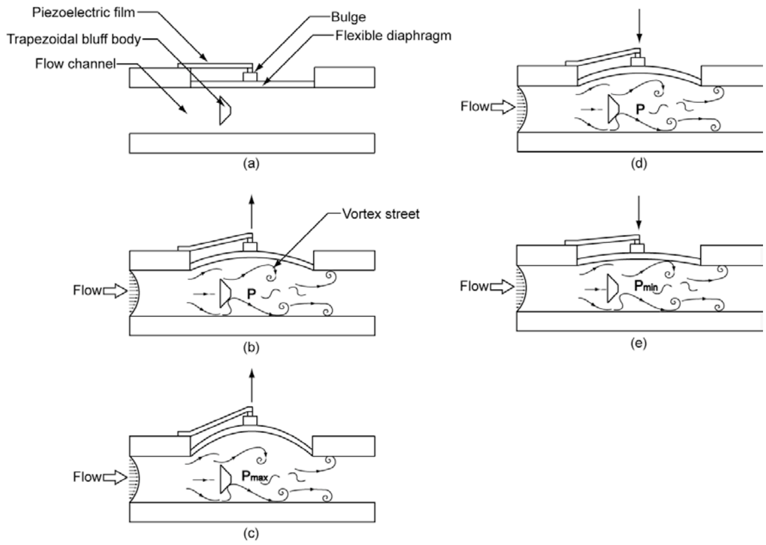
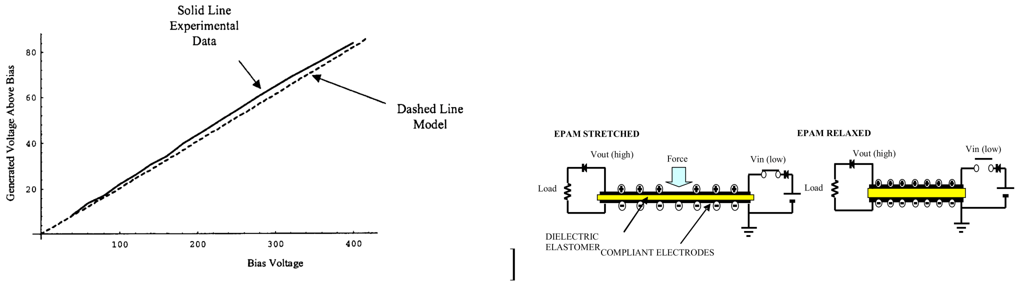


Figura 1: Schema di funzionamento di un *energy harvester* piezoelettrico.

in condizioni di risonanza, facendo coincidere la pulsazione naturale della struttura con quella del distacco dei vortici, attraverso la quale la potenza in uscita potrebbe essere notevolmente aumentata.

Non mancano però idee e progetti per ottenere potenze più elevate: in questa direzione sono stati sviluppati materiali polimerici in grado di generare elettricità anche per mezzo di piccole deformazioni della struttura, mentre per i piezoelettrici sono richieste forze meccaniche impulsive; inoltre la quantità di energia generata e l'efficienza di conversione in corrente elettrica sono notevolmente maggiori rispetto a quelle ottenute dalla piezoelettricità. In letteratura questi materiali sono indicati come elastometri dielettrici, i quali si comportano in modo analogo a condensatori a capacità variabile, e con semplici modelli teorici si trovano ottimi accordi con i dati sperimentali come mostrato in [2].

Un esempio di questo materiale è dato dall'*electroactive polymer artificial muscle* (EPAM), che ha il vantaggio di essere a basso costo e di produrre molta energia anche con poco materiale. Nel 2008 Chiba *et al.* hanno applicato un *energy harvester* basato sull'EPAM per estrarre energia dal moto ondoso [3]: su una boa è montato un pistone che, messo in moto dalle oscillazioni delle onde, comprime a sua volta il materiale polimerico producendo energia che viene accumulata in batterie. Gli esperimenti hanno mostrato che anche in condizioni di mare calmo, con oscillazioni massime di 10 cm,

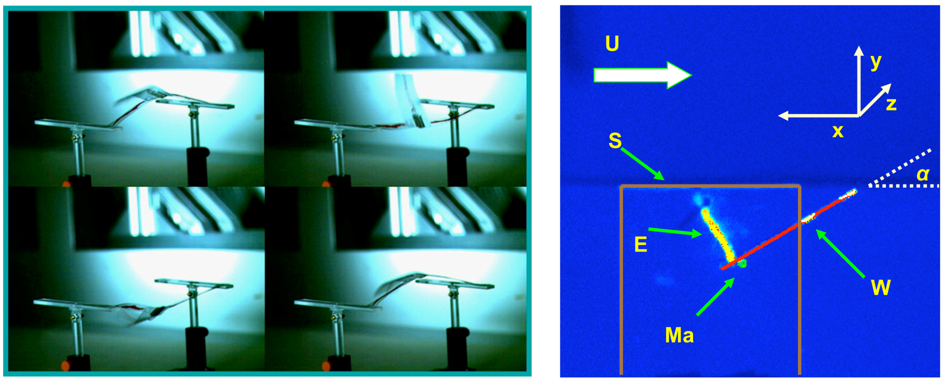


(a) (b)

Figura 2: (a): Voltaggio generato da un elastometro dielettrico: confronto tra teoria ed esperimenti. (b): Schema funzionamento elastometri dielettrici.

ogni boa è in grado di generare potenza fino a 11 W.

Gli elastometri possono essere usati anche per produrre energia utilizzando il vento: in questo caso si tratta di sfruttare ampiezze di oscillazione ridotte, ma di frequenza più elevata. Un potenziale *energy harvester* da cui trarre profitto in queste condizioni è stato ideato dal Prof. Corrado Boragno, ed è mostrato in Figura 3.



(a) (b)

Figura 3: (a): Energy harvester in azione. (b): In rosso l'asta rigida mossa da un flusso uniforme U, in giallo l'elastometro le cui deformazioni generano energia.

Una struttura rigida è collegata a due elastometri e viene messa in movimento dal moto del vento: la contrazione ed il rilassamento degli elastometri genera energia elettrica. Sono stati condotti esperimenti in galleria del vento per studiare il comportamento del sistema in varie configurazioni, modificando parametri quali la massa, la posizione del centro di massa ed il punto di attacco dell'elastico. I dettagli sull'apparato sperimentale sono forniti nel seguito nella Sezione 4.5.

I risultati mostrano un'ampia gamma di regimi, in particolare in alcuni di essi il moto dell'ala si auto-sostiene, ed è potenzialmente adatto all'estrazione di energia dal vento: un esempio è fornito in Figura 4, in cui è mostrata la traiettoria del centro di massa in varie configurazioni, e da cui si osserva che in alcune configurazioni il sistema compie oscillazioni periodiche che si prolungano nel tempo, ed è quindi in grado di sfruttare le caratteristiche degli elastometri dielettrici per l'estrazione di energia.

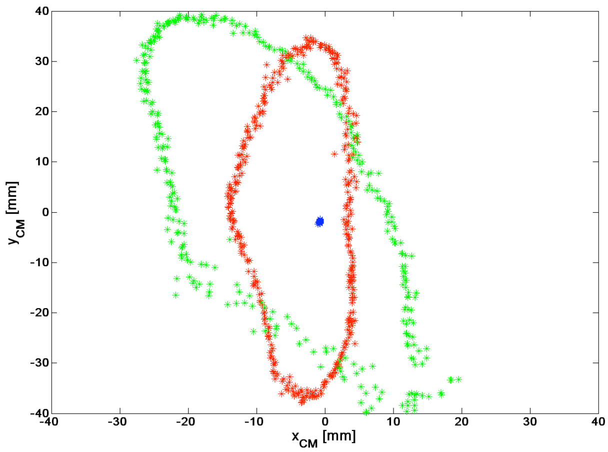


Figura 4: Moto del centro di massa in tre configurazioni differenti. Nel caso in blu il sistema si stabilizza. Nelle altre due (rosso e verde) il sistema compie ampie oscillazioni ed è potenzialmente in grado di estrarre energia.

L'interazione tra gradi di libertà fluidodinamici ed elastici gioca un ruolo fondamentale nel determinare i regimi dinamici nello spazio dei parametri. Tale interazione verrà studiata in questa tesi mediante modelli teorici bidimensionali che tengono conto della geometria della struttura e del contributo netto delle forze fluidodinamiche su di essa.

Parallelamente si farà uso di tecniche di calcolo numerico avanzate per simulare l'evoluzione del sistema investito da campi di vento uniformi in varie configurazioni. Le simulazioni serviranno sia per verificare la validità del modello teorico considerato, sia per caratterizzare regimi non trattabili con la teoria.

Capitolo 1

Principi di Meccanica dei Fluidi

1.1 Ipotesi del Continuo

La meccanica dei fluidi si occupa dello studio dei fluidi e della loro interazione con l'ambiente, ed è fondamentale per la descrizione di fenomeni quali il moto ondoso e gli eventi atmosferici.
L'ipotesi principale su cui si basa la meccanica dei fluidi è l'ipotesi del continuo. Un fluido è formato da un numero immenso di molecole in movimento ed in collisione l'una con l'altra: si tratta quindi di un sistema discreto che potrebbe essere analizzato a livello microscopico. Spesso però si è interessati al comportamento macroscopico del sistema, ovvero al contributo medio del moto molecolare.[4]
È possibile ignorare la struttura molecolare del fluido ed ipotizzare invece che il fluido sia definito su un dominio continuo, e che proprietà come la temperatura, la densità e la pressione siano definibili su distanze piccole a piacere. Questa ipotesi è valida sino a quando siamo interessati a studiare scale di grandezza che siano molto più grandi del cammino libero medio delle molecole. A questo proposito si definisce il numero adimensionale di Knudsen

$$Kn \equiv \frac{\lambda}{L} \tag{1.1}$$

dove λ è il cammino libero medio delle molecole e L è la scala di lunghezza in esame. Fino a quando $Kn \ll 1$ l'ipotesi del continuo è valida e la meccanica dei fluidi può essere usata; in caso contrario bisogna ricorrere ai metodi della meccanica statistica. Ad esempio, se si considera l'atmosfera un gas ideale in condizioni standard si può scrivere

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p} \approx 5 \cdot 10^{-8} m \tag{1.2}$$

dove T è la temperatura, k_B la costante di Boltzmann, p la pressione e σ il diametro delle particelle.
Siccome in seguito tratteremo problemi inerenti l'interazione tra l'aria e oggetti di dimensioni dell'ordine del centimetro, l'ipotesi di continuità è ampiamente soddisfatta.

1.2 Descrizione Euleriana e Lagrangiana

La dinamica di un fluido può essere descritta per mezzo di due diverse rappresentazioni. Nella descrizione Lagrangiana si vuole estendere la consueta caratterizzazione di un sistema di punti materiali tramite le equazioni del moto di ciascun punto nel fluido.
Sia $\mathcal{D}$ il volume occupato dal fluido al tempo iniziale t_0: il flusso sarà descritto dalle leggi del moto

$$\boldsymbol{r_t} = \boldsymbol{r}(t, \boldsymbol{r_0}) \tag{1.3}$$

dove $\boldsymbol{r_0}$ indica la posizione iniziale della generica particella di fluido all'interno dell'insieme $\mathcal{D}$. La velocità e l'accelerazione di ogni particella si ricavano semplicemente usando la derivata parziale temporale:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \qquad\qquad \boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2} \tag{1.4}$$

La descrizione Lagrangiana è utile quando si vuole tracciare la traiettoria di una o più particelle, ma è inadatta alla rappresentazione dell'intero fluido. Si preferisce un diverso tipo di approccio, la descrizione Euleriana, che si concentra su cosa accade ad ogni istante, in ogni punto della regione in esame. Si definisce quindi un sufficiente numero di campi (scalari, vettoriali o tensoriali) con opportune condizioni al contorno, che descriva l'evoluzione delle variabili meccaniche, termodinamiche e chimiche del sistema. Ad esempio, si possono definire i campi di velocità $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{r}, t)$, di densità di massa $\rho = \rho(\boldsymbol{r}, t)$, di temperatura $T = T(\boldsymbol{r}, t)$, etc.

1.2.1 Derivata Materiale

Si consideri una qualunque proprietà del fluido associata alla particella fluida in $\boldsymbol{r}_0$ che assuma al tempo t il valore $F(\boldsymbol{r}_0, t)$, e sia $f(\boldsymbol{r}, t)$ il corrispondente campo Euleriano. Volendo connettere le descrizioni Lagrangiana ed Euleriana, è sufficiente calcolare il campo f seguendo la traiettoria $\boldsymbol{r}_t$ della particella in $\boldsymbol{r}_0$, trovando l'identità

$$F(\boldsymbol{r}_0, t) = f(\boldsymbol{r}_t(\boldsymbol{r}_0), t) \tag{1.5}$$

ovvero il valore che una grandezza F assume per una particella che sta passando per un dato punto in un dato istante, è uguale al valore che assume il campo f associato alla grandezza in questione in quel punto ed in quell'istante.
A partire da questa espressione è possibile ricavare come la quantità F, vista da un osservatore solidale con la particella in $\boldsymbol{r}_0$, varii in funzione delle coordinate Euleriane. Derivando l'equazione (1.5) rispetto al tempo si ottiene:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{r}_0} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial r_i}\frac{\partial r_i}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla) f \tag{1.6}$$

dove con r_i si sono indicate le componenti di $\boldsymbol{r}$ e gli indici ripetuti, qui come nel seguito, sono da intendersi sommati.

L'ultimo membro di questa espressione è generalmente chiamato derivata Lagrangiana o derivata materiale, per sottolineare il fatto che la derivata è calcolata seguendo un elemento di fluido. Il primo addendo della (1.6) indica la variazione locale di f in una certa posizione, mentre il termine $\frac{\partial r_i}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r_i}$ è detto termine avvettivo in quanto dà informazioni sulle variazioni di f causate dal movimento della particella da un punto del domino ad un altro in cui il valore di f è diverso.
Il termine avvettivo contiene il prodotto tra i campi $\boldsymbol{u}$ e f ed è in generale la causa dei problemi di calcolo legati alla fluidodinamica, poiché rende non lineare il problema dell'evoluzione dei campi. Una notazione spesso usata per indicare la derivata materiale è la seguente:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \equiv \frac{D}{Dt} \tag{1.7}$$

1.3 Fenomeni di Trasporto

I fenomeni di trasporto sono processi di trasporto di quantità fisiche. Le equazioni che regolano questi meccanismi sono basate su osservazioni empiriche, ma in alcuni semplici casi possono essere ricavate facendo uso della meccanica statistica.
Le leggi che descrivono i fenomeni di trasporto sono in forte analogia tra loro.

Legge di Newton: è intuitivo pensare che, a causa del moto caotico delle molecole e degli urti che ne conseguono, la velocità $\boldsymbol{U} = (u,\, v,\, w)$ di un fluido tenderà a diventare uniforme, in assenza di forze esterne. Considerando ad esempio la componente u della velocità, questa sarà resa uniforme da un flusso di quantità di moto diretto lungo y e z dovuto ad un gradiente di velocità tra i diversi piani.
Esperimenti [4] mostrano che lo sforzo di taglio τ su un elemento di superficie è dato in buona approssimazione da

$$\tau_{ij} = -\mu \frac{dU_i}{dr_j} \tag{1.8}$$

dove la costante di proporzionalità μ $\left[\frac{kg}{m\,s}\right]$ è la viscosità dinamica.

Legge di Fick: data una mistura di gas la cui concentrazione $C\,(\boldsymbol{r}, t)$ non è uniforme, gli esperimenti mostrano che un flusso netto di materia $\boldsymbol{\varphi}$ viene indotto in direzione opposta al gradiente di concentrazione

$$\boldsymbol{\varphi} = -D\,\nabla C\,(\boldsymbol{r}, t) \tag{1.9}$$

dove la costante di proporzionalità D, detta coefficiente di diffusione, dipende dal fluido in esame ed è strettamente collegata alla rapidità di diffusione.

Legge di Fourier: quando si hanno gradienti di temperatura T non nulli, si instaura un flusso netto di calore $\boldsymbol{Q}$ diretto in direzione opposta ad essi

$$\boldsymbol{Q} = k\,\nabla T \tag{1.10}$$

dove il fattore di proporzionalità k è detto conducibilità termica del materiale.

1.4 Deformazioni

Volendo ricavare le equazioni che regolano il moto di un fluido è cruciale determinare le forze che agiscono su ogni suo elemento, e che dipendono dalle deformazioni o sforzi che subisce. Essendo un fluido in continuo movimento, converrà definire tassi di deformazione.

Tasso di Deformazione Lineare Si consideri un elemento di fluido sottoposto a stress nella direzione x_1, come in Figura 1.1. Sia δx_1 la distanza infinitesima tra gli estremi dell'elemento, ed u_1 il campo di velocità al tempo t nell'estremo A. Nello stesso istante, il campo di velocità all'altro estremo sarà:

$$u_2 = u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 \tag{1.11}$$

Al tempo $t + dt$ l'estremo A percorre uno spazio pari a $u_1 dt$, mentre lo spostamento di B è $\left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\delta x_1\right) dt$. Si definisce tasso di deformazione lineare lungo la direzione x_1:

$$D_{L,1} = \frac{1}{\delta x_1}\frac{D}{Dt}\delta x_1 = \frac{1}{\delta x_1}\frac{AB - A'B'}{dt} = \tag{1.12}$$

$$= \frac{1}{\delta x_1}\frac{u_1 dt + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\delta x_1 dt - u_1 dt}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

In generale, il tasso di deformazione lineare nella direzione α è dato da:

$$D_{L,\alpha} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \tag{1.13}$$

Tasso di Deformazione di Volume Generalmente si vuole però conoscere lo stress subito da un volumetto elementare nello spazio 3D. Si ha quindi bisogno di tre direzioni, indicate da x_1, x_2, x_3, ed il volume elementare in considerazione è $\delta V = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$.

In modo del tutto analogo alla (1.12) si definisce il tasso di deformazione di volume:

$$D_V = \frac{1}{\delta V}\frac{D}{Dt}\delta V = \frac{1}{\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3}\frac{D}{Dt}\left(\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3\right) =$$

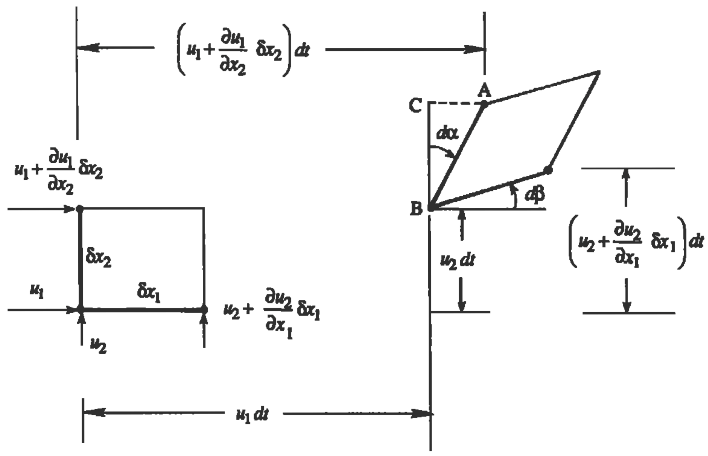


Figura 1.1: Deformazione di un elemento di fluido.

$$= \frac{1}{\delta x_1}\frac{D}{Dt}\delta x_1 + \frac{1}{\delta x_2}\frac{D}{Dt}\delta x_2 + \frac{1}{\delta x_3}\frac{D}{Dt}\delta x_3 = \tag{1.14}$$

$$= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \boldsymbol{U}$$

Tasso di Deformazione Angolare Un elemento di fluido può andare incontro anche a cambiamenti di forma. Si definisce tasso di deformazione angolare la variazione dell'angolo formato da due linee perpendicolari del fluido in un intervallo temporale dt.
Facendo riferimento all'immagine 1.1 si ha:

$$D_A \equiv \frac{d\alpha + d\beta}{dt} = \frac{1}{dt}\left(\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\delta x_2 dt}{\delta x_2} + \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\delta x_1 dt}{\delta x_1}\right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \tag{1.15}$$

Si noti che nell'equazione (1.12) comparivano derivate parziali nella direzione in esame, mentre nella (1.15) si trovano le derivate parziali incrociate. Da questa osservazione si può concludere che le deformazioni di un fluido possono essere descritte in termini di un tensore delle deformazioni $\boldsymbol{e}$ definito da

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.16}$$

in cui i termini sulla diagonale corrispondono alle deformazioni lineari date dalla (1.12), mentre i termini fuori diagonale corrispondono alla metà dei tassi di deformazione angolare dati da (1.15)

1.5 Vorticità

Per definire le rotazioni del fluido, si considerano ad un dato istante due linee perpendicolari e si misurano le velocità angolari con cui ruotano. Facendo riferimento alla Figura 1.1 queste velocità rispetto all'asse x_3 sono $\frac{d\beta}{dt}$ e $-\frac{d\alpha}{dt}$. Partendo dall'equazione (1.15) si può definire la vorticità lungo l'asse x_3:

$$\omega_3 = \frac{d\beta - d\alpha}{dt} = \frac{1}{dt}\left(\frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\delta x_1 dt}{\delta x_1} - \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\delta x_2 dt}{\delta x_2}\right) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \tag{1.17}$$

Dalla definizione di rotore, si trova che il vettore della vorticità è dato da:

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \qquad \text{o} \qquad \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u} \tag{1.18}$$

Un fluido si dice irrotazionale quando $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, che equivale alle condizioni:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \qquad\qquad i \neq j \tag{1.19}$$

Una quantità importante legata alla vorticità è la circolazione, ossia l'integrale della componente tangenziale della velocità su una curva $\mathcal{C}$ chiusa:

$$\Gamma \equiv \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{1.20}$$

Usando il teorema di Stokes si trova il collegamento tra la circolazione e la vorticità

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \boldsymbol{u}) \cdot d\boldsymbol{A} = \int_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{A} \tag{1.21}$$

dove $\mathcal{A}$ è la superficie delimitata da $\mathcal{C}$. Quindi la circolazione su una curva chiusa eguaglia l'integrale di superficie della vorticità, o equivalentemente la vorticità in un punto corrisponde alla circolazione per unità di area.

1.6 Moto Relativo

Sia $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ la velocità del fluido nel punto $\boldsymbol{x}$ all'istante t, e $\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{u}$ la velocità allo stesso istante del punto $\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$. La velocità relativa è quindi data da:

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \tag{1.22}$$

Il termine $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ dell'equazione (1.22) è detto tensore del gradiente di velocità, e può essere scomposto in una parte simmetrica ed una antisimmetrica:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.23}$$

Usando l'equazione (1.16) e definendo il tensore delle rotazioni

$$r_{ij} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \tag{1.24}$$

la (1.23) si può riscrivere:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \frac{1}{2} r_{ij} \tag{1.25}$$

Usando l'equazione (1.18) si trova che il tensore delle rotazioni può essere scritto in termini delle componenti della vorticità:

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{o} \qquad r_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\omega_k \tag{1.26}$$

Sostituendo le equazioni (1.26) e (1.25) nella (1.22) si trova

$$du_i = e_{ij} dx_j - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_k dx_j = e_{ij} dx_j + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\omega} \times d\boldsymbol{x}\right)_i \tag{1.27}$$

in cui il primo termine è il contributo alla velocità dato dalle deformazioni, ed il secondo termine rappresenta il contributo di corpo rigido, poiché deriva da un moto rotatorio di velocità angolare $\frac{\boldsymbol{\omega}}{2}$.

