



UNIVERSITÀ DI GENOVA
DIPARTIMENTO DI FISICA



Tesi di Laurea in Fisica

**Approccio perturbativo a scale
multiple per lo studio delle
proprietà di stabilità di flussi non
newtoniani in presenza di additivi
polimerici**

Candidato:

Alberto Puliafito

Relatori:

Chiar.mo Prof. R. Festa

Correlatore:

Chiar.mo Prof. R. Collina

Dott. A. Mazzino

Alla mia famiglia.

Indice

Introduzione	11
1 Richiami di fluidodinamica e analisi di stabilità	15
1.1 Brevi richiami di fluidodinamica	15
1.1.1 Equazioni fondamentali	16
1.1.2 Le equazioni della fluidodinamica	17
1.1.3 Le equazioni adimensionali	18
1.2 Instabilità	20
1.2.1 Stabilità di un flusso parallelo	21
1.2.2 Il teorema di Squire	22
1.2.3 Flussi paralleli non viscosi	23
1.2.4 Flussi paralleli viscosi	24
1.2.5 L'origine delle instabilità di tipo viscoso	25
2 La drag reduction operata dai polimeri nei flussi turbolenti	27
2.1 I polimeri	27
2.1.1 La reologia dei polimeri	28
2.1.2 I flussi viscoelastici	29
2.2 La drag reduction	32
2.2.1 Le leggi di un flusso turbolento in un canale	32
2.2.2 La drag reduction nel canale	33
2.2.3 La fenomenologia della drag reduction	33
2.3 Modelli teorici	37
2.3.1 Il criterio temporale	37
2.3.2 Il criterio energetico	42
2.4 Modelli di polimeri in soluzione	47
2.4.1 Il modello "Dumbbell"	47
2.4.2 Il modello FENE-P	50
2.4.3 Il modello Oldroyd-B	52
2.4.4 Gli sviluppi recenti	53
2.5 Osservazioni generali sulla stabilità di flussi viscoelastici	56
2.5.1 Analisi lineare e non lineare	56
2.5.2 Instabilità elastica	57

3	Il metodo multiscala	59
3.1	Generalità	59
3.1.1	L'approccio matematico	60
3.2	Il problema dello scalare passivo	64
4	Il modello di Oldroyd	69
4.1	Il flusso di Kolmogorov	69
4.2	Il modello Oldroyd-B e il flusso di Kolmogorov	74
4.3	Una generalizzazione del modello di Oldroyd: la diffusività conformazionale	81
4.4	Il regime di saturazione	87
5	Analisi non lineare	91
5.1	Il caso sotto soglia: un segno di drag reduction	92
5.2	Il caso sopra soglia: la struttura Cahn-Hillard	95
6	Simulazioni numeriche	103
6.1	La discretizzazione	103
6.2	Il metodo di Arnoldi	104
6.2.1	L'algoritmo di Arnoldi per un problema standard agli autovalori	105
6.3	Confronto tra simulazioni e calcoli teorici	106
	Conclusioni	109
	Appendici	111
A	Teoremi di stabilità	113
A.1	Il Teorema di Squire	113
A.2	Il teorema di Rayleigh	114
A.3	Il teorema di Fjortoft	115
B	Il metodo multiscala applicato al problema di Navier-Stokes	117
B.0.1	Proprietà dell'operatore \mathcal{A}	118
B.0.2	La determinazione del tensore viscosità turbolenta	119
C	Il caso diffusivo del modello Oldroyd	125
C.1	Equazioni per le perturbazioni	125
C.1.1	Ordine ϵ^0	125
C.1.2	Ordine ϵ	126
C.2	Coefficienti della forma quadratica	130
D	Dinamica sopra soglia: l'equazione di Cahn-Hillard	133
D.1	I calcoli	133
D.2	I coefficienti dell'equazione	134

INDICE	7
---------------	----------

Ringraziamenti	138
-----------------------	------------

Bibliografia	138
---------------------	------------

Elenco delle figure

1.1	Lo strato limite.	19
1.2	Diagramma di stabilità per un flusso in uno strato limite con gradiente di pressione: k è il numero d'onda longitudinale, δ^* lo spessore dello strato limite. La parte esterna dei due anelli è una zona di stabilità e quella interna di instabilità.	25
1.3	Dominio di integrazione con flusso netto attraverso le pareti nullo.	26
2.1	Flusso di shear semplice	29
2.2	(A) Polimeri in configurazione "gomitolo", (B) Polimeri in configurazione "ago".	35
2.3	La legge di Prandtl-Karman (P-K) è quella seguita dai flussi newtoniani turbolenti in un canale. Le linee tratteggiate e puntate rappresentano due esempi di drag reduction, tracciate per diverse concentrazioni di polimeri. Quando le curve di allontanano dalla legge di Prandtl-Karman si ha l'inizio di evidenza del fenomeno (o <i>onset</i>). Nel grafico si vede anche l'asintoto MDR di "massima drag reduction", comune a entrambe le curve [20].	35
2.4	Relazioni di scala a sforzo costante di uno strato limite turbolento [2].	40
2.5	Relazioni di scala a sforzo costante di uno strato limite turbolento: la versione "temporale". La turbolenza a destra della linea tratteggiata ha una scala temporale tipica minore di un tempo fissato. [2].	42
2.6	Andamento qualitativo dell'energia della turbolenza in funzione del numero d'onda nella teoria di Kolmogorov. La zona lineare è detta range inerziale.	43
2.7	Identificazione della scala r^{**} secondo gli andamenti della K_{41} . L'andamento dell'energia elastica al di sotto di tale scala non è riportato poiché non vi sono ancora strumenti per capirlo a fondo.	45
2.8	Contributi polimerici al tensore degli sforzi	48

2.9	I due tipi di biforcazioni.	56
3.1	Separazione delle scale	59
4.1	Diagramma di stabilità del flusso di Kolmogorov	73
4.2	I domini ricavati dalle condizioni sui parametri della forma quadratica per $\eta = 0.3$. Le zone scure sono le zone dove il coefficiente in questione è negativo positivo. Il grafico per c non è mostrato perché fornisce ovviamente l'intero piano. . .	80
4.3	Diagramma di stabilità.	80
4.4	Le curve separatrici del dominio di stabilità nel caso diffusivo: la curva in basso, determinata dall'equazione $\Delta = 0$ si sposta sempre più a destra mano a mano che il numero di Schmidt diminuisce.	84
4.5	La visualizzazione grafica dei regimi asintotici per l'equazione di evoluzione del tensore di conformazione.	86
4.6	Il baffo superiore della curva di stabilità per diversi valori del numero di Schmidt: al diminuire di $\mathcal{S}c$ è sempre più evidente la zona di passaggio da un regime all'altro, e si vede bene come la larghezza in termini di range del numero di Deborah è sempre più piccola.	86
4.7	I domini di stabilità nel caso diffusivo: le zone scure sono le zone stabili.	87
4.8	Dipendenza del numero di Reynolds critico dalla concentrazione dei polimeri per vari numeri di Deborah in assenza di diffusività.	88
4.9	Dipendenza del numero di Reynolds critico dalla concentrazione dei polimeri per vari numeri di Schmidt, con $De = 1$	89
5.1	Da [37]: i risultati delle simulazioni numeriche per l'equazione di Cahn-Hilliard, ovvero i risultati di She [43].	99
5.2	Studio del segno dei coefficienti dell'equazione di Cahn-Hilliard: per numeri di Deborah minori di 3, le richieste fatte sono soddisfatte. Oltre questo limite il fenomeno non è più descritto da questa fenomenologia, e vanno fatte delle altre ipotesi. . .	101
6.1	La curva di stabilità marginale ottenuta dall'analisi teorica con approccio multiscala e quella ottenuta con l'analisi numerica. Si nota chiaramente come l'approccio multiscala sia in ottimo accordo con il calcolo numerico per bassi valori del numero di Deborah.	107
6.2	Il confronto tra curve di stabilità marginali nel caso non diffusivo.	108

- 6.3 Le coordinate del punto di distacco tra la curva predetta dall'approccio multiscala e quella predetta dall'analisi numerica. 108

Introduzione

Dalla fine degli anni '50 è noto che l'aggiunta di una piccola quantità di polimeri in un *flusso* turbolento *in un canale*, diminuisce l'attrito tra le pareti del canale e il flusso stesso. Questo effetto prende il nome di *drag reduction*. L'obbiettivo di questa tesi è riformulare il problema in termini di *flusso libero*, ovvero senza particolare scelta di geometrie, per cercare di capire se e perché questo effetto è indipendente dalla geometria del canale.

Il fenomeno in questione coinvolge molte proprietà del flusso in esame, quali il profilo di velocità, la viscosità del flusso, l'attrito tra diversi strati del fluido, la forma dei polimeri, il loro comportamento, la loro modellizzazione, le proprietà di stabilità dei flussi. Inoltre,

come avviene in moltissime questioni di fluidodinamica, le difficoltà di tipo matematico abbondano e inducono spesso ad utilizzare approcci di tipo esclusivamente numerico. Ciò può però ostacolare la comprensione delle cause fisiche dei fenomeni in esame. Ho scelto quindi di seguire fin dove possibile un approccio analitico, sia pure di tipo perturbativo, e quindi non esatto. Tale approccio consente però di ottenere, almeno in certi regimi, soluzioni molto precise, e indicative per comportamento del flusso e per la fenomenologia del sistema.

Nei primi capitoli della tesi verranno ricordati ed esposti con ragionevole completezza i semplici strumenti utili per capire il linguaggio utilizzato nel mio studio, l'approccio scelto, i concetti base utilizzati e le ipotesi fatte. Nella seconda parte della tesi verrà invece esposto il lavoro da me svolto, illustrati i risultati ottenuti e discusso il loro confronto con quelli ottenuti tramite un calcolo numerico sviluppato con tecniche non perturbative, in modo da verificarne la validità.

Capitolo 1

Richiami di fluidodinamica e analisi di stabilità

Scopo di questo capitolo è quello di ricordare alcuni strumenti concettuali utili per una comprensione d'insieme della formulazione matematica della fluidodinamica, e dello studio della stabilità di un flusso.

Nel primo paragrafo verrà ricordata ed esposta la visione complessiva delle equazioni della fluidodinamica, focalizzando l'attenzione sui problemi ancora aperti e sugli aspetti che serviranno ad approcciare il problema della *drag reduction* da un punto di vista teorico.

Nel secondo paragrafo verrà invece illustrata attraverso alcuni esempi l'analisi di stabilità, e su quali proprietà del flusso si basano gli studi della stabilità. Vedremo che nel caso di flussi con aggiunta di polimeri vengono appunto modificate queste proprietà di stabilità, e che questo rappresenta un meccanismo chiave nello studio della *drag reduction*.

1.1 Brevi richiami di fluidodinamica

Il problema fluidodinamico generale possiede da tempo una formulazione matematicamente coerente, basata su principi, e tuttavia tale formulazione manca ancora di teoremi di esistenza e unicità delle soluzioni. La non linearità delle equazioni crea molti problemi anche nell'approccio numerico, e, a parte casi di estrema semplicità o di forte simmetria, esse non sono in genere risolte in forma esatta. L'osservazione e l'approccio sperimentale non sono d'aiuto in questo caso, poiché a parte casi semplici, i flussi di interesse fisico sono interessati dall'insorgenza di turbolenza [1], che rende misure e osservazioni molto complicate, e la cui descrizione sembra richiedere un approccio statistico.

1.1.1 Equazioni fondamentali

Nello studio di un continuo abbiamo a disposizione due tipi di approcci: quello euleriano e quello lagrangiano. Nell'approccio lagrangiano un fluido è descritto come un insieme di "particelle fluide"¹. Nel caso di approccio euleriano si considerano invece campi (di velocità, di temperatura, di densità ...). L'evoluzione temporale delle grandezze in esame può quindi essere matematicamente espressa o da una dipendenza esplicita dal tempo di campi opportuni, oppure dal trasporto operato dal campo di velocità. Si verifica immediatamente che la relazione tra la derivata lagrangiana di una certa grandezza relativa a una particella e la corrispondente espressione per il campo della stessa grandezza è:

$$\frac{d}{dt} = \partial_t + v_\alpha \partial_\alpha.$$

Per descrivere la dinamica di un corpo dobbiamo scrivere le sue equazioni del moto, e nel caso particolare di un fluido sono necessarie alcune precisazioni termodinamiche e la legge di conservazione della massa.

La traduzione delle leggi della meccanica nel linguaggio della fluidodinamica prevede il passaggio alle forze per unità di volume:

$$\rho(\partial_t v_\alpha + v_\beta \partial_\beta v_\alpha) = f_\alpha \quad (1.1)$$

dove \vec{f} è la forza per unità di volume, e ρ è la densità del fluido. Le forze di cui dobbiamo tenere conto sono quelle di superficie e quelle di volume². Detto \mathcal{S} il tensore degli sforzi abbiamo che le forze di superficie possono essere espresse come

$$f_\alpha^{(s)} = \partial_\beta \mathcal{S}_{\beta\alpha}. \quad (1.2)$$

In generale il tensore degli sforzi \mathcal{S} può essere espresso da una somma di due termini, un tensore isotropo (la pressione) e un tensore detto degli sforzi viscosi, che contiene gli sforzi viscosi esercitati da uno strato di fluido sull'altro:

$$\mathcal{S}_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta} + \mathcal{T}_{\alpha\beta} \quad (1.3)$$

Le equazioni del moto Nel caso di assenza di forze di volume, la sostituzione della (1.3) nella (1.1)

¹Tutta la formulazione della fluidodinamica si basa sull'utilizzo di quantità differenziali. In realtà un fluido non è un continuo, ma può essere trattato come tale se lo studio della sua dinamica non si spinge a scale dell'ordine del cammino libero medio delle molecole. In tal caso però le operazioni di limite non sono più ben definite, e il formalismo fluidodinamico così come è qui presentato non è più valido. In quest'ottica, se siamo a scale in cui l'approssimazione di mezzo continuo è valida una particella fluida è un elemento di massa dm , o più precisamente esso può essere indicato con δm , per indicare che si tratta di una quantità approssimativamente trattabile come infinitesima da un punto di vista macroscopico.

²La forza di gravità sarà quindi \vec{g} e analoga forma avranno le altre forze di volume presenti nel problema.

e nella (1.2) porta a:

$$\rho(\partial_t v_\alpha + v_\beta \partial_\beta v_\alpha) = -\partial_\alpha p + \partial_\beta \mathcal{T}_{\beta\alpha} \quad (1.4)$$

Tenendo conto della sua definizione fisica, $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$ sarà una grandezza dipendente dalla deformazione del corpo che descrive, e come vedremo in seguito questo porterà alla caratterizzazione del corpo (o liquido) in questione. L'espressione della conservazione della massa, nel linguaggio fluidodinamico assume la seguente formulazione:

$$\partial_t \rho + \partial_\alpha (\rho v_\alpha) = q_m. \quad (1.5)$$

dove q_m è la densità di sorgenti di massa. In assenza di sorgenti e per un flusso incompressibile tale equazione diventa:

$$\partial_t \rho + v_\alpha \partial_\alpha \rho = q_m \quad (1.6)$$

Le caratteristiche termodinamiche del fluido vengono definite dal primo principio della termodinamica: lo scambio di calore è regolato dal vettore $\vec{j}^{(q)}$, o densità di corrente termica, e nel bilancio energetico intervengono anche lavoro e dissipazione termica:

$$\rho \dot{e} = -p \partial_\alpha v_\alpha - \partial_\alpha j_\alpha^{(q)} + \mathcal{T}_{\alpha\beta} \mathcal{D}_{\alpha\beta} \quad (1.7)$$

dove

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha),$$

e \dot{e} è la derivata temporale lagrangiana dell'energia interna per unità di volume, il primo termine a secondo membro è la potenza meccanica trasferita e il terzo termine rappresenta il contributo dissipativo. Vale la pena di notare che la corrente termica è a priori una funzione del gradiente della temperatura, e tale dipendenza non è in generale nota. In caso di proporzionalità tra il tensore degli sforzi e il tensore di deformazione si ha quello che si chiama un flusso *newtoniano*.

1.1.2 Le equazioni della fluidodinamica

Supponendo di poter trattare il campo di velocità come incompressibile ³, per conoscere il flusso $v_\alpha(r_\alpha, t)$ come abbiamo visto, occorre risolvere il sistema di equazioni differenziali (1.4), (1.6), (1.7) con le corrispondenti *equazioni costitutive*:

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{\alpha\beta} = \mathcal{T}_{\alpha\beta}(\mathcal{D}_{\gamma\delta}) \\ \vec{j}^{(q)} = \vec{j}^{(q)}(\partial_\alpha T) \\ s = s(e, \rho) \end{cases} \quad \text{densità di entropia} \quad (1.8)$$

³Frequentemente, sia nel caso di flussi geofisici, che nel caso di flussi turbolenti, possiamo metterci in queste condizioni senza commettere grandi errori. L'effetto di compressibilità diventa importante per esempio nel caso di trasmissione di onde di pressione.

L'equazione di continuità

L'equazione termodinamica

e le opportune condizioni al contorno.

La soluzione generale di questo problema, come già notato precedentemente, è una questione ancora aperta della fisica classica. Il termine non lineare $v_\beta \partial_\beta v_\alpha$ crea molte difficoltà nella risoluzione delle equazioni e questo ha portato a cercare metodi numerici e teorici di risoluzione alternativi, rispetto alla ricerca di una soluzione analitica.

1.1.3 Le equazioni adimensionali

Nella trattazione del problema differenziale della fluidodinamica si rende utile una formulazione adimensionale dello stesso, operazione che ci porta a definire dei parametri di controllo adimensionali, che “pesano” l’importanza relativa dei diversi termini. Tali parametri descrivono il peso relativo dei diversi termini nelle equazioni, e possono aiutarci a riconoscere la predominanza di un regime rispetto ad un altro.

Per rendere le equazioni fluidodinamiche adimensionali, occorre preventivamente fissare un certo numero di grandezze “tipiche” del problema. Questo significa che dobbiamo conoscere l’ordine di grandezza delle variabili in gioco prima di risolvere le equazioni. I valori assunti dalle nuove variabili adimensionate, se abbiamo operato delle buone valutazioni, sono quindi contenuti in un intorno più o meno ampio dell’unità.

Nel caso di flusso newtoniano, la (1.4) si riduce alla ben nota *equazione di Navier-Stokes*. In particolare, il termine contenente il tensore degli sforzi diventa:

$$\partial_\alpha \mathcal{T}_{\alpha\beta} = \nu \partial^2 v_\beta. \quad (1.9)$$

Supponiamo per semplicità che ci sia una sola scala di lunghezza L e un’unica scala di velocità U tipica del problema:

$$\begin{cases} \vec{r} = L\vec{r}' \\ \vec{v} = U\vec{v}' \\ t = \frac{L}{U}t' \\ p = \rho U^2 p' \end{cases} \quad (1.10)$$

Le (1.10) portano ad una trasformazione dell’equazione del moto ⁴:

$$\partial_t v_\alpha + v_\beta \partial_\beta v_\alpha \doteq - \partial_\alpha p + \frac{1}{\mathcal{R}e} \partial^2 v_\beta \quad (1.11)$$

dove $\mathcal{R}e$ è detto *numero di Reynolds* ed è così definito:

$$\mathcal{R}e = \frac{LU}{\nu}.$$

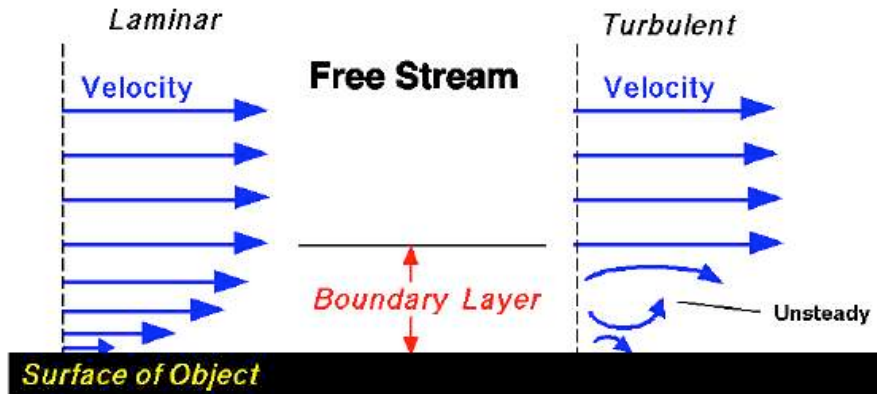


Figura 1.1: Lo strato limite.

Il numero di Reynolds fornisce il peso relativo tra la viscosità del problema e la sua inerzia, ovvero la sua velocità. A questo stadio sono già possibili alcune semplificazioni del problema di Navier-Stokes. A grandi numeri di Reynolds si ha che il termine viscoso nella (1.11) è trascurabile rispetto agli altri termini. Si ha quello che è noto come flusso euleriano. Naturalmente questa approssimazione è valida solo nel caso precisato, cioè quando esiste un'unica scala rilevante di lunghezza e velocità. Il caso opposto si ha quando invece il termine viscoso è dominante rispetto agli altri. Questo caso può rappresentare la situazione di un flusso molto lento o con scale di lunghezza molto piccole.

Lo schema appena descritto, basato sul numero di Reynolds, consente quindi di identificare delle zone dello spazio fisico, ma più in generale dello spazio delle fasi, caratterizzate da ben precise scale spazio-temporali. Lo spazio delle fasi del sistema sarà quindi diviso in strati (o *layer*) in cui sono valide approssimazioni diverse. Una volta risolto il problema strato per strato è poi necessario, con opportune condizioni al contorno, raccordare le soluzioni nei vari strati, per ottenere infine una soluzione unica. Tale soluzione naturalmente non è la soluzione del problema di Navier-Stokes esatta, ma rappresenta in modo approssimato l'andamento del flusso a seconda dell'effetto predominante in ciascuno strato.

⁴In questa e nelle equazioni che seguono indicheremo con \doteq tutte le eguaglianze tra variabili adimensionate.

1.2 Instabilità

In teoria, per ogni flusso viscoso, con condizioni al contorno stazionarie, esiste sempre una soluzione stazionaria delle equazioni della fluidodinamica. Queste soluzioni formalmente esistono per tutti i valori di \mathcal{Re} . Tuttavia, non tutte le soluzioni delle equazioni, ancorché esatte, possono essere osservate in natura, ma soltanto quelle stabili, o almeno metastabili.

Supponiamo di perturbare un dato flusso tramite piccole variazioni (rispetto al flusso medio) di velocità. Se la soluzione è stabile o metastabile tali perturbazioni decadono con lo scorrere del tempo. Se invece il sistema è instabile, le perturbazioni crescono con il passare del tempo, tramutando eventualmente lo stato stazionario di partenza in un nuovo stato, anch'esso stazionario, diverso da quello di partenza.