1.7 Leggi di Conservazione

In questa sezione si vogliono ricordare le leggi di conservazione su cui è basata la fluidodinamica, e dalle quali derivano le equazioni che regolano il comportamento dei fluidi. In generale, si vogliono calcolare quantità come

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} F dV \tag{1.28}$$

dove la regione $V(t)$ può essere fissata o muoversi con il fluido. Il caso generale in cui la superficie $A(t)$ del volume $V(t)$ si muove a velocità $\boldsymbol{u}_A$ corrisponde al teorema di Leibniz:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} F(\boldsymbol{x},t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial F}{\partial t} dV + \int_{A(t)} \boldsymbol{dA} \cdot \boldsymbol{u}_A F \tag{1.29}$$

Nel caso in cui si consideri un volume fissato si avrà $V(t) = V$ e $\boldsymbol{u}_A = 0$, mentre se si è interessati ad un volume materiale $\mathcal{V}(t)$, la sua superficie si muoverà alla velocità del fluido, quindi $\boldsymbol{u}_A = \boldsymbol{u}$. La (1.29) diventa rispettivamente:

$$(a) \qquad \frac{d}{dt}\int_{V} F(\boldsymbol{x},t) dV = \int_{V} \frac{\partial F}{\partial t} dV \qquad (V \text{ fissato})$$

$$(b) \quad \frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}(t)} F(\boldsymbol{x},t) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial F}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}(t)} \boldsymbol{d\mathcal{A}} \cdot \boldsymbol{u} F \qquad (V \text{ materiale}) \tag{1.30}$$

L' equazione 1.30(b) prende il nome di teorema del trasporto di Reynolds. Ricordiamo anche che le forze che agiscono su un elemento fluido sono classificabili in tre categorie:

1. *forze di volume*: sono esercitate a distanza, senza bisogno di contatto fisico, e agiscono su ogni elemento di volume. Esempi tipici sono la forza di gravità e la forza elettromagnetica;

2. *forze di superficie*: agiscono su elementi di superficie e sono generate tramite contatto diretto. Per ogni direzione, l'elemento di forza di superficie $d\boldsymbol{F}$ può essere scomposto in due componenti tangenziali (o di taglio) ed una normale alla superficie, che sono naturalmente rappresentabili per mezzo del tensore degli sforzi τ_{ij} in cui gli elementi sulla diagonale indicano la forza normale per unità di superficie nella direzione i-ma, mentre quelli fuori diagonale indicano le forze di taglio per

unità di superficie nella direzione j-ma rispetto alla faccia orientata nella direzione i-ma. È facile dimostrare che il tensore degli sforzi è simmetrico, e quindi:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \tag{1.31}$$

3. *forze di linea*: agiscono per contatto all'interfaccia tra fluidi di natura diversa e per questo motivo non appaiono nelle equazioni del moto, ma solo nelle condizioni al contorno.

Conservazione della massa: si consideri un volume fissato e si bilancino l'incremento di massa all'interno del volume ed il flusso di massa attraverso la superficie. Usando la 1.30(a) si ottiene

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_A \rho \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{A} = -\int_V \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) dV \tag{1.32}$$

avendo usato nel secondo passaggio il teorema della divergenza. In forma differenziale la legge di conservazione per la massa può essere riscritta come:

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{1.33}$$

Il primo termine di questa equazione indica il tasso di variazione della densità seguendo una particella fluida. Sebbene esso non sia nullo, è comunque trascurabile rispetto al secondo sotto opportune condizioni raggruppate nell'approssimazione di Boussinesq (vedi [4], 4.18), che d'ora in avanti sarà considerata sempre valida.
In questo caso l'equazione (1.32) si riduce alla forma incompressibile:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{1.34}$$

Conservazione del momento: si consideri un elemento di fluido su cui agiscono la forza di gravità $\boldsymbol{g} = -g\hat{x}_2$ e forze di superficie. La somma delle forze di superficie nelle direzione $\hat{x}_i$ è data da:

$$\left(\frac{\partial \tau_{1i}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{2i}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{3i}}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} d\mathcal{V} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} d\mathcal{V} \tag{1.35}$$

Usando la legge di Newton per unità di volume, si ottiene:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \tag{1.36}$$

Questa equazione, detta equazione di Cauchy, è un'equazione del moto valida per ogni sistema, solido o fluido, una volta che è nota la forma esplicita del tensore degli sforzi τ_{ij}.

1.8 Equazioni di Navier-Stokes

In un fluido a riposo gli sforzi agiscono perpendicolarmente alla superficie, e non dipendono dall'orientamento della superficie stessa, ossia il tensore degli sforzi è isotropo. L'unico tensore isotropo del secondo ordine è la delta di Kronecker, e di conseguenza τ_{ij} deve contenere un termine proporzionale a δ_{ij}, da cui

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} \tag{1.37}$$

dove p è la pressione termodinamica del sistema.
Quando un fluido è invece in movimento compaiono effetti dovuti alla viscosità che generano sia forze normali che di taglio. In generale quindi:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij} \tag{1.38}$$

Poiché il termine σ_{ij} deriva dal movimento del fluido, dovrà essere legato al gradiente di velocità $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Facendo riferimento alle equazioni (1.23) e (1.25), vediamo subito che soltanto la parte simmetrica e_{ij} può contribuire, essendo la parte antisimmetrica legata alla deformazioni rigide, le quali non generano stress.
Assumendo una relazione lineare tra $\boldsymbol{\sigma}$ ed $\boldsymbol{e}$, si ottiene

$$\sigma_{ij} = K_{ijmn}e_{mn} \tag{1.39}$$

essendo K_{ijmn} un tensore del quarto ordine avente 81 componenti. I fluidi che soddisfano questa relazione sono detti fluidi Newtoniani.
Se si prende in considerazione un mezzo isotropo, si deve concludere che anche K_{ijmn} dovrà essere tale, e si riduce alla forma

$$K_{ijmn} = \lambda\delta_{ij}\delta_{mn} + \mu\delta_{im}\delta_{jn} + \gamma\delta_{in}\delta_{mj} \tag{1.40}$$

avente solo 3 componenti indipendenti.

Inoltre, ricordando l'equazione (1.31), K_{ijmn} deve essere simmetrico per scambio degli indici i e j, da cui si deduce che $\gamma = \mu$ e dall'equazione (1.39) si ottiene:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{mm}\delta_{ij} \tag{1.41}$$

Infine, per un fluido incompressibile $e_{mm} = \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ dalla (1.34), e si trova l'equazione costitutiva del tensore degli sforzi per un fluido incompressibile:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \tag{1.42}$$

Inserendo l'equazione costitutiva nell'equazione del moto di Cauchy (1.36) si trova

$$\rho\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho\boldsymbol{g} + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} \tag{1.43}$$

ovvero le le equazioni di Navier-Stokes per fluidi Newtoniani incompressibili, in cui il coefficiente μ indica la viscosità dinamica del mezzo.
Prendendo il rotore delle equazioni di Navier-Stokes si può ricavare un'equazione per la vorticità definita dalla (1.18), dalla quale discende direttamente che:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0 \tag{1.44}$$

In particolare, scegliendo un sistema di riferimento non rotante ed un fluido barotropico, definendo la viscosità cinematica del mezzo $\nu = \mu/\rho$ ed usando identità tra operatori vettoriali si trova:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\,\boldsymbol{u} + \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega} \tag{1.45}$$

Capitolo 2

Flusso Potenziale ed Aerodinamica

Le equazioni di Navier-Stokes, integrate con opportune condizioni al contorno, sono potenzialmente in grado di descrivere il comportamento di un fluido qualsiasi. Tuttavia la loro soluzione è estremamente complessa, tanto che non si conosce una forma analitica esplicita per esprimerla nel caso generale. Concentrandosi però su un particolare tipo di fluido, si possono adottare per la loro soluzione approssimazioni che portano a risultati in ottimo accordo con i dati sperimentali e numerici.
In particolare, nel seguito studieremo l'interazione tra fluidi e corpi rigidi in due dimensioni, e non sarà necessario conoscere ogni dettaglio sul moto del fluido, ma sarà sufficiente conoscere la forza risultante che il fluido esercita ad ogni istante sul corpo. Oltre alla bidimensionalità, per arrivare a questi risultati applicheremo la teoria del flusso irrotazionale. Infatti l'equazione per la vorticità (1.45) nel caso bidimensionale si riduce a

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \tag{2.1}$$

essendo $\boldsymbol{\omega}$ perpendicolare al piano del moto. Si vede subito che se la viscosità del fluido è nulla, allora la vorticità rimane costante, e partendo al tempo t_0 da un fluido a riposo, in cui $\boldsymbol{\omega}(t_0) = 0$, il fluido rimane irrotazionale a qualunque istante.
Tuttavia è noto che anche per fluidi viscosi gli effetti dovuti alla viscosità sono importanti solamente vicino alle superfici rigide, sulle quali deve essere soddisfatta una condizione di non-permeabilità. La regione in cui la viscosità non può essere trascurata è chiamata strato limite o *boundary layer*, ed il suo spessore decresce all'aumentare del numero adimensionale di Reynolds:

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{UL\rho}{\mu} \tag{2.2}$$

Per $Re \gg 1$ il fluido può quindi essere diviso in due regioni, una lontana dalle superfici, dove vale l'approssimazione a fluido inviscido ed irrotazionale, ed una contenente lo strato limite, in cui sono presenti fenomeni vorticosi provocati dalla viscosità.

2.1 Flusso Potenziale

Un flusso bidimensionale è detto irrotazionale o potenziale quando è soddisfatta la condizione

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.3}$$

la quale garantisce l'esistenza di un potenziale di velocità $\phi(x, y)$ tale che:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v \tag{2.4}$$

Inoltre, considerando fluidi incomprimibili, si ha anche la condizione

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.5}$$

che genera un secondo potenziale $\psi(x, y)$ tale che:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \tag{2.6}$$

Ovviamente i due potenziali devono essere collegati, infatti soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \tag{2.7}$$

Entrambi i potenziali soddisfano l'equazione di Laplace

$$\begin{cases} \nabla^2\phi = \nabla^2\psi = 0 \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial n} = \dfrac{\partial\psi}{\partial s} = 0 & \text{(superficie solida)} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = U & \text{(asintoticamente)} \end{cases} \tag{2.8}$$

dove n e s indicano rispettivamente i versori perpendicolare e parallelo alle linee equipotenziali. La condizione di corpo rigido indica che il fluido non può attraversare la superficie solida, mentre nella condizione al contorno si è considerato il caso tipico in cui il flusso entrante U è uniforme e diretto lungo $\hat{x}$.

È utile ancora ricordare che il problema può essere affrontato nel piano complesso introducendo le variabili

$$z = x + iy \qquad \text{e} \qquad w = \phi + i\psi \tag{2.9}$$

e che la derivata dw/dz è ben definita in tutta la regione in cui w è analitica, ossia dove le condizioni di Cauchy-Riemann (2.4) sono soddisfatte. La variabile w è chiamata potenziale complesso, e dalla sua definizione si ricava:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial}{\partial x}(\phi + i\psi) = u - iv \tag{2.10}$$

Di seguito si riportano senza dimostrazione i più importanti teoremi sulla circolazione e sul flusso potenziale che verrano usati nel seguito.

Teorema della Circolazione di Cauchy *Si consideri un fluido inviscido e barotropico su cui agiscono forze conservative. Scegliendo un sistema di riferimento non rotante, la circolazione* Γ *calcolata su una curva chiusa* C *in movimento con il fluido rimane costante nel tempo*:

$$\frac{D\Gamma_C}{Dt} = 0 \tag{2.11}$$

È da notare che nella dimostrazione la condizione di flusso inviscido è usata soltanto sul contorno C, pertanto il teorema resta valido anche per fluidi a viscosità non nulla, fintanto che non vi sono forze viscose lungo il percorso seguito da C.

Teorema di Blasius *Si consideri un corpo bidimensionale qualunque immerso in un fluido di densità ρ, e siano D e L rispettivamente le forze di drag e di lift, ovvero le componenti lungo $\hat{x}$ e $\hat{y}$ della risultante forza fluidodinamica agente sul corpo. Se il fluido in esame è stazionario ed irrotazionale, le forze fluidodinamiche sono date da*

$$D - iL = \frac{i}{2}\rho \oint_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz \tag{2.12}$$

dove C è un contorno chiuso qualunque contenente il corpo.
Applicando il teorema di Blasius a un corpo immerso in un fluido con velocità asintotica U_∞, intorno al quale è presente una circolazione netta Γ, si ricava il teorema del lift di Kutta-Zhukhovsky

$$\begin{cases} D = 0 \\ L = \rho U_\infty \Gamma \end{cases} \tag{2.13}$$

da cui si osserva che la teoria di flusso potenziale non riesce a descrivere le forze di drag.
Per una dimostrazione di questi teoremi si veda, e.g., [4].

2.2 Flusso Incompressibile su un Profilo Sottile

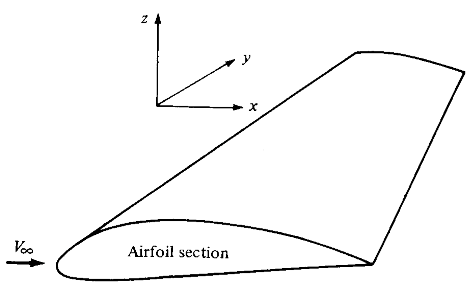


Figura 2.1: Definizione di *airfoil* con grande *aspect ratio*.

Consideriamo ora un corpo rigido (prisma) immerso in un fluido. Facendo riferimento alla Figura 2.1, indichiamo con L la larghezza dell'ala che si estende lungo y, e con c la lunghezza o corda dell'ala che si estende lungo x. Il rapporto $a = \frac{L}{c}$ tra larghezza e lunghezza del corpo è chiamato *aspect ratio*. Nel caso in cui questo rapporto sia grande, si può considerare di tagliare il prisma perpendicolarmente alla larghezza, e studiarne una sezione;

in aerodinamica questa sezione è chiamata profilo alare o *airfoil*.

La filosofia del calcolo delle forze aerodinamiche agenti su un profilo è ben descritta in [5], e consiste nel sostituire la superficie di un'*airfoil* sottile con un insieme di vortici γ, di intensità per unità di lunghezza pari alla discontinuità assunta dalla componente tangenziale della velocità in quel punto:

$$\gamma(s) = u_1 - u_2 \tag{2.14}$$

Figura 2.2: Filosofia di calcolo delle forze aerodinamiche: la corda del profilo è sostituita da una distribuzione di vortici.

Integrando sul profilo si ottiene la circolazione

$$\Gamma = \int_a^b \gamma ds \tag{2.15}$$

che può essere usata per calcolare il lift partendo dall'equazione (2.13). In questo modo si garantisce che la superficie del profilo sia una linea di flusso del fluido, ma analiticamente rimane ancora un grado di libertà su Γ. L'equazione che fissa Γ nel caso stazionario è detta condizione di Kutta, la quale afferma che il valore che Γ assume per un dato profilo ad un dato angolo di attacco, è quello che rende il distacco del fluido dal *trailing edge* il più liscio possibile. In formula:

$$\gamma(s)|_{s=s_{TE}} = 0 \tag{2.16}$$

Sostituire al profilo sottile un insieme di vortici (vedi Figura 2.2) equivale a modellizzare lo strato limite con una striscia infinitamente sottile, e permette di considerare gli effetti della vorticità anche trattando un fluido potenziale. Si consideri ora un profilo sottile $y = y(x)$ investito da un fluido di velocità U_∞ con angolo di attacco $\alpha \ll 1$. Affinché l'*airfoil* sia una linea di flusso, deve valere

$$U_{\infty,n} + v'(s) = 0 \tag{2.17}$$

dove $U_{\infty,n}$ è la velocità indisturbata del fluido perpendicolare al profilo, e $v'(s)$ la componente della velocità indotta dai vortici sulla superficie e normale ad essa. Per piccoli angoli possiamo approssimare i loro valori rispettivamente a

$$U_{\infty,n} \approx U_\infty \left(\alpha - \frac{dy}{dx}\right) \qquad\qquad v'(s) \approx v(x) \tag{2.18}$$

dove $v(x)$ è la componente verticale della velocità indotta dai vortici lungo la corda, ed è data da:

$$v(x) = -\int_0^c \frac{\gamma(\xi)}{2\pi(x-\xi)} d\xi \tag{2.19}$$

Combinando queste equazioni con la condizione di Kutta otteniamo le equazioni per un profilo sottile:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^c \frac{\gamma(\xi)}{2\pi(x-\xi)} d\xi = U_\infty \left(\alpha - \frac{dy}{dx}\right) \\ \gamma(c) = 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

Usando le trasformazioni

$$\xi = \frac{c}{2}\left(1 - \cos\theta\right) \qquad\qquad x = \frac{c}{2}\left(1 - \cos\theta_0\right) \tag{2.21}$$

l'equazione integrale per γ può essere risolta, e la soluzione è data da

$$\gamma(\theta) = 2U_\infty \left(A_0 \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(n\theta\right)\right) \tag{2.22}$$

dove i coefficienti A_n sono i coefficienti di una serie di Fourier, e possono essere ottenuti soddisfando le equazioni (2.20), ottenendo i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} A_0 &= \alpha - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{dy}{dx} d\theta_0 \\ A_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{dy}{dx}\cos\left(n\theta_0\right) d\theta_0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Si conoscono ora tutti gli ingredienti per ottenere le forze fluidodinamiche sull'ala: la circolazione totale sul profilo è data dall'equazione (2.15)

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{c}{2}\int_0^\pi \gamma(\theta)\sin\theta d\theta = \\ &= cU_\infty\left(A_0\int_0^\pi \left(1+\cos\theta\right) d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^\pi \sin\left(n\theta\right)\sin\theta d\theta\right) = \\ &= cU_\infty\left(\pi A_0 + \frac{\pi}{2}A_1\right) \end{aligned} \tag{2.24}$$

e dal teorema (2.13) troviamo un'espressione per la forza di lift. Introducendo la quantità adimensionale

$$C_l = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c} \tag{2.25}$$

detta coefficiente di lift, si trova:

$$C_l = \frac{\rho U_\infty \Gamma}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c} = 2\pi\left(\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{dy}{dx}\left(\cos\theta_0 - 1\right) d\theta_0\right) \tag{2.26}$$

È da notare che il coefficiente cresce linearmente con α, in particolare

$$\frac{dC_l}{d\alpha} = 2\pi \tag{2.27}$$

vale qualunque sia la forma del profilo; inoltre l'angolo a cui si ha $C_l = 0$ cresce all'aumentare della curvatura del profilo.

Oltre al lift la teoria potenziale permette di ricavare anche il momento torcente indotto dal fluido sul corpo: un vortice a distanza ξ dal *leading edge*, ovvero dall'estremo dell'ala su cui impatta il vento, ha una forza pari a $d\Gamma = \gamma(\xi)d\xi$, e gli è associata una forza di lift infinitesima pari a $dL = U_\infty \rho d\Gamma$.

Il momento totale rispetto al *leading edge* è pertanto dato da:

$$M_{le} = -\rho U_\infty \int_0^c \xi\gamma(\xi)d\xi \tag{2.28}$$

Per avere come di consueto una quantità adimensionale si definisce il coefficiente di momento:

$$C_{M,le} = \frac{M_{LE}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c^2} \tag{2.29}$$

Usando le trasformazioni (2.21) è facile integrare l'equazione per il momento ed ottenere:

$$C_{M,le} = -\frac{\pi}{2}\left(A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2}\right) = -\left[\frac{C_l}{4} + \frac{\pi}{4}(A_1 - A_2)\right] \tag{2.30}$$

Da questa equazione si nota che se l'*airfoil* non ha curvatura, ossia $\frac{dy}{dx} = 0$, allora $A_1 = A_2 = 0$. Essendo inoltre il coefficiente di momento rispetto ad un punto a distanza $\bar{x}$ dal *leading edge* dato da

$$C_{M,\bar{x}} = C_{M,le} + \frac{\bar{x}}{c}C_l \tag{2.31}$$

concludiamo che per un profilo simmetrico il centro di pressione, ossia il punto rispetto a cui il momento fluidodinamico è nullo, è situato ad un quarto di corda.

2.3 Caso Quasi Statico

I risultati della sezione precedente sono stati trovati con la condizione che il flusso incidente sull'*airfoil* fosse stazionario. Tuttavia è necessario anche studiare la risposta dinamica del sistema rispetto a perturbazioni del flusso incidente, o anche ad effetti dovuti al movimento del corpo nel fluido. In questo caso l'intensità dei vortici, e di conseguenza le forze ed i momenti dovuti al lift, dipenderanno dal tempo, e nel caso in cui il numero di Reynolds sia abbastanza grande, si avranno vortici anche nella scia del profilo. La ragione di questo fatto è insita nel teorema di Cauchy (2.11), per cui le variazioni di intensità (o il distacco) di vortici dal profilo devono essere bilanciate da variazioni uguali e opposte nella scia.

Un primo approccio per analizzare il problema è l'approssimazione quasi-statica: dato un profilo che si muove di moto roto-traslazionale non costante in un fluido, ad ogni istante le sue proprietà aerodinamiche sono uguali a quelle che avrebbe un profilo identico in movimento con velocità traslazionali e rotazionali costanti ed identiche ai valori istantanei del caso non costante. Allo stesso modo l'angolo di attacco del flusso incidente è assunto costante ed uguale all'angolo di attacco istantaneo. [6]
Sotto questa ipotesi, possiamo ancora usare alcuni dei risultati del caso statico. Si consideri un profilo sottile di corda c investito da un flusso uniforme U, e si assuma che il sistema sia libero di traslare verticalmente lungo l'asse $\hat{y}$ e di ruotare intorno ad un asse distante x_f dal *leading edge*. Questo tipo di dinamica è generalmente indicato come moto di *pitch and plunge*.

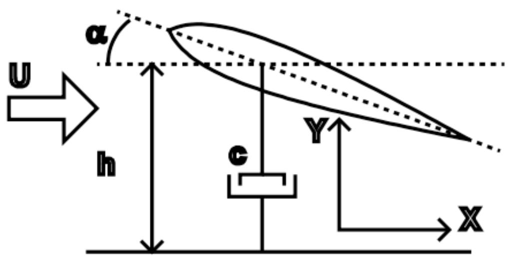


Figura 2.3: Dinamica di *pitch and plunge*.

Chiamando α l'angolo formato dall'asse $\hat{x}$ ed l'*airfoil*, la componente verticale della velocità di un punto a distanza x dal *leading edge* è data da:

$$v_y(x) = -\frac{dy}{dt} + (x_f - x)\frac{d\alpha}{dt} \tag{2.32}$$

Dalla condizione di non permeabilità si ricava che la componente verticale della velocità del fluido sul profilo deve essere

$$v(x) = -U\alpha - \frac{dy}{dt} + (x_f - x)\frac{d\alpha}{dt} \tag{2.33}$$

da cui si vede che l'angolo di attacco istante per istante tiene conto della dinamica del sistema. Ripartendo dall'equazione (2.20) e sostituendo al secondo membro della prima equazione la (2.33) possiamo integrare e ricavare i coefficienti di lift e momento dinamici, di cui riportiamo solo i risultati:

$$C_l = 2\pi \left[\alpha + \frac{1}{U}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{U}\left(\frac{3}{4}c - x_f\right)\frac{d\alpha}{dt} \right] \tag{2.34}$$

$$C_{M,le} = -\frac{\pi c}{8U}\frac{d\alpha}{dt} - \frac{1}{4}C_l \tag{2.35}$$

Questi coefficienti sono stati ricavati usando soltanto la circolazione e la vorticità del flusso. Ad ogni modo è un fatto noto che nel caso non stazionario si originino altre forze dovute a termini di massa aggiunta che non sono spiegabili tramite questo modello, ma che possono influire in modo importante sulla dinamica del sistema.

2.4 Caso non Stazionario: Teoria di Theodorsen

La trattazione completa del problema di *pitch and plunge* di un profilo sottile e simmetrico in un flusso incomprimibile ed uniforme fu pubblicata per la prima volta da Theodorsen nel 1935, ed è tutt'oggi un importante riferimento per molti problemi nell'ambito dell'aeroelasticità [7].
In questa sezione si vogliono indicare i passaggi chiave del metodo usato da Theodorsen, e riportare i risultati principali che applicheremo nel seguito. Per una trattazione completa si veda [8].

Adeguandoci alla letteratura, indicheremo la lunghezza della corda del profilo con $c = 2b$, essendo $-b \leq x \leq b$ e considereremo il piano x-z. Si tratta quindi di risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2\phi = 0$ con le condizioni al contorno sulla componente verticale della velocità sul profilo date da

$$w = \frac{\partial z_a}{\partial t} + U\frac{\partial z_a}{\partial x} = w_a(x,t) \tag{2.36}$$

dove il pedice a indica che la condizione va applicata sulla superficie dell'*airfoil*.
Ovviamente in $x = b$ dovrà essere soddisfatta la condizione di Kutta.
La soluzione di Theodorsen è divisa in due parti: la condizione (2.36) è soddisfatta attraverso l'inserimento di un'opportuna distribuzione di pozzi e sorgenti sopra e sotto la linea $z = 0$; sulla corda vengono poi inseriti i vortici, con contro-vortici nell'intera scia da b ad infinito, così da soddisfare la

condizione di Kutta e non modificare le condizioni al contorno.
Il foglio sottile è ottenuto per mezzo di una trasformazione conforme [9] che mappa una circonferenza di raggio $b/2$ nel piano X-Z in una linea nel piano x-y:

$$X^2 + Z^2 = \frac{1}{4}b^2 \qquad \longmapsto \qquad \begin{cases} -b \leq x \leq b \\ z = 0 \end{cases} \tag{2.37}$$

In particolare la trasformazione conforme è data da

$$x + iz = (X + iZ) + \frac{b^2}{4(X + iZ)} \tag{2.38}$$

da cui si ricava la corrispondenza tra i punti della circonferenza e quelli del foglio sottile, così come quella tra i punti della scia, nei due piani.
Indicando con θ la direzione angolare nel piano X-Z si trova per i punti del profilo

$$x = b\cos\theta \qquad\qquad z = 0 \tag{2.39}$$

mentre per la scia:

$$x = X + \frac{b^2}{4X} \qquad\qquad z = Z = 0 \tag{2.40}$$

Dalle proprietà delle trasformazioni conformi possiamo anche ricavare le corrispondenze tra le velocità nei due piani. La relazione che permette di farlo è la seguente

$$u - iw = \frac{q_X - iq_Z}{\frac{d(x+iz)}{d(X+iZ)}} \tag{2.41}$$

dove q_X e q_Y sono le componenti cartesiane della velocià sulla circonferenza. La (2.41) permette anche di trovare come sono legati i potenziali delle velocità tra X-Z e x-z, ossia

$$\phi_2 - \phi_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} q_\theta \frac{b}{2} d\theta = -\int_{x_1}^{x_2} u dx \tag{2.42}$$

dove q_θ e q_r indicano le componenti polari della velocità sul cerchio, ed i pedici 1 e 2 indicano due punti nei piani in considerazione legati dalla trasformazione (2.38).

Per soddisfare la condizione (2.36) Theodorsen inserisce un insieme di sorgenti sulla semicirconferenza superiore e di pozzi di uguale intensità sulla semicirconferenza inferiore. Ad una attenta analisi della trasformazione conforme (2.38) si osserva che la parte superiore ed inferiore del foglio sottile nel piano x-z non sono a contatto, ma si trovano su due diverse superfici di Riemann [7], e questo garantisce che i contributi di pozzi e sorgenti non si cancellino tra loro.
Tralasciando la dimostrazione, è ora possibile calcolare la differenza di pressione tra la superficie superiore ed inferiore, ovvero

$$p_U - p_L = -2\rho \left[\frac{\partial \phi_U}{\partial t} - \frac{U}{b \sin\theta} \frac{\partial \phi_U}{\partial \theta} \right] \tag{2.43}$$

da cui, per integrazione, otteniamo il lift ed il momento rispetto ad un asse $x = ab$, dove a è un parametro adimensionale tale che $-1 \leq a \leq 1$. Qui di seguito si riportano i risultati:

$$L_{nc} = -\int_{-b}^{b} (p_U - p_L)\, dx = 2\rho b \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\pi} \phi_U \sin\theta d\theta \tag{2.44}$$

$$M_{nc} = -\int_{-b}^{b} (p_U - p_L)\,(x - ba)\, dx =$$

$$= 2\rho U b \int_0^{\pi} \phi_U \sin\theta d\theta - 2\rho b^2 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\pi} \phi_U \,(\cos\theta - a) \sin\theta d\theta \tag{2.45}$$

Il pedice nc indica che i contributi così ottenuti si riferiscono solo alla parte non circolatoria del flusso.

Possiamo usare i risultati ottenuti per ottenere lift e momento di un profilo rigido con una dinamica di *pitch and plunge*, ossia libero di traslare verticalmente e ruotare intorno ad un asse $x = ab$ rispetto al quale sono calcolati i momenti. Indicando con $h(t)$ lo spostamento verticale e con $\alpha(t)$ l'angolo di rotazione, la corda del profilo al tempo t è data da:

$$z_a(x,t) = -h(t) - \alpha(t)\,(x - ba) \tag{2.46}$$

Dall'equazione (2.36) si trova

$$w_a(x,t) = -\dot{h}(t) - U\alpha(t) - \dot{\alpha}(t)\,(x - ba) \tag{2.47}$$

da cui, usando la trasformazione (2.39)

$$\phi_U(\theta,t) = b\left(\dot{h}(t) + U\alpha(t)\right)\sin\theta + b^2\dot{\alpha}(t)\sin\theta\left(\frac{1}{2}\cos\theta - a\right) \tag{2.48}$$

ed infine:

$$L_{nc} = \pi\rho b^2\left(\ddot{h}(t) + U\dot{\alpha}(t) - ba\ddot{\alpha}(t)\right) \tag{2.49}$$

$$M_{nc} = \pi\rho b^2\left[U\dot{h}(t) + ba\ddot{h}(t) + U^2\alpha(t) - b^2\ddot{\alpha}(t)\left(\frac{1}{8} + a^2\right)\right] \tag{2.50}$$

I risultati appena ricavati sono per noi di particolare importanza in quanto verranno adattati nel seguito all'analisi di stabilità e alla ricerca di curve marginali nello spazio dei parametri.

A questo punto si può osservare che la soluzione non circolatoria non soddisfa la condizione di Kutta, ed è quindi necessario sovrapporre altri termini che controbilancino quelli inseriti fino ad ora in modo che $\gamma(\theta)|_{\theta=0} = 0$.
Questo risultato è raggiungibile inserendo un'opportuna distribuzione di vortici e contro-vortici in scia sull'asse $z = 0$ che si muovono alla velocità indisturbata del fluido. Così facendo non solo la condizione di Kutta risulta soddisfatta, ma anche il teorema di Cauchy (2.11).
Con un procedimento analogo al precedente, si calcola il potenziale ϕ_U, la differenza di pressione $p_U - p_L$ e per integrazione si ottengono lift e momenti dovuti al contributo circolatorio. Applicando questi risultati alla dinamica di *pitch and plunge* (2.46) si trova che:

$$L_c = 2\pi\rho Ub\left[\dot{h} + U\alpha + b\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha}\right]\frac{\displaystyle\int_b^\infty \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}}\gamma_w(\xi,t)d\xi}{\displaystyle\int_b^\infty \frac{\sqrt{\xi + b}}{\sqrt{\xi - b}}\gamma_w(\xi,t)d\xi} \tag{2.51}$$

$$M_c = -2\pi\rho U b^2 \left[\dot{h} + U\alpha + b\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha}\right]\left[\frac{1}{2} - \left(a + \frac{1}{2}\right)\frac{\displaystyle\int_b^\infty \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}}\gamma_w(\xi, t)d\xi}{\displaystyle\int_b^\infty \frac{\sqrt{\xi + b}}{\sqrt{\xi - b}}\gamma_w(\xi, t)d\xi}\right] \tag{2.52}$$

Gli integrali che compaiono in queste formule indicano l'influenza sul sistema della scia, che si estende sulla linea $b < z < \infty$, γ_w indica la circolazione per unità di lunghezza e la variabile ξ è una lunghezza ottenuta dalla trasformazione conforme (2.38).

Per semplificare i risultati, consideriamo il caso particolare in cui il sistema compia piccole oscillazioni armoniche di pulsazione ω su entrambi i gradi di libertà, e assumiamo che di conseguenza anche l'intensità dei vortici in scia vari armonicamente. Introducendo come d'abitudine variabili adimensionali, possiamo quindi scrivere

$$k = \frac{wb}{U} \qquad \xi^* = \frac{\xi}{b} \qquad \gamma_w(\xi, t) = \bar{\gamma}_w e^{i(\omega t - k\xi^*)} \tag{2.53}$$

gli integrali nelle equazioni (2.51) e (2.52) possono essere riscritti come

$$\frac{\displaystyle\int_b^\infty \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}}\gamma_w(\xi, t)d\xi}{\displaystyle\int_b^\infty \frac{\sqrt{\xi + b}}{\sqrt{\xi - b}}\gamma_w(\xi, t)d\xi} = \frac{\displaystyle\int_1^\infty \frac{\xi^*}{\sqrt{\xi^{*2} - 1}}e^{-ik\xi^*}d\xi^*}{\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{\xi^* + 1}}{\sqrt{\xi^* - 1}}e^{-ik\xi^*}d\xi^*} = \mathcal{C}(k) \tag{2.54}$$

e sono funzioni della sola frequenza ridotta k. $\mathcal{C}(k)$ è chiamata funzione di Theodorsen, e facendo riferimento a [8, 10] può essere ricondotta ad un rapporto tra combinazioni lineari di funzioni di Hankel

$$\mathcal{C}(k) = F(k) + iG(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)} \tag{2.55}$$

dove le funzioni di Hankel del secondo tipo $H_n^{(2)}$ sono una particolare combinazione lineare di funzioni di Bessel del primo e secondo tipo:

$$H_n^{(2)} = J_n - iY_n \tag{2.56}$$

In questa approssimazione, sommando sia i contributi circolatori che quelli non circolatori, si trovano le espressioni complete per il lift e per il momento:

$$L_{th} = L_{nc} + L_c = \pi\rho b^2 \left(\ddot{h} + U\dot{\alpha} - ba\ddot{\alpha}\right) + \\ +2\pi\rho U b \mathcal{C}(k) \left[\dot{h} + U\alpha + b\dot{\alpha}\left(\frac{1}{2} - a\right)\right] \tag{2.57}$$

$$M_{th} = M_{nc} + M_c = \pi\rho b^2 \left[ba\ddot{h} - Ub\dot{\alpha}\left(\frac{1}{2} - a\right) - b^2\ddot{\alpha}\left(\frac{1}{8} + a\right)\right] + \\ +2\pi\rho U b^2 \left(a + \frac{1}{2}\right)\mathcal{C}(k)\left[\dot{h} + U\alpha + b\dot{\alpha}\left(\frac{1}{2} - a\right)\right] \tag{2.58}$$

Riassumendo, il ruolo della funzione di Theodorsen in queste espressioni è quello di tenere in considerazione l'effetto dei vortici nella scia sul moto del sistema. Nel limite in cui la frequenza di oscillazione tende a zero, ci aspettiamo che il contributo della scia sia irrilevante, e di ritrovare quindi il limite quasi statico. Poiché

$$\Re\left[\lim_{k\to 0}\mathcal{C}(k)\right] = 1 \tag{2.59}$$

il limite quasi statico della teoria di Theodorsen risulta essere:

$$L_{th_{qs}} = \pi\rho b^2\left(\ddot{h} + U\dot{\alpha} - ba\ddot{\alpha}\right) + 2\pi\rho U b\left[\dot{h} + U\alpha + b\dot{\alpha}\left(\frac{1}{2} - a\right)\right] \tag{2.60}$$

Facendo riferimento all'equazione (2.34), e ricordando che $c = 2b$ e che $x_f = \frac{c}{2}(a+1)$, il lift che abbiamo ricavato dalla teoria quasi statica risulta essere

$$L_{qs} = 2\pi\rho U b\left[U\alpha + \dot{h} + b\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha}\right] \tag{2.61}$$

che coincide con il secondo termine del limite di Theodorsen. Come già annunciato nel paragrafo precedente, il modello quasi statico deve essere integrato con termini detti di massa aggiunta, che possiamo ottenere del confronto delle due espressioni precedenti:

$$L_{add} = L_{th_{qs}} - L_{qs} = \pi\rho b^2\left(\ddot{h} + U\dot{\alpha} - ba\ddot{\alpha}\right) = m_{add}\left(\ddot{h} + U\dot{\alpha} - ba\ddot{\alpha}\right) \tag{2.62}$$

da cui:

$$m_{add} = \pi \rho b^2 \tag{2.63}$$

Quindi nel limite quasi statico tutto va come se un cilindro di fluido di densità ρ e raggio b si muovesse istante per istante alla stessa velocità del foglio sottile, inducendo nuove forze. Un ragionamento del tutto analogo può essere fatto dal confronto delle espressioni dei momenti.

Capitolo 3

Metodo Numerico

In questo capitolo verrà descritto il metodo usato per risolvere numericamente le equazioni di Navier Stokes su geometrie arbitrariamente complesse. L'approccio numerico a problemi di tipo fluidodinamico è noto come *Computational Fluid Dynamics* (CFD) [19, 20, 21], e le simulazioni che verranno effettuate saranno *Direct Numerical Simulations* (DNS), ovvero non sarà adottato nessun modello turbolento ma verranno risolte scale temporali e spaziali fino a quelle più piccole di dissipazione.
Più in generale, la soluzione a questo problema è riconducibile ai metodi usati per risolvere un qualunque sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali (PDEs) su un dominio fisico, e possiamo riassumerne l'approccio in due parti: la discretizzazione della geometria in analisi su un opportuno reticolo computazionale e la discretizzazione degli operatori differenziali accompagnata da un metodo numerico iterativo per risolvere le equazioni ad ogni passo temporale.

3.1 Overture

Overture consiste in una collezione di classi in C++ che possono essere usate per trovare soluzioni approssimate di PDEs [11] in 1D, 2D e 3D. Ciascuna classe è formata sia da dati che descrivono l'oggetto a cui la classe si riferisce, che da funzioni che agiscono su questi oggetti.
Le categorie principali delle classi di *Overture* sono:

A++/P++ : costruiscono vettori e tensori in più dimensioni e le regolano le operazioni tra loro rispettivamente in seriale e parallelo.

Mappings : definiscono trasformazioni nel dominio computazionale e permettono di costruire curve, aree, superfici e volumi.

Grids : discretizzano le geometrie create con *mappings*. Nel caso in cui si vogliano sovrapporre diverse *mappings* si parla di *composite overlapping grids*.

GridFunctions : contengono i valori assunti da grandezze fisiche quali le componenti cartesiane della velocità, la pressione, la temperatura e la densità, per ciascun punto del dominio computazionale e ad ogni istante. Possono essere combinate per costruire altre quantità non direttamente calcolate (vorticità, energia, etc.).

Operators : discretizza gli operatori differenziali del problema così come le condizioni al contorno imposte per mezzo di metodi alle differenze o ai volumi finiti.

Queste classi possono essere liberamente ottenute a fini di ricerca e sviluppo all'indirizzo *https://computation.llnl.gov/casc/Overture/* e questo rende *Overture* un programma estremamente versatile, essendo ogni utente libero di modificare le classi secondo le esigenze del problema in esame e risolvere PDEs contenenti geometrie arbitrariamente complesse sia statiche che in movimento.

3.2 Overlapping Grids

La creazione di una griglia corrisponde al processo di trasformazione di un dominio fisico continuo in un insieme di regioni discrete. Esistono diversi metodi numerici per la loro creazione, classificati in *structured*, *unstructured* e *cartesiani* [12].
Il metodo *structured*, che verrà usato nel seguito, costruisce le griglie riempiendo lo spazio con un'unica forma geometrica, detta blocco. Nel caso 2D i blocchi usati sono quadrilateri, mentre nel caso 3D sono esaedri, poiché queste strutture risultano essere particolarmente efficienti nella tassellatura rispettivamente del piano e dello spazio. Appare subito evidente che possano sorgere problemi nella costruzione delle griglie quando si tratta con geometrie non banali. Si consideri ad esempio in 2D un'area curvilinea inserita in un dominio rettangolare: è possibile dividere lo spazio in due regioni e costruire le griglie usando due diversi tipi di blocchi (griglia multi-blocchi), ma il problema della connessione dei due blocchi è non banale, e può limitare le possibili scelte dell'utente.

Un approccio migliore per discrettizare queste geometrie è quello di usare il metodo *structured* chiamato *overlapping grids*: con questo procedimento i blocchi di ciascuna griglia sono trasformati in modo da adattare la loro forma a quella della geometria a cui si riferiscono. Inoltre, a differenza del metodo a multi-blocchi, non si incontra il problema della connessione delle singole griglie, poiché queste possono sovrapporsi facendo uso di sofisticati algoritmi che le collegano laddove si incontrano, rimuovendo i punti che risultano superflui dopo la connessione. A questo punto le PDEs sono risolte su ogni griglia, e vengono opportunamente interpolate nei punti in cui le griglie si incontrano.
Un ulteriore vantaggio della generazione di griglie per mezzo dell'*overlapping grids*, è che le griglie possono essere deformate a piacere. Un problema classico in fluidodinamica è quello di un flusso uniforme che investe un cilindro di raggio R, generando una scia di vortici di von Kármán, dovuta al distacco dello strato limite dal cilindro. Per descrivere correttamente questo fenomeno è quindi necessario risolvere accuratamente lo strato limite, che sappiamo essere concentrato in una piccola regione intorno alla superficie ed in cui si trovano forti gradienti. Usando il metodo *overlapping grids*, la griglia intorno al cilindro sarà costruita in coordinate cilindriche (ρ, θ, z); questo ci permette di definire una funzione di *stretching* $s = s(\rho)$ che modifica la distribuzione radiale dei punti, ad esempio secondo la seguente trasformazione

$$s(\rho) = a_0 + a_\rho \rho + a_1 e^{b_1(\rho - c_1)} \tag{3.1}$$

con i parametri $a_0, a_\rho, a_1, b_1, c_1$ scelti opportunamente. È così possibile distribuire in modo semplice i punti in modo da descrivere accuratamente le regioni che esibiscono grandi gradienti delle quantità fisiche importanti, e in modo più grossolano quelle in cui la soluzione è quasi-statica, ottenendo un notevole risparmio sul tempo di calcolo.
Infine, per poter definire bene il problema, occorre inserire per ogni griglia le condizioni al contorno numeriche che deve soddisfare su ciascun lato, ossia se si tratta di contorni fisici, di interpolazione o periodici. Queste informazioni sono raccolte in tensori del tipo

$$bC_i(\text{side}, \text{axis}) = \begin{cases} > 0 & \text{contorno fisico} \\ = 0 & \text{contorno di interpolazione} \\ < 0 & \text{contorno periodico} \end{cases} \tag{3.2}$$

dove l'indice i scorre su tutte le griglie della geometria, mentre side $= \{0, 1\}$ e axis $= \{0, 1, 2\}$ si riferiscono alla faccia della griglia in considerazione, in particolare:

$$\begin{aligned} bC_i(0,0) &= \text{left} \\ bC_i(1,0) &= \text{right} \\ bC_i(0,1) &= \text{bottom} \\ bC_i(1,1) &= \text{top} \\ bC_i(0,2) &= \text{front (solo 3D)} \\ bC_i(1,2) &= \text{back (solo 3D)} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Il programma usato nel seguito per creare le griglie è *Ogen*, acronimo di *Overlapping grid generator*. Una descrizione completa del programma può essere trovata in [14], ci limitiamo qui a seguire un esempio di creazione di una griglia per descriverne le caratteristiche principali.

Si voglia costruire una griglia per lo studio delle scie di von Kármán create da un flusso uniforme su un cilindro in 2D, al variare del numero di Reynolds. Sia D il diametro del cilindro, ν la viscosità cinematica del fluido e U la velocità del flusso indisturbata, e di conseguenze $Re = \frac{UD}{\nu}$. Scegliendo di lavorare in unità adimensionali fissiamo $D = 0.3$ e $\nu = 1$ e avremo dunque come unico parametro libero $0.3U = Re$, che sarà inserito come condizione iniziale. Avremo quindi una griglia rettangolare per il dominio di integrazione ed una circolare per il cilindro; per meglio descrivere la scia e migliorare l'interpolazione, si inserisce anche una seconda griglia rettangolare con spaziatura compresa tra le altre due. Si tratta quindi di costruire tre *mappings* e sovrapporle.
Qui di seguito riportiamo alcune delle classi usate per costruire le griglie, senza descriverne i dettagli numerici ma limitandoci a commentarne il funzionamento.

```
create mappings
*************************
  rectangle
    set corners
    -4., 8., -3., 3.
    mappingName
    squarebig
    lines
    200, 100
    exit
*************************
  rectangle
    set corners
    -2., 3., -1., 1.
    lines
    150, 150
    mappingName
    squaresmall
    boundary conditions
    0,0,0,0
    exit
```

Si costruiscono due *mappings* rettangolari di dimensioni $x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}$ specificate in *set corners*. I domini vengono discretizzati in rettangoli di lato

$$\frac{x_{max} - x_{min}}{n-1} \times \frac{y_{max} - y_{min}}{m-1}$$

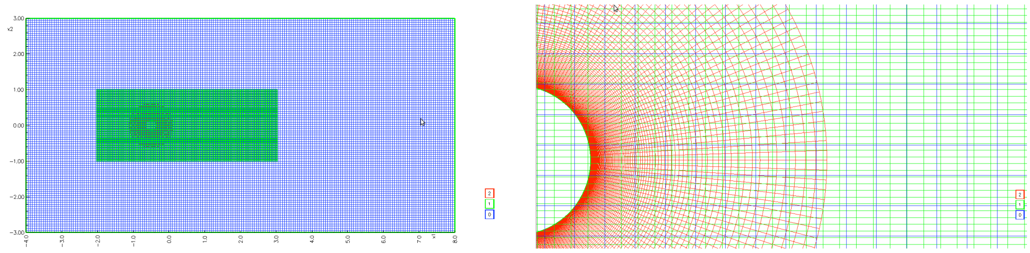
dove $n, m \in \mathbb{N}$ sono specificati in *lines* ed infine per la seconda griglia si specifica che tutti i lati devono soddisfare condizioni al contorno di interpolazione in accordo con la (3.2).

```
create mappings
  annulus
    inner radius
    0.15
    outer radius
    0.6
    centre for annulus
    -0.5 0.
    boundary conditions
    -1 -1 1 0
    lines
    200, 100
    exit
  stretch coordinates
  Stretch r2:exp
    stretch grid
    exit
  exit this menu
```

Si costruisce una corona circolare di raggio interno 0.15, raggio esterno 0.6 e centro $(-0.5, 0)$. La corona circolare è discretizzata con 200 linee angolari r_1 e 100 radiali r_2 e queste ultime vengono concentrate sul bordo interno per mezzo di una funzione di *stretching* analoga alla (3.1). Infine facendo riferimento alla (3.2) le condizioni al contorno specificano che i lati destro e sinistro vanno ad unirsi, e devono soddisfare condizioni al contorno periodiche, il lato interno è un contorno fisico mentre quello esterno è di interpolazione.

```
generate an overlapping grid
  squarebig
  squaresmall
  stretched-Annulus
  done choosing mappings
compute overlap
  change parameters
   interpolation type
      explicit for all grids
    exit
  compute overlap
  exit
*************************
\\salva la griglia composta
*************************
save a grid
smooth2.hdf
exit
```

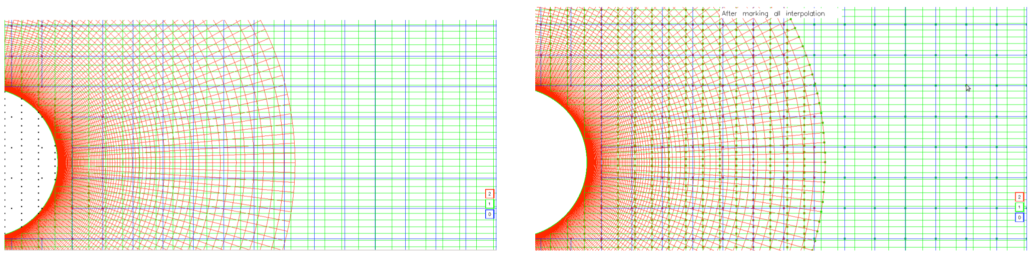
Le griglie vengono sovrapposte e viene eseguito l'algoritmo di interpolazione, una cui trattazione esaustiva può essere trovata in [15].



(a) (b)

Figura 3.1: *Ogen.* Step 1: sovrapposizione delle griglie. (a) Visione globale dei tre blocchi. (b) Dettaglio sul cilindro.