Ci occuperemo adesso di verificare se esistono dei criteri per capire se e quando un flusso è stabile, ovvero di cercare dei *criteri di stabilità*.

Consideriamo le equazioni di Navier-Stokes adimensionali e supponiamo che la velocità totale possa essere decomposta in una componente di flusso media \vec{V} , che è soluzione stazionaria, e in una perturbazione \vec{v}' , e che analoga decomposizione possa essere applicata alla pressione:

$$\begin{cases} v_\alpha \doteq V_\alpha + v'_\alpha & v'_\alpha \ll V_\alpha \\ p \doteq P + p' & p' \ll P \end{cases} \quad (1.12)$$

Sapendo che \vec{V} e P soddisfano l'equazione di Navier-Stokes stazionaria possiamo sostituire le (1.12) nell'equazione completa, e trascurando i termini di ordine superiore a $O(v')$ otteniamo:

$$\partial_t v'_\alpha + V_\beta \partial_\beta v'_\alpha + v'_\beta \partial_\beta V_\alpha \doteq -\partial_\alpha p' + \frac{1}{\mathcal{Re}} \partial^2 v'_\alpha \quad (1.13)$$

$$\partial_\alpha v'_\alpha \doteq 0 \quad (1.14)$$

La perturbazione \vec{v}' soddisfa allora un sistema di equazioni differenziali *lineari* i cui coefficienti sono funzioni dello spazio, ma non del tempo. La soluzione generale del sistema può essere espressa in termini di componenti temporali di Fourier in cui le frequenze sono determinate dalle (1.13) con le opportune condizioni al contorno. Tali frequenze sono in generale complesse, e la condizione perché non ci siano componenti che deflagrano è che la parte immaginaria di tutte le possibili frequenze sia negativa.

Un'analisi matematica di questo tipo può, a seconda delle condizioni al contorno, essere molto complicata, e molte situazioni sono tutt'ora irrisolte. L'approccio sperimentale sembra avvalorare l'ipotesi che esista un certo valore del parametro di controllo \mathcal{Re} oltre al quale il flusso stazionario diventa instabile. Quale sia questo valore, detto *numero di Reynolds critico*, è un

problema che va risolto caso per caso per via sperimentale, teorica o numerica. Vale la pena di notare che l'effetto della viscosità sulla stabilità di in flusso, (che intuitivamente sembrerebbe essere sempre stabilizzante) può invece risultare anche instabilizzante [19] (vedi paragrafo 1.2.4).

Vediamo ora alcuni casi in cui si possono trarre conclusioni relativamente semplici sulla stabilità.

1.2.1 Stabilità di un flusso parallelo

Consideriamo un flusso parallelo in cui $U = U(y)$ ⁵ e operiamo la decomposizione perturbativa precedentemente descritta (nota anche come decomposizione di Reynolds): le componenti della perturbazione saranno presenti ovviamente anche nelle direzioni in cui il flusso di fondo è nullo, e quindi la (1.13) diventa:

$$\partial_t u' + U \partial_x u' + v' \partial_y U \doteq - \partial_x p' + \frac{1}{\mathcal{R}e} \partial^2 u' \quad (1.15)$$

$$\partial_t v' + U \partial_x v' \doteq - \partial_y p' + \frac{1}{\mathcal{R}e} \partial^2 v' \quad (1.16)$$

$$\partial_t w' + U \partial_x w' \doteq - \partial_z p' + \frac{1}{\mathcal{R}e} \partial^2 w' \quad (1.17)$$

I coefficienti in queste equazioni dipendono soltanto da y : l'equazione ammette quindi soluzione esponenziale nelle direzioni x, z, t . Pertanto potremo esprimere la soluzione in funzione dei modi normali come:

$$\begin{cases} v'_\alpha = \hat{v}'_\alpha(y) e^{i(k_x x + k_z z - k_x c t)} \\ p' = \hat{p}'(y) e^{i(k_x x + k_z z - k_x c t)} \end{cases} \quad (1.18)$$

dove k_x e k_z sono le componenti del numero d'onda nelle direzioni x e z rispettivamente, e $c = \Re[c] + i\Im[c]$ è la velocità dell'onda.

Siccome non abbiamo imposto la presenza di bordi fisici nelle direzioni x e z , le corrispondenti componenti del numero d'onda devono essere reali. Possiamo anche assumere, senza ledere la generalità, che esse siano positive: in tal caso la direzione di propagazione dell'onda è determinata unicamente da $\Re[c]$.

La (1.18) rappresenta onde che viaggiano obliquamente rispetto al flusso di base con numero d'onda di modulo $\sqrt{k_x^2 + k_z^2}$, e ampiezza modulata dal fattore $e^{k\Im[c]t}$. Il flusso è quindi stabile o instabile, rispettivamente, se $\Im[c]$ è negativo o positivo.

⁵Indicheremo le tre componenti della velocità con questa notazione

$$\vec{v} = (u, v, w)$$

1.2.2 Il teorema di Squire

Al fine di poter usufruire di alcune semplificazioni nell'analisi di stabilità, possiamo ricorrere al seguente

Teorema 1 (Squire)

A ogni perturbazione tridimensionale instabilizzante su un flusso newtoniano, corrisponde una perturbazione bidimensionale maggiormente instabile [7].

la cui prova è riportata in appendice.

Il teorema di Squire giustifica lo studio di sistemi bidimensionali per ottenere informazioni sulla stabilità degli equivalenti sistemi tridimensionali. In accordo con quanto detto possiamo considerare una funzione corrente:

$$u' = \partial_y \psi \quad v' = -\partial_x \psi \quad (1.19)$$

e assumere modi normali della forma⁶:

$$[u', v', \psi] = [\hat{u}', \hat{v}', \phi] e^{ik(x-ct)} \quad (1.20)$$

Dovremo avere allora:

$$\hat{u}' = \partial_y \phi \quad \hat{v}' = -ik\phi \quad (1.21)$$

Eliminando la pressione le equazioni del moto in termini di ϕ diventano allora:

$$(U - c)(\partial_y^2 \phi - k^2 \phi) - (\partial_y^2 U)\phi = \frac{1}{ik\mathcal{R}e}(\partial_y^4 \phi - 2k^2 \partial_y^2 \phi + k^4 \phi) \quad (1.22)$$

detta anche equazione di *Orr-Sommerfeld*. Tale equazione andrà affiancata dalle condizioni al contorno, che imponevano alla perturbazione di azzerarsi alla parete. Avremo quindi le corrispondenti equazioni per ϕ :

$$\phi = \partial_y \phi = 0 \quad \text{per } y = y_1, y = y_2 \quad (1.23)$$

dove y_1 e y_2 sono le ordinate delle pareti fisiche.

Questa equazione governa la stabilità di flussi paralleli viscosi, di flussi in un canale dritto o in uno strato limite. La soluzione generale di questo problema differenziale non è nota ed esistono soltanto pochi casi semplici in cui tale equazione può essere risolta.

⁶Denotiamo la trasformata di Fourier di ψ con ϕ .

1.2.3 Flussi paralleli non viscosi

Un risultato interessante può essere ottenuto dallo studio dell'equazione di Orr-Sommerfeld nel limite $\mathcal{R}e \rightarrow \infty$, ovvero supponendo che le perturbazioni (e solo loro) seguano una dinamica non viscosa. La (1.22) diventa allora:

$$(U - c)(\partial_y^2 \phi - k^2 \phi) - (\partial_y^2 U)\phi = 0 \quad (1.24)$$

che è anche detta equazione di *Rayleigh*. Analogamente al caso viscoso avremo le condizioni al contorno per ϕ :

$$\phi = 0 \quad \text{per } y = y_1, y = y_2 \quad (1.25)$$

L'insieme delle (1.24), e (1.25) costituisce un problema agli autovalori con $c(k)$ come autovalore e ϕ come autofunzione.

Siccome l'equazione di Rayleigh è reale, prendendo il complesso coniugato di tutta l'equazione si evince che se, per un certo k , ϕ è autofunzione del problema, con autovalore c , per lo stesso valore di k , ϕ^* è autofunzione con autovalore c^* . Dal punto di vista fisico questo implica che a ogni modo che si smorza, ne corrisponde uno che cresce, e questo ancora ci porta ad affermare che le soluzioni stabili sono soltanto quelle che hanno $\Im m[c] = 0$ ⁷. Da quanto sin qui detto si possono trarre alcune conclusioni:

Teorema 2 (Criterio del flesso di Rayleigh)

Condizione necessaria affinché un flusso parallelo non viscoso sia instabile è che il profilo del flusso base $U(y)$ abbia un punto di flesso.

La dimostrazione di tale teorema è riportata in appendice.

Una condizione un pò più restrittiva è data dal seguente

Teorema 3 (Fjortoft)

Condizione necessaria affinché un flusso parallelo non viscoso sia instabile è che in qualche punto del flusso sia verificata la condizione

$$(\partial_y^2 U)(U - U_f) < 0$$

dove U_f è il valore della velocità in corrispondenza del flesso.

per la cui dimostrazione si veda l'appendice.

In conclusione i teoremi di Rayleigh e Fjortoft pongono l'accento sull'importanza di avere un punto di flesso nel profilo di velocità di base. Per esempio se dobbiamo studiare un flusso in uno strato limite con gradiente di pressione opposto alla direzione del flusso, ed esso soddisfa il teorema di Fjortoft, è potenzialmente instabile. Uno strato limite con gradiente di pressione nullo,

⁷Questo ragionamento non è valido per l'equazione di Orr-Sommerfeld completa, poiché essa ha coefficienti nel campo complesso.

oppure nella direzione del flusso, invece, non ha punti di flesso nel profilo base di velocità, ed è quindi, nel limite non viscoso, stabile.

Se consideriamo un flusso del tipo

$$U = \sin y \quad \text{con bordi a } y = \pm b$$

abbiamo che esso è stabile se l'altezza del flusso soddisfa $2b < \pi$, nonostante abbia un punto di flesso in $y = 0$. Questo è un tipico esempio in cui emerge la non sufficienza dei teoremi 2 e 3 nel determinare l'instabilità del flusso.

1.2.4 Flussi paralleli viscosi

Flusso piano di Poiseuille

Il profilo di velocità alla Poiseuille è parabolico, perciò secondo i criteri presentati (validi per flussi non viscosi) sarebbe stabile. D'altra parte nella formazione del profilo parabolico la viscosità è essenziale e calcoli effettuati tenendo conto anche della viscosità mostrano che si ha un valore di $\mathcal{R}e_c \approx 5500$, oltre il quale il flusso è instabile. Tale valore è in buon accordo anche con alcuni calcoli non lineari, ovvero effettuati considerando nella (1.13) anche termini di ordine superiore a $O(v')$.

Flusso in un canale

I calcoli condotti in assenza di viscosità mostrano che in assenza di punto di flesso nel profilo di velocità si ha stabilità. Sebbene l'analisi di stabilità lineare mostri che il flusso è stabile alle piccole perturbazioni, secondo le osservazioni sperimentali c'è una transizione verso un regime turbolento per $\mathcal{R}e_c \approx 3000$.

Strato limite con gradiente di pressione

Se il gradiente di pressione è opposto alla direzione del flusso si ha un punto di flesso nel profilo di velocità. Il diagramma di stabilità 1.2 ad anello nel grafico $\mathcal{R}e_\delta$ vs $k\delta^*$ mostra che c'è un valore di $\mathcal{R}e_c$ per il quale il flusso diventa instabile e siccome lo spessore dello strato limite δ^* aumenta lungo la direzione del flusso, $\mathcal{R}e_\delta$ cresce con l'ascissa, e quindi i punti a valle hanno numero di Reynolds sempre più alto. L'anello di stabilità non si chiude mai, quindi questo tipo di flusso è instabile anche nel caso non viscoso, coerentemente.

Nel caso di gradiente di pressione diretto lungo il flusso invece l'anello si chiude nel limite $\mathcal{R}e \rightarrow \infty$, ovvero nel caso non viscoso, coerentemente con il fatto che non c'è un punto di flesso.

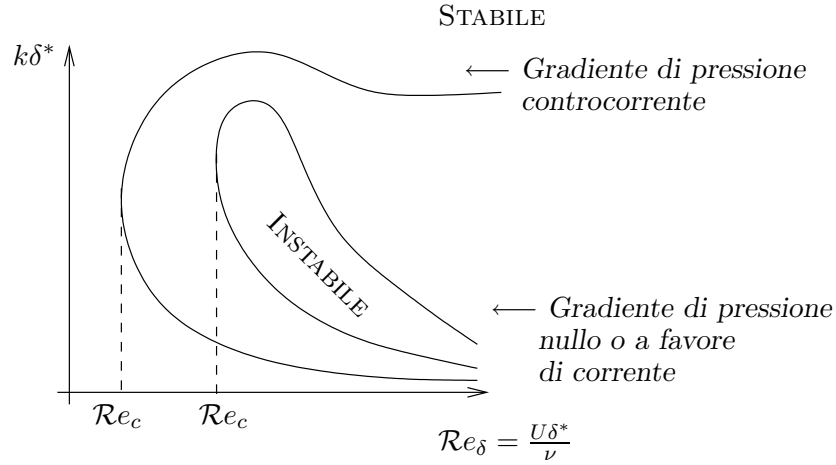


Figura 1.2: Diagramma di stabilità per un flusso in uno strato limite con gradiente di pressione: k è il numero d'onda longitudinale, δ^* lo spessore dello strato limite. La parte esterna dei due anelli è una zona di stabilità e quella interna di instabilità.

1.2.5 L'origine delle instabilità di tipo viscoso

Come preannunciato, l'effetto della viscosità nell'equazione di Orr-Sommerfeld può essere sia stabilizzante che destabilizzante [28, 29]. Per capire come, a livello fisico, queste instabilità si originano consideriamo l'equazione per la perturbazione

$$\partial_t v'_\alpha + v'_\beta \partial_\beta v'_\alpha + V_\beta \partial_\beta v'_\alpha + v'_\beta \partial_\beta V_\alpha \doteq -\partial_\alpha p' + \frac{1}{Re} \partial^2 v'_\alpha \quad (1.26)$$

Moltiplichiamo per v'_α questa equazione, e integriamo sullo spazio fisico: scegliamo il sistema in modo che ci siano pareti in corrispondenza delle quali è richiesta la condizione di aderenza ($v = 0$), e integriamo in modo che la lunghezza del volume di integrazione corrisponda ad un numero intero di lunghezze d'onda della perturbazione (vedi figura 1.3): Il calcolo dei vari termini

$$\begin{aligned} \int v'_\alpha \partial_t v'_\alpha d\tau &= \frac{d}{dt} \int \frac{v'^2_\alpha}{2} d\tau \\ \int v'_\alpha v'_\beta \partial_\beta v'_\alpha d\tau &= \frac{1}{2} \int \partial_\beta v'^2_\alpha v'_\beta d\tau = \frac{1}{2} \int v'^2_\alpha v'_\beta dA_\beta = 0 \\ \int v'_\alpha V_\beta \partial_\beta v'_\alpha d\tau &= \frac{1}{2} \int v'^2_\alpha V_\beta dA_\beta = 0 \\ \int v'_\alpha \partial_\alpha p' d\tau &= \int \partial_\alpha (v'_\alpha p') d\tau = \int p' v'_\alpha dA_\alpha = 0 \\ \int v'_\alpha \partial^2 v'_\alpha d\tau &= \int (\partial_\beta (v'_\alpha \partial_\beta v'_\alpha) - (\partial_\beta v'_\alpha)^2) d\tau = - \int (\partial_\beta v'_\alpha)^2 d\tau \end{aligned}$$

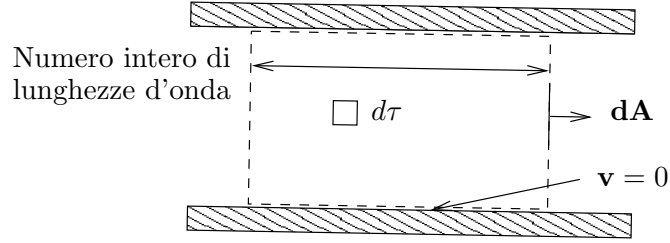


Figura 1.3: Dominio di integrazione con flusso netto attraverso le pareti nullo.

(la notazione è illustrata in Fig. 1.3) porta al risultato finale

$$\frac{d}{dt} \int \frac{v'_\alpha{}^2}{2} d\tau = - \int v'_\alpha v'_\beta \partial_\beta V_\alpha d\tau - \Pi \quad (1.27)$$

dove con Π abbiamo indicato la dissipazione viscosa:

$$\Pi = \nu \int (\partial_\beta v'_\alpha)^2 d\tau$$

Consideriamo per semplicità un flusso parallelo ($\mathbf{V} = U(y)\hat{\mathbf{i}}$) e scriviamo il bilancio energetico:

$$\frac{d}{dt} \int \frac{u'^2 + v'^2}{2} d\tau = - \int v' u' \partial_y U(y) d\tau - \Pi. \quad (1.28)$$

Il significato fisico di questo bilancio è il seguente: il termine a primo membro rappresenta la variazione nel tempo dell'energia cinetica associata alla perturbazione. Il primo termine a secondo membro rappresenta invece la produzione di energia della perturbazione per interazione dello stress di Reynolds con lo sforzo medio. Il termine $u'v'$ ha media nulla sul periodo se u' e v' sono sfasate di 90 gradi. Nei flussi paralleli in cui il profilo di velocità non ha punti di flesso, le componenti della perturbazione sono tali che non è possibile “estrarre” energia dal moto base. Come conseguenza il flusso è stabile. La presenza della viscosità cambia la relazione di fase tra le due componenti della perturbazione, così da rendere positivo e più grande della dissipazione il primo termine a secondo membro della (1.28).

Intuitivamente il meccanismo con il quale la viscosità crea instabilità è questo: se il primo termine a secondo fornisce un contributo negativo, la derivata temporale dell'energia delle perturbazioni è negativa e ciò conduce evidentemente alla stabilità del flusso. Se altrimenti tale contributo è positivo e maggiore del contributo viscoso si può avere instabilità: in certi casi la presenza di viscosità favorisce una crescita di questo termine, e di conseguenza può dar luogo a meccanismi di instabilità.

Capitolo 2

La drag reduction operata dai polimeri nei flussi turbolenti

Per capire meglio cosa significhi *drag reduction*, e come questo fenomeno possa essere studiato abbiamo bisogno di capire quali sono stati i modelli proposti fino ad oggi, introducendo tutte le nozioni necessarie alla loro comprensione, per essere in grado successivamente di poter capire quali sono gli aspetti importanti da osservare nei risultati della tesi.

La scienza che si occupa dello studio della deformazione e del movimento della materia si chiama *reologia*. Dallo studio reologico sono esclusi i materiali elastici (o solidi di Hooke) e ideali viscosi (newtoniani). Vedremo che le soluzioni polimeriche sono dette viscoelastiche, e nell'ambito della reologia ci sono moltissimi approcci diversi allo studio di questo tipo di materiale. Cercheremo poi di capire quali sono i modelli dinamici che consentono di descrivere in ambito fluidodinamico il comportamento di polimeri in soluzione e in conclusione cercherò di spiegare in che modo l'analisi di stabilità di flussi viscoelastici sia diversa dal caso di solvente newtoniano, e come questo studio può darci informazioni sulla *drag reduction*.

2.1 I polimeri

Quando pensiamo ai polimeri, abbiamo in mente delle molecole costituite da una sequenza lineare di N monomeri. In realtà esistono molti altri tipi di molecole annoverate tra i polimeri che hanno forme e caratteristiche molto più complicate di quelli menzionati. Tuttavia, per semplicità, nello studio del loro comportamento in soluzione considereremo soltanto questo tipo di polimeri. Il numero di monomeri per molecola può essere anche dell'ordine di 10^5 e di conseguenza il peso molecolare può essere piuttosto grande. Generalmente queste molecole sono piuttosto flessibili.

Ci occuperemo di studiare soluzioni polimeriche diluite, ovvero soluzioni per le quali valga la condizione $nL^3 \ll 1$, dove n è la densità di molecole per unità di volume e L la scala tipica di lunghezza delle molecole stesse.

Se il polimero è sufficientemente flessibile, si dispone, ad opera del moto browniano causato dal rumore termico, in una configurazione “raggomitolata”, la cui dimensione tipica è quella che normalmente si chiama il raggio idrodinamico R_h .

Un parametro molto importante nello studio reologico di una soluzione polimerica è il tempo di rilassamento. Consideriamo un polimero costituito da solo due monomeri. Allora esso risentirà di due tipi di forze: una forza di attrito concentrata sui due monomeri, proporzionale alla loro velocità rispetto al flusso, e una forza di richiamo di tipo browniano, equivalente alla forza elastica di una molla, proporzionale all’allungamento con costante elastica k . Il coefficiente di proporzionalità tra la forza di attrito e la velocità relativa nell’ approssimazione di Stokes [9] è

$$f = 6\pi\eta_s a$$

dove a è il raggio del monomero e η_s la viscosità del solvente.

Se consideriamo una catena polimerica con N monomeri e indichiamo con f_m il coefficiente di attrito per monomero, abbiamo che

$$f = N f_m .$$

La forza elastica coincide con quella di una catena ideale di sfere distribuite gaussianamente:

$$k = \frac{k_B T}{R_0^2} = \frac{k_B T}{N a^2}$$

dove $R_0 = R_h$ a riposo, T è la temperatura, e k_B la costante di Boltzmann. Il tempo di rilassamento è allora:

$$\tau = \frac{f}{k} \cong N^2 \frac{a^2 f_m}{k_B T} .$$

Un’analisi meno semplificata porta ad espressioni più dettagliate per il tempo di rilassamento. La più accettata è la relazione di Flory [9]:

$$\tau = \frac{\eta_s a^3 N^{\frac{3}{2}}}{k_B T} . \tag{2.1}$$

2.1.1 La reologia dei polimeri

Il comportamento dei materiali viene caratterizzato dal tipo di risposta alle sollecitazioni. Vengono detti elastici quei materiali per i quali si ha una relazione di proporzionalità tra lo sforzo e la deformazione. Questi seguono la legge di Hooke. Per i fluidi si cerca invece una relazione che lega lo

sforzo alla velocità di deformazione. La proporzionalità diretta tra i due descrive il comportamento dei flussi viscosi così detti newtoniani, tra i quali possiamo con ottima approssimazione annoverare l'acqua. Esiste tuttavia una grande quantità di materiali che presentano comportamenti differenti da entrambi i due casi esaminati, per i quali normalmente la relazione va cercata empiricamente. È questo il caso delle soluzioni polimeriche, il cui comportamento viene definito viscoelastico.

Se $\tau_{\alpha\beta}$ è il tensore degli sforzi, nel caso di flusso newtoniano le differenze:

$$N_1 = \tau_{xx} - \tau_{yy}$$

$$N_2 = \tau_{yy} - \tau_{zz}$$

che vengono normalmente chiamate differenze di stress normale e indicate con N_1 e N_2 rispettivamente, sono nulle. Nel caso di soluzione polimerica invece tali differenze sono non nulle, e questo ci induce a pensare che lungo le linee di flusso vi sia una componente di sforzo che nel caso newtoniano non era presente. Quello che si pensa è che i polimeri contribuiscano allo sforzo complessivo, deformandosi nella direzione del moto, e causando quindi un *extra-stress*. Nell'ambito dei vari modelli che verranno presi in esame questo contributo potrà essere valutato in termini delle grandezze fisiche del problema, contribuendo a dare un'idea dell'interazione tra polimeri e flusso.

2.1.2 I flussi viscoelastici

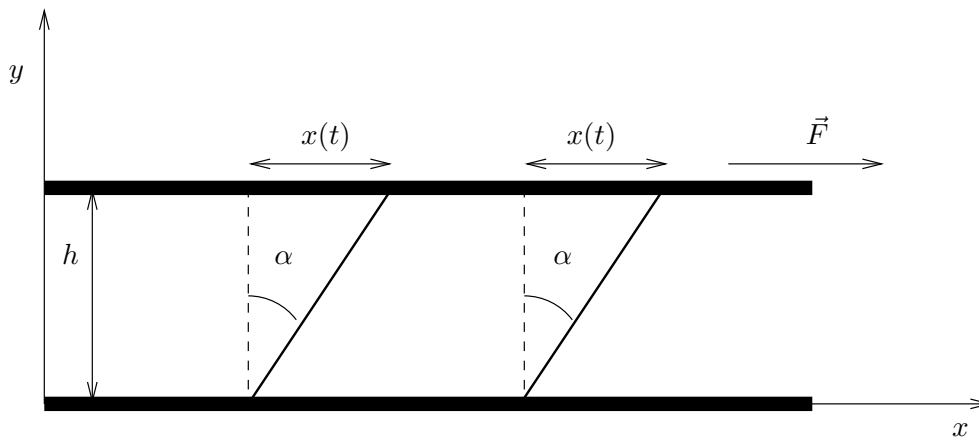


Figura 2.1: Flusso di shear semplice

Consideriamo l'esperimento ideale di fig.2.1 : supponiamo di avere un flusso tra due lastre molto estese una delle quali sia ferma nel sistema di

riferimento del laboratorio e l'altra sollecitata da una forza \vec{F} , diretta parallelamente alla lastra ferma, che porti all'istante t la lastra superiore alla distanza x dalla posizione originale. La deformazione del flusso in questione è definita come

$$\gamma = \frac{x}{h} = \frac{dx}{dy} = \tan \alpha$$

e la forza \vec{F} di cui si ha bisogno per avere una certa deformazione è proporzionale alla superficie A della piastra responsabile della distribuzione della forza sul flusso. Si definisce quindi

$$\tau = \frac{F}{A}$$

sforzo di taglio.

Le relazioni funzionali che legano queste due grandezze, la deformazione, e lo sforzo, definiscono classi diverse di materiali. Il comportamento di un certo materiale è infatti determinato, nella reologia, dalla risposta che esso fornisce a una certa sollecitazione, sia essa di taglio o meno.

Se la deformazione del corpo è proporzionale allo sforzo, abbiamo a che fare con un *corpo rigido elastico* o *solido di Hooke*. Se la deformazione è invece proporzionale allo sforzo asintoticamente nel tempo, allora abbiamo un *solido viscoelastico*.

Nel caso dei liquidi, la variabile utilizzata per descrivere le proprietà di deformazione è la velocità di deformazione:

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{x}}{h} = \frac{d\dot{x}}{dy} = \frac{d(\tan \alpha)}{dt}$$

Se la velocità di deformazione è proporzionale allo sforzo, il flusso è detto *puramente viscoso* o *newtoniano*. Se altrimenti la velocità di deformazione tende asintoticamente nel tempo ad essere proporzionale allo sforzo, il flusso è detto *viscoelastico*.

La relazione

$$\tau = \hat{\eta} \dot{\gamma}$$

è detta legge di Newton per i liquidi e i liquidi che la rispettano sono detti newtoniani. La costante $\hat{\eta}$ è detta viscosità di taglio dinamica.

I flussi viscoelastici invece sono flussi che presentano comportamento elastico e viscoso a seconda della scala temporale della deformazione. Le funzioni N_1 e N_2 sono entrambe dipendenti dalla velocità di deformazione.

Nel caso si abbia a che fare con flussi privi di sforzo di taglio, ovvero in cui il tensore degli sforzi è diagonale, la variabile che caratterizza la viscosità del flusso, è definita in modo differente dal caso di flusso di taglio. I flussi che possiedono questa proprietà sono detti flussi estensionali. In questi tipi di flussi possiamo scrivere una relazione tra la differenza di stress normale e la velocità di deformazione, chiamata in questo contesto velocità di

	Relazione tra deformazione e sforzo
Solidi elastici o di Hooke	$\gamma \propto \tau$
Solidi viscoelastici	$\gamma \propto (1 - e^{t/t^*})\tau$
Liquidi viscosi o newtoniani	$\dot{\gamma} \propto \tau$
Liquidi viscoelastici	$\dot{\gamma} \propto (1 - e^{t/t^*})\tau$

Tabella 2.1: Le definizioni dei materiali a seconda del rapporto tra deformazione sforzo.

allungamento $\dot{\epsilon}$:

$$\tau_{xx} - \tau_{yy} = \tau_{xx} - \tau_{zz} = \bar{\eta}(\dot{\epsilon})\dot{\epsilon}$$

dove abbiamo introdotto la cosiddetta viscosità elongazionale $\bar{\eta}$. La differenza tra flussi stazionari estensionali e di shear è che nel primo caso l'interdistanza tra particelle vicine segue nel tempo un andamento di tipo esponenziale, mentre nel secondo un andamento lineare.

Ci si può aspettare quindi che, quando si verifica un mutamento nella struttura interna del flusso ad opera della deformazione, le due situazioni esaminate presentino un comportamento molto differente del materiale.

2.2 La drag reduction

2.2.1 Le leggi di un flusso turbolento in un canale

La forza esercitata dal fluido su pareti fisiche viene normalmente chiamata *drag*. Questa forza dipende dalle caratteristiche della superficie della parete, e quindi dall'attrito che il fluido esercita sulla parete.

Consideriamo un tratto di canale rettilineo di raggio a e lunghezza l e trascuriamo le problematiche relative all'ingresso del canale. Supponiamo che all'interno del canale vi sia un flusso in moto turbolento, tale che il volume di fluido che attraversa una sezione del canale per unità di tempo sia Q , e che quindi la velocità media sia $U = \frac{Q}{\rho\pi a^2}$. A distanze $d \ll a$ dalla superficie del canale, la stessa superficie può essere considerata come un "piano infinito", il che ci autorizza a utilizzare localmente le leggi relative ai flussi turbolenti su piani infiniti. Si può vedere che vicino ad una parete infinita (si veda ad esempio [6]) la velocità media segue una legge di tipo logaritmico:

$$U = \frac{v_*}{\kappa} \log \frac{av_*}{\nu} \quad (2.2)$$

dove κ è la costante di Von Karman, e v_* ha le dimensioni di una velocità e può essere determinata dalla relazione:

$$\sigma = \rho v_*^2 \quad (2.3)$$

dove σ è lo sforzo sull'unità di superficie della parete, o anche la quantità di moto trasmessa dal fluido alla parete per unità di tempo e superficie.

Per mettere in relazione la velocità media con il gradiente di pressione lungo il canale possiamo osservare che la forza esercitata dalla pressione sul fluido nel canale è

$$F = \Delta p \pi a^2 \quad (2.4)$$

dove abbiamo indicato con Δp la differenza tra la pressione all'inizio del canale e quella alla fine. La forza d'attrito esercitata invece dalle pareti risulta essere:

$$F = 2\pi a l \rho v_*^2 \quad (2.5)$$

Eguagliando la (2.4) e la (2.5) otteniamo:

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{2\rho v_*^2}{a} \quad (2.6)$$

Questa legge, detta legge di resistenza del canale lega in modo semplice la caduta di pressione ai capi di un tratto di canale con la forza di attrito sulle pareti.

Una grandezza che spesso si misura, e che misura il rapporto tra sforzo di

taglio e quantità di moto fornita dal fluido alle pareti è il coefficiente di attrito f , definito da:

$$f = \frac{2a \frac{\Delta p}{l}}{\frac{1}{2} \rho U^2}$$

legato al numero di Reynolds dalla relazione implicita [6]

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \alpha_1 \ln \left(\frac{Re}{\sqrt{f}} \right) - \alpha_2$$

dove le costanti α_1 e α_2 sono da determinarsi empiricamente.

Vale la pena di notare che nel caso di flusso laminare il coefficiente di attrito è inversamente proporzionale al numero di Reynolds.

2.2.2 La drag reduction nel canale

Nello studio di flussi polimerici in un canale, uno dei fenomeni che si osservano è la presenza di una consistente riduzione delle forze di drag tra fluido e pareti rispetto al caso di in assenza di polimeri.

Questo fenomeno, che prende appunto il nome di *drag reduction*, è noto dalla fine degli anni '40, grazie a Toms [22], e tuttavia non possiede ancora una spiegazione teorica esauriente. Questa mancanza di comprensione deriva dal fatto che tale effetto riguarda due distinti campi di investigazione entrambi non ancora compresi a fondo: la turbolenza e il comportamento dei polimeri in soluzione.

La definizione di drag reduction qui accennata si riferisce innanzitutto alla differenza tra un liquido newtoniano e lo stesso liquido usato come solvente di una soluzione polimerica diluita [2]: le forze di drag nel primo caso sono maggiori che nel secondo. Le osservazioni sperimentali di *drag reduction* sono molteplici, e vasta è la letteratura in merito (si può vedere ad esempio [4]).

Per giungere a una visione d'insieme del meccanismo della drag reduction bisogna tenere conto di molteplici aspetti. L'influenza dei polimeri sul flusso si manifesta da un lato con una inibizione del processo turbolento, e in definitiva con un aumento della stabilità, e dall'altro con una modifica sostanziale di alcune grandezze del flusso, come il coefficiente di attrito, lo sforzo turbolento e lo spessore di strati che si vengono a creare. Se, e come, questi due aspetti siano correlati in qualche modo è argomento attuale di ricerca [10–14] e in parte materia di quello che segue.

2.2.3 La fenomenologia della drag reduction

Sotto certe condizioni nell'osservazione di un flusso turbolento in un canale, inserendo una piccola concentrazione di polimeri in un solvente newtoniano, si nota una diminuzione nel gradiente di pressione necessario a mantenere

una certa portata. È soprattutto nel canale che sono stati osservati e studiati casi di drag reduction, benché questo effetto presenti alcune caratteristiche che fanno pensare a proprietà più generali. Alcune osservazioni [2, 8, 20, 21] generali possono contribuire a capire il meccanismo:

1. i polimeri nei quali è più facilmente osservabile l'effetto sono quelli semplici a catena;
2. la flessibilità della molecola è un parametro che incrementa la *drag reduction*;
3. ad un ben preciso rapporto di grandezze tipiche del problema il fenomeno inizia ad essere evidente;
4. per basse concentrazioni c'è proporzionalità tra drag reduction e concentrazione;
5. c'è una riduzione della correlazione tra le fluttuazioni di velocità radiali e lungo al direzione del canale;
6. si osservano cambiamenti qualitativi e quantitativi del profilo medio di velocità;
7. c'è un'alterazione dello sforzo turbolento;
8. si osserva una riduzione della correlazione tra flusso e fluttuazioni della velocità radiale;
9. ci sono modificazioni della struttura turbolenta, specialmente vicino alle pareti;
10. si nota una diminuzione dei momenti di alto ordine per le fluttuazioni.

La concentrazione dei polimeri sembra essere un fenomeno chiave nello studio della drag reduction, in quanto l'effetto sembra essere evidente per una certa ben precisa concentrazione. Se essa viene incrementata, l'effetto diminuisce, e oltre un certo valore cessa di manifestarsi. Si pensa che questo sia dovuto alla coesistenza di due tipi di interazione: una tra i polimeri e il flusso, e una tra polimeri. Quando quest'ultima diventa predominante (alta concentrazione) non è più presente alcun effetto sul flusso.

Dallo studio di moti laminari¹ sappiamo che se una soluzione polimerica viene sottoposta a un campo di "taglio" (vedi par. 2.1.2), essa mostra un comportamento newtoniano. Se però la sottoponiamo a un forte di campo di "deformazione", la resistenza del flusso cresce. Un'ipotesi è che nel fenomeno della drag reduction intervenga un allineamento e una deformazione dei polimeri, che spiegherebbe il rafforzamento locale del flusso. In questa

¹Un flusso laminare è un flusso in cui non si osserva turbolenza.

ipotesi i polimeri non interagiscono gli uni con gli altri. Ma anche se i polimeri, in così basse concentrazioni, sono allungati e allineati, come sono essi in grado di influenzare il flusso? Proviamo a fare un calcolo grossolano per capire come si comportano i polimeri in un flusso: consideriamo una specie polimerica di massa molecolare 10^4 kg/mol in concentrazione a 10 ppm . Se il fluido è fermo le molecole formano dei gomitoli di raggio $a \sim 1.8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, e la distanza media tra i centri di massa delle molecole è circa $r \sim 1.2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Quando entra in gioco la deformazione i gomitoli si deformano, diventando ellissoidi, e nella loro forma più estesa diventano “aghi” con asse maggiore $b \sim 10^{-5} \text{ m}$ e asse minore $c \sim 2.7 \cdot 10^{-8} \text{ m}$. Nell’ipotesi che questi “aghi” siano allineati, la distanza trasversale che li divide è circa $4 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

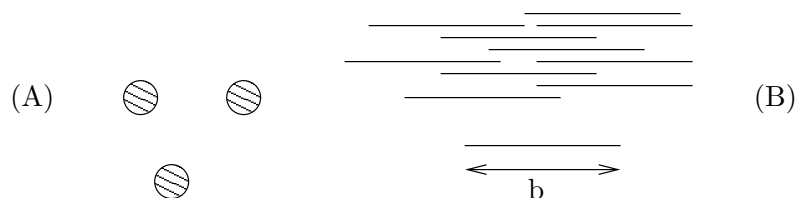


Figura 2.2: (A) Polimeri in configurazione “gomitolo”, (B) Polimeri in configurazione “ago”.

Con la notazione del paragrafo 2.2.1 si può definire il coefficiente di attrito come

$$f = \frac{a\Delta p}{\rho u_*^2 l} \quad (2.7)$$

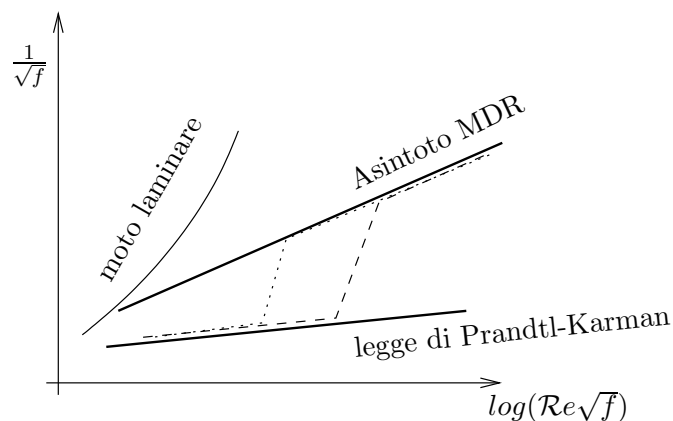


Figura 2.3: La legge di Prandtl-Karman (P-K) è quella seguita dai flussi newtoniani turbolenti in un canale. Le linee tratteggiate e puntate rappresentano due esempi di drag reduction, tracciate per diverse concentrazioni di polimeri. Quando le curve si allontanano dalla legge di Prandtl-Karman si ha l’inizio di evidenza del fenomeno (o *onset*). Nel grafico si vede anche l’asintoto MDR di “massima drag reduction”, comune a entrambe le curve [20].

e definire una coppia di coordinate, dette di *Prandtl-Karman* (o semplicemente P-K)

$$\left(\log(\mathcal{R}e\sqrt{f}), \frac{1}{\sqrt{f}}\right)$$

In queste coordinate sono particolarmente chiari due aspetti fondamentali della drag reduction: l'asintoto MDR (*Maximum Drag Reduction*) e l'onset [8]:

- L'asintoto MDR è l'espressione del fatto che oltrepassato un certo valore di soglia della concentrazione si ha una saturazione del fenomeno.
- Il cosiddetto "onset" è la coppia di coordinate del piano P-K in cui le curve relative a soluzioni polimeriche smettono di seguire il comportamento del solo solvente e si distaccano dalla corrispondente curva.

2.3 Modelli teorici

Esistono diverse teorie per spiegare quali sono i meccanismi fisici in gioco nella drag reduction e valutare qualitativamente sia quando subentra l'onset, sia da quali variabili sia controllato l'asintoto MDR. Quelle esposte qui di seguito sono quelle più diffuse. Una formulazione alternativa alle due proposte si può trovare in [16].

2.3.1 Il criterio temporale

Un prima spiegazione della drag reduction venne data da J.J.Lumley [2]. La sua teoria ha come base il cosiddetto criterio temporale, che può essere diviso in differenti elementi:

1. Affinché la turbolenza abbia qualche effetto sui polimeri, e cioè induca un loro allungamento, si deve verificare la condizione che la scala temporale tipica del campo di velocità turbolento sia molto minore del tempo di rilassamento del polimero. È da notare che, in generale, in una soluzione polimerica non ci sarà un unico tempo di rilassamento, ma uno spettro di tempi. In questo, e in molti altri approcci si considera tra tutti il maggiore, poiché è quello che contribuisce maggiormente all'effetto. Se infatti, come ipotizzato, la drag reduction dipende da effetti indotti dall'allungamento dei polimeri, quelli che contribuiranno maggiormente saranno proprio quelli con il tempo di rilassamento maggiore, poiché saranno quelli che spenderanno il maggior tempo allungati.
2. Quando la prima condizione è soddisfatta i polimeri sono sostanzialmente allungati. Questo passaggio è chiamato transizione *coil-stretch*.
3. C'è un aumento di viscosità di allungamento (vedi par. 2.1.2), e questo si manifesta preferenzialmente vicino alle pareti, poiché quella è la regione dove la velocità di deformazione è maggiore.
4. Si suppone che l'aumento della viscosità di allungamento sopprima le fluttuazioni turbolente, aumenti lo spessore dello strato limite e riduca l'attrito con le pareti.

Ad alti numeri di Reynolds la vorticità e la velocità di deformazione sono sostanzialmente scorrelate: per questo motivo c'è una probabilità abbastanza alta di trovare regioni con velocità di deformazione relativamente grande e vorticità relativamente piccola. Questa condizione è quella che garantisce il massimo allungamento delle molecole.

Cerchiamo ora di capire quali sono le differenze nella struttura turbolenta tra flussi newtoniani puri e flussi di newtoniani con aggiunta di polimeri, per individuare le zone del flusso in cui è favorito il massimo allungamento.

Si può vedere che l'unico cambiamento tra il caso newtoniano e il caso polimerico è la differente scala di lunghezza alla quale si posizionano i vari layer (vedi più avanti). I polimeri sono allungati nel flusso fuori dallo strato viscoso per le fluttuazioni della velocità di deformazione. L'allungamento causa un aumento della viscosità effettiva, che di riflesso esclude gli *eddy*² su scala dissipativa dalle zone elette a favorire l'allungamento³. Tutto questo porta a un aumento nello spessore degli strati turbolenti vicino alla parete, poiché in seguito all'aumento della viscosità, la zona viscosa diventerà più larga.

Consideriamo un flusso turbolento in un canale ad alti numeri di Reynolds, in cui la quantità di moto trasmessa alla parete sia tale da generare una velocità di attrito tipica v_* . Cerchiamo il comportamento asintotico del flusso, supponendo per il momento che la viscosità non sia coinvolta nello studio, e ripromettendoci di considerarla quando studieremo il flusso molto vicino al muro. Con semplici considerazioni dimensionali, e facendo riferimento all'equazione (2.3), si ottiene l'espressione

$$\frac{dU}{dy} = \frac{v_*}{\kappa y} \quad (2.8)$$

che integrata fornisce la ben nota legge del muro:

$$U = \frac{v_*}{\kappa} (\ln y + c). \quad (2.9)$$

In questo contesto non c'è una scala costante di lunghezza tipica del problema, ma la scala di lunghezza è stabilita da y . Inoltre, mentre la velocità media decresce con y , le piccole variazioni di velocità sono indipendenti da y . Per distanze y sufficientemente piccole, dobbiamo considerare la viscosità. Indichiamo con y_0 la scala spaziale corrispondente. Tale lunghezza può essere stimata come segue: se la scala della velocità è v_* il numero di Reynolds vale $Re \sim v_* y_0 / \nu$. La viscosità diventa importante se $Re \sim 1$, e questo fissa y_0 :

$$y_0 \sim \frac{\nu}{v_*}.$$

²Un *eddy* è una zona spaziale del flusso in cui la funzione di correlazione

$$\langle v_\alpha v_\beta \rangle$$

è sensibilmente diversa da zero. È una sorta di struttura coerente identificata da questa proprietà. In particolare un vortice, erronea traduzione di eddy, è una zona in cui vale questa proprietà, ed è per diritto, annoverato nella categoria di eddy, ma non è rappresentativo di questa classe di strutture.

³Le zone dominate dagli effetti viscosi sono zone in cui ci sono piccoli gradienti di velocità, e di conseguenza è poco favorito l'allungamento dei polimeri: se l'effetto dell'allungamento è un aumento della viscosità, negli strati viscosi i gradienti della velocità sono ulteriormente diminuiti, e a maggior ragione in tali strati lo "stretching" dei polimeri è sfavorito.