Iterando su tutta la griglia vengono individuati ed eliminati i punti superflui, quelli cioè su cui non dovranno essere risolte le PDEs. Nel nostro esempio si tratta dei punti contenuti nella circonferenza di raggio r_1 come mostrato in Figura 3.2, trovandosi all'interno di un contorno fisico e quindi impenetrabile.

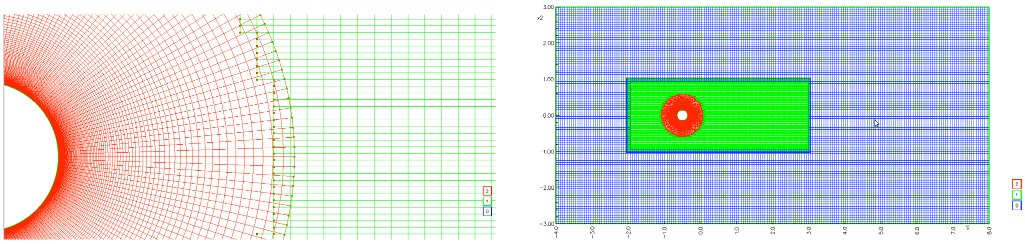


(a) (b)

Figura 3.2: *Ogen.* (a) Step 2: cancellazione dei punti in eccesso. (b) Step 3: rilevamento punti di interpolazione

Si procede poi alla classificazione dei punti residui, che possono essere punti di interpolazione o di discretizzazione. I punti di interpolazione sono l'insieme dei punti circondati da un preciso numero (fissato dal tipo di interpolazione usata, implicita o esplicita) di punti di due differenti griglie. Infine l'utente è libero di scegliere un criterio per stabilire la profondità della sovrapposizione tra due griglie; per una griglia 2D una profondità di interpolazione di due-tre punti è sufficiente. Il risultato è mostrato in Figura 3.3, in cui si osserva anche come lo strato limite sia estremamente ben risolto grazie alla funzione di *stretching*.

Nel caso in cui si debba trattare un problema con oggetti in movimento, le



(a) (b)

Figura 3.3: *Ogen.* Step 4: interpolazione. (a) Dettaglio circonferenza. (b) Visione globale della griglia di computazione finale.

griglie a cui questi si riferiscono vengono spostate con essi, e l'algoritmo di interpolazione viene chiamato ad ogni iterazione temporale, individuando i punti di interpolazione che non sono più validi dopo il movimento, e cercandone nuovi vicino ad essi, in modo da ottimizzare i tempi di calcolo.
Per concludere si fa notare che l'uso di questo tipo di algoritmo richiede molta pratica da parte dell'utente che deve pianificare sia la densità dei punti nelle varie regioni di interesse, che prestare attenzione ad ottenere una buona interpolazione tra le griglie: se questa risulta essere troppo grossolana l'algoritmo può fallire o richiedere grandi tempi di calcolo per arrivare a convergenza.
Nella Figura 3.4 riassumiamo schematicamente il funzionamento delle *overlapping grids*.

3.3 Discretizzazione

Si vogliano risolvere le equazioni di Navier-Stokes incompressibili (INS) nelle incognite $\boldsymbol{u}$ e p su un dominio connesso $\Omega \in \mathbb{R}^d$, essendo $d = 2, 3$ il numero di dimensioni spaziali a cui si è interessati. Facendo riferimento all'equazione (1.43) ed indicando con il pedice t la derivata parziale rispetto al tempo, queste sono date da

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\,\boldsymbol{u} + \dfrac{\nabla p}{\rho} = \nu \Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

in cui restano da specificare le condizioni al contorno e le condizioni iniziali per poter ben definire il problema.
Nel seguito risolveremo le equazioni INS nella formulazione chiamata *Pres-*

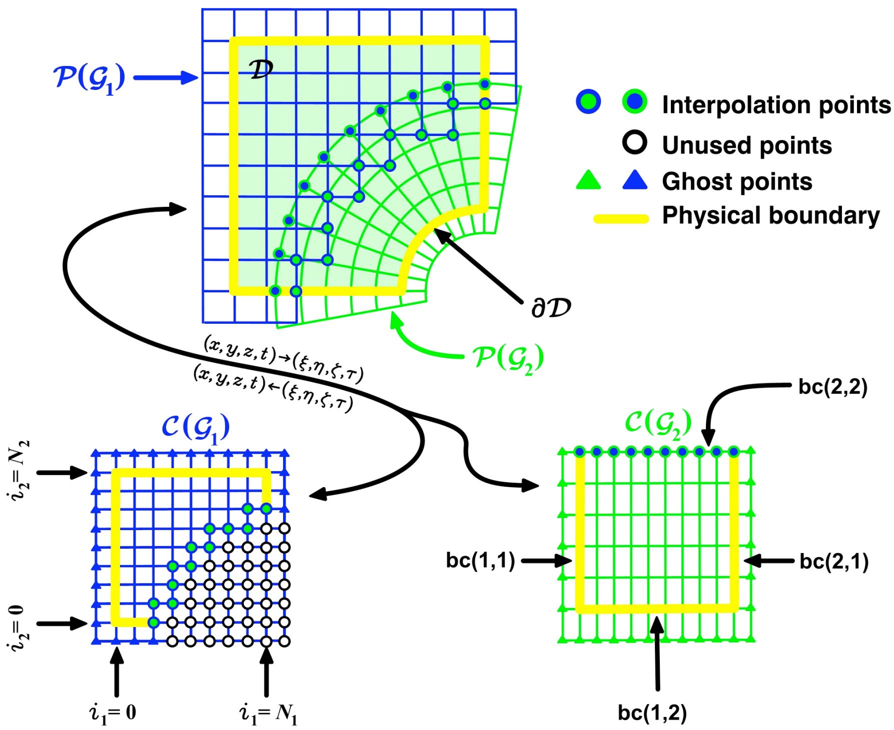


Figura 3.4: Overlapping tra due griglie e loro rappresentazione nello spazio fisico (in alto) e nello spazio computazionale (in basso). Immagine gentilmente concessa da Joel Guerrero [12].

sure Poisson Equation system (PPEs), data dal seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} \boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} + \frac{\nabla p}{\rho} = \nu\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f} \\ \frac{\Delta p}{\rho} - \partial_\alpha \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\partial} u_\alpha - C_d(\nu)\nabla\cdot\boldsymbol{u} - \nabla\cdot\boldsymbol{f} = 0 \end{aligned}\right\} & \boldsymbol{x}\in\Omega \\ \left.\begin{aligned} \mathcal{B}\,(\boldsymbol{u},p) = 0 \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \end{aligned}\right\} & \boldsymbol{x}\in\partial\Omega \\ \boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}_0\,(\boldsymbol{x}) & t = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

dove $\mathcal{B}\,(\boldsymbol{u},p) = 0$ sono d condizioni al contorno e $\partial\Omega$ indica il bordo del dominio Ω. È stata inserita l'equazione di Poisson per la pressione, ma questa

aggiunta è bilanciata dal fatto che la condizione di incompressibilità è ora limitata solo al bordo della regione. Il termine $C_d(\nu)\nabla \cdot \boldsymbol{u}$ nell'equazione della pressione rappresenta uno smorzamento sulla divergenza, inserito per evitare che i troncamenti dovuti all'approssimazione numerica portino ad una divergenza non nulla, come discusso in [17].
Si deve ora procedere alla discretizzazione di queste equazioni per poter risolvere il problema sulle *overlapping grids* precedentemente generate. Il metodo usato è quello delle differenze finite (o volumi finiti nel caso 3D) centrato del secondo ordine. Indichiamo con $\boldsymbol{U_i}$ e $P_{\boldsymbol{i}}$ i valori discreti approssimati delle incognite $\boldsymbol{u}$ e p in modo che:

$$\boldsymbol{U_i}(t) \approx \boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{x_i}, t\right) \qquad P_{\boldsymbol{i}}(t) \approx p\left(\boldsymbol{x_i}, t\right) \tag{3.6}$$

$\boldsymbol{U_i} = (u_{\boldsymbol{i}}(t), v_{\boldsymbol{i}}(t), w_{\boldsymbol{i}}(t))$ è un vettore che contiene la velocità approssimata al tempo t nel punto $\boldsymbol{x_i}$ componente per componente, e l'indice $\boldsymbol{i}$ è un multi-indice $\boldsymbol{i} = (i, j, k)$ che scorre su tutti i punti della griglia; nel caso 2D l'indice k è soppresso.
Dopo la discretizzazione spaziale, il sistema di equazioni (3.5) assume la forma

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{c} \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{U_i} + \left(\boldsymbol{U_i} \cdot \nabla_h\right)\boldsymbol{U_i} + \dfrac{\nabla_h P_{\boldsymbol{i}}}{\rho} - \nu\Delta_h \boldsymbol{U_i} - \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x_i}, t\right) = 0 \\[2ex] \dfrac{\Delta_h P_{\boldsymbol{i}}}{\rho} - \displaystyle\sum_{m=1}^{d} \nabla_h U_{m,\boldsymbol{i}} \cdot D_{m,h}\boldsymbol{U_i} - C_{d,\boldsymbol{i}}\nabla_h \cdot \boldsymbol{U_i} - \nabla_h \cdot \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x_i}, t\right) = 0 \end{array}\right\} & \boldsymbol{x_i} \in \Omega \\[4ex] \left.\begin{array}{c} \mathcal{B}\left(\boldsymbol{U_i}, P_{\boldsymbol{i}}\right) = 0 \\[2ex] \nabla_h \cdot \boldsymbol{U_i} = 0 \end{array}\right\} & \boldsymbol{x_i} \in \partial\Omega \\[4ex] \boldsymbol{U}\left(\boldsymbol{x_i}, 0\right) = \boldsymbol{U}_0\left(\boldsymbol{x_i}\right) & t = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

dove l'indice m indica la derivata nella direzione m-ma, e per indicare le derivate spaziali è stato introdotto l'operatore differenziale discretizzato D_h definito da

$$D_{m,h} \approx \frac{\partial}{\partial x_m} \tag{3.8}$$

da cui discendono le definizioni degli operatori:

$$\nabla_h = (D_{1,h}, D_{2,h}, D_{3,h}) \qquad \Delta_h = \nabla_h^2 \approx \sum_{m=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} \tag{3.9}$$

L'indice h che compare nelle derivate discrete, indica l'ordine di precisione numerica con cui queste sono calcolate: maggiore è il grado di precisione richiesto dall'utente, maggiore deve essere l'ordine scelto per h, il che si riflette in tempi di calcolo più lunghi. In [18] è presentato lo schema al sesto ordine. Nel lavoro in esame sarà sufficiente usare $h = 2$, ovvero un'approssimazione alle differenze finite del secondo ordine, e sopprimeremo l'indice h verrà soppresso per semplificare la notazione.
Volendo esplicitare le espressioni degli operatori discreti al secondo ordine usati, si ha

$$\begin{gathered} \nabla \cdot \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{i}} = D_{0,x} u_{\boldsymbol{i}} + D_{0,y} v_{\boldsymbol{i}} \\ \nabla^2 \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{i}} = \left(D_{+,x} D_{-,x} + D_{+,y} D_{-,y}\right) \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{i}} \\ \nabla P_{\boldsymbol{i}} = (D_{0,x} P_{\boldsymbol{i}}, D_{0,y} P_{\boldsymbol{i}}) \end{gathered} \tag{3.10}$$

dove per semplicità ci siamo limitati al caso $d = 2$, e si ha

$$\begin{gathered} D_{0,x} \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{i}} = \frac{\boldsymbol{U}_{i+1,j} - \boldsymbol{U}_{i-1,j}}{2h} \approx \frac{\partial}{\partial x} \\ D_{+,x} \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{i}} = \frac{\boldsymbol{U}_{i+1,j} - \boldsymbol{U}_{i,j}}{h} \approx \frac{\partial}{\partial x} \\ D_{-,x} \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{i}} = \frac{\boldsymbol{U}_{i,j} - \boldsymbol{U}_{i-1,j}}{h} \approx \frac{\partial}{\partial x} \\ D_{0,x}^2 \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{i}} = D_{+,x} D_{-,x} \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{i}} = D_{+,x} \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{i}} - D_{-,x} \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{i}} = \\ = \frac{\boldsymbol{U}_{i+1,j} - 2\boldsymbol{U}_{i,j} + \boldsymbol{U}_{i-1,j}}{h^2} \approx \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{gathered} \tag{3.11}$$

con definizioni analoghe per $D_{\ ,y}$. I pedici $+, -, 0$ usati in queste definizioni indicano rispettivamente le derivate alle differenze *forward*, *backward* e *centrata*. Dipendendo quindi le equazioni dai primi vicini in ogni direzione sorge un problema nella soluzione sul bordo delle griglie, dove i punti primi vicini non esistono in tutte le direzioni. Per ovviare a questo problema si aggiunge ad ogni griglia ed in ogni direzione una linea di punti detti *ghost points*, che permettono di estendere la soluzione ai bordi così come di applicare correttamente le condizioni al contorno.

3.3.1 Condizioni al Contorno

Per completare questa sezione elenchiamo le condizioni al contorno che sono state usate nel seguito, sia per i bordi esterni (flusso entrante o uscente) che sui bordi interni (condizioni di non permeabilità). Per griglie statiche si ha:

$$\text{noSlipWall} = \begin{cases} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} & \text{velocità fissata} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 & \text{divergenza nulla} \end{cases}$$

$$\text{SlipWall} = \begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u} = g & \text{velocità normale fissata} \\ \partial_{\boldsymbol{n}} \left(\boldsymbol{t}_m \cdot \boldsymbol{u} \right) = 0 & \text{derivata normale della velocità tangenziale nulla} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 & \text{divergenza nulla} \end{cases}$$

$$\text{inflowWithVelocityGiven} = \begin{cases} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} & \text{velocità fissata} \\ \partial_{\boldsymbol{n}} p = 0 & \text{derivata normale della pressione nulla} \end{cases}$$

$$\text{outflow} = \begin{cases} \text{estrapola } \boldsymbol{u} & \\ \alpha p + \beta \partial_{\boldsymbol{n}} p = g & \text{derivate miste della pressione fissate} \end{cases}$$

in cui $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{t}$ indicano rispettivamente i versori normale e tangenziale alla superficie, e i parametri $\boldsymbol{g}$, g, α, β sono scelti dall'utente.

Nel caso in cui una griglia sia in movimento (deve quindi trattarsi di un contorno fisico), dobbiamo poter risolvere il sistema (3.5) in un sistema di riferimento non inerziale, ma solidale con la griglia. Facendo riferimento a [12], è possibile dimostrare che le equazioni INS nella formulazione PPEs possono essere riscritte in un sistema di riferimento mobile e solidale con una griglia $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}, t)$ nello spazio computazionale $\boldsymbol{r}$ come

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \left[\left(\boldsymbol{U} - \dot{\boldsymbol{G}}\right) \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}}\right] \boldsymbol{U} = \frac{-\nabla_{\boldsymbol{r}} p}{\rho} + \nu \nabla_{\boldsymbol{r}}^2 \boldsymbol{U} \tag{3.12}$$

$$\frac{\nabla_{\boldsymbol{r}}^2 p}{\rho} + \sum_{m=1}^{d} \nabla_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{U}_m \cdot \partial_{\boldsymbol{x}_m} \boldsymbol{U} = 0 \tag{3.13}$$

essendo $\dot{\boldsymbol{G}} = \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial t}$.

Le condizioni al contorno in questo caso ci impongono di fissare la velocità sul bordo della griglia mobile alla stessa velocità della griglia in quel punto, ovvero

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial t} \qquad \text{noSlip wall}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{n} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial t} \qquad \text{Slip wall}$$

e la condizione al contorno per la pressione nel caso noSlip wall può essere trovata moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{n}$ l'equazione (3.12), trovando:

$$\left.\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial \boldsymbol{G}_{wall}} = \left.\left(\ddot{\boldsymbol{G}} + \nu \nabla_{\boldsymbol{r}}^2 \boldsymbol{U}\right) \cdot \boldsymbol{n}\right|_{\partial \boldsymbol{G}_{wall}} \tag{3.14}$$

3.4 Corpo Rigido

Di particolare interesse per il lavoro sviluppato in questa tesi risulta essere la classe *RigidBodyMotion* che è stata ampiamente modificata ed usata per integrare le equazioni del moto di corpi rigidi in movimento sotto l'influenza di forze e momenti.
Si consideri un corpo rigido di massa m, e sia $\boldsymbol{x}_{cm}$ la posizione del suo centro di massa. Le equazioni del moto del corpo rigido sono date dalle equazioni cardinali

$$m\frac{d^2 \boldsymbol{x}_{cm}}{dt^2} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \sum_i \boldsymbol{F}_i \tag{3.15}$$

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \sum_j \boldsymbol{M}_j \tag{3.16}$$

essendo $\boldsymbol{l}$ il momento angolare, $\boldsymbol{F}_i$ e $\boldsymbol{M}_j$ rispettivamente le forze ed i momenti agenti sul sistema. Il momento angolare può essere rappresentato in funzione degli assi principali di inerzia $\boldsymbol{e}_i$ ed i relativi momenti di inerzia I_i e velocità angolari $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ come

$$\boldsymbol{l} = \sum_{i=1}^{3} I_i \omega_i \boldsymbol{e}_i \tag{3.17}$$

con le condizioni che gli assi principali devono soddisfare per formare una base ortonormale

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j &= \delta_{ij} \\ \dot{\boldsymbol{e}}_i &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_i \end{aligned} \tag{3.18}$$

Si arriva quindi al sistema di equazioni differenziali che deve essere risolto per determinare la posizione del corpo rigido:

$$\begin{gathered} m \frac{d^2 \boldsymbol{x}_{cm}}{dt^2} = \sum_i \boldsymbol{F}_i \\ I_i \dot{\omega}_i - (I_{i+1} - I_{i+2})\, \omega_{i+1} \omega_{i+2} = \sum_j \boldsymbol{M}_j \cdot \boldsymbol{e}_i \\ \dot{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_i \qquad (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i = 1, \quad \boldsymbol{e}_i \cdot \dot{\boldsymbol{e}}_i = 0) \end{gathered} \tag{3.19}$$

dove gli indici dei momenti di inerzia e delle velocità angolari sono da considerarsi in modulo 3.

A prescindere dal tipo di moto che si vuole considerare, i momenti e le forze che saranno sempre presenti nelle equazioni saranno quelli derivanti dalle forze fluidodinamiche $\boldsymbol{F}_{flu}$, legati al tensore degli sforzi (1.42). La componente i-ma di tale forza è data da

$$F_{flu,i} = - \int_{\mathcal{S}} \tau_{ij}(\boldsymbol{x})\, \hat{n}_j dS \tag{3.20}$$

essendo $\hat{n}_j$ il versore nella direzione j-ma e dS l'elemento infinitesimo della superficie $\mathcal{S}$ del corpo rigido. A questo livello il tensore degli sforzi è noto per ogni punto $\boldsymbol{x_i}$ della griglia, avendo già integrato le equazioni INS numericamente, e l'integrale precedente viene approssimato da

$$F_{flu,i} = -\sum_{\boldsymbol{i} \in \mathcal{S}} \tau_{ij} \left(\boldsymbol{x_i}\right) \hat{n}_j \Delta S_{\boldsymbol{i}} \tag{3.21}$$

in cui il multi-indice $\boldsymbol{i}$ scorre sui punti che giacciono sulla superficie $\mathcal{S}$.
Allo stesso modo possiamo integrare su $\mathcal{S}$ l'equazione dei momenti per ottenere il momento $\boldsymbol{M}_{flu}$ indotto dal fluido sul sistema rispetto ad un asse $\bar{\boldsymbol{x}}$ ed ottenere:

$$\boldsymbol{M}_{flu,\bar{\boldsymbol{x}}} = \int_{\mathcal{S}} \left(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}\right) \times d\boldsymbol{F}_{flu} \tag{3.22}$$

Esplicitando l'approssimazione numerica per la componente $\hat{z}$ del momento si trova:

$$M^{(z)}_{flu,\bar{\boldsymbol{x}}} = \sum_{\boldsymbol{i} \in \mathcal{S}} \left[\left(x_{\boldsymbol{i}} - \bar{x}\right) \tau_{yj} \left(\boldsymbol{x_i}\right) \hat{n}_j - \left(y_{\boldsymbol{i}} - \bar{y}\right) \tau_{xj} \left(\boldsymbol{x_i}\right) \hat{n}_j\right] \Delta S_{\boldsymbol{i}} \tag{3.23}$$

Avendo ora a disposizione tutti gli elementi necessari, si può procedere all'integrazione numerica delle equazioni differenziali del moto. Il metodo usato rientra nella categoria degli schemi *predictor-corrector*. Discrettizando in n passi di ampiezza Δt il dominio temporale di integrazione $[t_i, t_f]$, ed indicando con $t^{(n)}$, $\boldsymbol{x}^{(n)}$ rispettivamente il tempo e la posizione del centro di massa al passo n-mo, il sistema di equazioni differenziali (3.19) viene integrato in due tempi.
Lo schema numerico del *predictor*, che indichiamo con l'indice p, è dato da

$$\boldsymbol{v}^p = \boldsymbol{v}^{(n-1)} + 2\frac{\boldsymbol{F}}{m}^{(n)} \Delta t \tag{3.24}$$

$$\boldsymbol{x}^p = 2\boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{x}^{(n-1)} + \frac{\boldsymbol{F}}{m}^{(n)} \Delta t^2 \tag{3.25}$$

$$\boldsymbol{\omega}^p = \boldsymbol{\omega}^{(n-1)} + 2\dot{\boldsymbol{\omega}}^{(n)} \Delta t \tag{3.26}$$

$$\boldsymbol{e}^p = \boldsymbol{e}^{(n-1)} + 2\dot{\boldsymbol{e}}^{(n)} \Delta t \tag{3.27}$$

Il metodo qui usato è chiamato *Leap-Frog Trapezoidal*, e dipende dalle soluzioni al passo antecedente a quello considerato. Vengono quindi definiti nel codice dei tensori che memorizzano le soluzioni di tutte le variabili integrate ai passi $n-1, n, n+1$, ed aggiornati ad ogni iterazione. I primi due passi dell'algoritmo devono essere corretti non essendo note le soluzioni al passo $n-1$, in particolare all'iterazione $n=1$ si ha

$$\boldsymbol{v}^p = \boldsymbol{v}_0 + \frac{\boldsymbol{F}}{m}^{(1)} \Delta t \tag{3.28}$$

$$\boldsymbol{x}^p = \boldsymbol{x}_0 + \Delta t \left(\boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{F}}{m}^{(1)} \Delta t \right) \tag{3.29}$$

$$\boldsymbol{\omega}^p = \boldsymbol{\omega}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(1)} \Delta t \tag{3.30}$$

$$\boldsymbol{e}^p = \boldsymbol{e}_0 + \dot{\boldsymbol{e}}^{(1)} \Delta t \tag{3.31}$$

avendo indicato con il pedice 0 le condizioni iniziali assegnate al problema, mentre all'iterazione $n=2$:

$$\boldsymbol{v}^p = \boldsymbol{v}^{(1)} + \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{v}^{(2)} - \boldsymbol{v}^{(1)} + \Delta t \frac{\boldsymbol{F}}{m}^{(2)} \right) \tag{3.32}$$

$$\boldsymbol{w}^p = \boldsymbol{w}^{(n-1)} + \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{w}^{(2)} - \boldsymbol{w}^{(1)} + \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(2)} \right) \tag{3.33}$$

$$\boldsymbol{e}^p = \boldsymbol{e}^{(2)} + \Delta t \left(\dot{\boldsymbol{e}}^{(2)} + \frac{1}{2} \ddot{\boldsymbol{e}}^{(2)} \Delta t \right) \tag{3.34}$$

Il *corrector* accresce la precisione dell'approssimazione per mezzo di un'ulteriore integrazione di tipo trapezoidale:

$$\boldsymbol{v}^{(n+1)} = \boldsymbol{v}^{(n)} + \frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{F}^{(n)}}{m} + \frac{\boldsymbol{F}^{(n-1)}}{m}\right)\Delta t \tag{3.35}$$

$$\boldsymbol{x}^{(n+1)} = \boldsymbol{x}^{(n)} + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{v}^{(n)} + \boldsymbol{v}^{(n-1)}\right)\Delta t \tag{3.36}$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(n+1)} = \boldsymbol{\omega}^{(n)} + \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{\omega}}^{(n)} + \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(n-1)}\right)\Delta t \tag{3.37}$$

$$\boldsymbol{e}^{(n+1)} = \boldsymbol{e}^{(n)} + \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{e}}^{(n)} + \dot{\boldsymbol{e}}^{(n-1)}\right)\Delta t \tag{3.38}$$

Una volta integrate numericamente le equazioni, tutti i punti del corpo rigido possono essere ricostruiti a partire dalla posizione del centro di massa per mezzo di traslazioni e rotazioni. Indicando con $\mathbb{E}(t)$ la matrice che al tempo t ha per colonne le componenti degli assi principali di inerzia $\boldsymbol{e}_i$, la rotazione tra due istanti temporali successivi è data da:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t^{(n+1)}) &= \mathbb{E}\left(t^{(n+1)}\right)\mathbb{E}^{-1}\left(t^{(n)}\right) = \\ &= \left[\boldsymbol{e}_1\left(t^{(n+1)}\right), \boldsymbol{e}_2\left(t^{(n+1)}\right), \boldsymbol{e}_3\left(t^{(n+1)}\right)\right]\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^T\left(t^{(n)}\right) \\ \boldsymbol{e}_2^T\left(t^{(n)}\right) \\ \boldsymbol{e}_3^T\left(t^{(n)}\right) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.39}$$

Ogni punto $\boldsymbol{r}$ del corpo rigido può quindi essere posizionato, anche graficamente, per mezzo della trasformazione:

$$\boldsymbol{r}\left(t^{(n+1)}\right) = \boldsymbol{x}\left(t^{(n+1)}\right) + \mathcal{R}\left(t^{(n+1)}\right)\left[\boldsymbol{r}\left(t^{(n)}\right) - \bar{\boldsymbol{x}}\left(t^{(n)}\right)\right] \tag{3.40}$$

Capitolo 4

Modelli Teorici e Risultati Numerici

4.1 Benchmarks

Prima di procedere alla trattazione completa del problema abbiamo verificato la correttezza e la bontá del codice usato conducendo alcune simulazioni da confrontare con risultati presenti in letteratura. Si tratta di testare sia la soluzione delle equazioni INS sulle *overlapping grids* in 2D, che le equazioni del moto per un corpo rigido. Iniziamo considerando problemi statici, in cui cioè l'oggetto immerso nel fluido è fermo. Come esempio principe si è deciso di considerare la formazione di una strada di vortici in scia ad un cilindro, avendo a disposizione molti riferimenti in letteratura con cui confrontarsi [22, 23, 24].