Lo strato definito dalla lunghezza y_0 è appunto lo strato viscoso, e fissa la costante di integrazione nella (2.9). Possiamo scegliere tale costante in modo tale che la velocità diventi dell'ordine di v_* a distanze dell'ordine di y_0 . Con questa scelta abbiamo che:

$$U = \frac{v_*}{\kappa} \ln\left(\frac{y v_*}{\nu}\right) \quad U \doteq \frac{1}{\kappa} \ln(y). \quad (2.10)$$

Considerando il fatto che nello strato logaritmico y è l'unica scala rilevante, possiamo supporre che il picco dello spettro di energia della velocità sia in corrispondenza del numero d'onda k_1 definito da:

$$k_1 y \doteq 1. \quad (2.11)$$

Tale numero d'onda è quello sui cui il sistema è forzato dall'esterno. In un flusso newtoniano si ha produzione di turbolenza tra il numero d'onda k_1 e un numero d'onda k_2 che per turbolenza newtoniana vale [9]:

$$k_2 \lambda_\eta \doteq 0.2. \quad (2.12)$$

La scala λ_η è detta scala dissipativa di Kolmogorov, ed è la più piccola scala turbolenta che esiste in un flusso. È sostanzialmente la scala alla quale, dopo il processo di cascata, l'energia della turbolenza, sottratta al flusso di fondo su scala molto maggiore, viene dissipata dalla viscosità. Tale scala è definita da:

$$\lambda_\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.13)$$

in cui ϵ è il tasso di crescita della dissipazione di energia turbolenta. Sappiamo che ϵ vale [9]:

$$\epsilon = \frac{v_*^4}{\kappa \nu y}$$

e la (2.12) diventa perciò:

$$\lambda_\eta = (\kappa y)^{\frac{1}{4}}. \quad (2.14)$$

Il punto in cui le due linee (2.11) e (2.12) si incontrano è caratterizzato dal fatto che la struttura della turbolenza diventa sostanzialmente dissipativa, e avvicinandosi ulteriormente al muro non è più in grado di organizzarsi in strutture.

Il fenomeno dell'onset

Consideriamo ora il rapporto tra la massima lunghezza y_* e la scala di lunghezza $1/k$ di un certo *eddy*. Esso è fornito dall'equazione:

$$\kappa y_* = \text{const.}$$

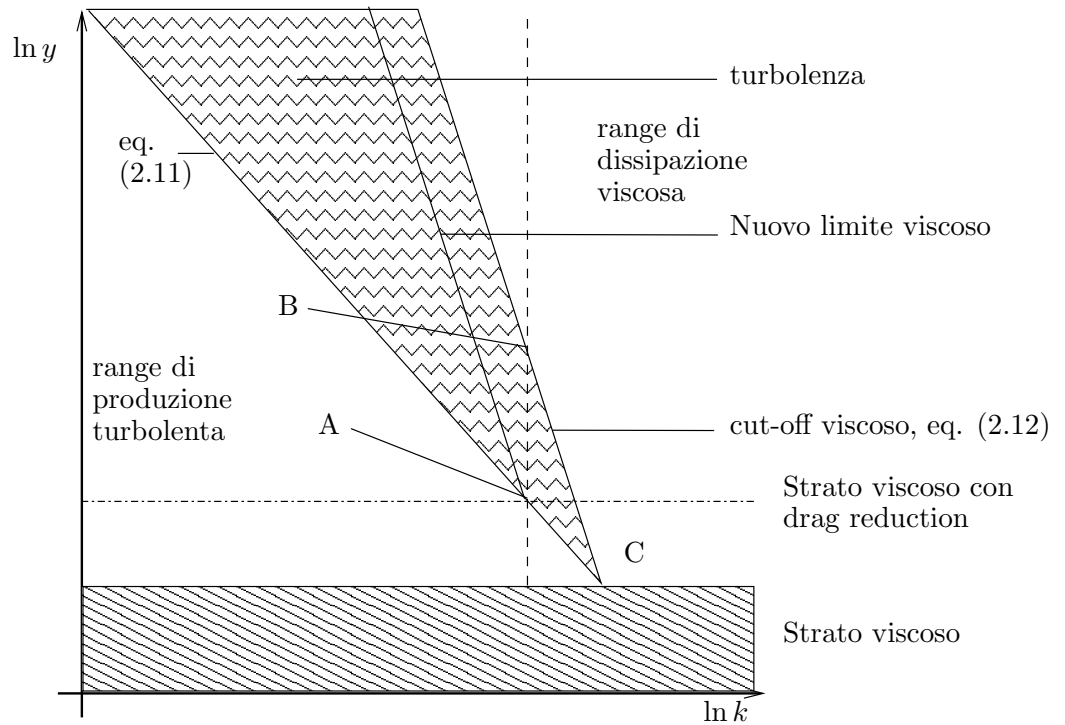


Figura 2.4: Relazioni di scala a sforzo costante di uno strato limite turbolento [2].

Questa relazione appare in fig.2.4 come una linea verticale tratteggiata. Quando lo sforzo sulla parete cresce tale linea si sposterà verso sinistra, poiché dipenderà dal valore di v_* . Per piccoli valori di v_* la linea sta sulla destra del punto indicato nella figura da C. In tal caso tutte le scale sono più grandi di y_* , e quindi il campo turbolento non è influenzato.

Appena la linea verticale oltrepassa C verso sinistra cominciano a verificarsi mutamenti del campo di velocità. Nella situazione mostrata nella figura la turbolenza non è modificata oltre l'ordinata di B, tra A e B sono influenzate solo le scale dissipative, e solo sotto l'ascissa di A sono influenzati gli eddy che contengono energia e in definitiva cambia il trasporto di quantità di moto. In sostanza, a seconda della grandezza degli eddy, la retta verticale tratteggiata di fig. 2.4 determina la regione in cui si ha drag reduction.

Uno strato viscoso più spesso, e quindi la presenza di drag reduction, si ha se l'intercetta tra produzione e dissipazione turbolenta (punto C) è spostata più lontano dalla parete: in tal caso, siccome la produzione è supposta essere costante, il cut-off viscoso deve spostarsi più a sinistra. Il valore limite di crescita dello strato viscoso è $y = y_A$, poiché altrimenti verrebbero modificate anche le scale di eddy a sinistra della linea verticale.

La regione alla destra del cut-off viscoso è dominata dalla viscosità, e non può essere influenzata da cambiamenti nelle scale turbolente.

Consideriamo ora il più grande tempo di rilassamento dei polimeri τ_1 , e confrontiamolo con la scala temporale di un eddy:

$$\tau_k = (k^2 \epsilon)^{-\frac{1}{3}}.$$

Il rapporto tra questo, e la più grande scala temporale τ_1 fornisce:

$$\tau_1 k^{\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{3}} = \text{const.} \quad (2.15)$$

Questa linea è rappresentata dalla retta con pendenza positiva di fig. 2.5. Il significato dei vari punti e rette è esattamente lo stesso della figura precedente. È chiaro come questo modello sia più diretto di quello “spaziale”: in quest’ottica si ha drag reduction quando il tempo dinamico tipico di un eddy è molto più piccolo del tempo di rilassamento massimo dei polimeri. IN questo caso la linea tratteggiata di fig. 2.5 cade a sinistra del punto C, e crea una zona di drag reduction.

La saturazione

Nel modello di Lumley basato sulle scale di lunghezza, la viscosità nello strato viscoso è tenuta fissa al valore newtoniano, ma si assume una viscosità aumentata nella regione turbolenta, che dipende dalla concentrazione.

Il nuovo valore della viscosità sposta il cut-off più a sinistra, e maggiore è la concentrazione, maggiore è lo spostamento del cut-off.

Nel modellino basato sui tempi invece non c’è bisogno di ipotizzare niente: quando il tempo tipico turbolento diventa più piccolo del tempo di rilassamento dei polimeri, la viscosità aumenta, e provoca uno spostamento della retta tratteggiata di figura 2.5. Essa, aumentando la viscosità si sposterà verso destra fino a raggiungere un punto in cui non è più possibile aumentare l’effetto di drag reduction: quando l’intersezione tra il layer viscoso e la linea tratteggiata è il punto A, la situazione si equilibria, e si satura.

La saturazione, perciò, può essere spiegata come un processo di feedback innescato da un aumento nella concentrazione. Non appena le molecole sono allungate dalla velocità di deformazione essa diminuisce, poichè la dissipazione per una data viscosità deve essere sempre la stessa. La riduzione nella velocità di deformazione ferma l’allungamento, e si crea uno stato di equilibrio in cui le molecole sono parzialmente estese. A questo punto si verifica un aumento di viscosità che è sufficiente a mantenere le molecole estese. Se vengono aggiunti polimeri l’allungamento medio diminuisce, e la drag reduction rimane sostanzialmente la stessa.

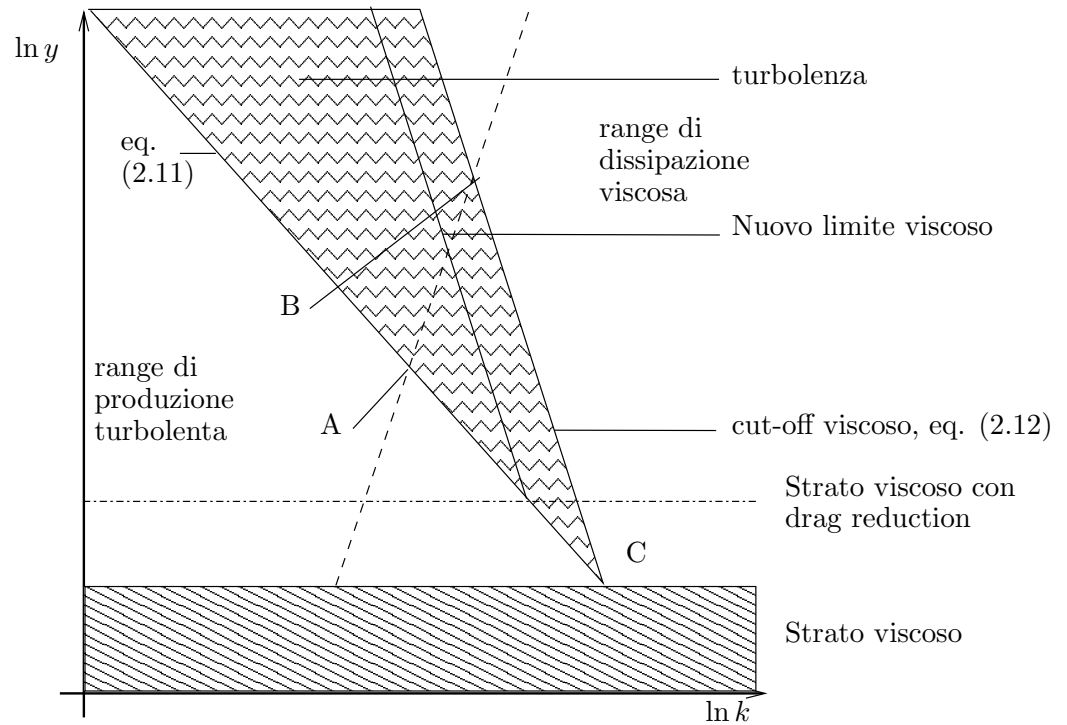


Figura 2.5: Relazioni di scala a sforzo costante di uno strato limite turbolento: la versione "temporale". La turbolenza a destra della linea tratteggiata ha una scala temporale tipica minore di un tempo fissato. [2].

Il problema di questo modello è che viene introdotta una "rinormalizzazione" della viscosità, che conduce in ultima analisi a una spiegazione che coinvolge meccanismi molecolari. È noto invece che i polimeri, anche nel regime diluito, si comportano elasticamente. È per questa ragione che è stato elaborato un criterio che pone le sue fondamenta su argomenti di elasticità.

2.3.2 Il criterio energetico

Questo modello, formulato da Tabor e DeGennes verso la fine degli anni '80 [23,24], nasce dall'osservazione che non avviene nessuna transizione *coil-stretch* in flussi con fluttuazioni della velocità di deformazione casuali, e dal fatto che se le molecole sono debolmente allungate non c'è nessuna variazione misurabile della viscosità.

In questa visione, detta teoria elastica, i polimeri cominciano ad influenzare il flusso quando l'energia elastica accumulata diventa comparabile con l'energia della turbolenza. Le proprietà di deformazione del campo turbolento ci inducono a pensare che l'energia elastica aumenti con il diminuire della

scala di lunghezza della turbolenza. L'energia della turbolenza invece diminuisce con la sua stessa scala di lunghezza. Quando queste due diventano paragonabili, l'energia elastica interagisce con il processo di cascata turbolento, mutando la scala di "arrivo", cioè la scala dissipativa. Un processo di cascata turbolento è una sequenza di interazione di eddy che porta come stadio finale, in condizioni newtoniane, ad una scala dissipativa detta di Kolmogorov (vedi eq. (2.13)). In presenza di polimeri l'arrivo a questa scala sembra essere inibito, e cioè il processo non lineare che genera le piccole scale termina ad una scala maggiore di quella di Kolmogorov. Questa nuova scala può portare ad un maggiore spessore dello strato limite e alla riduzione della forza di drag.

Alcune analisi sperimentali mostrano che c'è una marcata dipendenza dell'effetto di drag reduction dalla concentrazione dei polimeri, dipendenza che non è del tutto evidente nell'approccio temporale. Mentre le teorie che coinvolgono esplicitamente l'estensione dei polimeri possono introdurre un livello di concentrazione di soglia dei polimeri solo indirettamente, attraverso la spiegazione dell'onset, la teoria elastica introduce una spiegazione chiara e diretta di questo fatto.

Consideriamo la situazione ad alti numeri di Reynolds, lontano dalle pareti, e ipotizziamo che vi sia omogeneità della turbolenza. Questa ipotesi è ragionevole, ed è sufficiente per permetterci di considerare la teoria $K41$ (Kolmogorov, 1941 [1]). Il processo di cascata sopra menzionato avviene tra una scala di partenza, che chiameremo grande scala, e una scala di arrivo dissipativa. Le scale comprese tra queste due fanno parte del cosiddetto *range inerziale*.

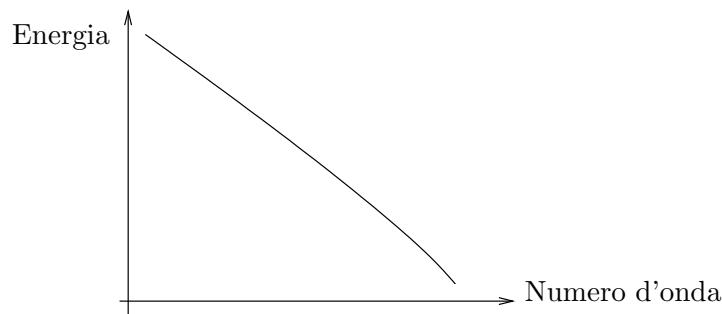


Figura 2.6: Andamento qualitativo dell'energia della turbolenza in funzione del numero d'onda nella teoria di Kolmogorov. La zona lineare è detta range inerziale.

Ad ogni scala r del range inerziale corrisponde una scala temporale data da:

$$\tau_r = \left(\frac{r^2}{\langle \chi \rangle} \right)^{1/3} \quad (2.16)$$

dove $\langle \chi \rangle$ è la dissipazione media dell'energia cinetica turbolenta. Se consi-

deriamo come scala r la scala di Kolmogorov otteniamo la più piccola scala di tempo presente nel campo turbolento:

$$\tau_r = \left(\frac{\nu}{\langle \chi \rangle} \right)^{1/3} . \quad (2.17)$$

Per un certo flusso, ed un certo tipo di polimeri esisterà una scala di lunghezza r^* , la cui scala di tempo corrispondente τ_{r^*} è uguale al tempo di rilassamento del polimero τ . Tale scala può essere calcolata considerando che la scala di velocità tipica afferente a r^* sarà⁴:

$$u_{r^*} = (r^* \langle \chi \rangle)^{1/3} . \quad (2.18)$$

Possiamo così ricavare r^* come segue:

$$r^* = u_{r^*} \tau . \quad (2.19)$$

Le molecole saranno allungate da tutte le scale turbolente $r < r^*$. La teoria elastica prevede che vi sia un regime, definito da $r^{**} < r < r^*$ in cui i polimeri non hanno nessun effetto sul flusso, e subiscono passivamente la deformazione dell'elemento di volume fluido nel quale sono immersi. Questo significa che mentre le scale più piccole di r^* hanno la proprietà di influenzare i polimeri, quelle sopra r^{**} non sono modificate dai polimeri. La scala r^{**} è definita dal criterio energetico descritto (vedi fig. 2.7), ovvero l'energia elastica per unità di volume immagazzinata nei polimeri ad una certa scala deve eguagliare l'energia turbolenta per unità di volume a tale scala. Le scale al di sotto di r^{**} sono fortemente influenzate dai polimeri.

Per stimare la scala r^{**} dobbiamo calcolare due quantità: l'allungamento R dei polimeri ad una data scala $r < r^*$, e il tipo di dipendenza dell'energia elastica dall' allungamento.

Per quello che riguarda il primo problema, la teoria prevede che per l'allungamento vi sia un andamento del tipo potenza:

$$R(r) = \left(\frac{r^*}{r} \right)^p \quad r < r^* \quad (2.20)$$

dove p dipende dalla dimensione geometrica dell'allungamento, ed è 1 nel caso bidimensionale e 2 nel caso tridimensionale. Questa legge mostrata in fig. 2.7 è valida in tutto il range in cui i polimeri sono influenzati dal flusso, ma non implica, come precedentemente notato, che essi abbiano un effetto apprezzabile sul flusso.

Per valutare la dipendenza dell'energia elastica dall'allungamento possiamo ragionare come segue: la teoria di De Gennes prevede che l'energia elastica vari secondo il fattore

$$GR^{5/2}(r) \quad G = \frac{nk_B T}{N} \quad (2.21)$$

⁴I coefficienti dell'ordine dell'unità di queste relazioni sono omissi perché non noti.

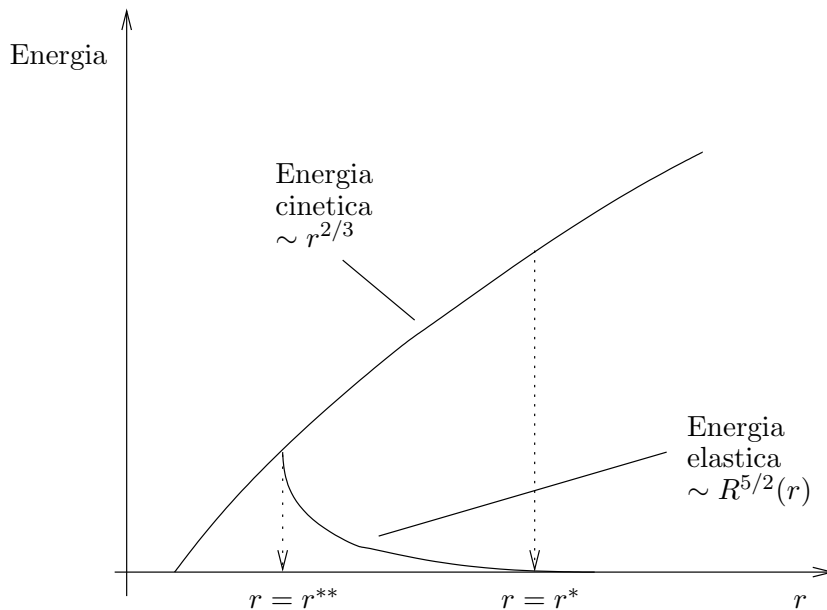


Figura 2.7: Identificazione della scala r^{**} secondo gli andamenti della $K41$. L'andamento dell'energia elastica al di sotto di tale scala non è riportato poiché non vi sono ancora strumenti per capirlo a fondo.

dove la dipendenza quadratica dell'energia elastica dall'allungamento è sostituita da una potenza $5/2$ per considerazioni dovute all'interazione repulsiva di polimeri vicini.

Segue che la scala r^{**} è data da:

$$GR^{5/2}(r^{**}) = \rho u_{r^{**}}^2 \quad (2.22)$$

dove il secondo membro rappresenta l'energia cinetica della turbolenza alla scala r^{**} . Questa equazione lega la scala r^{**} alla concentrazione dei polimeri. Per concentrazioni molto basse infatti la scala r^{**} è più piccola della scala di Kolmogorov, ed è un regime in cui i polimeri non influenzano il flusso. Ci sarà una concentrazione di soglia per la quale vale:

$$r^{**} = \lambda_\eta \quad (2.23)$$

che è la scala dalla quale comincia a manifestarsi l'effetto dei polimeri, ed è proprio l'onset della drag reduction. È interessante notare come il peso molecolare non interviene in modo diretto nella descrizione della drag reduction, ma è insito nel valore di N , il numero di monomeri per molecola. Aumentando la concentrazione dei polimeri si ottengono una serie di effetti:

- i. la scala r^{**} può raggiungere ed eventualmente eguagliare la scala r^* , così da rendere minimo l'allungamento necessario a rendere uguali l'energia elastica e quella turbolenta.

- ii. si può verificare un'interazione tra le molecole vicine tale da rendere la velocità di deformazione un meccanismo non capace di provocare l'allungamento delle molecole.
- iii. in flussi non omogenei può anche essere possibile che la velocità di deformazione locale sia così alta da estendere tutti i polimeri e portare ad un regime dominato dalla viscosità elongazionale (o di allungamento)

Se $r^{**} \sim a$ allora siamo nel regime MDR. Anche una piccola crescita dell'allungamento rende le due energie comparabili.

La teoria elastica riesce quindi a quantificare gli effetti dell'aggiunta di polimeri, ma molti meccanismi in quest'ambito non sono ancora ben compresi. Inoltre, per evitare complicazioni nel campo turbolento abbiamo supposto che esso sia omogeneo e che la velocità di deformazione abbia proprietà statistiche ben definite. Le conclusioni della teoria di De Gennes sono perciò legate a queste ipotesi, in assenza delle quali lo studio di questo problema presenta difficoltà aggiuntive.

2.4 Modelli di polimeri in soluzione

Esistono innumerevoli modelli di polimeri in soluzione, che cercano di riprodurre le osservazioni sperimentali (cfr. [3]), ad esempio la tendenza ad allinearsi lungo la direzione del flusso medio, la resistenza all' allungamento per il movimento della catena, etc. Ne considereremo alcuni che fanno capire come si possa tener conto dei polimeri nello studio della turbolenza.

2.4.1 Il modello "Dumbbell"

Il modello dumbbell [5] prende in considerazione polimeri costituiti da due sfere di masse m_1 e m_2 e raggi a_1 e a_2 rispettivamente, collegati da una molla. Indichiamo con \vec{r}_1 e \vec{r}_2 le posizioni delle sfere, e con $\vec{R} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ la loro interdistanza. Consideriamo in questo modello le seguenti approssimazioni:

- ci sono n dumbbell per unità di volume, sospesi in un solvente newtoniano di viscosità η_s , e non ci sono gradienti di concentrazione. Si suppone che la soluzione sia abbastanza diluita da fare in modo che i dumbbell non interagiscano tra di loro
- quando i dumbbell si muovono nel solvente, le sfere subiscono una forza idrodinamica data dalla legge di Stokes, che dice che la forza sulla μ -esima sfera è proporzionale alla velocità relativa tra flusso e sfera attraverso la costante ζ_μ , detta coefficiente di attrito, data da

$$\zeta_\mu = 6\pi\eta_s a_\mu$$

Questa forza è responsabile dell'allungamento e dell'orientamento del polimero nel flusso.

- applicando la legge di Stokes si suppone implicitamente che il flusso non cambi vicino alle molecole, effetto che in generale c'è, e di cui si può tenere conto valutando l'interazione idrodinamica.
- si suppone che i dumbbell siano così piccoli da risentire di un moto browniano associato al rumore termico, responsabile di una forza:

$$\vec{f}_b = -KT\vec{\partial}_\mu \ln \psi$$

dove $\vec{\partial}_\mu$ è il gradiente rispetto alle coordinate μ^5 , e

$$\psi(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, t) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2$$

è il numero di dumbbell che si trovano nello spazio delle configurazioni tra \vec{r}_1 e $\vec{r}_1 + d\vec{r}_1$ e tra \vec{r}_2 e $\vec{r}_2 + d\vec{r}_2$. La funzione ψ è la densità di probabilità relativa al vettore \vec{R} .

⁵ovvero:

$$\vec{\partial}_\mu = (\partial_{x_\mu}, \partial_{y_\mu}, \partial_{z_\mu})$$

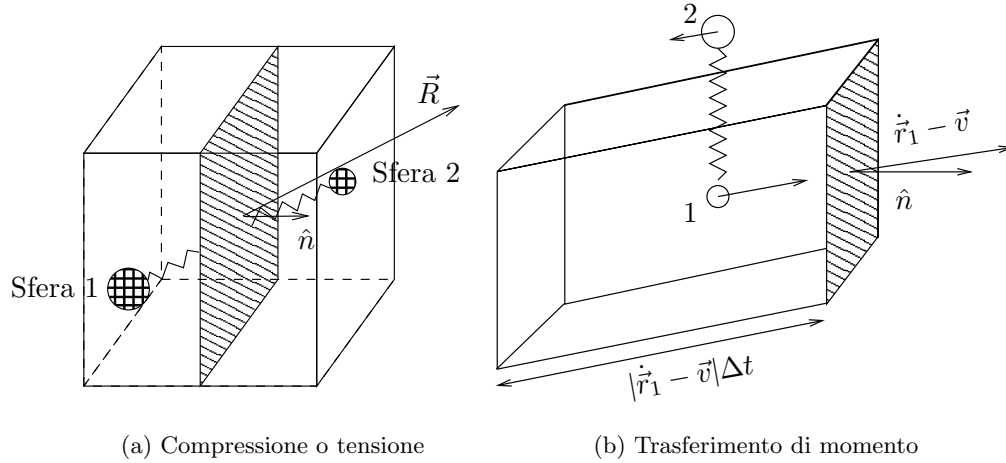


Figura 2.8: Contributi polimerici al tensore degli sforzi

Le quantità cinematiche dei fluidi viscoelastici dipendono spesso anche dalla storia passata di un certo elemento fluido. Per valutare questo effetto si può ricorrere alla derivata di Oldroyd (o *codeformazionale*), che permette di valutare le variazioni di una quantità fluidodinamica in un fluido che si deforma ricorrendo ad un sistema 'codeformante', ovvero che si deforma con il fluido. La derivata di Oldroyd indicata con $\mathfrak{d}/\mathfrak{d}t$ è definita come segue:

$$\frac{\mathfrak{d}A}{\mathfrak{d}t} = \frac{dA}{dt} - \frac{1}{2}(\dot{\gamma}A + A\dot{\gamma}) \quad (2.24)$$

$$\frac{\mathfrak{d}A_{\alpha\beta}}{\mathfrak{d}t} = \frac{dA_{\alpha\beta}}{dt} - \frac{1}{2}(\mathcal{D}_{\alpha\gamma}A_{\gamma\beta} + A_{\alpha\gamma}\mathcal{D}_{\gamma\beta}) \quad (2.25)$$

dove $\dot{\gamma}$ è la velocità di deformazione. La derivata di Oldroyd è uno strumento molto utile nella meccanica dei continui e consente come vedremo di ottenere dei risultati in modo semplice.

Grazie allo studio della funzione ψ , e tenendo conto delle equazioni del moto per le due sfere otteniamo l'evoluzione temporale codeformazionale del tensore di conformazione $\langle R_\alpha R_\beta \rangle$:

$$\frac{\mathfrak{d}\langle R_\alpha R_\beta \rangle}{\mathfrak{d}t} = \frac{4k_B T}{\zeta} \delta_{\alpha\beta} - \frac{4}{\zeta} \langle R_\alpha F_\beta^{(c)} \rangle \quad (2.26)$$

Conoscendo le distribuzioni di probabilità del vettore \vec{R} possiamo anche esprimere il contributo dei polimeri allo sforzo. Lo sforzo totale sarà dato infatti da:

$$\mathcal{S}_{s\alpha\beta} + \mathcal{S}_{p\alpha\beta} = -p_s \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{T}_{s\alpha\beta} - p_p \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{T}_{p\alpha\beta} \quad (2.27)$$

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta} = \mathcal{T}_{s\alpha\beta} + \mathcal{T}_{p\alpha\beta} = -\eta_s \mathcal{D}_{\alpha\beta} + \mathcal{T}_{p\alpha\beta} \quad (2.28)$$

Il contributo dei polimeri allo sforzo tra regioni limitrofe del fluido è dovuto principalmente a due distinti meccanismi di scambio di quantità di moto:

- a. un piano arbitrario del flusso può essere intersecato dalla molla che collega due sfere, e ci sarà a cavallo di questa superficie una forza di tensione o compressione trasmessa attraverso la molla
- b. una o entrambe le sfere possono attraversare il piano recando un trasferimento di momento

Per quello che riguarda i contributi di tipo 'a.' possiamo ragionare come segue: consideriamo un piano che si muove con il flusso alla velocità $\vec{v} = v\hat{n}$, con \hat{n} versore ortogonale al piano, e costruiamo un cubo che abbia due facce ortogonali ad \hat{n} e le altre quattro parallele ad \hat{n} , in modo tale che il suo centro sia il centro di massa del dumbbell, e che lo contenga tutto al suo interno. Se il volume del cubo è l'inverso della concentrazione $\frac{1}{n}$ la probabilità che il dumbbell attraversi il piano passante per il centro del cubo e con versore normale \hat{n} è:

$$\frac{\hat{n} \cdot \vec{R}}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}}.$$

Questa probabilità va moltiplicata per la probabilità di trovare quel dumbbell con quel vettore di conformazione \vec{R} , e cioè:

$$\psi(\vec{R}, t) d\vec{R}.$$

Dividendo per la superficie e considerando che questo contributo corrisponde a $\hat{n} \cdot \mathcal{S}_p^{(a)}$, e cioè allo sforzo generato dalla forza di richiamo \vec{F} . Il contributo finale allo sforzo sarà

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_p^{(a)} &= -n \int R_\alpha F_\beta \psi(\vec{R}, t) d\vec{R} \\ &= -\frac{n}{2} \langle R_\alpha F_\beta + R_\beta F_\alpha \rangle. \end{aligned} \quad (2.29)$$

I contributi di tipo 'b.' possono essere invece valutati nel seguente modo: sappiamo che le sfere che passano attraverso una superficie arbitraria del flusso contribuiscono allo sforzo totale per un trasferimento di quantità di moto. Allora dobbiamo chiederci quante sfere μ -esime con velocità \vec{r}_μ attraversano questa superficie nell'intervallo di tempo Δt . Queste saranno date dal volume del parallelepipedo in figura, moltiplicate per il numero di dumbbell per unità di volume:

$$n \left((\vec{r}_\mu - \vec{v}) \cdot S\hat{n} \right) \Delta t \quad (2.30)$$

e allora il momento trasportato attraverso la superficie è:

$$n \left(\vec{r}_\mu - \vec{v} \right) S\hat{n} m_\mu \left(\vec{r}_\mu - \vec{v} \right). \quad (2.31)$$

Considerando la distribuzione delle velocità, si vede che in definitiva si ottiene:

$$\mathcal{S}_{p\alpha\beta}^{(b)} = 2nk_B T \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.32)$$

Possiamo quindi riordinare i termini dei contributi 'a.' e 'b.' tenendo conto di come si modificano i termini all'equilibrio e dell'equazione (2.27):

$$\mathcal{T}_{p\alpha\beta} = -n\langle R_\alpha F_\beta \rangle + nk_B T \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.33)$$

2.4.2 Il modello FENE-P

Il modello appena descritto contiene nelle sue linee generali i due modelli FENE-P e Oldroyd-B, a patto di specificare e caratterizzare la forza \vec{F} di richiamo. Infatti il modello dumbbell non contiene nessuna ipotesi su tale forza, e la sua caratterizzazione può farci arrivare ad un'equazione reologica di stato per una soluzione polimerica.

Il modello FENE (Finite Extendable Nonlinear Elastic) [5] tiene conto del fatto che i polimeri non sono infinitamente allungabili, e considera una lunghezza massima oltre la quale il polimero comincia a deteriorarsi (cosa che effettivamente succede). Nell'espressione di \vec{F} allora dovremo considerare:

$$\vec{F} = \frac{k}{1 - \left(\frac{R}{R_{max}}\right)^2} \vec{R}. \quad (2.34)$$

Una approssimazione vantaggiosa consiste nel valutare il fattore di proporzionalità nella forza per $\langle R^2 \rangle$ invece che per R^2 . Questo, dato che si suppone di conoscere la distribuzione di probabilità del vettore \vec{R} , è una quantità direttamente calcolabile dal modello dumbbell. Tale semplificazione prende il nome di approssimazione di Peterlin, e da origine al modello FENE-P. È da notare che il modello FENE, non condurrebbe ad un'equazione chiusa per il tensore degli sforzi, e questo ne ridurrebbe di molto l'applicabilità.

Ricordando l'espressione per la costante elastica k e per il tempo di rilassamento del polimero:

$$k = \frac{k_B T}{Na^2} \quad \tau = \frac{\eta_s a^3 N}{k_B T}$$

possiamo sostituire la forma di \vec{F} nella (2.26) ottenendo:

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{d}\langle R_\alpha R_\beta \rangle}{\mathfrak{d}t} &= \frac{4k_B T}{6\pi\eta_s a} \delta_{\alpha\beta} - \frac{4}{6\pi\eta_s a} \frac{k_B T}{Na^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\langle R_\gamma R_\gamma \rangle}{R_{max}^2}\right)} \langle R_\alpha R_\beta \rangle \\ &= \frac{2}{3\pi} \frac{a^2 N}{\tau} \delta_{\alpha\beta} - \frac{2}{3\pi} \frac{1}{\tau} \frac{1}{1 - \left(\frac{\langle R_\gamma R_\gamma \rangle}{R_{max}^2}\right)} \langle R_\alpha R_\beta \rangle. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Con il metodo usato nel paragrafo 1.1.3 possiamo scrivere le equazioni adimensionali facendo uso del parametro adimensionale \mathcal{De} , detto numero di

Deborah e spesso identificato con il numero di Weissenberg. Tale parametro analogamente al numero di Reynolds confronta il 'peso' di due effetti, uno inerziale e l'altro viscoelastico. Il parametro De si ottiene confrontando il tempo di rilassamento del polimero con il tempo tipico del flusso turbolento, ovvero:

$$De = \frac{\tau U_0}{L_0}. \quad (2.36)$$

Con questo parametro l'equazione (2.35) diventa:

$$\frac{\delta \langle R_\alpha R_\beta \rangle}{\delta t} \doteq \frac{1}{De} \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{De} \frac{1}{1 - \left(\frac{\langle R_\gamma R_\gamma \rangle}{R_{max}^2} \right)} \langle R_\alpha R_\beta \rangle \quad (2.37)$$

dove i fattori numerici sono stati inglobati nelle unità di misura U_0 e L_0 . Per inciso se i valori di a e N sono stati scelti nel modo corretto abbiamo che:

$$\langle R^2 \rangle = R_0^2 = a^2 N \quad \text{all'equilibrio.}$$

A questo punto siamo in grado utilizzando l'eq. (2.33) di valutare il tensore degli sforzi in funzione dell'allungamento in maniera esplicita:

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta} = -n \frac{k}{1 - \left(\frac{\langle R_\gamma R_\gamma \rangle}{R_{max}^2} \right)} \langle R_\alpha R_\beta \rangle + nk_B T \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.38)$$

Analogamente a quanto fatto per l'evoluzione del tensore di conformazione esprimiamo le equazioni in modo adimensionale, tenendo conto che

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta} = \frac{U_0 \eta_s}{L_0} \mathcal{T}'_{\alpha\beta} = \frac{De \eta_s}{\tau} \mathcal{T}'_{\alpha\beta}.$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\alpha\beta} &= -nk_B T \left(\frac{1}{R_{max}^2} \frac{1}{1 - \frac{\langle R_\gamma R_\gamma \rangle}{R_{max}^2}} \langle R_\alpha R_\beta \rangle - \delta_{\alpha\beta} \right) = \\ &= \frac{U_0 \eta_s}{L_0} \mathcal{T}'_{\alpha\beta} = \frac{De \eta_s}{\tau} \mathcal{T}'_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.39)$$

e, raggruppando i fattori e introducendo la quantità

$$\eta_p = \frac{nk_B T \tau}{\eta_s}$$

se ne deduce

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\alpha\beta} &\doteq \frac{\eta_p}{De} \left(\frac{1}{1 - \frac{\langle R_\gamma R_\gamma \rangle}{R_{max}^2}} \langle R_\alpha R_\beta \rangle - \delta_{\alpha\beta} \right) \doteq \\ &\doteq \frac{\eta_p}{De} [f(\langle R_\gamma R_\gamma \rangle) \langle R_\alpha R_\beta \rangle - \delta_{\alpha\beta}]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Si è a questo punto in grado di inserire il contributo polimerico allo stress nell'equazione di Navier-Stokes, e almeno in linea di principio, aggiungendo l'equazione temporale per il tensore di conformazione, ci si può confrontare con un problema differenziale ben posto. Questo, come più volte ribadito, non significa affatto che saremo in grado di risolverlo.

Sostituendo allora i risultati sin qui raggiunti nell'equazione (1.4) otteniamo:

$$\begin{cases} \partial_t v_\alpha + v_\beta \partial_\beta v_\alpha \doteq - \partial_\alpha p + \frac{1}{\mathcal{R}e} \partial^2 v_\alpha + \\ \quad + \frac{\eta_p}{\mathcal{R}e \mathcal{D}e} \partial_\beta [f(\langle R_\gamma R_\gamma \rangle) \langle R_\beta R_\alpha \rangle - \delta_{\beta\alpha}] \\ \frac{\mathfrak{d}\langle R_\alpha R_\beta \rangle}{\mathfrak{d}t} \doteq - \frac{1}{\mathcal{D}e} \langle R_\alpha R_\beta \rangle + \frac{1}{\mathcal{D}e} \delta_{\alpha\beta}. \end{cases} \quad (2.41)$$

Il sistema (2.41), con l'aggiunta delle opportune condizioni al contorno, rappresenta una generalizzazione del problema di Navier-Stokes al caso della soluzione polimerica.

2.4.3 Il modello Oldroyd-B

Questo modello [15] considera una forza di richiamo lineare tra le sfere, del tipo:

$$\vec{F} = k\vec{R}.$$

Naturalmente il modello di Oldroyd è corretto soltanto se $R \ll R_{max}$. I polimeri, infatti, non sono molle ideali e perciò l'approssimazione lineare è corretta solo fino ad un certo valore di R , dopodiché la risposta cambierà in funzione dell'allungamento, e ad un certo valore di R il polimero comincerà a deteriorarsi, come preannunciato nel paragrafo precedente. Le equazioni costitutive per il modello di Oldroyd sono perciò un caso particolare del modello FENE con $f = 1$. Per il tensore degli sforzi avremo allora:

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta} \doteq \frac{\eta_p}{\mathcal{D}e} (\langle R_\alpha R_\beta \rangle - \delta_{\alpha\beta}) \quad (2.42)$$

e le equazioni di Navier-Stokes generalizzate diventeranno:

$$\begin{cases} \partial_t v_\alpha + v_\beta \partial_\beta v_\alpha \doteq - \partial_\alpha p + \frac{1}{\mathcal{R}e} \partial^2 v_\alpha + \\ \quad + \frac{\eta_p}{\mathcal{R}e \mathcal{D}e} \partial_\beta [\langle R_\beta R_\alpha \rangle - \delta_{\beta\alpha}] \\ \frac{\mathfrak{d}\langle R_\alpha R_\beta \rangle}{\mathfrak{d}t} \doteq - \frac{1}{\mathcal{D}e} \langle R_\alpha R_\beta \rangle + \frac{1}{\mathcal{D}e} \delta_{\alpha\beta}. \end{cases} \quad (2.43)$$

Il modello Oldroyd porta ad un'equazione in forma chiusa per il tensore degli sforzi che accoppiata all'equazione del moto generalizzata e con le opportune condizioni al contorno rappresenta il sistema fisico 'soluzione polimerica diluita in un flusso newtoniano' in regime di basso allungamento. I più importanti problemi del modello Oldroyd-B, già in parte enucleati, sono:

1. il fluido ha uno spettro di tempi di rilassamento. Il modello Oldroyd ne contiene uno solo.
2. i polimeri sono schematizzati come molle di Hooke, cosa che sappiamo essere vera solo per il regime di basso allungamento.
3. il modello predice una crescita potenzialmente illimitata della viscosità di allungamento quando il tensore velocità di allungamento dovesse superare un certo valore critico. Siccome le molecole non sono infinitamente estensibili il valore della viscosità di allungamento satura quando le molecole sono estese fino al valore R_{max} .

Le equazioni costitutive del modello Oldroyd-B possono ovviamente essere modificate per risolvere queste questioni, ma il prezzo da pagare è una maggiore complicazione di calcolo.

Analisi di stabilità effettuate tenendo conto dell'intero spettro di tempi dei polimeri (cfr. [25], pag. 216, [26, 27]), mostrano tuttavia che si ha una variazione dei parametri critici di un fattore modesto (circa 2).

2.4.4 Gli sviluppi recenti

Un approccio che ha portato a qualche risultato apprezzabile è quello usato in [10, 11]. Si tratta di valutare quali sono i vari regimi di allungamento, e quindi di drag reduction, cercando di capire qual'è la forma della distribuzione di probabilità di R , e facendo uso di un parametro di controllo che renda conto in qualche modo del comportamento caotico del sistema. Un indice del comportamento caotico del sistema è l'esponente di Lyapunov; esso contiene informazioni sulla dipendenza dell'evoluzione di un sistema dinamico dalle condizioni iniziali. Nel linguaggio fluidodinamico l'esponente di Lyapunov è una misura di quanto distano due traiettorie lagrangiane di particelle fluide partite molto vicine dopo un certo tempo⁶.

Supponiamo per il momento che i polimeri non influenzino il flusso nel quale si muovono; l'idea è quella di cercare di valutare la distribuzione di probabilità considerando per \vec{R} l'equazione:

$$\frac{d}{dt}R_\alpha = R_\beta \partial_\beta v_\alpha - \frac{1}{\tau}R_\alpha. \quad (2.44)$$

Si può vedere che

$$R = \tilde{R}e^\rho \quad \frac{d}{dt}\rho = n_\alpha n_\beta \partial_\beta v_\alpha \quad (2.45)$$

$$\frac{d}{dt}n_\alpha = n_\beta \partial_\beta v_\alpha - n_\alpha n_\beta \partial_\beta v_\alpha n_\alpha \quad (2.46)$$

⁶Per flussi random il parametro $\lambda\tau$ gioca il ruolo del numero di Deborah, ed è rappresentativo del valore medio del tensore velocità di deformazione, determinato dalla grandezza degli eddy a quella determinata scala.

con $\vec{R} = R\hat{n}$ e \tilde{R} è la posizione di equilibrio. In questa visione si può valutare (vedi [11]) la distribuzione di probabilità:

$$\mathcal{P}(R) \sim \tilde{R}^\alpha R^{-\alpha-1}. \quad (2.47)$$

Se l'esponente α è positivo, l'integrale di normalizzazione $\int dR \mathcal{P}(R)$ è determinato dai valori di R piccoli, il che significa che la maggior parte delle molecole è nella posizione di equilibrio. In caso contrario ($\alpha < 0$) quasi tutte le molecole sono fortemente deformate. L'esponente principale di Lyapunov può essere valutato come:

$$\lambda = \langle n_\alpha n_\beta \partial_\beta v_\alpha \rangle$$

Se invece rimuoviamo l'ipotesi di assenza di feedback possiamo ragionare come segue: detto \mathcal{T}_p il contributo dei polimeri al tensore degli sforzi, se $\mathcal{T}_p \ll \nu \partial v$ ⁷ troviamo per la $\mathcal{P}(R)$ l'andamento dell'equazione (2.47). Trattiamo separatamente i casi $\lambda\tau < 1$ e $\lambda\tau > 1$ nel caso che l'andamento non sia quello sopra descritto:

$\lambda\tau < 1$: sappiamo che vale la legge $\mathcal{T}_p \propto R^2$. Allora la disuguaglianza $\mathcal{T}_p \ll \nu \partial v$ è violata dalle molecole con $R \gtrsim R_{back}$ con R_{back} tale che vale la relazione:

$$\frac{\nu}{\tau} \sim \mathcal{T}_p \frac{R_{back}^2}{\tilde{R}^2}.$$

Per $R \gtrsim R_{back}$ la controreazione si accende, e sopprime le fluttuazioni di velocità. La probabilità di trovare $R > R_{back}$ è legata alle fluttuazioni, e quindi la densità di probabilità è destinata a smorzarsi al crescere di R più velocemente che nel caso (2.47).

$\lambda\tau > 1$: se $R \ll R_{back}$ il tensore degli sforzi è molto piccolo e il campo di velocità è disaccoppiato dai gradi di libertà elastici. Siccome la deformazione è più forte della forza di richiamo, per ogni valore del campo di velocità R cresce. Per valori di $R \gtrsim R_{back}$ sufficientemente grandi però, le fluttuazioni della velocità vengono soppresse, e questo porterebbe ad una diminuzione di R . La situazione tipica perciò è che la maggior parte delle molecole raggiungono il valore $R_{opt} > R_{back}$ che è il valore per cui questi due effetti sono equilibrati. In questo caso $\mathcal{P}(R)$ è una funzione crescente di R per $R < R_{opt}$ e velocemente decrescente per $R > R_{opt}$.

È interessante notare che esiste un intervallo in cui $R_{opt} \ll R_{max}$, fatto che implica, che non necessariamente esiste una transizione da uno stato in cui

⁷Questa condizione deve essere verificata dalle fluttuazioni che ci interessano, cioè quelle per cui vale

$$\partial v \sim \frac{1}{\tau}$$

$R \sim R_0$ ad uno in cui $R \sim R_{max}$.

In questa visione la nuova scala dissipativa viene generata da una contro-reazione dei polimeri sul flusso, e a scale minori di essa si ha interazione tra gradi di libertà elastici e inerziali, fenomeno che porta ad uno scambio di energia, ovvero ad una dissipazione essenzialmente dovuta al rilassamento delle molecole. Tutte le scale vengono identificate da un preciso rapporto con l'esponente principale di Lyapunov.