L'unico parametro adimensionale rilevante è il numero di Reynolds $Re = \frac{U_\infty L_\infty}{\nu}$, dove U_∞, L_∞ sono rispettivamente una velocità e una lunghezza con cui confrontarsi, e ν la viscosità cinematica del fluido. Facendo riferimento alla pubblicazione di Shen *et al.* [23], fissiamo $Re = 100$ scegliendo un cilindro di diametro $D = L_\infty = 1$, un flusso uniforme incidente sul cilindro $U_\infty = 1$ e viscosità cinematica $\nu = 0.01$. Essendo il numero di Reynolds sufficientemente grande, si verifica il distacco dello strato limite dal cilindro, come mostrato in Figura 4.1, da cui consegue il formarsi di una scia vorticosa.

Per mezzo della (3.21) possiamo ottenere le forze di lift e drag agenti sul cilindro; generalmente queste forze vengono rese adimensionali definendo i coefficienti di lift e drag

$$C_D \equiv \frac{F_{flu,x}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 L_\infty} \qquad\qquad C_L \equiv \frac{F_{flu,y}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 L_\infty} \tag{4.1}$$

dove ρ è la densità del fluido. Essendo il distacco dei vortici un fenomeno dinamico, come si può vedere dalle immagini in Figura 4.1, lift e drag varieranno nel tempo secondo una frequenza caratteristica. Si definisce quindi un secondo parametro adimensionale legato alla frequenza di distacco dei vortici, il numero di Strouhal:

$$St \equiv \frac{f L_\infty}{U_\infty} \tag{4.2}$$

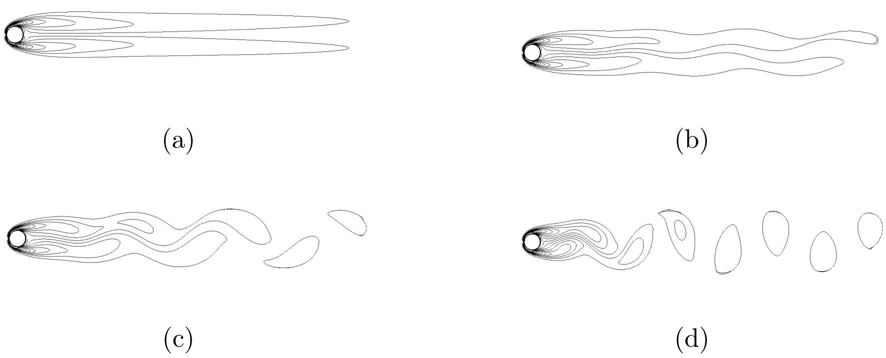
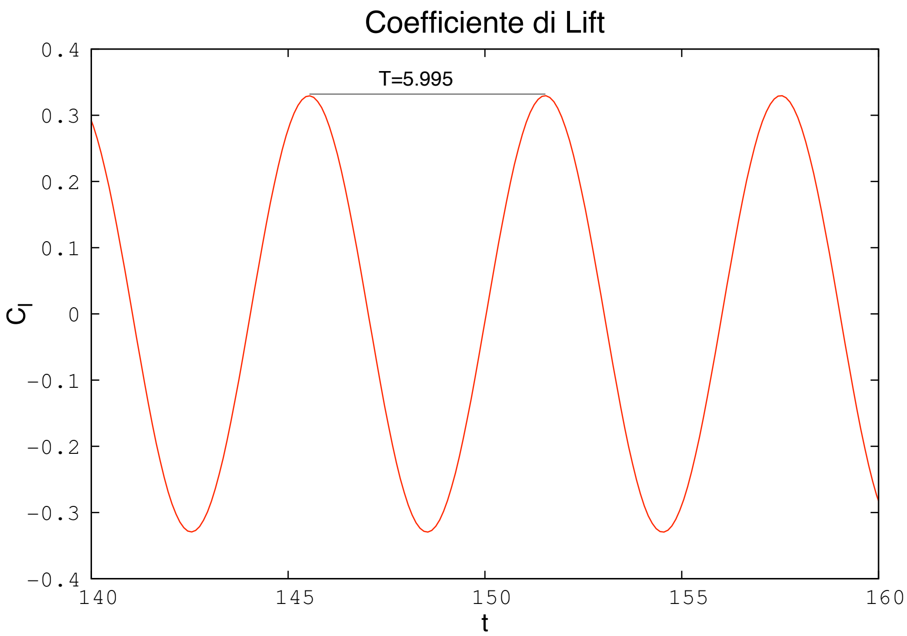


Figura 4.1: Campo di vorticità a $Re = 100$ nel tempo. (a) $t = 50$; (b) $t = 150$; (c) $t = 160$; (d) $t = 190$.

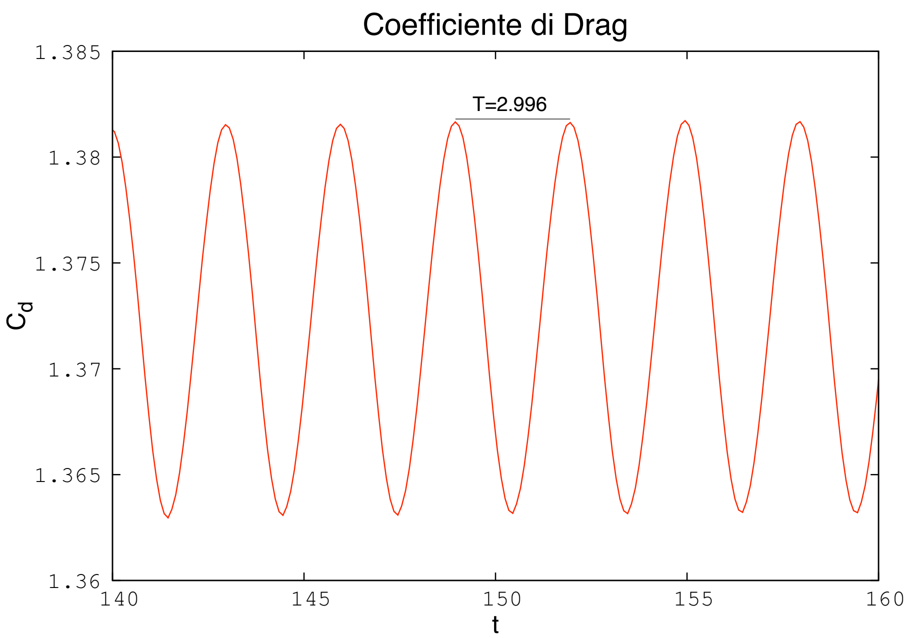
Dall'analisi dell'andamento nel tempo dei coefficienti di lift e drag, otteniamo i loro valor medi e la frequenza di distacco dei vortici, come mostrato in Figura 4.2

Come ci si aspetta considerando le simmetrie della geometria analizzata, il valor medio del coefficiente di lift è nullo e la frequenza con cui oscilla il coefficiente di drag è doppia rispetto a quella del lift. Nel calcolare il numero di Strouhal ci riferiremo alla frequenza ricavata dal coefficiente di lift, che indica la frequenza totale di distacco dei vortici (un vortice in senso orario ed uno in senso antiorario), e troviamo:

$$St = \frac{f L_\infty}{U_\infty} = \frac{\omega_{C_L} L_\infty}{2\pi U_\infty} = \frac{\omega_{C_L}}{2\pi} = 0.167 \tag{4.3}$$



(a)



(b)

Figura 4.2: (a): Coefficiente di lift; (b): Coefficiente di drag.

Riassumiamo in Tabella 4.1 i valori dei coefficienti di lift, drag ed il numero di Strouhal ottenuti dalle simulazioni, e li confrontiamo con i risultati ottenuti con metodi numerici differenti:

Riferimento	$\bar{C_D}$	$C_{L_{max}}$	St
Lavoro Presente	1.373	0.329	0.167
De Palma *et al.*[25]	1.32	0.331	0.163
Shen *et al.*[23]	1.376	0.325	0.166
Mariano *et al.*[27]	1.45	0.35	0.175

Tabella 4.1: Confronto risultati numerici a Re=100.

Simulazioni analoghe sono state effettuate al variare del numero di Reynolds e densità di punti sulle griglie, ottenendo sempre buoni accordi con i riferimenti in letteratura.

Il passo successivo è quello di muovere i corpi rigidi all'interno del fluido. Nel caso più semplice il moto dell'oggetto è forzato da un'azione esterna $\boldsymbol{F}_{ext}$, e non risente degli effetti fluidodinamici. Con una opportuna scelta della forzante si può fare in modo che la legge oraria del centro di massa sia 1D e risponda ad una legge sinusoidale, in particolare scegliamo

$$\boldsymbol{x}_{cm}(t) = -U_{max}\frac{T}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\hat{x} \tag{4.4}$$

in cui U_{max} indica la velocità massima che il corpo raggiunge e T il periodo di oscillazione. Il fluido considerato in questo problema è quiescente, e definiamo il parametro adimensionale che descrive l'oscillazione forzata, noto come numero di Keulegan-Carpenter:

$$KC = \frac{U_{max}T}{L_\infty} \tag{4.5}$$

Il fluido è quindi completamente descritto fissando $Re = 100$ e $KC = 5$, da cui ricaviamo:

$$L_\infty = 1 \qquad U_{max} = 1 \qquad \nu = 0.01 \qquad T = 5 \tag{4.6}$$

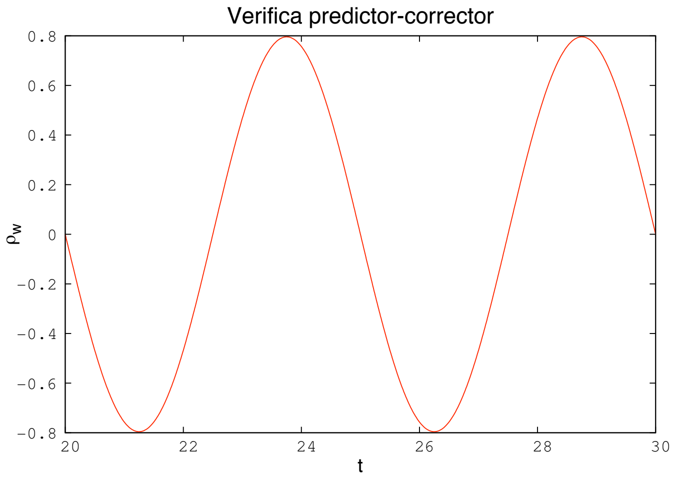
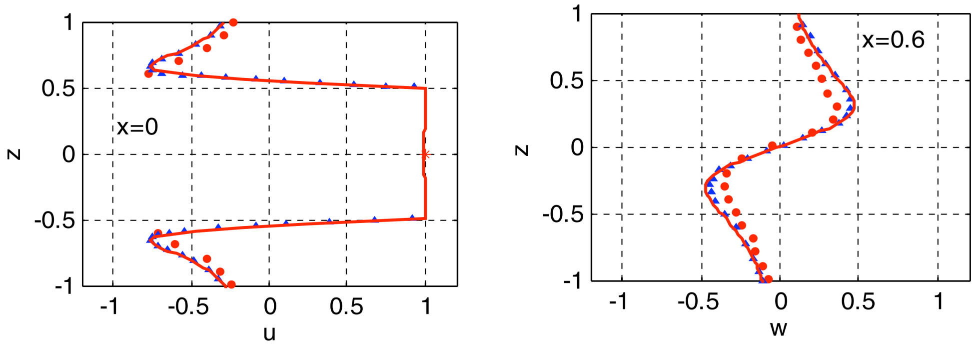


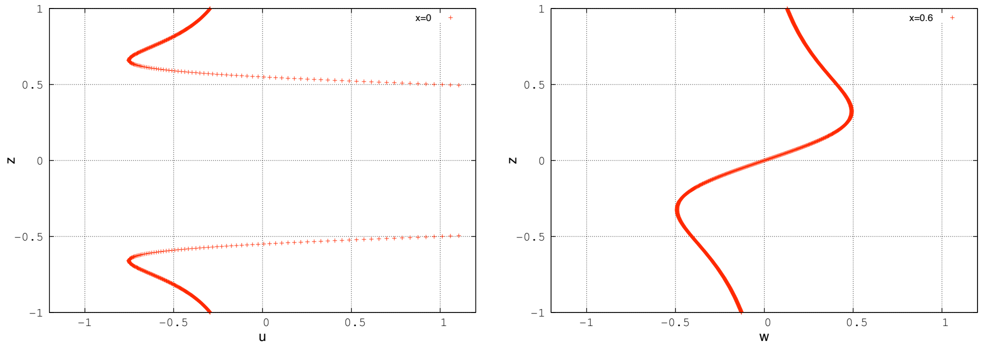
Figura 4.3: Moto armonico lungo l'asse x correttamente integrato dallo schema predictor-corrector usato.

In primo luogo dalla Figura 4.3 vediamo che il cilindro si muove di moto armonico con periodo $T = 5$ come richiesto, da cui possiamo dedurre che l'algoritmo di integrazione predictor-corrector funziona correttamente. Ad ogni modifica delle equazioni del moto (ad esempio, dopo l'aggiunta di una forza elastica o di un fattore di smorzamento), si è sempre verificato il comportamento dell'integrazione numerica in assenza di fluido, trovando sempre ottimi riscontri dal confronto con la teoria.

Per capire invece se la soluzione sulla griglia delle equazioni INS sia abbastanza precisa, facciamo riferimento a Shen *et al.* in [23], che hanno simulato con il metodo dell'*immersed boundary* un caso-studio identico a quello qui riprodotto. Riportiamo nelle Figure 4.4 e 4.5 i profili dei campi di velocità u e w lungo linee parallele all'asse z, a diversi istanti di tempo, e li paragoniamo a quelli riportati nell'articolo a cui ci riferiamo:



(a) (b)



(c) (d)

Figura 4.4: Profilo del campo di velocità u e w al tempo $t = nT + \frac{T}{2}$. (a)-(b): risultati tratti da [23]; (c)-(d): lavoro presente.

Dal confronto vediamo come i profili dei campi di velocità da noi ottenuti siano in accordo con quelli in letteratura, il che ci rende confidenti sulla bontà del codice numerico usato. Possiamo ora procedere alla modellizzazione teorica dell'*energy harvester* in considerazione ed alla verifica numerica dei risultati ottenuti.

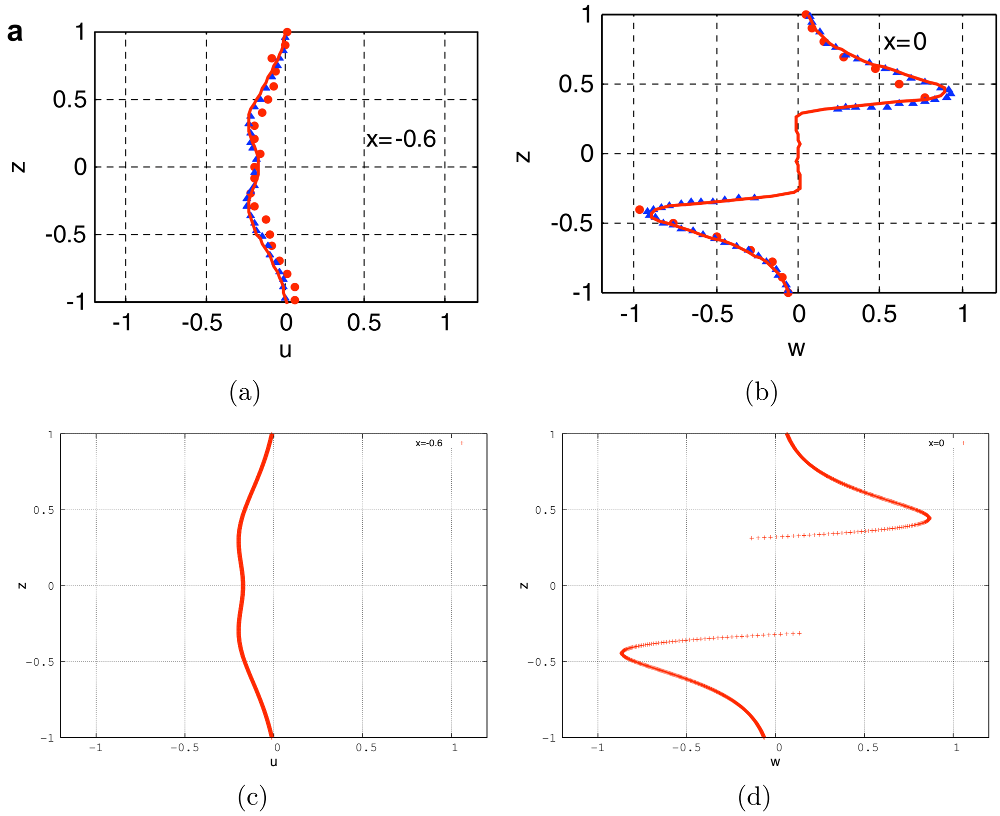


Figura 4.5: Profilo del campo di velocità u e w al tempo $t = nT + \frac{11}{12}T$. (a)-(b): risultati tratti da [23]; (c)-(d): lavoro presente.

4.2 Analisi di Stabilità con Grado di Libertà Elastico

Ciò che ci proponiamo di fare in questa sezione è di analizzare la stabilità di un sistema meccanico immerso in un fluido per grandi numeri di Reynolds e piccole perturbazioni. Supponendo l'*aspect ratio* (2.1) della struttura molto grande, è ragionevole trascurare la dimensione nella direzione della larghezza, studiando solo una sezione trasversale bidimensionale. L'obiettivo che ci proponiamo è quello di verificare l'esistenza di configurazioni in cui il moto si auto-sostiene, ed è quindi potenzialmente in grado di produrre energia [2, 3].

Il sistema che considereremo è formato da un asta rigida di massa m, lunghezza L e spessore δ, a cui è collegata una molla di costante elastica k, come mostrato in Figura 4.6.

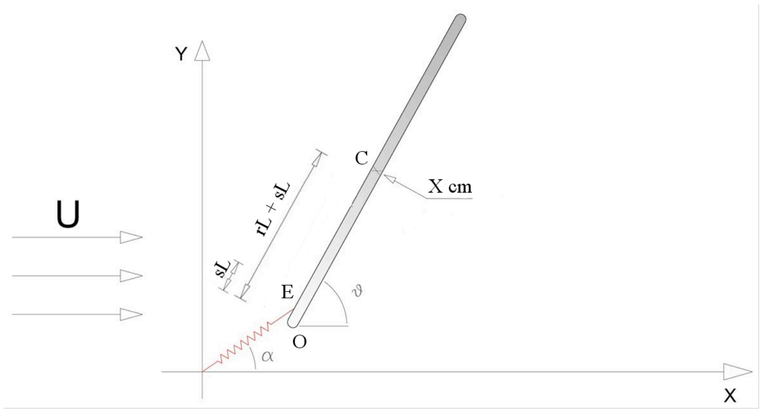


Figura 4.6: Schema del sistema meccanico considerato.