In questo schema possono essere spiegate anche l'indipendenza dell'asintoto MDR dalla concentrazione e le instabilità elastiche ad alti numeri di Deborah che vedremo nei prossimi paragrafi.

2.5 Osservazioni generali sulla stabilità di flussi viscoelastici

L'analisi di stabilità effettuata su flussi viscoelastici è molto complicata: ai termini newtoniani infatti si aggiunge anche il contributo dei polimeri, che complica ulteriormente la situazione. Sono stati effettuati molti studi degli effetti della viscoelasticità del sistema sulla stabilità inerziale (normalmente l'effetto è stabilizzante). Vediamo come si possono affrontare qualitativamente alcuni casi semplici.

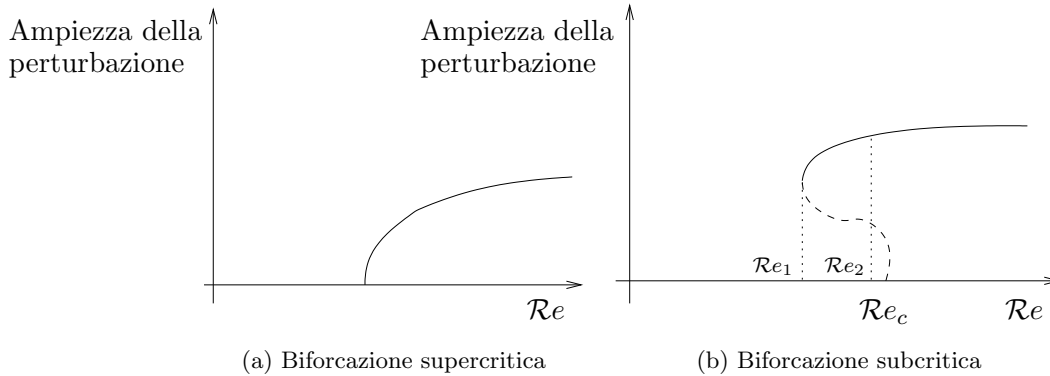


Figura 2.9: I due tipi di biforcazioni.

2.5.1 Analisi lineare e non lineare

L'analisi lineare, come già visto nel paragrafo 1.2, si basa sulla decomposizione di Reynolds, considerando solo i termini in $O(v')$. Essa è in grado di prevedere il grado di crescita esponenziale della perturbazione. A parte alcuni casi, il flusso secondario (ovvero le perturbazioni) sono ben descritte dall'analisi lineare. Gli effetti non lineari in questa situazione sono normalmente stabilizzanti. Tale situazione è detta *supercritica* (vedi figura 2.9a). Se le condizioni di instabilità sono superate di poco, la destabilizzazione è debole ed è controbilanciata appunto da effetti non lineari. Nel caso che anche solo i più piccoli termini non lineari siano destabilizzanti, si ha invece una situazione detta di biforcazione *subcritica* (vedi figura 2.9b). In tale caso il flusso non è stabile a piccole ampiezze nemmeno se il valore di Re_c è ecceduto di poco. Per capire se un flusso è 'supercritico' o 'subcritico' si deve ricorrere ad un'analisi non lineare, che fornisce un'equazione per l'ampiezza A della perturbazione. Un semplice esempio è (cfr. [28]):

$$\partial_t A = \omega A - g_0 |A|^2 A \quad (2.48)$$

dove A è l'ampiezza complessa della perturbazione, la cui parte reale è l'ampiezza del flusso secondario, ω è il ritmo di crescita lineare e g_0 determina

le caratteristiche non lineari. Se $g_0 > 0$ le non linearità sono stabilizzanti e il sistema è supercritico, altrimenti subcritico.

In generale oltre $\mathcal{R}e_c$ i modi sono accoppiati o risuonano tra di loro, e bisogna quindi risolvere un sistema di equazioni differenziali accoppiate.

2.5.2 Instabilità elastica

Esistono instabilità la cui origine è puramente elastica e non inerziale come quelli visti sin'ora. Gli sforzi elastici che generano questa instabilità dipendono dal campo di velocità in modo non lineare, e possono destabilizzare un flusso polimerico. Tali instabilità possono verificarsi anche per $\mathcal{R}e \rightarrow 0$, data la loro natura puramente elastica.

Consideriamo come esempio l'analisi di Groisman e altri [30], in cui si studia l'insorgenza di instabilità puramente elastiche nel caso di un flusso di Couette-Taylor. Tale flusso si sviluppa è costruito tra due cilindri coassiali di raggi R_1 , quello interno, e R_2 , quello esterno. Il cilindro esterno è fermo nel sistema del laboratorio e quello interno si muove con una certa velocità angolare Ω . Se si aumenta gradualmente la velocità del cilindro interno si ha che, per un certo valore di $\mathcal{R}e = \Omega R_1 d \rho / \eta$ il flusso del fluido interposto diventa instabile. La geometria del flusso di Couette-Taylor viscoelastico cambia rispetto al caso newtoniano soltanto per lo stress normale, espresso (in coordinate cilindriche) da

$$N_1 = \mathcal{T}_{\theta\theta} - \mathcal{T}_{rr}.$$

Lo sforzo normale cresce con la velocità di deformazione $\mathcal{D}_{r\theta}$ e produce una forza lungo la direzione radiale chiamata anche *hoop-stress*. In alcuni flussi questa forza è molto grande e si arriva ad osservare l'effetto Weissenberg [5]. Tale forza può rendere instabile il flusso, e tale instabilità è puramente elastica. È facile verificare che vale la relazione:

$$\mathcal{T}_{p\alpha\beta} + \mathcal{D}e \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}t} \mathcal{T}_{p\alpha\beta} \dot{=} - \eta_p \mathcal{D}_{\alpha\beta} \quad (2.49)$$

Ricordando che

$$\mathcal{T}_{s\alpha\beta} = -\eta_s \mathcal{D}_{\alpha\beta}$$

si ha che:

$$N_1 = -2\eta_p \tau (\mathcal{D}_{r\theta})^2 \quad (2.50)$$

Se l'interdistanza $d = R_2 - R_1$ è tale che $d \ll R_1$ allora:

$$\mathcal{D}_{r\theta} \simeq \frac{\Omega R_1}{d}$$

nello spazio tra i due cilindri, e quindi si ha che:

$$\tau \mathcal{D}_{r\theta} = \mathcal{D}e = \frac{N_1}{2\mathcal{T}_{p\alpha\beta}} \quad (2.51)$$

Il numero di Deborah rappresenta allora il rapporto tra effetti non lineari ed effetti dissipativi polimerici. Se d/R_1 e $\eta_p/(\eta_p + \eta_s)$ sono costanti si trova che l'instabilità si manifesta per un certo valore del numero di Deborah $\mathcal{D}e_c$ indipendente dal valore di τ .

Per quantificare il rapporto tra effetti elastici e inerziali possiamo definire un nuovo parametro di controllo ⁸:

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{D}e}{\mathcal{R}e}$$

Si può tracciare un diagramma di 'fase' $\mathcal{R}e$ vs. $\mathcal{D}e$ in cui si possono vedere i passaggi da fase inerziale a fase elastica, e le relative zone di instabilità.

⁸Tale parametro ha anche un'interpretazione diversa, ovvero è il rapporto tra il tempo di rilassamento del polimero e il tempo tipico di diffusione.

Capitolo 3

Il metodo multiscale

Nello studio delle equazioni della fluidodinamica, e dei problemi ad esse connessi si fa frequentemente uso di tecniche cosiddette asintotiche. Esse prevedono di valutare qual è l'andamento di una certa quantità fluidodinamica in certi limiti.

La tecnica di che verrà illustrata in questo capitolo è quella multiscale [32, 33], ed è quella che verrà utilizzata in seguito. La potenza e l'efficacia di tale tecnica risolutiva verrà mostrata dalla sua applicazione a due diversi casi emblematici.

3.1 Generalità

Se dobbiamo descrivere un problema che si articola su diverse scale spazio-temporali ben separate, possiamo fare affidamento sulla tecnica multiscale. Per fissare le idee supponiamo che la grandezza Υ , oggetto dell'ipotetico problema, dipenda da una coordinata temporale, e supponiamo che le scale temporali siano due e siano ben separate.

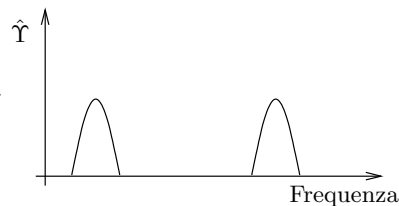


Figura 3.1: Separazione delle scale

Questo significa che, se dovessimo rappresentare la grandezza che ci interessa nello spazio di Fourier, esso sarebbe costituito da due parti separate, che chiameremo grande e piccola scala rispettivamente (fig. 3.1).

La separazione delle scale ci consente di trattare con due variabili temporali indipendenti, una 'veloce' e una 'lenta', la cui separazione è regolata da un parametro di controllo ϵ :

$$T = \epsilon t$$

dove ϵ è il rapporto tra la frequenza della grande scala e quella della piccola scala. L'introduzione di questa nuova variabile rende necessaria la

ridefinizione degli operatori di derivazione:

$$\begin{aligned}
 \Upsilon(t) &\rightarrow \Upsilon(t, T) \\
 \frac{d}{dt} &\rightarrow \partial_t + \frac{dT}{dt} \partial_T = \partial_t + \epsilon \partial_T \\
 \frac{d^2}{dt^2} &\rightarrow \partial_{tt} + 2\epsilon \partial_{Tt} + \epsilon^2 \partial_{TT} \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

dove la derivata assoluta è diventata parziale, le derivate composte sono state ottenute dalla regola di derivazione a catena, il simbolo ∂_{xy} indica la derivata seconda rispetto alle variabili x e y . La grandezza Υ può essere espansa in serie di ϵ :

$$\Upsilon(t, T) = \Upsilon_0(t, T) + \epsilon \Upsilon_1(t, T) + \epsilon^2 \Upsilon_2(t, T) + \dots$$

dove le funzioni Υ_n dipendono a priori da entrambe le variabili t e T . A questo punto, se il processo fisico che ci interessa è regolato da un'equazione (che si suppone coinvolga la variabile Υ) essa può essere riscritta con le identificazioni (3.1). Otteniamo una gerarchia di equazioni ai vari ordini nel parametro ϵ , che eguagliate danno informazioni sulle funzioni Υ_n . La media effettuata sulla variabile veloce t permette di valutare la dinamica di Υ a grande scala, e di raggiungere perciò lo scopo prefissato.

In particolare il metodo multiscala è utile quando la teoria classica delle perturbazioni è inefficace, e non è in grado perciò di arrivare al risultato corretto. Questo avviene per esempio quando il processo fisico considerato contiene delle interazioni non lineari che creano battimenti tra modi vicini di Υ a piccola scala. Tali modi creano a loro volta dei modi a grande scala, e ne influenzano perciò la dinamica. Questo contributo alla dinamica di grande scala non verrebbe individuato dalla teoria perturbativa standard che in tal caso si dice singolare, a meno di non risommare tutti i termini della serie, cosa che nella pratica non si è in grado di fare. Nel prossimo paragrafo vedremo un caso che esemplifica questa situazione.

Naturalmente lo stesso identico discorso può essere fatto con le variabili spaziali, con il risultato che questa volta, ciò che emerge dall'analisi è il comportamento del sistema a scale spaziali grandi, e cioè esula dalla dinamica a piccola scala.

3.1.1 L'approccio matematico

Supponiamo di avere a che fare con il problema differenziale:

$$\begin{cases} y'' + y + \epsilon y^3 = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

dove il segno ' rappresenta una derivazione rispetto alla variabile t e ϵ è un parametro. Questa equazione rappresenta il comportamento dell'oscillatore non lineare di Duffing, e nel limite $\epsilon \rightarrow 0$ si riconduce all'equazione di un oscillatore armonico classico.

Consideriamo un'espansione perturbativa per la funzione y , e le corrispondenti condizioni al contorno:

$$\begin{cases} y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n y_n(t) \\ y_0 = 1 \\ y_n(0) = 0 \quad \forall n \geq 1 \\ y'_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_+^0 \end{cases} \quad (3.3)$$

dove le funzioni y_n sono da determinare. Avremo allora una gerarchia di equazioni ai vari ordini in ϵ :

$$O(\epsilon^0) \quad y_0'' + y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = A_0 \cos(t) + B_0 \sin(t) \quad (3.4)$$

$$O(\epsilon^1) \quad y_1'' + y_1 = -y_0^3 \quad \text{oscillatore armonico forzato} \quad (3.5)$$

⋮

Imponendo le condizioni al contorno sulla (3.4) otteniamo:

$$y_0 = \cos(t) \quad (3.6)$$

Per l'equazione all'ordine 1 in ϵ possiamo ragionare come segue: conoscendo l'espressione analitica per y_0 , ricordando che

$$\cos^3(t) = \frac{1}{4} \cos(3t) + \frac{3}{4} \cos(t)$$

e sapendo che y_0 è soluzione anche dell'equazione omogenea associata alla (3.5) possiamo trovare una soluzione particolare della (3.5) nella forma

$$\alpha_1 \cos(3t) + \beta_1 t \cos(t)$$

La sostituzione nella (3.5) fornisce:

$$y_1 = A_1 \cos(t) + B_1 \sin(t) + \frac{1}{32} \cos(3t) - \frac{3}{8} t \sin(t)$$

e quindi in conclusione:

$$y_1 = -\frac{1}{32} \cos(t) + \frac{1}{32} \cos(3t) - \frac{3}{8} t \sin(t). \quad (3.7)$$

Tornando al problema (3.2) possiamo allora scrivere la soluzione y al primo ordine in ϵ :

$$y \sim \cos(t) + \left(-\frac{1}{32} \cos(t) + \frac{1}{32} \cos(3t) - \frac{3}{8} t \sin(t) \right) \epsilon + O(\epsilon^2) \quad (3.8)$$

Si può dimostrare che la funzione y è limitata¹ e, osservando da vicino questa espansione, è immediato verificare che se $t \sim 1/\epsilon$ il termine che contiene $t\epsilon \sin(t)$ diventa di ordine uno, e lo sviluppo perde di significato.

Questo problema ha la sua soluzione nella risommazione dei termini *secolari*, ovvero di quei termini che sono soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione differenziale in questione². Si può dimostrare che detti y_n^{sec} quei termini abbiamo che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n y_n^{sec} \propto \cos\left[t\left(1 + \frac{3}{8}\epsilon\right)\right]. \quad (3.9)$$

Perciò se identifichiamo t con il tempo, l'effetto dei termini secolari è di aumentare la frequenza di $3/8\epsilon$. Tale effetto è detto di *shift*.

La trattazione di questo problema con un'analisi multiscala mostra come questa tecnica sia potente e diretta. Supponiamo infatti di essere in condizioni da poter applicare il metodo multiscala. Allora:

$$\begin{aligned} y(t) &\rightarrow y(t, T) \\ y(t, T) &= Y_0 + \epsilon Y_1(t, T) + \epsilon^2 Y_2(t, T) + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ricordando le (3.1) otteniamo ai vari ordini in ϵ :

$$O(\epsilon^0) \quad \partial_{tt} Y_0 + Y_0 = 0 \Rightarrow Y_0 = A(T)e^{it} + \text{c.c.} \quad (3.11)$$

$$O(\epsilon^1) \quad \partial_{tt} Y_1 + Y_1 = -2\partial_{Tt} Y_0 - Y_0^3 \quad (3.12)$$

⋮

¹Moltiplichiamo l'equazione (3.2) per y' :

$$y' y'' + y' y + \epsilon y' y^3 = 0 \quad (*)$$

Osserviamo che

$$y' y'' = (y'^2)' - y' y'' \Rightarrow y' y'' = \frac{1}{2} (y'^2)' \quad (**)$$

Sostituendo nella (*) otteniamo:

$$\frac{1}{2} (y'^2)' + \left(\frac{y^2}{2}\right)' + \frac{\epsilon}{4} (y^4)' = 0 \quad (***)$$

e quindi

$$y'^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{\epsilon}{4} y^4 = \text{const.} = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{4} \quad (***)$$

Siccome tutti i termini della (***) sono maggiori o uguali a zero abbiamo che:

$$\frac{y^2}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{4}$$

e quindi y è limitato.

²Nel nostro caso i termini del tipo $t\epsilon \sin(t)$

dove il fattore $A(T)$ contiene le costanti di integrazione. Tale fattore deriva dal fatto che questa equazione differenziale è alle derivate parziali. Le condizioni iniziali sulla Y_0 danno:

$$\begin{cases} Y_0(0,0) = 1 \rightarrow A(0) + A^*(0) = 1 \\ Y_0'(0,0) = 0 \rightarrow iA(0) - iA^*(0) + A'(0) + A^{*\prime}(0) = 0 \\ \vdots \end{cases} \quad (3.13)$$

Sostituendo la (3.11) nella (3.12) otteniamo il termine secolare:

$$\left(-2i \frac{d}{dT} A(T) - 3|A(T)|^2 A \right) e^{it} + \text{c.c.} \quad (3.14)$$

La funzione $A(T)$, purché soddisfi le condizioni iniziali, è un grado di libertà acquisito dal sistema, che quindi può essere scelto a piacere. In questo caso imponiamo che sia:

$$-2i \frac{d}{dT} A(T) - 3|A(T)|^2 A = 0. \quad (3.15)$$

Questa scelta fa in modo che il contributo dovuto al termine secolare viene condensato tutto nel coefficiente di Y_0 , ma non modifica affatto la dinamica del sistema. La condizione (3.15) conduce all'equazione differenziale per A :

$$\frac{d}{dT} A = i \frac{3}{2} |A|^2 A \quad (3.16)$$

(e la corrispondente per A^*) la cui soluzione generale è di tipo esponenziale, e l'aggiunta delle condizioni iniziali (3.13) mi dà:

$$A(T) = \frac{1}{2} e^{i \frac{3}{8} T}. \quad (3.17)$$

In definitiva, perciò, abbiamo che:

$$Y_0 = \frac{1}{2} e^{i(t + \frac{3}{8} T)} + \text{c.c.}$$

e quindi che:

$$y_0(t) = \cos\left[t\left(1 + \frac{3}{8}\epsilon\right)\right]. \quad (3.18)$$

La condensazione del contributo secolare della funzione y nella funzione Y_0 , fa in modo che lo sviluppo (3.10) non fallisca nel determinare l'andamento di y per piccoli ϵ , poiché il contributo singolare è già stato enucleato e se ne è già tenuto conto. Questo significa che con la condizione (3.15) abbiamo aggirato la singolarità del problema.

3.2 Il problema dello scalare passivo

Uno dei problemi con cui si ha a che fare nello studio della fluidodinamica è la diffusione da parte di un flusso turbolento di una quantità scalare (per esempio la concentrazione di un inquinante) che non retroagisce sul flusso. Tale quantità è detta appunto scalare passivo. Per inciso se volessimo studiare la diffusione dei polimeri in un flusso turbolento saremmo davanti ad un caso di scalare attivo.

Rispetto al caso della diffusione classica, il problema della diffusione di una quantità scalare presenta la complicazione aggiuntiva che il trasporto viene modificato dal campo di velocità, che è in grado di aumentare o diminuire la diffusione. Analogamente al caso dello studio di soluzioni polimeriche inoltre, siamo di fronte a un problema che coinvolge scale tipiche molecolari, e ci interessa studiarlo a scala macroscopiche.

L'equazione che regola il comportamento diffusivo di una quantità scalare immersa in un flusso è l'equazione di Fokker-Planck³:

$$\partial_t \theta + v_\alpha \partial_\alpha \theta = D_0 \partial^2 \theta \quad (3.19)$$

dove abbiamo indicato con θ la concentrazione dello scalare passivo. Questa equazione, come preannunciato, presenta, in più rispetto al caso puramente diffusivo, il termine avvevativo $v_\alpha \partial_\alpha \theta$, che comporta difficoltà computazionali notevoli. Il nostro scopo è quello di trovare un'equazione chiusa nei modi a grande scala per θ [31].

La situazione fisica in cui ci dovremmo mettere è quella di assenza di bordi fisici, per ottenere la massima simmetria possibile, e di spazio riempito totalmente dal fluido. Tuttavia questa situazione presenterebbe alcune difficoltà analitiche. L'ipotesi che faremo sarà allora di considerare la velocità una funzione periodica dello spazio e del tempo [1]:

$$v_\alpha(x + n\ell, y + m\ell, z + p\ell, t + q\tau) = v_\alpha(x, y, z, t)$$

e senza ledere la generalità potremo assumere

$$\langle v_\alpha \rangle = 0 \quad \text{mediato sulle periodicità}$$

Ci occuperemo di osservare la dinamica a scale spaziali $L \gg \ell$ e temporali $T \gg \tau$, sapendo che

$$\epsilon = \frac{\ell}{L} \ll 1 \quad T = \epsilon^2 t.$$

³Normalmente questa equazione viene studiata in campi incompressibili, e cioè accoppiata con

$$\partial_\alpha v_\alpha = 0$$

Secondo la notazione introdotta nel paragrafo 3.1 possiamo passare all'uso delle variabili⁴

$$\begin{aligned} \vec{X} & \vec{x} & \vec{X} &= \epsilon \vec{x} \\ T & t & T &= \epsilon^2 t \end{aligned}$$

che introducono gli operatori:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha & \rightarrow \partial_\alpha + \epsilon \nabla_\alpha & \text{con} & \quad \nabla_\alpha = \frac{\partial}{\partial X_\alpha}, \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \\ \partial_t & \rightarrow \partial_t + \epsilon^2 \partial_T \end{aligned}$$

La funzione θ può essere espressa in serie di ϵ nel seguente modo:

$$\theta(\vec{x}, t, \vec{X}, T) = \theta^{(0)} + \epsilon \theta^{(1)} + \epsilon^2 \theta^{(2)} + \dots \quad (3.20)$$

in cui a priori le funzioni $\theta^{(n)}$ dipendono da tutte e quattro le variabili. Sostituendo l'eq. (3.20) nella (3.19) si ottiene l'usuale gerarchia di equazioni ai vari ordini in ϵ :

$$O(\epsilon^0) \quad \partial_t \theta^{(0)} + v_\alpha \partial_\alpha \theta^{(0)} = D_0 \partial^2 \theta^{(0)} \quad (3.21)$$

$$O(\epsilon^1) \quad \partial_t \theta^{(1)} + v_\alpha \partial_\alpha \theta^{(1)} - D_0 \partial^2 \theta^{(1)} = -v_\alpha \nabla_\alpha \theta^{(0)} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} O(\epsilon^2) \quad \partial_t \theta^{(2)} + v_\alpha \partial_\alpha \theta^{(2)} - D_0 \partial^2 \theta^{(2)} &= -\partial_T \theta^{(0)} - v_\alpha \nabla_\alpha \theta^{(1)} \\ &+ D_0 \nabla^2 \theta^{(2)} + 2D_0 \partial_\alpha \nabla_\alpha \theta^{(1)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

⋮

dove le (3.22), (3.23) sono scritte tenendo conto di ciò che segue.