Un flusso uniforme $\boldsymbol{U} = U\hat{x}$ incide su questa struttura da sinistra verso destra. Indichiamo con $\overline{OE} = sL$ la distanza dal *leading edge* O dal punto E in cui l'elastico è fissato, con $\overline{EC} = rL$ la distanza dal punto di attacco dell'elastico al centro di massa del sistema, e siano α e ϑ gli angoli che rispettivamente la molla ed il corpo rigido formano con il semiasse positivo delle ascisse. Poiché ci aspettiamo instabilità dovute al segno dei momenti quando $\overline{OE} > \overline{OC}$, considereremo i casi in cui la molla è agganciata a sinistra del centro di massa, ovvero $0 \leq r + s \leq 1$.
Le forze agenti sul sistema saranno la forza elastica $\boldsymbol{F}^e$ e le forze di lift e drag, con i momenti ad esse associati. Nel Capitolo 2 abbiamo riportato in (2.57) e (2.58) le espressioni per le forze di lift ed i momenti fluidodinamici; per quanto riguarda il coefficiente di drag invece, è noto dalla teoria che il suo valore è ben approssimato da:

$$C_D = \frac{2.656}{\sqrt{Re}} \tag{4.7}$$

Poiché considereremo solamente grandi numeri di Reynolds, questo termine potrà essere trascurato.
La perturbazione che consideriamo consiste in un piccolo spostamento $\Delta \boldsymbol{x}_E = (x_e, y_e)$ del punto E dalla sua posizione di equilibrio, ed una rotazione ϑ del sistema. Dalla Figura 4.6 si ricavano le relazioni

$$\cos\alpha = \frac{x_e}{\sqrt{x_e^2 + y_e^2}} \qquad\qquad \sin\alpha = \frac{y_e}{\sqrt{x_e^2 + y_e^2}} \tag{4.8}$$

e la forza elastica sarà quindi data da:

$$\boldsymbol{F}^e = -k\sqrt{x_e^2 + y_e^2}\,(\cos\alpha, \sin\alpha) \tag{4.9}$$

Volendo descrivere il moto del centro di massa, sfruttiamo il limite di piccoli angoli per ricavare

$$x_e \sim x_c - rL \qquad\qquad y_e \sim y_c - rL\vartheta \tag{4.10}$$

e tenendo conto anche della forza di lift F_L e dei momenti M_L^E rispetto al punto E, le equazioni del moto sono:

$$m\ddot{x}_c = -kx_c \tag{4.11}$$

$$m\ddot{y}_c = -k\,(y_c - rL\vartheta) - F_L \tag{4.12}$$

$$\overrightarrow{EC} \times m\ddot{\boldsymbol{x}}_c\Big|_z + I_C\ddot{\vartheta} = M_L^E \tag{4.13}$$

Per semplicità di lettura riportiamo anche le espressioni esplicite per F_L e M_L^E da (2.57) e (2.58) nella notazione da noi qui usata, con la quale occorrono alcune semplificazioni:

$$\begin{aligned} F_L = \pi\rho\frac{L^2}{4}\left(\ddot{y}_c - \cancel{rL\ddot{\vartheta}} + U\dot{\vartheta} + \cancel{rL\ddot{\vartheta}}\right) + \\ +\pi\rho UL\mathcal{C}\left(\frac{\omega L}{2U}\right)\left[\dot{y}_c - \cancel{rL\dot{\vartheta}} + U\vartheta + \dot{\vartheta}\left(\cancel{rL} + \frac{L}{4}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} M_L^E = \pi\rho\frac{L^2}{4}\left[-rL\ddot{y}_c + \cancel{r^2L^2\ddot{\vartheta}} - U\dot{\vartheta}\left(rL + \frac{L}{4}\right) - \ddot{\vartheta}\left(\frac{L^2}{32} + \cancel{r^2L^2}\right)\right] + \\ +\pi\rho UL\left(\frac{L}{4} - rL\right)\mathcal{C}\left(\frac{\omega L}{2U}\right)\left[\dot{y}_c - \cancel{rL\dot{\vartheta}} + U\vartheta + \dot{\vartheta}\left(\cancel{rL} + \frac{L}{4}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.15}$$

Nel ricavare queste espressioni abbiamo usato l'approssimazione lineare (4.10), compatibile con la teoria di Theodorsen essendo anch'essa valida per piccole oscillazioni. L'ordine dominante del primo termine dell'equazione (4.13) è dato da:

$$\overrightarrow{EC} \times m\ddot{\boldsymbol{x}}_c\Big|_z = mrL\ddot{y}_c \tag{4.16}$$

Dall'analisi del sistema di equazioni (4.11)-(4.12)-(4.13) si nota che la componente x è disaccoppiata degli altri gradi li libertà, e può essere banalmente integrata predicendo il moto armonico di frequenza $\nu_x = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$; pertanto da ora in avanti tralasceremo questo grado di libertà e studieremo l'accoppiamento di quelli restanti, simile alla dinamica tipica del *pitch and plunge*, ma con l'aggiunta dell'interazione elastica.
Come di consueto, adimensionalizziamo le equazioni per y_c e ϑ per mezzo delle trasformazioni

$$t\frac{U}{L} \mapsto t \qquad \frac{y_c}{L} \mapsto y \qquad \frac{k}{\rho U^2} \mapsto k \qquad \frac{\rho_w \delta}{\rho L} \mapsto \rho_w \tag{4.17}$$

avendo indicato con ρ la densità del fluido e con ρ_w quella dell'ala. Avendo a disposizione molti parametri, si fa ancora l'assunzione che il centro di massa della struttura sia posizionato a corda mezzi, ovvero in termini adimensionali $r + s = \frac{1}{2}$. La forma adimensionale delle equazioni (4.12)-(4.13) diviene quindi:

$$\ddot{y} + \frac{4\pi\mathcal{C}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\pi + 4\rho_w}\dot{y} + \frac{4k}{\pi + 4\rho_w}y + \frac{\pi + \pi\mathcal{C}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\pi + 4\rho_w}\dot{\vartheta} + \frac{2\left(2\pi\mathcal{C}\left(\frac{\omega}{2}\right) - 2kr\right)}{\pi + 4\rho_w}\vartheta = 0 \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\vartheta} + \frac{24\pi + 96\pi r - 24\pi\mathcal{C}\left(\frac{\omega}{2}\right) + 96\pi r\mathcal{C}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{3\pi + 32\rho_w}\dot{\vartheta} + \mathcal{C}\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{384\pi r - 96\pi}{3\pi + 32\rho_w}\vartheta + \\ + \frac{384 r\rho_w + 96\pi r}{3\pi + 32\rho_w}\ddot{y} + \mathcal{C}\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{384\pi r - 96\pi}{3\pi + 32\rho_w}\dot{y} = 0\end{aligned} \tag{4.19}$$

Queste equazioni condensano gli effetti del fluido sul corpo rigido e l'interazione con il grado di libertà elastico che vogliamo analizzare. Dalla struttura delle equazioni differenziali è evidente che si tratta di un sistema di oscillatori armonici smorzati, e possiamo analizzare la stabilità dei modi normali imponendo

$$y(t) = Ye^{i\omega t} + \text{c.c.} \qquad \vartheta(t) = \Theta e^{i\omega t} + \text{c.c.} \tag{4.20}$$

dove ω, che troviamo anche nella funzione di Theodorsen, è un numero complesso, e c.c. indica il complesso coniugato. Sostituendo queste espressioni in (4.18) e (4.19) troviamo il sistema di equazioni:

$$\Theta\left[4\pi\mathcal{C}\left(\frac{\omega}{2}\right) - 4kr + i\pi\omega + i\pi\omega\mathcal{C}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right] + Y\left[4k + 4\pi i\omega\mathcal{C}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \pi\omega^2 - 4\rho_w\omega^2\right] = 0 \tag{4.21}$$

$$\Theta\left[96\left(4\pi r - \pi\right)\mathcal{C}\left(\frac{\omega}{2}\right) + 24\pi i\omega\left(1+4r\right) + 24\left(4\pi ir\omega - \pi i\omega\right)\mathcal{C}\left(\frac{\omega}{2}\right) - 32\rho_w\omega^2 - 3\pi\omega^2\right] + \\ +96Y\left[4\pi ir\omega\mathcal{C}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \pi i\omega\mathcal{C}\left(\frac{\omega}{2}\right) - 4r\rho_w\omega^2 - \pi r\omega^2\right] = 0 \tag{4.22}$$

Per avere soluzioni non banali si impone che il determinante del sistema si annulli, e si ottiene un'equazione a coefficienti complessi per ω che indichiamo con $f(\omega, \rho_w, r, k) = 0$. I parametri adimensionali rimasti sono liberi di scorrere su uno spazio dei parametri $\mathcal{S}$ sul quale rimangono fisicamente accettabili, definito da:

$$\mathcal{S} = \left\{(\rho_w, r, k) \quad : \quad \rho_w \geq 0, \quad k \geq 0, \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{2}\right\} \tag{4.23}$$

Diremo che il sistema è stabile se tutti i modi normali hanno parte immaginaria di ω positiva, mentre sarà instabile se esistono uno o più modi normali con parte immaginaria di ω negativa, poiché in questo caso l'ampiezza dell'oscillazione cresce nel tempo. Di conseguenza le curve marginali su cui si verifica la transizione da stabile ad instabile possono essere identificate cercando le soluzioni che soddisfano la condizione

$$\inf\left\{\Im\left(\omega_i\right) \quad : \quad f(\omega_i, \rho_w, r, k) = 0, \quad (\rho_w, r, k) \in \mathcal{S}\right\} = 0 \tag{4.24}$$

ovvero selezionando nello spazio dei parametri soltanto i valori per i quali, tra le soluzioni $\{\omega_i\}$ associate ce ne sia almeno una con parte immaginaria nulla e tutte le altre con parte immaginaria positiva. L'insieme dei parametri individuati con questo criterio traccia una superficie nello spazio $\mathcal{S}$ che delimita le regioni stabili da quelle instabili.

Nell'approssimazione quasi statica la ricerca delle curve marginali risulta essere particolarmente semplice. Sfruttando la condizione (2.59) il sistema di equazioni (4.22) e (4.23) si semplifica ed otteniamo:

$$\ddot{y} + \frac{4\pi}{\pi + 4\rho_w}\dot{y} + \frac{4k}{\pi + 4\rho_w}y + \frac{2\pi}{\pi + 4\rho_w}\dot{\vartheta} + \frac{2\,(2\pi - 2kr)}{\pi + 4\rho_w}\vartheta = 0 \tag{4.25}$$

$$\ddot{\vartheta} + \frac{192\pi r}{3\pi + 32\rho_w}\dot{\vartheta} + \frac{384\pi r - 96\pi}{3\pi + 32\rho_w}\vartheta + \frac{384 r\rho_w + 96\pi r}{3\pi + 32\rho_w}\ddot{y} + \frac{384\pi r - 96\pi}{3\pi + 32\rho_w}\dot{y} = 0 \tag{4.26}$$

L'equazione del determinante è quindi un polinomio di quarto grado a coefficienti complessi, il quale può essere facilmente separato in due equazioni rispettivamente per la parte reale ed immaginaria. Cercando soluzioni reali in ω ci riduciamo a dover risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \omega^4\left(3\pi^2 + 44\pi\rho_w + 128\rho_w^2\right) + 384k\pi\,(4r-1) + \\ -4\omega^2\left(3\pi k + 24\pi^2 + 96\pi k r^2 + 32k\rho_w + 384kr^2\rho_w - 96\pi\rho_w\right) = 0 \\ \\ -4\pi\omega^3\,(3\pi + 32\rho_w) + 384\pi k r\omega\,(1+4r) = 0 \end{cases} \tag{4.27}$$

Avendo vincolato $\omega = \omega_{\Re}$ ad essere reale il sistema ci permette non solo di trovare la pulsazione, ma anche una relazione tra i coefficienti ρ_w, r, k. Fortunatamente, la struttura delle equazioni permette di risolvere analiticamente il sistema e trovare le espressioni esplicite per $\omega_{\Re}$ e $\rho_w^{\omega_{\Re}}$ in funzione degli altri parametri. In particolare troviamo che

$$\omega_{\Re} = \sqrt{\frac{6rk\,(4r+1)}{32\rho_w^{\omega_{\Re}} + 3\pi}} \tag{4.28}$$

e

$$\rho_w^{\omega_{\Re}} = \frac{3\pi}{32}\frac{(32\pi - 4k)\,r^2 + (4\pi + k)\,r + \pi - 32r^3k}{12r^3k + (12\pi - k)\,r^2 + (7\pi - k)\,r - \pi} \tag{4.29}$$

Dall'analisi dell'equazione per la densità marginale possiamo ricavare i limiti asintotici delle curve di stabilità: in particolare per $k \to 0$ troviamo che esiste una densità limite marginale data da:

$$\rho_w^{(as)}(r) = \frac{3\pi(1 + 4r + 32r^2)}{32(23r^2 + 7r - 1)} \tag{4.30}$$

Trattandosi di una densità, l'asintoto orizzontale esiste solo quando la (4.30) è positiva, ossia per $r > \frac{\sqrt{97}-7}{24}$. Sezionando lo spazio dei parametri $\mathcal{S}$ con

piani ad r costante, questa equazione ci fornisce l'asintoto orizzontale delle curve marginali nel piano $1/k$-ρ_w.
In questo stesso piano si ha anche un asintoto verticale per k quando:

$$k^{(as)}(r) = \frac{\pi - 7\pi r - 12\pi r^2}{r(12r^2 - r - 1)} \tag{4.31}$$

Dovendo essere $k^{(as)}$ positivo, si ha questo limite solo per $\frac{\sqrt{97}-7}{24} < r < \frac{1}{3}$.

Inoltre per $r = 0.25$ troviamo che esiste sempre una soluzione con $\Im(\omega) = 0$, mentre nel caso in cui $r < 0.25$ esiste sempre una soluzione con parte immaginaria negativa. Questo significa che nel primo caso le zone di stabilità diventano zone di quiescenza, in cui cioè il moto non si smorza né si amplifica, mentre nel secondo caso non esistono regioni stabili, e di conseguenza le curve trovate con la (4.29) delimitano regioni con diversi tipi di instabilità. Questo risultato è in accordo con la (2.31): infatti ad $r = 0.25$ ci troviamo a corda quarti, dove è situato il centro di pressione dell'ala, ossia il punto rispetto a cui il momento fluidodinamico (ed anche quello elastico, essendo la molla vincolata proprio in r) si annulla. Muovendosi intorno ad esso il segno dei momenti cambia, provocando situazioni di instabilità perenne come trovato.
Per comprendere meglio i risultati consideriamo differenti valori di r e riportiamo i grafici ottenuti con la (4.29) nelle Figure 4.7 e 4.8.

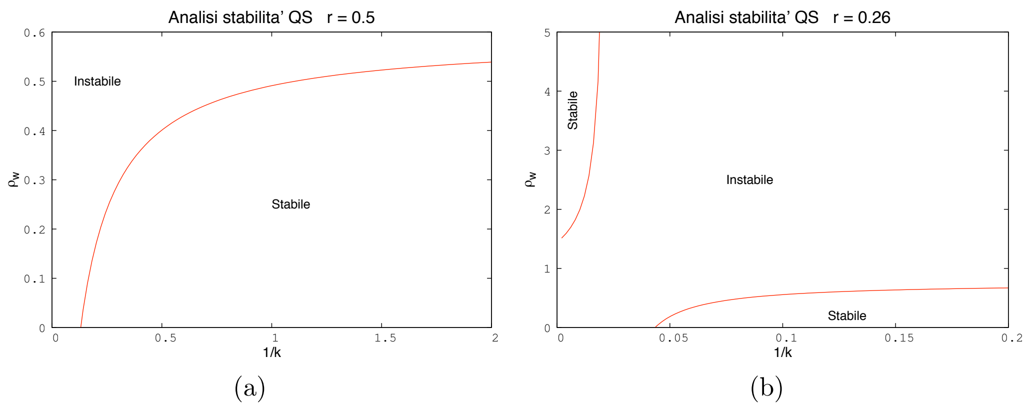
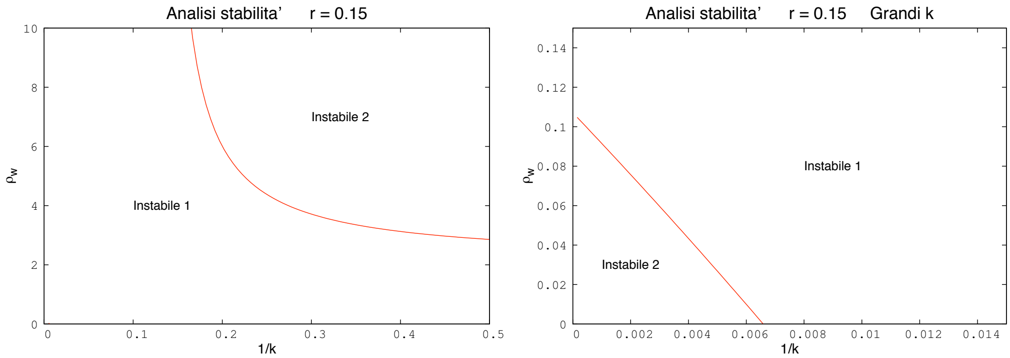


Figura 4.7: Curve marginali per la stabilità del sistema. (a): $r = 0.5$; (b): $r = 0.26$.



(a) (b)

Figura 4.8: Curve marginali per le instabilità del sistema a $r = 0.15$. (a): Visione d'insieme; (b): dettaglio a grandi k.

Osserviamo come la struttura delle regioni di stabilità dipenda fortemente dal parametro r: quando $r > \frac{1}{3}$ esiste una sola curva limite che separa lo spazio dei parametri in una regione stabile ed una instabile; per $\frac{1}{4} < r < \frac{1}{3}$ troviamo invece due regioni di stabilità completamente disconnesse ed infine per $r < \frac{1}{4}$ troviamo solo regioni di instabilità. Nella prossima sezione confronteremo questi risultati con quelli che otterremo considerando il caso non stazionario.

4.3 Effetto della Scia e Verifiche Numeriche

I risultati analitici ottenuti nella sezione precedenti sono validi soltanto nel limite in cui le frequenze di oscillazione del sistema siano estremamente piccole e la funzione di Theodorsen $\mathcal{C}\left(\frac{\omega}{2}\right) \to 1$. Per generalizzare la soluzione, terremo ora in considerazione anche gli effetti della scia di vortici, con lo scopo di capire quanto questa influenzi la struttura delle curve marginali nello spazio dei parametri.

Ripartendo dalle equazioni (4.21) (4.22) ci si accorge subito che la ricerca delle soluzioni è ora non banale, poiché nell'equazione per il determinante ω si inserisce anche nelle definizioni implicite delle funzioni di Bessel (2.56), e il problema non è risolvibile analiticamente. Si ricorre quindi all'uso di tecniche numeriche standard di ricerca degli zeri (metodo di Newton-Raphson) dell'equazione caratteristica non stazionaria, accompagnate dalla condizione di marginalità (4.24). In questo modo riusciamo a trovare con ottima approssimazione le marginali nello spazio $\mathcal{S}$.

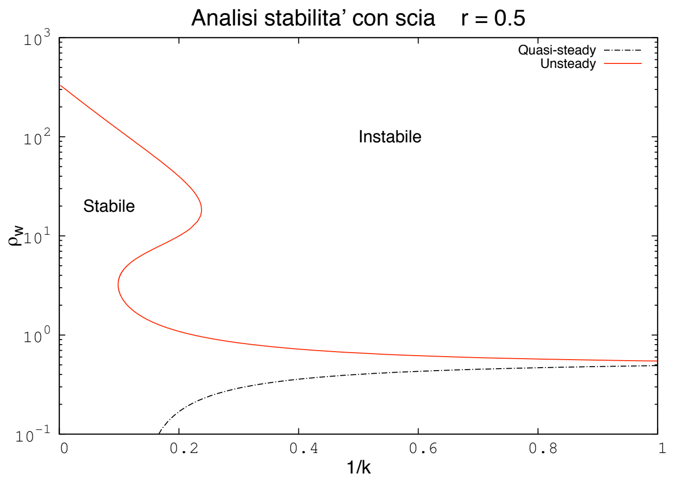


Figura 4.9: Curve marginali per la stabilità del sistema ad $r = 0.5$ con e senza l'effetto della scia di vortici.

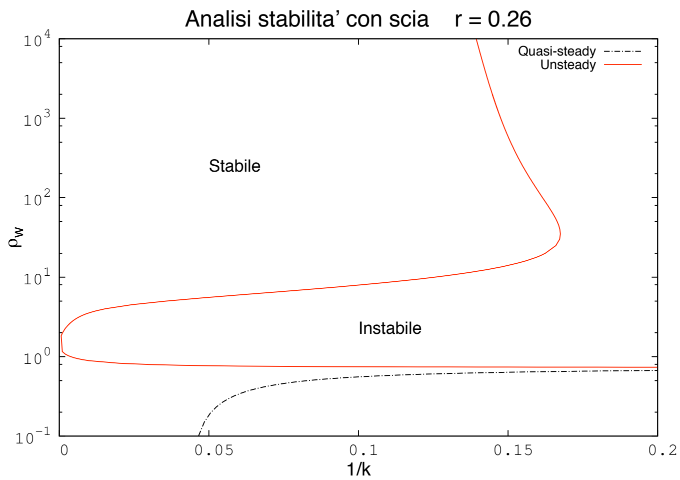
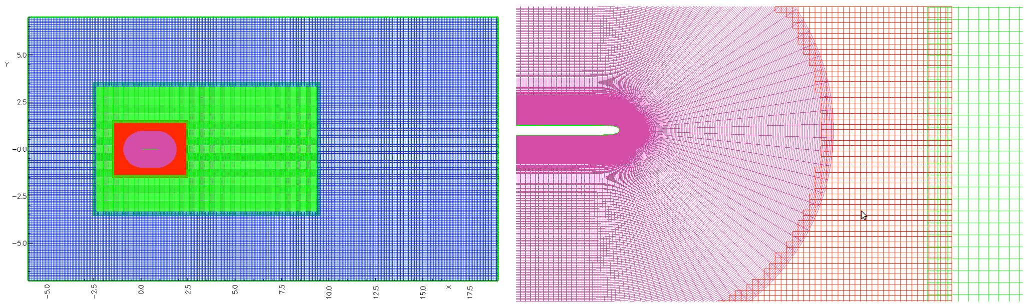


Figura 4.10: Curve marginali per la stabilità del sistema ad $r = 0.26$ con e senza l'effetto della scia di vortici.

Riferendoci ai casi $r = 0.5$ e $r = 0.26$ che abbiamo affrontato anche nella sezione precedente, riportiamo le curve marginali ottenute nelle Figure 4.9 e 4.10.

Vediamo come il contributo della scia modifichi radicalmente le zone di stabilità laddove il parametro k è grande, mentre il limite asintotico $k \to 0$, che corrisponde a considerare basse frequenze, tende all'approssimazione quasi statica. In generale, nel caso non stazionario la struttura delle curve marginali è molto più complessa: fissando k ed r e variando solo il parametro ρ_w troviamo che possono esistere sino a tre transizioni tra i regimi stabile ed instabile.



(a) (b)

Figura 4.11: Discretizzazione dello spazio fisico. (a): Dominio completo; (b): Particolare sul *trailing edge*.

Per validare questi risultati, è stata effettuata una serie di simulazioni numeriche al variare dei parametri ρ_w e k. Lavorando in unità adimensionali, fissiamo il numero di Reynolds $Re \geq 10^4$ e $r = 0.5$, il che coincide a considerare il caso in cui il centro di massa è al centro dell'ala e l'elastico è agganciato al *leading edge*. Per definire il problema fissiamo i parametri

$$\rho = 1 \qquad \nu \leq 10^{-4} \qquad U = 1 \qquad L = 1 \qquad \delta = 0.05 \tag{4.32}$$

ovvero rispettivamente la densità e la viscosità del fluido, il vento incidente, la lunghezza e lo spessore dell'ala, e facciamo variare i parametri ρ_w e $\varepsilon = \frac{1}{k}$ rispettando le definizioni date in (4.17).
Imponiamo poi una piccola perturbazione dalla posizione di equilibrio raggiunta dall'ala e procediamo all'integrazione numerica. In Figura 4.11 mostriamo la griglia computazionale sulla quale sono state risolte le equazioni INS, e in Tabella 4.2 i valori di costante elastica e densità dell'ala usati nelle simulazioni.

ρ_w \ ε	0.02	0.05	0.15	0.1	0.2	0.25	0.3	0.35	0.36	0.6
1			st	st			inst			inst
3			?							
3.5	st					inst	inst	inst		
20				st					inst	
200					inst					
400		inst								

Tabella 4.2: Simulazioni numeriche a $Re \geq 10000$ e $r = 0.5$

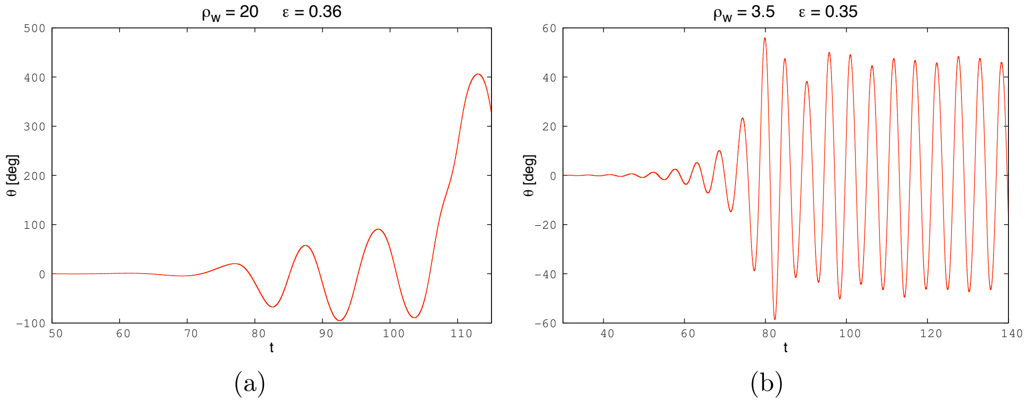


Figura 4.12: Regimi di evoluzione angolare. (a): Forte instabilità, il sistema ruota; (b): L'instabilià satura.

Nei casi instabili le simulazioni ci danno anche informazioni sul comportamento in regime non lineare, non descritto dal modello teorico. Riusciamo a differenziare due tipi di instabilità: come vediamo dalla Figura 4.12 esistono regimi in cui a grandi angoli si ha una saturazione delle forze e l'oscillazione si stabilizza ad una certa ampiezza, altri in cui invece non si ha bilancio delle forze ed il sistema comincia a ruotare su se stesso. In entrambi i casi si parla di instabilità di tipo supercritico, poiché piccole perturbazioni inducono grandi ampiezze di oscillazione.

Nei casi stabili invece ci possiamo interrogare sul comportamento dell'ala quando viene imposta una perturbazione finita. In questa direzione è stata effettuata una sola simulazione con i parametri $\rho_w = 20$ e $k = 10$, ruotando il profilo di 90 gradi rispetto alla direzione di incidenza del vento.

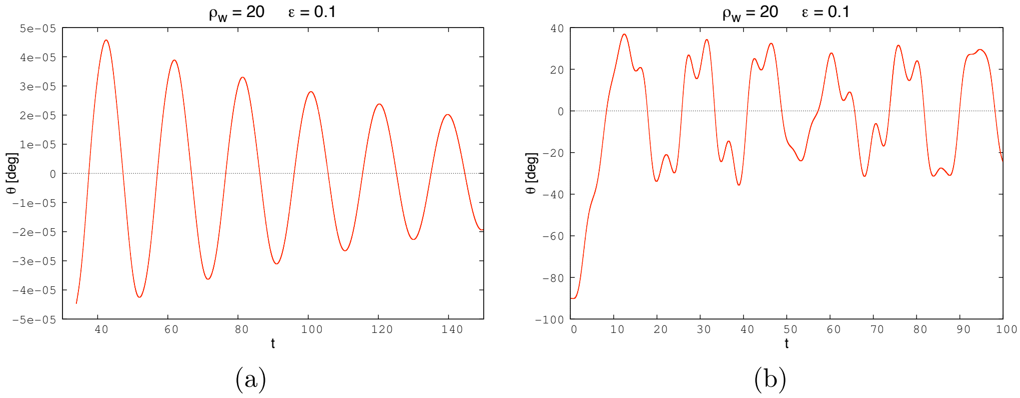


Figura 4.13: Evoluzione angolare del sistema con $\rho_w = 20$ e $k = 10$. (a): piccola perturbazione, dopo poche oscillazioni è evidente la tendenza alla stabilizzazione; (b): perturbazione finita, l'instabilità persiste nel tempo.

In Figura 4.13(b) è riportata l'evoluzione del grado di libertà angolare nel tempo in seguito ad una perturbazione finita. A differenza dei risultati ottenuti con piccole perturbazioni mostrati in Figura 4.13(a), in cui dopo poche oscillazioni il sistema si stabilizza, in questo caso le oscillazioni si prolungano nel tempo e si tratta di un sistema subcritico. Tuttavia la mancanza di periodicità del moto non ci permette di poter stabilire con certezza se l'instabilità perdurerà indefinitamente o se al contrario si smorzerà lentamente. Sono attualmente in corso simulazioni per chiarire questo aspetto.

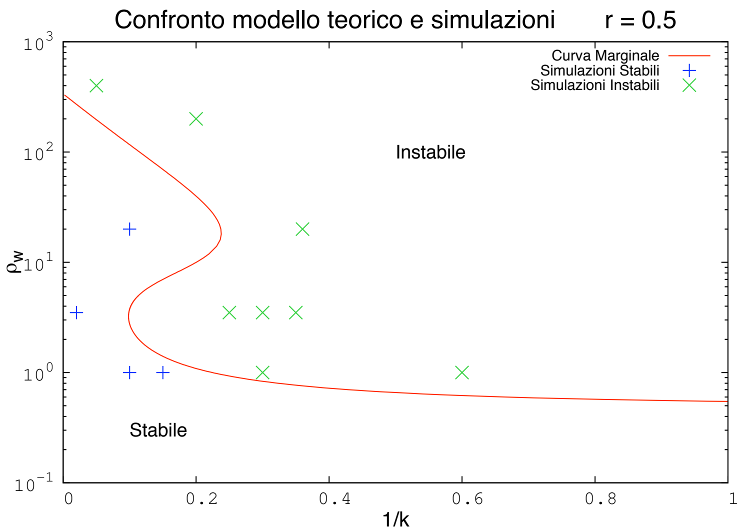


Figura 4.14: Accordo tra risultati teorici e simulazioni numeriche.

Per concludere questa sezione, mostriamo in Figura 4.14 il confronto tra la curva teorica ottenuta tenendo conto dell'effetto della scia ed i risultati delle simulazioni effettuate.

A livello computazionale risulta difficile andare ad analizzare la regione a basse densità: per $\rho_w < 1$ le masse in gioco sono molto piccole e di conseguenza le forze sul sistema tendono ad essere estremamente grandi, provocando problemi di calcolo. Eccezion fatta per questo caso, la Figura 4.14 mostra l'ottimo accordo tra i calcoli numerici e la curva marginale teorica.

4.4 Vincolo Rigido

Un limite interessante della struttura descritta all'inizio della sezione precedente si trova quando la forza elastica è sostituita da un vincolo rigido lungo z come mostrato in Figura 4.15.

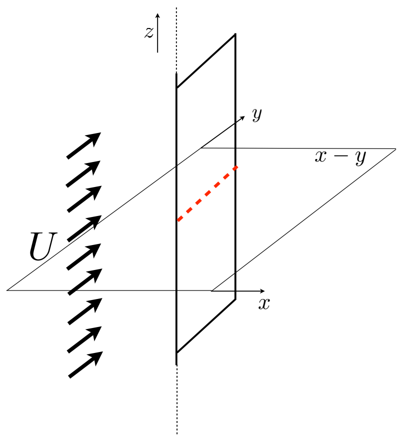


Figura 4.15: Sistema rigido. Supponendo un *aspect ratio* molto grande ci limitiamo a studiare il moto nel piano x-y.

Il numero di gradi di libertà è ora ridotto ad uno, quello angolare, e considereremo il caso in cui il vincolo rigido è applicato al *leading edge*, ossia $r = \frac{1}{2}$. Il nostro obiettivo è quello di investigare sotto quali aspetti puramente fluidodinamici l'instabilità possa occorrere.

I parametri che faremo variare per studiare il comportamento della struttura sono il vento incidente U, la lunghezza e la densità dell'ala L e ρ_w, che possiamo ricondurre ai seguenti numeri adimensionali:

$$Re = \frac{UL}{\nu} \qquad \frac{\rho_w \delta}{\rho L} \mapsto \rho_w \qquad t\frac{U}{L} \mapsto t$$

Nell'affrontare questo problema scegliamo di usare perturbazioni finite, e ci limitiamo a simulare numericamente la dinamica e a darne a posteriori un'interpretazione fenomenologica.

Nella prima serie di simulazioni abbiamo studiato il moto fissando il valore di U, e facendo variare la lunghezza dell'asta. I risultati sono mostrati in Figura 4.16 e in Tabella 4.3 riportiamo i parametri dimensionali fissati in queste simulazioni.

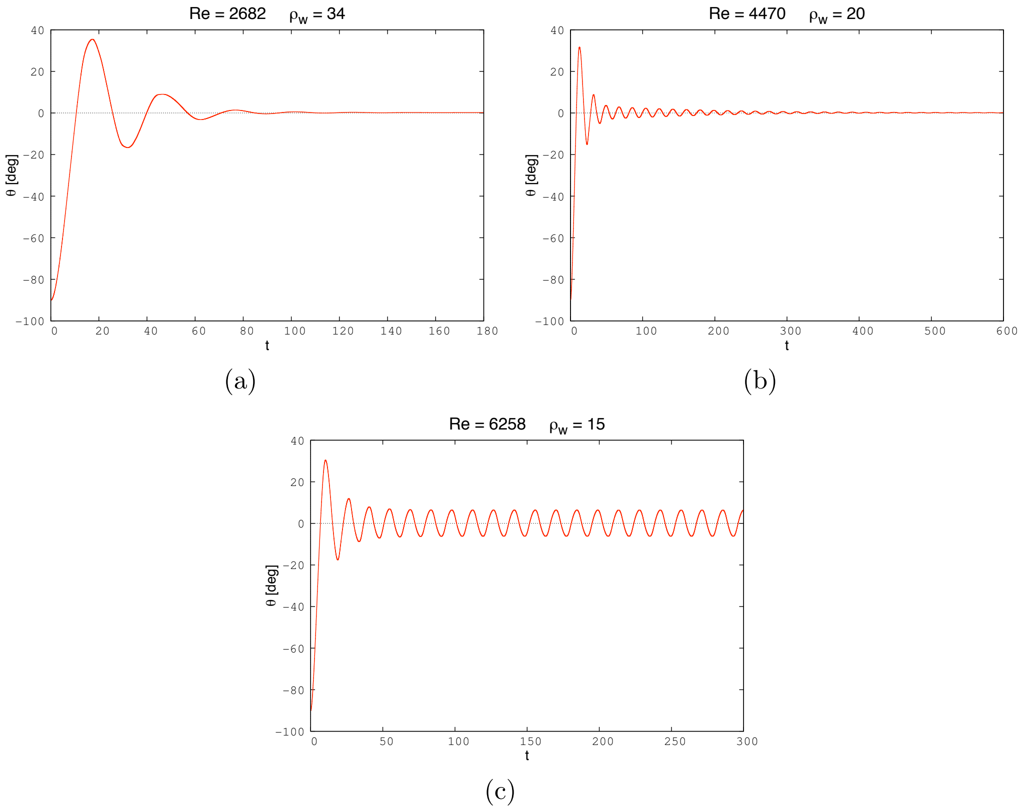


Figura 4.16: Evoluzione temporale dell'angolo tra l'asse y e l'ala al variare dei parametri adimensionali. Il vento incidente è uniforme e pari a $2.7 m/s$.

Velocità incidente	$2.7\,m/s$
Viscosità cinematica	$1.51 \times 10^{-5}\,m^2/s$
Densità fluido 2D	$0.0792\,kg/m^2$
Estensione del dominio lungo x	$0.8\,m$
Estensione del dominio lungo y	$1.6\,m$
Spessore ala	$0.002\,m$

Tabella 4.3: Parametri in unità SI usati per le simulazioni senza gravità in aria.

Vediamo che esiste una condizione di criticità sotto la quale l'ala si comporta come un segnavento, allineandosi infatti con la direzione del vento incidente. Al di sopra di questa invece il moto si smorza fino ad un angolo critico, dopodiché l'oscillazione diventa periodica e si auto-sostiene. Per comprendere meglio questo fenomeno, fissiamo anche il numero di Reynolds e facciamo variare soltanto la densità dell'ala.

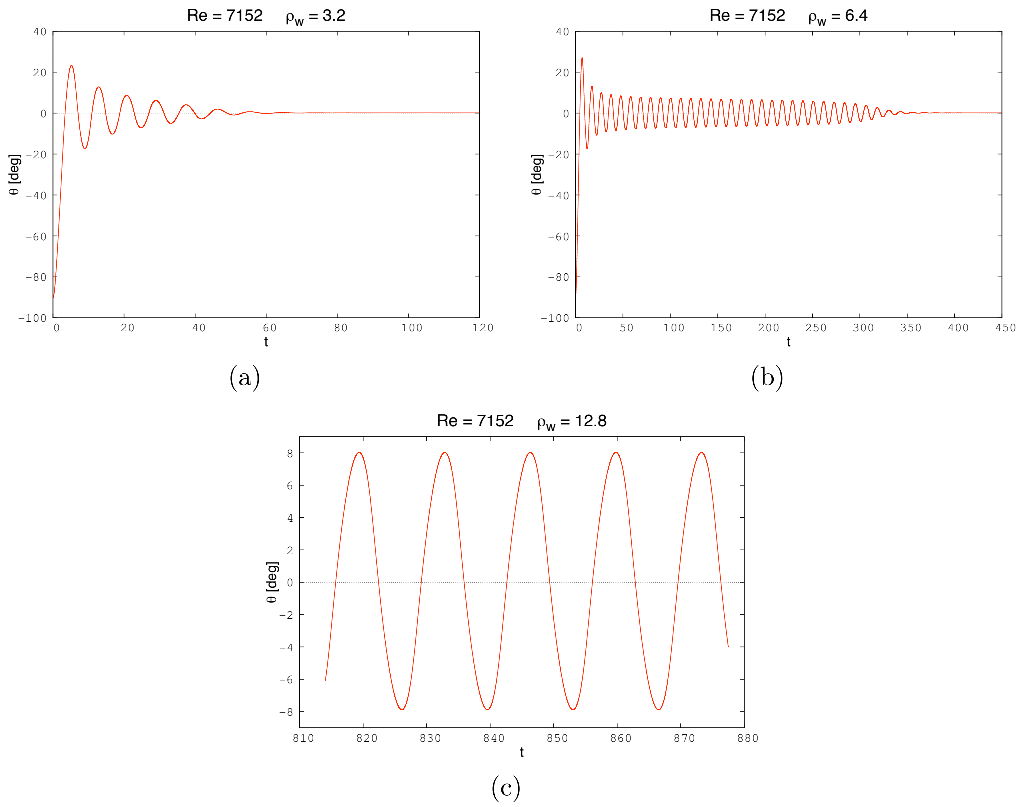


Figura 4.17: Evoluzione temporale dell'angolo tra l'asse y e l'ala al variare della densità. Il vento incidente è uniforme e pari a $2.7m/s$ e $Re = 7152$.

Dalla Figura 4.17(c) osserviamo che deve esistere una densità critica sopra la quale l'ala non raggiunge l'equilibrio ma oscilla senza smorzamento.
Questa fenomenologia appare molto simile a quella trovata da Zhang *et al.* in esperimenti sulle oscillazioni di un filamento elastico in un film di sapone [26], con la differenza che nel nostro caso la struttura è rigida, e che non si è tenuto conto degli effetti dovuti alla gravità, che sono bilanciati dal sistema di ancoraggio (vedi Figura 4.15).
Volendo considerare anche gli effetti della gravità, possiamo ruotare la struttura in modo che il vincolo rigido sia allineato lungo x, e studiare il moto nel

piano y-z. Avremo quindi un'ulteriore quantità adimensionale da considerare, ossia il numero di Froude

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}} \tag{4.33}$$

e scegliamo i parametri dimensionali con cui riscalare le grandezze fisiche facendo riferimento ai valori sperimentali riportati da Zhu e Peskin in [28], che riassumiamo nella Tabella 4.4

Velocità incidente	$2.0\,m/s$
Viscosità cinematica	$4 \times 10^{-6}\,m^2/s$
Densità fluido 2D	$0.003\,kg/m^2$
Estensione del dominio lungo z	$0.85\,m$
Estensione del dominio lungo y	$1.6\,m$
Spessore ala	$0.001\,m$
Accelerazione di gravità	$9.8\ m/s^2$

Tabella 4.4: Parametri in unità SI usati per le simulazioni con gravità in un film di sapone.

Si vogliono ora discutere semplici considerazioni sulla base delle quali proveremo a capire quale ruolo gioca la scelta dei parametri sulla stabilità del filamento rigido in presenza di gravità. Supponendo di trattare un fluido irrotazionale la forza di lift è data da:

$$F_l = \frac{1}{2}\rho U^2 L C_l \qquad\qquad C_l = 2\pi\theta \tag{4.34}$$

Quindi per piccoli angoli possiamo stimare il momento M_l^O indotto da questa forza rispetto al punto di attacco O, ovvero

$$M_l^O = bF_l = \frac{L}{4}\frac{1}{2}\rho U^2 L 2\pi\theta \tag{4.35}$$

avendo supposto il braccio efficace b su cui la forza fluidodinamica agisce pari a $\frac{L}{4}$. Trascurando la spinta di Archimede ed i contributi di massa aggiunta (ipotesi valide nel limite in cui la densità del filamento rigido è grande a sufficienza), l'equazione del moto a piccoli angoli per effetto del fluido e della gravità è:

$$\ddot{\vartheta} + \Omega^2\vartheta = 0 \tag{4.36}$$

Ricordando che il momento di inerzia rispetto a un estremo di un asta rigida è pari a $I_O = \frac{1}{3}ML^2$ troviamo che la pulsazione di oscillazione è data

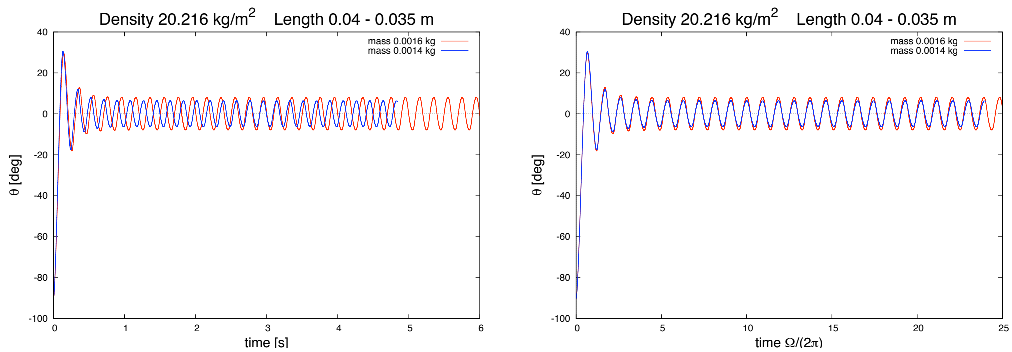
$$\Omega = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L} + \pi\rho\frac{3}{4}\frac{U^2}{M}} \tag{4.37}$$

essendo $M = \rho_w \delta L$ la massa del filamento. Vi sono quindi due regimi limite che possono essere trovati, in base a quanto la gravità influisce sul fluido:

$$Mg \gg \frac{\pi}{2}\rho U^2 L \qquad \Rightarrow \qquad \Omega = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L}} \tag{4.38}$$

$$Mg \ll \frac{\pi}{2}\rho U^2 L \qquad \Rightarrow \qquad \Omega = \frac{U}{\sqrt{M}}\sqrt{\frac{3}{4}\pi\rho} \tag{4.39}$$

Una verifica della (4.39) si può trovare riscalando i periodi di due simulazioni in assenza di gravità di un fattore $\frac{2\pi}{\Omega}$ come mostrato in Figura 4.18.



(a) (b)

Figura 4.18: Riscalaggio temporale del periodo di oscillazione tra le simulazioni con parametri $Re = 7152$, $\rho_w = 12.8$ e $Re = 6258$, $\rho_w = 15$. Dopo il riscalaggio (b) i periodi coincidono

Il fatto che i due periodi dopo il riscalaggio collassino ad un unico periodo unitario è la controprova della (4.39).

Resta da capire sotto quali condizioni dei parametri il moto dell'ala si autosostiene. Possiamo immaginare che questa condizione si raggiunge quando il periodo naturale di oscillazione $\frac{2\pi}{\Omega}$ si sincronizza con il tempo che intercorre

tra la creazione e il distacco di un vortice dall'ala: questo corrisponde ad una condizione di risonanza tra la frequenza naturale ed una forza esterna data dai vortici.
Il tempo caratteristico indotto dal distacco dei vortici può essere stimato a partire dal numero di Strouhal che soddisfa generalmente la condizione $St < 1$ ed è dato da $\frac{L}{USt}$, da cui otteniamo il bilancio tra il quadrato dei tempi

$$\frac{L^2}{U^2St^2} = \frac{(2\pi)^2}{\frac{3}{2}\frac{g}{L} + \pi\rho\frac{3}{4}\frac{U^2}{M}} \tag{4.40}$$

da cui possiamo ricavare una condizione di criticità, ad esempio, sulla massa:

$$M_{crit} = \frac{\frac{3}{4}\pi\rho U^2 L^2}{(2\pi)^2 U^2 St^2 - \frac{3}{2}gL} \tag{4.41}$$

Dovendo essere la massa positiva troviamo una condizione sui parametri che deve essere soddisfatta affinché la risonanza possa avere luogo, ossia

$$U^2 > \frac{3gL}{8\pi^2 St^2} > \frac{3gL}{8\pi^2} \tag{4.42}$$

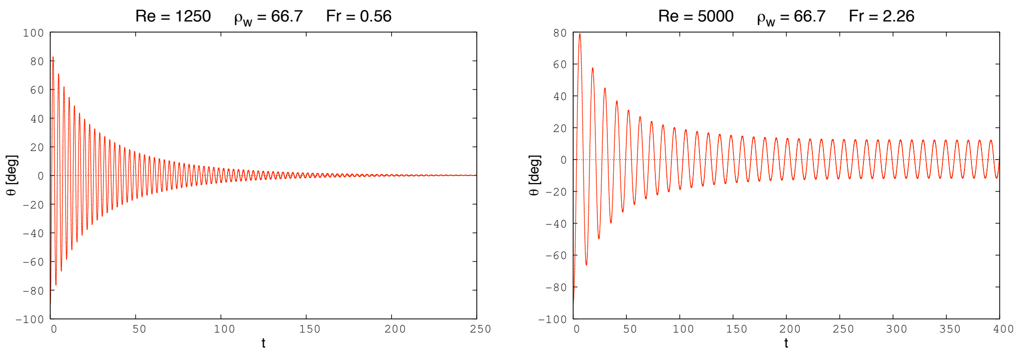
avendo usato $St < 1$ nel secondo passaggio. Questa condizione può essere riscritta in termini adimensionali come:

$$StFr > \sqrt{\frac{3}{8\pi^2}} \tag{4.43}$$

Fissata quindi la lunghezza dell'ala, esiste un vento critico sotto al quale ci aspettiamo che il filamento si allinei con il vento, non potendo verificarsi la sincronizzazione dei tempi caratteristici del sistema; al contrario se la velocità del flusso incidente è abbastanza grande.

Per validare questi risultati sono state effettuate delle simulazioni integrando il solo grado di libertà angolare dell'asta rigida, usando l'equazione dei momenti fluidodinamici (3.23) ed i parametri in Tabella 4.4. Fissando la massa del filamento e variando la velocità del flusso incidente, otteniamo i risultati mostrati in Figura 4.19.

In accordo con il modello teorico, ed in particolare con l'equazione (4.42) le simulazioni confermano l'esistenza di un valore critico della velocità incidente sopra al quale il moto si auto-sostiene. Inoltre, possiamo studiare come



(a) (b)

Figura 4.19: Evoluzione angolare del filamento rigido a $\rho_w = 66.7$. (a): $U = 0.25$, il filamento si allinea con il vento; (b): $U = 1$, l'oscillazione perdura nel tempo.

l'ampiezza di oscillazione scali con la velocità del flusso incidente al di sopra di questo valore critico:

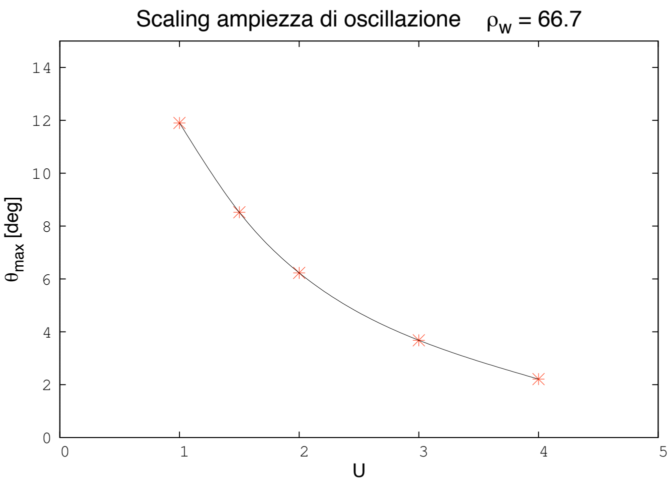


Figura 4.20: Ampiezza di oscillazione in regime periodico in funzione della velocità del flusso incidente.

Come riportato in Figura 4.20, l'ampiezza di oscillazione decade al crescere della velocità del flusso incidente, e ci aspettiamo quindi che abbia il suo massimo in corrispondenza del vento critico; le simulazioni effettuate non hanno permesso di stabilire con precisione a quale valore questo si trovi, ma possiamo stabilire un intervallo di valori entro i quali deve essere compreso, ossia:

$$0.75 < U_{cri} < 1 \tag{4.44}$$

In conclusione, abbiamo verificato che le instabilità trovate, al di sopra di un angolo iniziale critico ϑ_0^{cri}, non dipendono dalla perturbazione angolare imposta al sistema.