La (3.21) è soddisfatta dalla funzione

$$\theta' = \theta^{(0)} - \langle \theta^{(0)} \rangle$$

dove l'operazione $\langle \rangle$ è una media sulle periodicità della velocità. Questa funzione può essere scritta in serie di Fourier come:

$$\sum_{\vec{k} \neq 0} \hat{\theta}'_{\vec{k}} e^{2\pi \frac{\vec{k} \cdot \vec{x}}{\ell}} \quad (3.24)$$

dove la componente media θ'_0 è stata esclusa in quanto $\langle \theta' \rangle = 0$. Sappiamo che vale la relazione:

$$\sum_{\vec{k} \neq 0} k^2 |\hat{\theta}'_{\vec{k}}|^2 \geq \sum_{\vec{k} \neq 0} |\hat{\theta}'_{\vec{k}}|^2. \quad (3.25)$$

⁴Vale la pena di notare che la diversa relazione di scala che intercorre tra le variabili spaziali e quelle temporali deriva da un ragionamento a priori sul comportamento della funzione θ : infatti se ci aspettiamo a priori che essa segua una dinamica diffusiva, del tipo $\partial_t \theta \propto \partial_{xx} \theta$ allora alla grande scala spaziale $O(1/\epsilon)$ corrisponde una scala temporale $O(1/\epsilon^2)$.

Inoltre

$$\begin{cases} \langle \theta'^2 \rangle = \sum_{\vec{k} \neq 0} |\hat{\theta}'_{\vec{k}}|^2 \\ \langle |\partial \theta'|^2 \rangle = \sum_{\vec{k} \neq 0} \left(\frac{2\pi|\vec{k}|}{\ell} \right)^2 |\hat{\theta}'_{\vec{k}}|^2 \end{cases} \quad (3.26)$$

Abbiamo quindi la maggiorazione:

$$\langle |\partial \theta'|^2 \rangle \geq \sum_{\vec{k} \neq 0} \left(\frac{2\pi}{\ell} \right)^2 |\hat{\theta}'_{\vec{k}}|^2 \quad (3.27)$$

Se moltiplichiamo l'equazione (3.21) per θ' e mediamo, otteniamo:

$$\frac{1}{2} \langle \partial_t \theta^{(0)2} \rangle + \langle v_\alpha \partial_\alpha \frac{\theta^{(0)2}}{2} \rangle = D_0 \langle \theta^{(0)} \partial^2 \theta^{(0)} \rangle \quad (3.28)$$

e riordinando⁵ si ottiene che:

$$\frac{1}{2} \langle \partial_t \theta'^2 \rangle = D_0 \langle (\partial \theta')^2 \rangle \geq D_0 \left(\frac{2\pi}{\ell} \right)^2 \langle \theta'^2 \rangle \quad (3.31)$$

e perciò che:

$$\theta'^2 \leq C e^{-2D_0 \left(\frac{2\pi}{\ell} \right)^2 t} \langle \theta'^2 \rangle \quad (3.32)$$

Quindi in definitiva si trova che:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta' = 0 \quad (3.33)$$

e perciò:

$$\theta^{(0)}(\vec{x}, t, \vec{X}, T) = \theta^{(0)}(\vec{X}, T) \quad (3.34)$$

ovvero che la dinamica di $\theta^{(0)}$ dipende soltanto dalla grande scala. Detto questo possiamo dare delle condizioni di risolubilità sulle (3.22) e (3.23). La (3.22) è lineare e possiamo pensare di scriverne la soluzione come:

$$\theta^{(1)}(\vec{x}, t, \vec{X}, T) = \theta^{(1)}(\vec{X}, T) + w_\alpha(\vec{x}, t) \nabla_\alpha \theta^{(0)}(\vec{X}, T) \quad (3.35)$$

dove $\theta^{(1)}(\vec{X}, T)$ è soluzione dell'omogenea associata alla (3.22), e w soddisfa un'equazione ausiliaria:

$$\partial_t w_\beta + v_\alpha \partial_\alpha w_\beta - D_0 \partial^2 w_\beta = -v_\beta \quad (3.36)$$

⁵Consideriamo separatamente i termini:

$$\theta' \partial^2 \theta' = \partial (\theta' \partial \theta') - (\partial \theta') \quad (3.29)$$

Con una integrazione per parti è facile vedere che:

$$\langle \partial (\theta' \partial \theta') \rangle = 0 \quad \langle \theta' v_\alpha \partial_\alpha \theta' \rangle = 0 \quad (3.30)$$

Per l'incompressibilità del flusso, la media sulle periodicità dei primi membri delle equazioni (3.22) e (3.23) è nulla. Affinché tali equazioni siano risolubili è necessario che anche la media sulle periodicità dei secondi membri di tali equazioni sia nulla⁶. Tale imposizione sul secondo membro della (3.23) fornisce:

$$-\partial_T \langle \theta^{(0)} \rangle - \langle v_\alpha \nabla_\alpha \theta^{(1)} \rangle + D_0 \nabla^2 \langle \theta^{(0)} \rangle = 0 \quad (3.37)$$

Sostituendo la forma di $\theta^{(1)}$ otteniamo:

$$\begin{aligned} -\partial_T \theta^{(0)} - \langle v_\alpha \nabla_\alpha \theta^{(1)}(\vec{X}, T) \rangle - \langle v_\alpha \nabla_\alpha (w_\beta \nabla_\beta \theta^{(0)}) \rangle + D_0 \nabla^2 \theta^{(0)} &= 0 \\ -\partial_T \theta^{(0)} - \langle v_\alpha w_\beta \rangle \nabla_\alpha \nabla_\beta \theta^{(0)} + D_0 \nabla^2 \theta^{(0)} &= 0 \end{aligned}$$

dove le operazioni di media su $\theta^{(0)}$ sono state omesse per via della (3.34). Finalmente si ottiene un'equazione per $\theta^{(0)}$ chiusa nella grande scala:

$$\partial_T \theta^{(0)} = \mathfrak{D}_{\alpha\beta}^{eddy} \nabla_\alpha \nabla_\beta \theta^{(0)} \quad (3.38)$$

dove si ha l'identificazione:

$$\mathfrak{D}_{\alpha\beta}^{eddy} = D_0 \delta_{\alpha\beta} - \langle v_\alpha w_\beta \rangle \quad (3.39)$$

In generale l'equazione (3.38) è un'equazione diffusiva non isotropa, ovvero in cui il processo diffusivo non avviene in tutte le direzioni allo stesso modo, ma a seconda di come è fatto il campo di velocità, e di come è fatto il campo ausiliario \vec{w} , privilegia alcune direzioni piuttosto che altre. Questa interpretazione corrisponde a ciò che ci aspettavamo, e cioè che la diffusione viene modificata dal flusso. Se immaginiamo che la nostra analisi matematica del processo diffusivo sia fatta con un microscopio ad una certa risoluzione, il metodo multiscala permette di diminuire la risoluzione del microscopio per andare ad analizzare soltanto la dinamica a scale più grandi.

Si può dimostrare che il tensore diffusività turbolenta è un tensore definito positivo:

$$\frac{\mathfrak{D}_{\alpha\alpha}^{eddy}}{D_0} \leq d + \mathcal{P}e^2 \quad (3.40)$$

dove d è la dimensione dello spazio in cui lavoriamo e $\mathcal{P}e$ è il numero di Peclet, che valuta il rapporto tra diffusione di quantità di moto e diffusione molecolare. Possiamo perciò anche esprimere il tensore $\mathfrak{D}_{\alpha\beta}^{eddy}$, o \vec{w} in serie del numero di Peclet.

⁶Questa condizione di solubilità è anche detta alternativa di Fredholm.

Capitolo 4

Il modello di Oldroyd

In questo capitolo mostro i calcoli da me fatti applicando il metodo multi-scala alle equazioni di Navier-Stokes accoppiate al modello Oldroyd-B per il flusso di Kolmogorov. Dopo aver illustrato di che flusso si tratta, farò vedere come l'applicazione del metodo multi-scala ad uno studio di stabilità lineare consente di giungere a risultati interessanti nella comprensione del fenomeno della drag reduction, tramite analisi di stabilità.

Ho applicato il modello di cui sopra anche al caso in cui la diffusività dei polimeri non è trascurabile: la motivazione di questo studio, come vedremo, sta non tanto nel fatto che questo è un effetto rilevante dal punto di vista fisico, ma dal fatto che è una prassi comunemente seguita negli studi numerici diretti (DNS). Tali studi infatti si basano sulla risoluzione numerica delle equazioni del problema, e spesso fanno uso di un termine diffusivo aggiuntivo, che permette di eliminare la presenza di fenomeni spuri nello studio della stabilità. Scopo di questa analisi è quindi quello di capire se la drag reduction osservata in studi di questo tipo è un fenomeno fisico reale oppure un artefatto creato da strategie algoritmiche non efficienti.

4.1 Il flusso di Kolmogorov

Consideriamo le equazioni di Navier-Stokes per un flusso incompressibile, eccitato da una forzante:

$$\partial_t u_\alpha + u_\beta \partial_\beta u_\alpha = -\partial_\alpha p + \nu \partial^2 u_\alpha + \nu F_\alpha \quad (4.1)$$

Se cerchiamo un flusso stazionario del tipo $\vec{u} = (U(z), 0)$ e forziamo solo lungo la direzione \hat{i} otteniamo:

$$\begin{cases} \partial_x p = \nu \partial_z^2 U(z) + \nu F_x \\ \partial_z p = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Scegliendo la forzante del tipo $\vec{F} = (F(z), 0)$ considerando la divergenza della (4.1) otteniamo:

$$\partial_x^2 p = 0 \quad (4.3)$$

L'equazione per il profilo di velocità diventa allora:

$$\partial_z^2 U(z) + F(z) = \text{costante} \quad (4.4)$$

Con una forzante cosinusoidale, e interessandoci di flussi a media nulla sulle periodicità della forzante otteniamo:

$$U(z) = V \cos\left(\frac{z}{L}\right) \quad F(z) = \frac{V}{L^2} \cos\left(\frac{z}{L}\right) \quad (4.5)$$

Per studiare la stabilità di questo flusso possiamo ricorrere al metodo multiscala.

Introduciamo la decomposizione di Reynolds per il campo di velocità:

$$u'_\gamma = u_\gamma + w_\gamma \quad , \quad p' = p + q \quad (4.6)$$

e scriviamo le equazioni per la perturbazione, trascurando i termini non lineari, perché di ordine 2 nella perturbazione:

$$\partial_\gamma w_\gamma = 0 \quad (4.7)$$

$$\partial_t w_\gamma + \partial_\beta (u_\beta w_\gamma + w_\beta u_\gamma) = -\partial_\gamma q + \nu \partial^2 w_\gamma \quad (4.8)$$

Introducendo le due classi di variabili (lente e veloci), e, come di consueto, i corrispondenti operatori di derivazione:

$$\begin{aligned} \vec{X} &= \epsilon \vec{x} & T &= \epsilon^2 t \\ \nabla_i &= \frac{\partial}{\partial X_i} & \partial_i &= \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \frac{d}{dx_i} &\rightarrow \partial_i + \epsilon \nabla_i \\ \partial_T &= \frac{\partial}{\partial T} & \partial_t &= \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{d}{dt} &\rightarrow \partial_t + \partial_T \frac{dT}{dt} = \partial_t + \epsilon^2 \partial_T \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.9)$$

e ricorrendo alle espansioni in serie per i campi \vec{w} e q :

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{w}^{(0)}(z, t, X, Z, T) + \epsilon \vec{w}^{(1)}(z, t, X, Z, T) + \epsilon^2 \vec{w}^{(2)}(z, t, X, Z, T) + \dots \\ q &= q^{(0)}(z, t, X, Z, T) + \epsilon q^{(1)}(z, t, X, Z, T) + \epsilon^2 q^{(2)}(z, t, X, Z, T) + \dots \end{aligned} \quad (4.10)$$

otteniamo una gerarchia di equazioni in ϵ . All'ordine ϵ^0 avremo:

$$\partial_z w_z^{(0)} = 0 \quad (4.11)$$

$$\nu \partial_z^2 w_x^{(0)} = -\frac{1}{L} w_z^{(0)} V \sin\left(\frac{z}{L}\right) \quad (4.12)$$

$$\partial_z q^{(0)} = 0 \quad (4.13)$$

Con la scelta di non avere alcuna perturbazione nella pressione all'ordine zero abbiamo che:

$$w_z^{(0)} = \langle w_z^{(0)} \rangle \quad (4.14)$$

$$w_x^{(0)} = \frac{L}{\nu} \langle w_z^{(0)} \rangle V \sin\left(\frac{z}{L}\right) + \langle w_x^{(0)} \rangle \quad (4.15)$$

$$q^{(0)} = 0 \quad (4.16)$$

All'ordine ϵ avremo che:

$$\frac{L}{\nu} \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle V \sin\left(\frac{z}{L}\right) + \nabla_X \langle w_x^{(0)} \rangle + \nabla_Z \langle w_z^{(0)} \rangle + \partial_z w_z^{(1)} = 0 \quad (4.17)$$

La condizione di risolubilità, ottenuta mediando sulle periodicità spaziali entrambi i membri da l'incompressibilità del campo $\vec{w}^{(0)}$, e quindi la (4.17) dà:

$$w_z^{(1)} = \frac{1}{\nu} \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle V L^2 \cos\left(\frac{z}{L}\right) + \langle w_z^{(1)} \rangle \quad (4.18)$$

Sostituendo nell'equazione per $w_x^{(1)}$ si ottiene:

$$-\nabla_Z \langle w_z^{(0)} \rangle V \cos\left(\frac{z}{L}\right) + 2V \cos\left(\frac{z}{L}\right) \nabla_X \langle w_x^{(0)} \rangle \quad (4.19)$$

$$-\frac{V}{L} \sin\left(\frac{z}{L}\right) \langle w_z^{(1)} \rangle - \nu \partial_z^2 w_x^{(1)} = 0$$

$$2\nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle V \cos\left(\frac{z}{L}\right) + \partial_z q^{(1)} = 0 \quad (4.20)$$

Dalla ((4.19)) troviamo il campo $w_x^{(1)}$:

$$w_x^{(1)} = VL \nabla_Z \langle w_z^{(0)} \rangle L \cos\left(\frac{z}{L}\right) + \frac{2L}{\nu} \left(\nabla_X \langle w_x^{(0)} \rangle \cos\left(\frac{z}{L}\right) - \langle w_z^{(1)} \rangle \sin\left(\frac{z}{L}\right) \right) + \langle w_x^{(1)} \rangle$$

A questo punto la condizione di risolubilità per l'ordine ϵ^2 fornisce un'equazione per il campo $\vec{w}^{(0)}$:

$$\partial_T \langle w_x^{(0)} \rangle + 2\nabla_X \langle U w_x^{(1)} \rangle + \nabla_Z \langle w_z^{(1)} U \rangle = -\nabla_X \langle q^{(1)} \rangle + \nu (\nabla_X^2 + \nabla_Z^2) \langle w_x^{(0)} \rangle \quad (4.21)$$

$$\partial_T \langle w_z^{(0)} \rangle + \nabla_X \langle U w_z^{(1)} \rangle = -\nabla_Z \langle q^{(1)} \rangle + \nu (\nabla_X^2 + \nabla_Z^2) \langle w_z^{(0)} \rangle \quad (4.22)$$

Esplicitando le medie delle equazioni (4.21) e (4.22) otteniamo:

$$\partial_T \langle w_x^{(0)} \rangle = \frac{7V^2 L^2}{2\nu} \nabla_X^2 \langle w_x^{(0)} \rangle - \nabla_X \langle q^{(1)} \rangle + \nu (\nabla_Z^2 + \nabla_X^2) \langle w_x^{(0)} \rangle \quad (4.23)$$

$$\partial_T \langle w_z^{(0)} \rangle = -\frac{1}{2} \frac{V^2 L^2}{\nu} \nabla_X^2 \langle w_z^{(0)} \rangle - \nabla_Z \langle q^{(1)} \rangle + \nu (\nabla_Z^2 + \nabla_X^2) \langle w_z^{(0)} \rangle \quad (4.24)$$

In termini della funzione corrente abbiamo che:

$$\langle w_x^{(0)} \rangle = \frac{1}{V} \nabla_Z \psi \quad \langle w_z^{(0)} \rangle = -\frac{1}{V} \nabla_X \psi \quad (4.25)$$

Sostituendo nelle (4.23) e (4.24), derivando la prima rispetto a Z e la seconda rispetto a X , e sottraendo la prima alla seconda otteniamo un'equazione in termini della sola funzione corrente:

$$\partial_T (\nabla_X^2 + \nabla_Z^2) \psi = \nu (\nabla_Z^2 + \nabla_X^2)^2 \psi + \frac{7V^2 L^2}{2\nu} \nabla_Z^2 \nabla_X^2 \psi - \frac{V^2 L^2}{2\nu} \nabla_X^4 \psi \quad (4.26)$$

Lo studio della stabilità di questa equazione è riconducibile allo studio del segno del coefficiente diffusivo: supponiamo infatti di avere un'equazione del tipo

$$\partial_t \Lambda(\vec{x}, t) = \mathcal{D} \partial^2 \Lambda(\vec{x}, t) \quad (4.27)$$

Se applichiamo alla (4.27) l'operatore trasformata di Fourier per la variabile \vec{x} otteniamo:

$$\partial_t \hat{\Lambda}(\vec{k}, t) = -\mathcal{D} k^2 \hat{\Lambda}(\vec{k}, t)$$

che ha come soluzione

$$\hat{\Lambda}(\vec{k}, t) = \hat{\Lambda}(\vec{k}, 0) e^{-k^2 \mathcal{D} t}$$

Allora un certo modo $\vec{k} \neq 0$ deflagra nel tempo, o si smorza a seconda del segno del coefficiente \mathcal{D} . Per ciò che riguarda il modo zero, abbiamo che esso è stabile sempre.

Nel nostro caso si tratta di studiare il segno del secondo membro della (4.26): considerando $\psi = e^{ikX + imZ}$, sostituendola nella (4.26), e dividendo per ψ otteniamo:

$$\frac{7V^2 L^2 k^2 m^2 + 2\nu^2 m^4 + 4\nu^2 m^2 k^2 - V^2 k^4 L^2 + 2\nu^2 k^4}{2\nu V} \leq 0 \quad (4.28)$$

Definiamo

$$\frac{k}{m} = \tan(\theta)$$

indicando con θ l'angolo tra la direzione x e la perturbazione, e introduciamo il numero di Reynolds

$$\mathcal{R}e = \frac{VL}{\nu}.$$

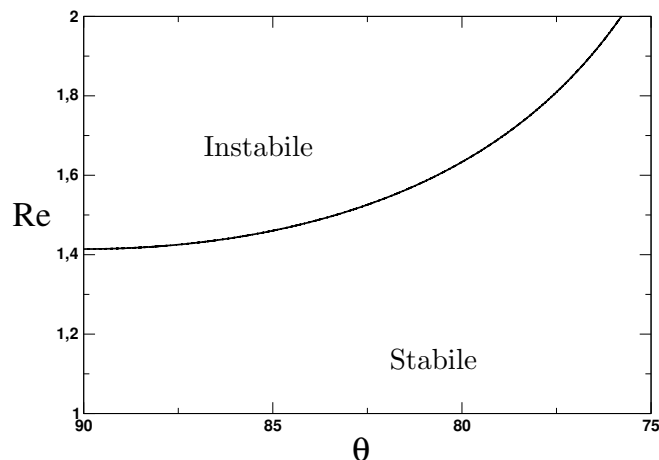


Figura 4.1: Diagramma di stabilità del flusso di Kolmogorov

Dividendo ora per $m^4 L$, otteniamo la forma biquadratica in $\tan(\theta)$:

$$\frac{2 - \mathcal{R}e^2}{2\mathcal{R}e} \tan^4(\theta) + \frac{4 + 7\mathcal{R}e^2}{2\mathcal{R}e} \tan^2(\theta) + \frac{1}{\mathcal{R}e} \gtrless 0 \quad (4.29)$$

Imporre la condizione di stabilità equivale a richiedere che tale forma quadratica non abbia nessuno zero nella regione $\mathcal{R}e > 0$ e $\theta \in [0, \pi/2]$. In figura 4.1 si può osservare che se vogliamo avere una condizione di stabilità valida per ogni valore di θ , dobbiamo restare sotto un certo valore critico del numero di Reynolds, ovvero il flusso è stabile se

$$\mathcal{R}e_c \leq \sqrt{2}$$

È da notare in ogni caso che se imponiamo la natura trasversale o longitudinale della perturbazione direttamente nell'equazione (4.23) e (4.24) otteniamo lo stesso valore di Reynolds critico: se supponiamo di fare un esperimento ideale in cui si aumenta gradualmente il numero di Reynolds, la prima instabilità si trova per $\theta = \pi/2$, ovvero per una perturbazione trasversale.

Nel caso di un flusso di Kolmogorov soggetto a perturbazione trasversale, la cui stabilità è appena stata discussa, possiamo fare alcune osservazioni sul tensore viscosità turbolenta (vedi capitolo 3). Supporre di avere una perturbazione trasversale significa mettersi nella condizione:

$$\langle w_x^{(0)} \rangle = 0$$

Questo assieme alla richiesta di incompressibilità sulla grande scala, impone che il campo $\langle w_z^{(0)} \rangle$ sia una funzione del tempo T e della coordinata X :

l'equazione (4.24) risulta essere in questo caso:

$$\partial_T \langle w_z^{(0)} \rangle = -\nabla_Z \langle q^{(1)} \rangle + \left(\nu - \frac{1}{2} \frac{V^2 L^2}{\nu} \right) \nabla_X^2 \langle w_z^{(0)} \rangle \quad (4.30)$$

Possiamo allora identificare il tensore suddetto con:

$$\nu_E = \nu \left(1 - \frac{V^2 L^2}{2\nu^2} \right) \longrightarrow \nu_E \doteq \left(1 - \frac{\mathcal{R}e^2}{2} \right) \quad (4.31)$$

Questo coefficiente è negativo per numeri di Reynolds maggiori di quello critico, e nel linguaggio del capitolo 3 la (4.30) è un'equazione formalmente diffusiva.