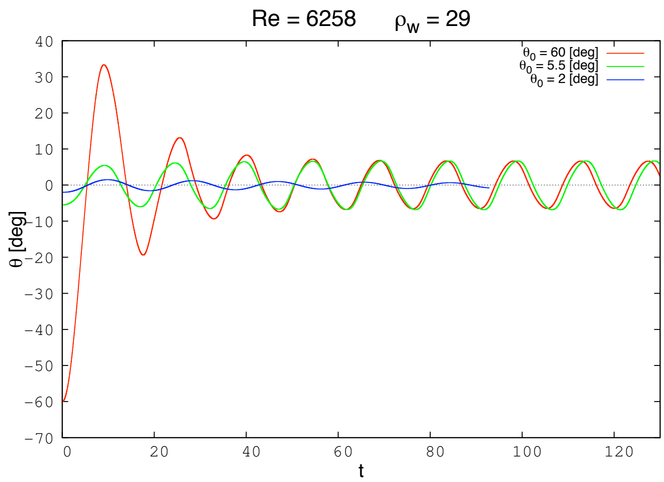


Figura 4.21: Evoluzione del grado di libertà angolare.

Dalla Figura 4.21 osserviamo che a parità di parametri e variando solo l'angolo di incidenza iniziale, otteniamo condizioni di instabilità fino a quando $\vartheta_0 > 5.5°$, al contrario per $\vartheta_0 < 2°$ il sistema tende a stabilizzarsi; l'angolo critico ϑ_0^{cri} è dunque compreso tra questi due valori. Il caso con $\vartheta_0 = 5.5°$ è particolarmente interessante, poiché mostra che l'ampiezza dell'instabilità tende ad un valore comune a tutti i casi non stabili, ed è maggiore dell'angolo iniziale critico, sottolineando il carattere subcritico del fenomeno.

4.5 Confronto con i Dati Sperimentali in Galleria del Vento

In quest'ultima sezione riportiamo le caratteristiche dell'apparato utilizzabile come *energy harvester* usato per gli esperimenti in galleria del vento, mostrato in Figura 4.22.

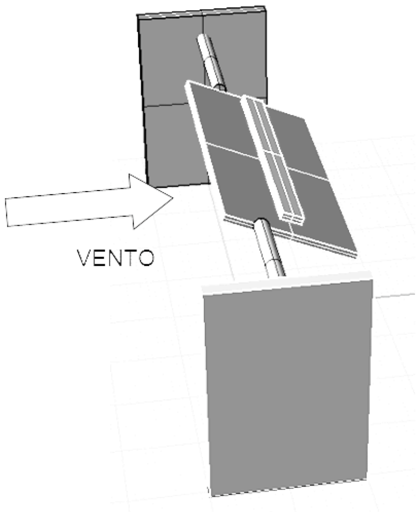


Figura 4.22: Geometria dell'*energy harvester*.

Il dispositivo consiste in un'ala rigida di corda $L = 4\ cm$, larghezza $s = 6.6\ cm$ e spessore $\delta = 2\ mm$, avente massa $m = 0.34\ g$. Una massa mobile $m_{mob} = 1.7\ g$ può essere aggiunta all'ala in modo da regolare la posizione del centro di massa, e due elastometri dielettrici fissano in modo simmetrico l'ala ad un supporto rigido. L'idea è quella di estrarre l'energia che gli elastometri producono quando si deformano muovendosi in modo solidale all'ala sotto l'effetto delle forze fluidodinamiche.
La forza di richiamo a cui risponde ciascun elastometro è non armonica ma di tipo entropico, ed è data da

$$\boldsymbol{F}^{(el)} = -\frac{k}{L_0}\left[1 - \left(\frac{L_0}{\sqrt{L_1^2 + x_a^2 + y_a^2}}\right)^3\right](x_a\hat{\boldsymbol{x}} + y_a\hat{\boldsymbol{y}}) \tag{4.45}$$

essendo k la forza per unità di lunghezza esercitata dall'elastometro, L_0 ed L_1 parametri detti di *pre-stretching* che sono regolabili con la geometria ed (x_a, y_a) le coordinate del punto di attacco dell'elastico rispetto alla posizione di riposo. Negli esperimenti condotti dal Prof. Corrado Boragno in galleria del vento si sono scelti elastometri con $k = 0.29\ N$, $L_0 = 6.6\ cm$, $L_1 = 8.7\ cm$, ed un flusso di aria incidente con velocità $U = 4.1\ m/s$. I risultati ottenuti al variare della posizione del centro di massa e del punto di attacco degli elastometri sono riassunti in Figura 4.23, che mostra la traiettoria seguita dal centro di massa caso per caso.

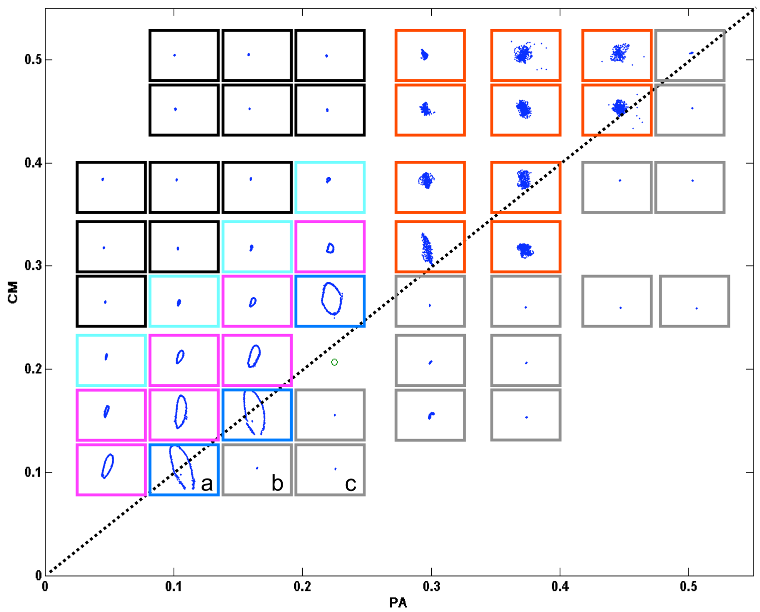


Figura 4.23: Moto del centro di massa dell'ala al variare della posizione del centro di massa e del punto di attacco dell'elastico, espressi in percentuale rispetto alla lunghezza della corda.

La dinamica risulta essere estremamente ricca e differenziata, i vari regimi sono stati evidenziati con colori differenti.

Sono state effettuate alcune simulazioni numeriche per cercare di riprodurre ed eventualmente ampliare questi risultati. L'accordo tra simulazioni ed esperimento è solo parziale. Riferendoci al caso in cui sia il centro di massa che il punto di attacco degli elastometri si trovino al 15% della corda, riportiamo nelle Figure 4.24 il confronto tra gli esperimenti in galleria del vento e le simulazioni numeriche da noi condotte.

Sebbene la frequenza e l'ampiezza di oscillazione siano compatibili con quelle sperimentali, così non possiamo dire per il moto del centro di massa ed i momenti agenti sul sistema. Siamo però in grado di spiegare le discrepan-

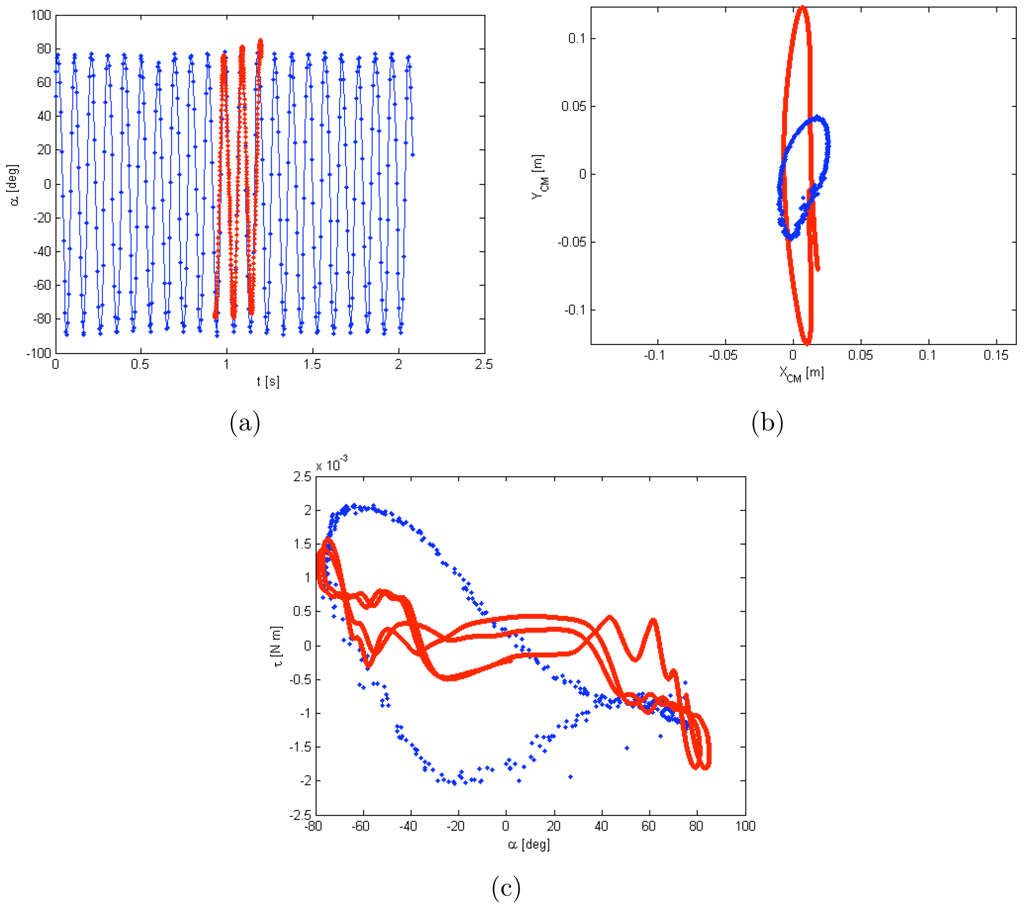


Figura 4.24: Confronto tra esperimento (blu) e simulazioni numeriche (rosso). (a): accordo sulla frequenza di oscillazione. (b)-(c): discrepanze sulla traiettoria del centro di massa ed i momenti agenti sul sistema.

ze trovate facendo un passo indietro e riconsiderando la geometria studiata: l'*aspect ratio*, ossia il rapporto s/L tra la larghezza e la lunghezza dell'apparato, non è abbastanza grande da permetterci di studiare il moto in due dimensioni a livello numerico.
Nell'esperimento i campi di velocità e pressione intorno al fluido risentono degli effetti tridimensionali, e di conseguenza ne risentono anche le forze ed il moto del sistema. L'approssimazione numerica bidimensionale è quindi poco accurata; per ovviare a questo problema occorre effettuare simulazioni su griglie tridimensionali, modificando profondamente il codice usato, o alternativamente cercare di condurre esperimenti con apparati aventi *aspect ratio* maggiore.

Capitolo 5

Conclusioni

Lo scopo della tesi è stato quello di studiare la dinamica derivante dall'interazione di strutture rigide ed elastiche con le forze fluidodinamiche, al fine di trovare riscontri teorici e numerici con i risultati ottenuti in galleria del vento dal Prof. Corrado Boragno su un sistema potenzialmente in grado di ricavare energia del vento sfruttando le proprietà di materiali noti come elastometri dielettrici. Per estrarre energia, è necessario che il dispositivo investito dal vento non si allinei con esso, ma che continui ad oscillare tirando e comprimendo periodicamente gli elastometri.

In un primo tempo abbiamo costruito un modello teorico basato sui termini dominanti delle forze in gioco a grandi numeri di Reynolds, tenendo conto delle forze e dei momenti di lift indotti dal fluido sulla struttura, e delle forze elastiche o dei vincoli rigidi, a seconda della geometria in esame caso per caso. A partire da questo, abbiamo studiato nel limite di piccole perturbazioni l'evoluzione delle equazioni del moto, ricercando nello spazio dei parametri le curve marginali che delimitano le regioni stabili da quelle instabili.
Sono stati confrontati i risultati ottenuti nell'approssimazione quasi-statica con quelli derivanti da un'analisi più generale che tiene conto, per mezzo della funzione di Theodorsen, dell'effetto della scia di vortici. In condizioni non asintotiche, l'effetto della scia risulta estremamente rilevante per descrivere correttamente le regioni di stabilità.

Per validare i risultati ottenuti sono state effettuate simulazioni sfruttando tecniche di calcolo numerico avanzate, basandosi sulle classi C++ fornite dalle librerie di *Overture*, opportunamente modificate per adattarle alla geometria ed alla dinamica a cui siamo interessati. I risultati numerici sulle zone di stabilità risultano essere in ottimo accordo con il modello teorico descritto.

Al di fuori del modello teorico, abbiamo inoltre simulato l'evoluzione della struttura sottoposta a perturbazioni finite, identificando varie tipologie di instabilità e andando a cercare sotto quali condizioni sui parametri queste possono verificarsi o meno. In particolare è stato trovato che a parità di altri parametri esiste una velocità incidente critica alla quale l'instabilità trova il suo massimo, e sotto la quale invece il sistema risulta sempre stabile.

Infine abbiamo cercato di riprodurre numericamente i risultati ottenuti sperimentalmente dal Prof. Corrado Boragno su strutture che rispondono a leggi di richiamo non armoniche tipiche degli elastometri dielettrici. In questo caso l'accordo tra gli esperimenti e le simulazioni è solo parziale: troviamo una buona corrispondenza sulle frequenze e le ampiezze di oscillazione, ma delle differenze sul moto del centro di massa e sulle forze del fluido sulla struttura. Tali differenze possono essere spiegate dal carattere bidimensionale delle simulazioni effettuate, contro la tridimensionalità degli esperimenti condotti in galleria del vento: non essendo l'*aspect ratio* dell'apparato sperimentale sufficientemente grande, la forma che il fluido assume nell'esperimento, e di conseguenza le forze che questo esercita sulla struttura, risentono degli effetti 3D, e l'approssimazione numerica bidimensionale non è pienamente giustificata.

Tra gli sviluppi futuri di questa tesi possiamo annoverare una migliore caratterizzazione delle instabilità bidimensionali, sia dal punto di vista teorico che numerico, e la generalizzazione del codice usato al caso tridimensionale, per ricercare migliore accordo con i dati sperimentali esistenti ed individuare con precisione configurazioni particolarmente favorevoli all'estrazione di energia. Inoltre l'Université Bordeaux ha dato disponiblità alla conduzione di esperimenti su film di sapone per trovare riscontri sperimentali all'analisi bidimensionale effettuata.

Elenco delle figure

1 Schema di funzionamento di un *energy harvester* piezoelettrico. 8

2 (a): Voltaggio generato da un elastometro dielettrico: confronto tra teoria ed esperimenti. (b): Schema funzionamento elastometri dielettrici. 9

3 (a): Energy harvester in azione. (b): In rosso l'asta rigida mossa da un flusso uniforme U, in giallo l'elastometro le cui deformazioni generano energia. 9

4 Moto del centro di massa in tre configurazioni differenti. Nel caso in blu il sistema si stabilizza. Nelle altre due (rosso e verde) il sistema compie ampie oscillazioni ed è potenzialmente in grado di estrarre energia. 10

1.1 Deformazione di un elemento di fluido. 16

2.1 Definizione di *airfoil* con grande *aspect ratio*. 26

2.2 Filosofia di calcolo delle forze aerodinamiche: la corda del profilo è sostituita da una distribuzione di vortici. 27

2.3 Dinamica di *pitch and plunge*. 31

3.1 *Ogen*. Step 1: sovrapposizione delle griglie. (a) Visione globale dei tre blocchi. (b) Dettaglio sul cilindro. 44

3.2 *Ogen*. (a) Step 2: cancellazione dei punti in eccesso. (b) Step 3: rilevamento punti di interpolazione 44

3.3 *Ogen*. Step 4: interpolazione. (a) Dettaglio circonferenza. (b) Visione globale della griglia di computazione finale. 45

3.4 Overlapping tra due griglie e loro rappresentazione nello spazio fisico (in alto) e nello spazio computazionale (in basso). Immagine gentilmente concessa da Joel Guerrero [12]. 46

4.1 Campo di vorticità a $Re = 100$ nel tempo. (a) $t = 50$; (b) $t = 150$; (c) $t = 160$; (d) $t = 190$. 56

4.2 (a): Coefficiente di lift; (b): Coefficiente di drag. 57

4.3 Moto armonico lungo l'asse x correttamente integrato dallo schema predictor-corrector usato. 59
4.4 Profilo del campo di velocità u e w al tempo $t = nT + \frac{T}{2}$. (a)-(b): risultati tratti da [23]; (c)-(d): lavoro presente. 60
4.5 Profilo del campo di velocità u e w al tempo $t = nT + \frac{11}{12}T$. (a)-(b): risultati tratti da [23]; (c)-(d): lavoro presente. 61
4.6 Schema del sistema meccanico considerato. 62
4.7 Curve marginali per la stabilità del sistema. (a): $r = 0.5$; (b): $r = 0.26$. 67
4.8 Curve marginali per le instabilità del sistema a $r = 0.15$. (a): Visione d'insieme; (b): dettaglio a grandi k. 68
4.9 Curve marginali per la stabilità del sistema ad $r = 0.5$ con e senza l'effetto della scia di vortici. 69
4.10 Curve marginali per la stabilità del sistema ad $r = 0.26$ con e senza l'effetto della scia di vortici. 69
4.11 Discretizzazione dello spazio fisico. (a): Dominio completo; (b): Particolare sul *trailing edge*. 70
4.12 Regimi di evoluzione angolare. (a): Forte instabilità, il sistema ruota; (b): L'instabilià satura. 71
4.13 Evoluzione angolare del sistema con $\rho_w = 20$ e $k = 10$. (a): piccola perturbazione, dopo poche oscillazioni è evidente la tendenza alla stabilizzazione; (b): perturbazione finita, l'instabilità persiste nel tempo. 72
4.14 Accordo tra risultati teorici e simulazioni numeriche. 72
4.15 Sistema rigido. Supponendo un *aspect ratio* molto grande ci limitiamo a studiare il moto nel piano x-y. 74
4.16 Evoluzione temporale dell'angolo tra l'asse y e l'ala al variare dei parametri adimensionali. Il vento incidente è uniforme e pari a $2.7m/s$. 75
4.17 Evoluzione temporale dell'angolo tra l'asse y e l'ala al variare della densità. Il vento incidente è uniforme e pari a $2.7m/s$ e $Re = 7152$. 76
4.18 Riscalaggio temporale del periodo di oscillazione tra le simulazioni con parametri $Re = 7152$, $\rho_w = 12.8$ e $Re = 6258$, $\rho_w = 15$. Dopo il riscalaggio (b) i periodi coincidono 78
4.19 Evoluzione angolare del filamento rigido a $\rho_w = 66.7$. (a): $U = 0.25$, il filamento si allinea con il vento; (b): $U = 1$, l'oscillazione perdura nel tempo. 80
4.20 Ampiezza di oscillazione in regime periodico in funzione della velocità del flusso incidente. 80
4.21 Evoluzione del grado di libertà angolare. 81

4.22 Geometria dell'*energy harvester*. 82
4.23 Moto del centro di massa dell'ala al variare della posizione del centro di massa e del punto di attacco dell'elastico, espressi in percentuale rispetto alla lunghezza della corda. 83
4.24 Confronto tra esperimento (blu) e simulazioni numeriche (rosso). (a): accordo sulla frequenza di oscillazione. (b)-(c): discrepanze sulla traiettoria del centro di massa ed i momenti agenti sul sistema. 84

Bibliografia

[1] Dung-An Wang, Huy-Tuan Pham, Chia-Wei Chao, Jerry M. Chen, *A Piezoelectric Energy Harvester Based on Pressure Fluctuations in Kármán Vortex Street*, Sweden, World Renewable Energy Congress 2011

[2] Ron Pelrine, Roy Kornbluh, Joe Eckerle, Phil Jeuck, Seajin Oh, Qibing Pei, Scott Stanford, *Dielectric Elastomers: Generator Mode Fundamentals and Applications*, Smart Structures and Materials 2001: Electroactive Polymer Actuators and Devices, Volume 4329, pp. 148-156, 2001

[3] S. Chiba, R. Kornbluh, R. Pelrine, M. Waki, *Novel Electric Generator Using Electroactive Polymer Artificial Muscle (EPAM)*, Proceedings of the WHEC, Essen, 2010

[4] Pijush K. Kundu, Ira M. Choen, *Fluid Mechanics*, Elsevier Academic Press, San Diego 2008

[5] John D. Anderson Jr., *Fundamentals of Aerodynamics*, McGraw-Hill, 2001

[6] Y.C. Fung, *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*, Dover Publications, 1993

[7] Raymond L. Bisplinghoff, Holt Ashley, Robert L. Halfman, *Aeroelasticity*, Dover Publications, 1996

[8] Theodorsen T., *General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter*, N.A.C.A Report, Volume 496, 1935

[9] Rauscher M., *Introduction to Aeronautical Dynamics*, John Wiley and Sons, 1953

[10] Gray A., Mathews G. B., Mac Robert T. M., *A Treatise on Bessel Functions*, Macmillan and Co, London 1931

[11] David L. Brown, William D. Henshaw, Daniel J. Quinlan, *Overture: An Object-Oriented Framework for Solving Partial Differential Equations*, Lecture Notes in Computer Science, Volume 1343, pp. 177-184, 1997

[12] Joel Guerrero, *Numerical Simulation of the Unsteady Aerodynamics of Flapping Flight*, PhD Thesis, Genova 2009

[13] William D. Henshaw, *Mappings for Overture. A Description of the Mapping Class and Documentation for Many Useful Mappings*, Technical Report, Lawrence Livermore National Laboratory, 2006

[14] William D. Henshaw, *Ogen: An Overlapping Grid Generator for Overture*, Technical Report, Lawrence Livermore National Laboratory, 2003

[15] N. Petersson, *An algorithm for assembling overlapping grid systems*, Journal of Computational Physics, 20:646-665, 2002

[16] William D. Henshaw, *Cgins User Guide: An Overture Solver for the Incompressible Navier-Stokes Equations on Composite Overlapping Grids*, Technical Report, Lawrence Livermore National Laboratory, 2011

[17] William D Henshaw, *A fourth-order accurate method for the incompressible Navier-Stokes equations on overlapping grids*, J. Comput. Phys., Volume 113, pp. 13-25, 1994

[18] G. Browning, *A comparison of three numerical methods for solving differential equations on the sphere*, Monthly Weather Review, 117:1058-1075, 1989

[19] Rainald Löhner, *Applied Computational Fluid Dynamics Techniques*, John Wiley & Sons, 2008

[20] John F. Wendt, *Computational Fluid Dynamics*, Springer, 2009

[21] Peter J. Schmid, *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*, Ecole Polytechnique Editions, 2006

[22] A. Pinelli, I.Z. Naqavi, U. Piomelli, J. Favier, *Immersed-boundary methods for general finite-difference and finite-volume Navier-Stokes solvers*, Journal of Computational Physics, Volume 229, pp. 9073-9091, 2010

[23] Linwei Shen, Eng-Soon Chan, Pengzhi Lin, *Calculation of hydrodynamic forces acting on a submerged moving object using immersed boundary method*, Computers & Fluids, Volume 38, pp 691-702, 2009

[24] Jianming Yang, Elias Balaras, *An embedded-boundary formulation for large-eddy simulation of turbulent flows interacting with moving boundaries*, Journal of Computational Physics, Volume 215, pp. 12-40, 2006

[25] De Palma P., De Tullio MD., Pascazio G., Napolitano M., *An immersed-boundary method for compressible viscous flows.*, Comput. Fluids, Volume 35, pp. 693-702, 2006

[26] Jun Zhang, Stephen Childress, Albert Libchaber, Michael Shelley *Flexible filaments in a flowing soap film as a model for one-dimensional flags in a two-dimensional wind*, Nature, Vol 408, pp. 835-839, 2000

[27] Felipe P. Mariano, Leonardo Q. Moreira, and Aristeu de Silveira Neto, *Mathematical Modeling of non-periodic Flows Using Fourier Pseudo-Spectral and Immersed Boundary Methods*, V European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD, 2010

[28] Luoding Zhu, Charles S. Peskin, *Interaction of two flapping filaments in a flowing soap film*, Physics of Fluids, Volume 15 No. 7, pp. 1954-1960, 2003