4.2 Il modello Oldroyd-B e il flusso di Kolmogorov

Consideriamo ora le equazioni per il modello di Oldroyd, con l'identificazione $\sigma_{\delta\beta} = \langle R_\delta R_\beta \rangle$:

$$\partial_t u_\gamma + u_\beta \partial_\beta u_\gamma = -\partial_\gamma p + \nu \partial^2 u_\gamma + \frac{\eta\nu}{\tau} \partial_\beta (\sigma_{\beta\gamma} - \delta_{\beta\gamma}) + \nu F_\gamma \quad (4.32)$$

$$\partial_t \sigma_{\delta\beta} + u_\gamma \partial_\gamma \sigma_{\delta\beta} = \partial_\gamma v_\delta \sigma_{\gamma\beta} + \sigma_{\delta\gamma} \partial_\gamma u_\beta - \frac{1}{\tau} (\sigma_{\delta\beta} - \delta_{\delta\beta}) \quad (4.33)$$

Se consideriamo una forzante e un flusso del tipo Kolmogorov come nel paragrafo precedente otteniamo che il tensore di conformazione:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 + 2\tau^2 (\partial_z U)^2 & \tau \partial_z U \\ \tau \partial_z U & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

è soluzione stazionaria dell'equazione (4.33), e che la 4.34, sostituita nella (4.32) da un'equazione per il profilo di velocità analoga alla (4.4):

$$(1 + \eta) \partial_z^2 U + F = 0 \quad (4.35)$$

Nel seguito considereremo $U(z) = V \cos\left(\frac{z}{L}\right)$. La scelta di riscalarare la forzante con la viscosità rende il flusso indipendente da parametri polimerici. Introduciamo quindi l'usuale decomposizione di Reynolds:

$$u'_\gamma = u_\gamma + w_\gamma \quad , \quad p' = p + q \quad , \quad \sigma'_{\gamma\beta} = \sigma_{\gamma\beta} + \zeta_{\gamma\beta} \quad (4.36)$$

e studiamo le equazioni per le perturbazioni, ottenute sostituendo nelle (4.32) e (4.33) le (4.36), tenendo conto che le variabili senza apice sono soluzione delle equazioni:

$$\partial_\alpha w_\alpha = 0 \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \partial_t w_\alpha + \partial_\beta (u_\alpha w_\beta + w_\alpha u_\beta) + \partial_\beta w_\beta w_\alpha = -\partial_\alpha q \\ + \nu \partial^2 w_\alpha + \frac{\eta \nu}{\tau} \partial_\beta \zeta_{\beta\alpha} \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \zeta_{\alpha\beta} + \partial_\gamma (u_\gamma \zeta_{\alpha\beta} + w_\gamma \sigma_{\alpha\beta}) + \partial_\gamma w_\gamma \zeta_{\alpha\beta} = \partial_\gamma u_\alpha \zeta_{\gamma\beta} + \partial_\gamma w_\alpha \sigma_{\gamma\beta} \\ + \partial_\gamma w_\alpha \zeta_{\gamma\beta} + \zeta_{\alpha\gamma} \partial_\gamma w_\beta + \zeta_{\alpha\gamma} \partial_\gamma u_\beta + \sigma_{\alpha\gamma} \partial_\gamma w_\beta - \frac{1}{\tau} \zeta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Con il formalismo multiscala introduciamo due tipi di variabili e di operatori di derivazione:

$$\begin{aligned} \vec{X} &= \epsilon \vec{x} & T &= \epsilon^2 t \\ \frac{d}{dt} &\rightarrow \partial_t + \partial_T \frac{dT}{dt} = \partial_t + \epsilon \partial_T \\ \frac{d^2}{dt^2} &\rightarrow \partial_{tt} + 2\epsilon \partial_{Tt} + \epsilon^2 \partial_{TT} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.40)$$

Le espansioni asintotiche per le perturbazioni sono:

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{w}^{(0)}(z, t, X, Z, T) + \epsilon \vec{w}^{(1)}(z, t, X, Z, T) + \epsilon^2 \vec{w}^{(2)}(z, t, X, Z, T) + \dots \\ q &= q^{(0)}(z, t, X, Z, T) + \epsilon q^{(1)}(z, t, X, Z, T) + \epsilon^2 q^{(2)}(z, t, X, Z, T) + \dots \\ \zeta &= \zeta^{(0)}(z, t, X, Z, T) + \epsilon \zeta^{(1)}(z, t, X, Z, T) + \epsilon^2 \zeta^{(2)}(z, t, X, Z, T) + \dots \end{aligned} \quad (4.41)$$

Supponendo per il momento che le ampiezze delle perturbazioni siano sufficientemente piccole da poter trascurare i termini non lineari, otteniamo una gerarchia di equazioni ai vari ordini in ϵ . All'ordine zero avremo:

$$\partial_z w_z^{(0)} = 0 \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \partial_t w_x^{(0)} + \partial_z (w_z^{(0)} U) = \nu \partial_z^2 w_x^{(0)} + \frac{\eta \nu}{\tau} \partial_z \zeta_{zx}^{(0)} \\ \partial_t w_z^{(0)} = -\partial_z q^{(0)} + \nu \partial_z^2 w_z^{(0)} + \frac{\eta \nu}{\tau} \partial_z \zeta_{zz}^{(0)} \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \zeta_{xx}^{(0)} + \partial_z (w_z^{(0)} \sigma_{xx}) = 2\zeta_{xz}^{(0)} \partial_z U + 2\sigma_{xz} \partial_z w_x^{(0)} - \frac{1}{\tau} \zeta_{xx}^{(0)} \\ \partial_t \zeta_{xz}^{(0)} + \partial_z (w_z^{(0)} \sigma_{xz}) = \zeta_{zz}^{(0)} \partial_z U + \sigma_{xz} \partial_z w_z^{(0)} + \sigma_{zz} \partial_z w_x^{(0)} - \frac{1}{\tau} \zeta_{xz}^{(0)} \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\partial_t \zeta_{zz}^{(0)} + \partial_z (w_z^{(0)} \sigma_{zz}) = 2\sigma_{zz} \partial_z w_z^{(0)} - \frac{1}{\tau} \zeta_{zz}^{(0)}$$

Dalla (4.42) si evince che:

$$w_z^{(0)} = \langle w_z^{(0)} \rangle \quad (4.45)$$

dove con $\langle \rangle$ si intende la media sulle periodicità spaziali. La soluzione della (4.44) è:

$$\begin{aligned}\zeta_{xx}^{(0)} &= -6\tau^3 \langle w_z^{(0)} \rangle (\partial_z U) \partial_z^2 U + 4\tau^2 (\partial_z w_x^{(0)}) \partial_z U \\ \zeta_{xz}^{(0)} &= -\tau^2 \langle w_z^{(0)} \rangle \partial_z^2 U + \tau \partial_z w_x^{(0)} \\ \zeta_{zz}^{(0)} &= 0\end{aligned}\quad (4.46)$$

che sostituita nella (4.43) fornisce:

$$\begin{aligned}\partial_t w_x^{(0)} + \langle w_z^{(0)} \rangle \partial_z U &= \nu(1+\eta) \partial_z^2 w_x^{(0)} - \eta\nu\tau \langle w_z^{(0)} \rangle \partial_z^3 U \\ \partial_z q^{(0)} &= 0\end{aligned}\quad (4.47)$$

Sostituendo il campo di fondo come da noi scelto, $U = V \cos(\frac{z}{L})$, otteniamo in conclusione:

$$\begin{aligned}q^{(0)} &= \langle q^{(0)} \rangle \\ w_x^{(0)} &= \langle w_x^{(0)} \rangle + \frac{V(L^2 - \eta\nu\tau)}{\nu(1+\eta)L} \sin(z/L) \langle w_z^{(0)} \rangle \\ w_z^{(0)} &= \langle w_z^{(0)} \rangle \\ \zeta_{xx}^{(0)} &= -\frac{V^2\tau^2[2L^2 + \nu\tau(3+\eta)]}{\nu(1+\eta)L^3} \sin(2z/L) \langle w_z^{(0)} \rangle \\ \zeta_{xz}^{(0)} &= \frac{V\tau(L^2 + \nu\tau)}{\nu(1+\eta)L^2} \cos(z/L) \langle w_z^{(0)} \rangle \\ \zeta_{zz}^{(0)} &= 0\end{aligned}\quad (4.48)$$

All'ordine 1 avremo:

$$\partial_z w_z^{(1)} + \nabla_X w_x^{(0)} + \nabla_Z w_z^{(0)} = 0 \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned}\partial_t w_x^{(1)} + \partial_z(w_z^{(1)}U) + 2\nabla_X(w_x^{(0)}U) + \nabla_Z(w_z^{(0)}U) &= -\nabla_X q^{(0)} \\ + \nu \partial_z^2 w_x^{(1)} + 2\nu \partial_z \nabla_Z w_x^{(0)} + \frac{\eta\nu}{\tau} \partial_z \zeta_{zx}^{(1)} + \frac{\eta\nu}{\tau} \nabla_X \zeta_{xx}^{(0)} + \frac{\eta\nu}{\tau} \nabla_Z \zeta_{zx}^{(0)} & \\ \partial_t w_z^{(1)} + \nabla_X(Uw_z^{(0)}) &= -\partial_z q^{(1)} - \nabla_Z q^{(0)} + \nu \partial_z^2 w_z^{(1)} + \\ + 2\nu \partial_z \nabla_Z w_z^{(0)} + \frac{\eta\nu}{\tau} \partial_z \zeta_{zz}^{(1)} + \frac{\eta\nu}{\tau} \nabla_X \zeta_{xz}^{(0)} + \frac{\eta\nu}{\tau} \nabla_Z \zeta_{zz}^{(0)} &\end{aligned}\quad (4.50)$$

$$\begin{aligned}
& \partial_t \zeta_{xx}^{(1)} + \partial_z (w_z^{(1)} \sigma_{xx}) + \nabla_X (U \zeta_{xx}^{(0)}) + \nabla_X (w_x^{(0)} \sigma_{xx}) \\
& \quad + \nabla_Z (w_z^{(0)} \sigma_{xx}) = 2\zeta_{xz}^{(1)} \partial_z U + 2\sigma_{xz} \partial_z w_x^{(1)} \\
& \quad \quad + 2\sigma_{xx} \nabla_X w_x^{(0)} + 2\sigma_{xz} \nabla_Z w_x^{(0)} - \frac{1}{\tau} \zeta_{xx}^{(1)} \\
& \partial_t \zeta_{xz}^{(1)} + \partial_z (w_z^{(1)} \sigma_{xz}) + \nabla_X (U \zeta_{xz}^{(0)}) + \nabla_X (w_x^{(0)} \sigma_{xz}) \\
& \quad + \nabla_Z (w_z^{(0)} \sigma_{xz}) = \zeta_{zz}^{(1)} \partial_z U + \sigma_{xz} \partial_z w_z^{(1)} + \sigma_{zz} \partial_z w_x^{(1)} + \\
& \quad \quad + \sigma_{xz} \nabla_X w_x^{(0)} + \sigma_{zz} \nabla_Z w_x^{(0)} + \sigma_{xx} \nabla_X w_z^{(0)} + \sigma_{xz} \nabla_Z w_z^{(0)} - \frac{1}{\tau} \zeta_{xz}^{(1)} \\
& \partial_t \zeta_{zz}^{(1)} + \partial_z (w_z^{(1)} \sigma_{zz}) + \nabla_X (U \zeta_{zz}^{(0)}) + \nabla_X (w_x^{(0)} \sigma_{zz}) \\
& \quad + \nabla_Z (w_z^{(0)} \sigma_{zz}) = 2\sigma_{zz} \partial_z w_z^{(1)} + 2\sigma_{xz} \nabla_X w_z^{(0)} \\
& \quad \quad + 2\sigma_{zz} \nabla_Z w_z^{(0)} - \frac{1}{\tau} \zeta_{zz}^{(1)}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Applicando l'operatore $\langle \rangle$ su entrambi i membri della (4.49) e della (4.50) si ottiene:

$$\begin{aligned}
& \nabla_X \langle w_x^{(0)} \rangle + \nabla_Z \langle w_z^{(0)} \rangle = 0 \\
& \nabla_X \langle q^{(0)} \rangle = 0 \\
& \nabla_Z \langle q^{(0)} \rangle = 0
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Le (4.52) ci assicurano di poter scegliere

$$q^{(0)} = 0$$

Possiamo perciò scrivere le soluzioni all'ordine 1:

$$\begin{aligned}
w_x^{(1)} = \langle w_x^{(1)} \rangle - \frac{V}{2\nu(1+\eta)L} \left\{ -V\tau^2 \eta \nu \sin(2z/L) \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle \right. \\
\left. + 6L(L^2 - \eta\nu\tau) \cos(z/L) \nabla_X \langle w_x^{(0)} \rangle - 2(L^2 - \eta\nu\tau) \sin(z/L) \langle w_z^{(1)} \rangle \right\}
\end{aligned} \tag{4.53}$$

$$w_z^{(1)} = \langle w_z^{(1)} \rangle + \frac{V(L^2 - \eta\nu\tau)}{\nu(1+\eta)} \cos(z/L) \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_{xz}^{(1)} = \frac{\tau}{\nu(1+\eta)L^2} \left\{ [\nu(1+\eta)L^2 + 2\nu(2+\eta)V^2\tau^2 \right. \\
\left. + 2V^2\tau L^2] \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle + \nu(1+\eta)L^2 \nabla_Z \langle w_x^{(0)} \rangle \right. \\
\left. + 2VL(L^2 + \nu\tau) \sin(z/L) \nabla_X \langle w_x^{(0)} \rangle + V(L^2 + \nu\tau) \cos(z/L) \langle w_z^{(1)} \rangle \right. \\
\left. + \nu\eta V^2\tau^2 \cos(2z/L) \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle \right. \\
\left. - V^2\tau [2L^2 + (5+3\eta)\nu\tau] \cos^2(z/L) \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle \right\}
\end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\zeta_{zz}^{(1)} = -2\tau \nabla_X \langle w_x^{(0)} \rangle - \frac{2\tau V(L^2 + \nu\tau)}{\nu(1+\eta)L} \sin(z/L) \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle \tag{4.56}$$

Mediando le equazioni per la perturbazione al campo di velocità all'ordine 2 otteniamo:

$$\begin{aligned} \partial_T \langle w_x^{(0)} \rangle + 2\partial_X \langle U w_x^{(1)} \rangle + \partial_Z \langle w_z^{(1)} U \rangle = & -\partial_X \langle q^{(1)} \rangle \\ & + \nu (\partial_X^2 + \partial_Z^2) \langle w_x^{(0)} \rangle \\ & + \frac{\eta\nu}{\tau} \left(\partial_X \langle \zeta_{xx}^{(1)} \rangle + \partial_Z \langle \zeta_{zx}^{(1)} \rangle \right) \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \partial_T \langle w_z^{(0)} \rangle + \partial_X \langle U w_z^{(1)} \rangle = & -\partial_Z \langle q^{(1)} \rangle + \nu (\partial_X^2 + \partial_Z^2) \langle w_z^{(0)} \rangle \\ & + \frac{\eta\nu}{\tau} \left(\partial_X \langle \zeta_{xz}^{(1)} \rangle + \partial_Z \langle \zeta_{zz}^{(1)} \rangle \right) \end{aligned}$$

Esplicitando le medie delle equazioni (4.57) otteniamo quindi un'equazione di evoluzione chiusa per il campo $\langle \vec{w}^{(0)} \rangle$:

$$\begin{aligned} \partial_T \langle w_x^{(0)} \rangle = & -\nabla_X \langle q^{(1)} \rangle + \nu (1 + \eta) \left(\nabla_X^2 \langle w_x^{(0)} \rangle + \nabla_Z^2 \langle w_x^{(0)} \rangle \right) \\ & + \frac{1}{2} \frac{V^2 (7L^4 + 7\eta^2 \nu^2 \tau^2 - 17L^2 \eta \nu \tau - 3\eta \nu^2 \tau^2)}{L^2 (1 + \eta) \nu} \nabla_X^2 \langle w_x^{(0)} \rangle \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \partial_T \langle w_z^{(0)} \rangle = & -\nabla_Z \langle q^{(1)} \rangle + \nu (1 + \eta) \left(\nabla_X^2 \langle w_z^{(0)} \rangle + \nabla_Z^2 \langle w_z^{(0)} \rangle \right) \\ & + \left\{ \frac{3V^2 \nu \eta \tau^2 + \nu \eta^2 V^2 \tau^2}{2L^2 (1 + \eta)} - \frac{L^2 V^2 + 3V^2 \nu \eta \tau}{2\nu (1 + \eta)} \right\} \nabla_X^2 \langle w_z^{(0)} \rangle \end{aligned} \quad (4.59)$$

La formulazione bidimensionale ci consente di passare all'uso della funzione corrente per i campi medi:

$$\langle w_x^{(0)} \rangle = \frac{1}{V} \nabla_Z \psi \quad \langle w_z^{(0)} \rangle = -\frac{1}{V} \nabla_X \psi \quad (4.60)$$

Otteniamo allora un'unica equazione per la funzione corrente:

$$\begin{aligned} \partial_T [(\nabla_X^2 + \partial_Z^2) \psi] = & \nu (1 + \eta) (\nabla_X^2 + \nabla_Z^2)^2 \psi \\ & + \frac{V^2 \{7L^2 + \eta \nu \tau [-17 + (7\eta - 3)(\nu \tau / L^2)]\}}{2\nu (1 + \eta)} \nabla_X^2 \nabla_Z^2 \psi \\ & + \frac{V^2 \{-L^2 + \eta \nu \tau [3 + (3 + \eta)(\nu \tau / L^2)]\}}{2\nu (1 + \eta)} \nabla_X^4 \psi \end{aligned} \quad (4.61)$$

Questa equazione può essere agevolmente descritta ricorrendo, come di consueto, allo studio dei modi normali, ovvero supponendo che:

$$\psi(\vec{k}) = e^{ikX + imZ} \quad (4.62)$$

Con questa precisazione possiamo identificare l'angolo che forma la perturbazione con il flusso base nel seguente modo:

$$\frac{k}{m} = \tan \theta$$

Avremo pertanto perturbazioni di tipo trasverso nel caso $\theta = \pi/2$, oppure longitudinali nel caso $\theta = 0$. La condizione di stabilità si riduce ad essere in questo contesto una richiesta sul segno del coefficiente delle derivate spaziali nella (4.61): sostituendo la (4.62) nella (4.61), e ricorrendo all'uso dei parametri adimensionali:

$$\mathcal{R}e = \frac{VL}{\nu(1+\eta)} \quad \mathcal{D}e = \frac{\tau V}{L} \quad (4.63)$$

tale condizione risulta essere:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{3\mathcal{D}e^2\eta + \eta^2\mathcal{D}e^2 - \mathcal{R}e^2 - 2\mathcal{R}e^2\eta - \mathcal{R}e^2\eta^2 + 3\mathcal{D}e\eta\mathcal{R}e}{2\mathcal{R}e(1+\eta)^2} \right. \\ & \left. + \frac{3\mathcal{D}e\eta^2\mathcal{R}e + 2\eta^2 + 2 + 4\eta}{2\mathcal{R}e(1+\eta)^2} \right\} \tan^4\theta \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \frac{-3\mathcal{D}e^2\eta + 4\eta^2 + 4 + 7\mathcal{R}e^2 + 14\mathcal{R}e^2\eta}{\mathcal{R}e(1+\eta)^2} \right. \\ & \left. + \frac{7\mathcal{R}e^2\eta^2 + 7\eta^2\mathcal{D}e^2 - 17\mathcal{D}e\eta\mathcal{R}e - 17\mathcal{D}e\eta^2\mathcal{R}e + 8\eta}{\mathcal{R}e(1+\eta)^2} \right\} \tan^2\theta \\ & + \frac{1}{\mathcal{R}e} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.64)$$

Questa condizione, considerando $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, e quindi $\tan\theta \geq 0$ equivale a porre delle condizioni sui coefficienti, che sono funzioni dei parametri $\mathcal{D}e$ e $\mathcal{R}e$, ovvero, in definitiva, a individuare un dominio nel piano $(\mathcal{R}e, \mathcal{D}e)$ in cui la condizione (4.64) è verificata.

Data una forma quadratica del tipo:

$$\mathcal{Q}(s) = as^2 + bs + c$$

se si considera il dominio $s > 0$ le condizioni sui parametri per soddisfare la richiesta $\mathcal{Q}(s) \geq 0$ sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ \frac{-b + \Delta^{1/2}}{2a} < 0 \\ \Delta > 0 \end{array} \right. \quad (4.65)$$

È facile vedere che anche il secondo sistema può essere riportato ad una condizione sui parametri direttamente e sul discriminante. I domini identificati dalle condizioni di positività dei parametri a , b e c , sono riportati in fig. 4.2. Si vede che il dominio piano finale è definito dalla linea $c = 0$ e dal ramo inferiore della curva $\Delta = 0$ (vedi fig. 4.3). Le instabilità delimitate

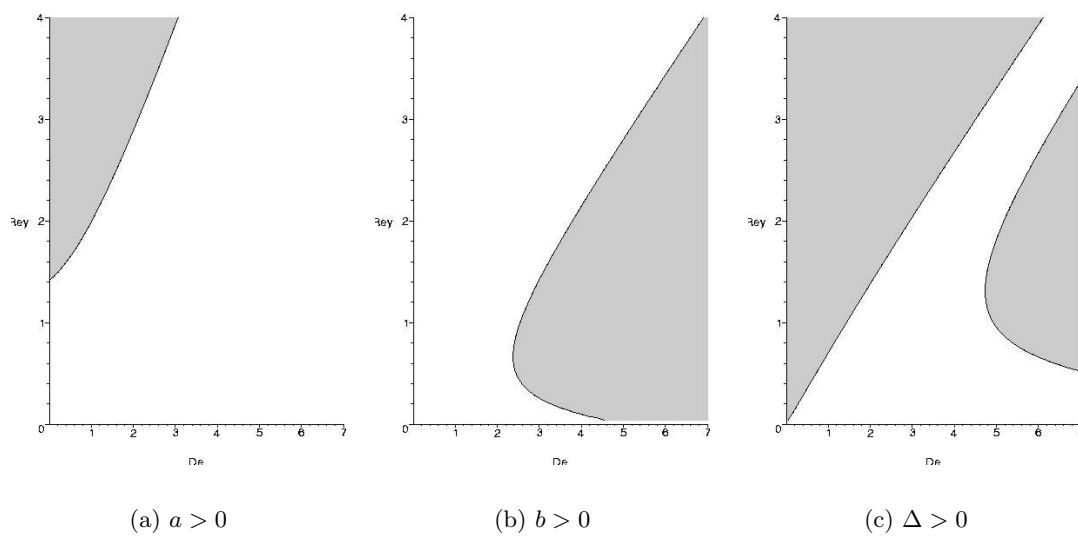


Figura 4.2: I domini ricavati dalle condizioni sui parametri della forma quadratica per $\eta = 0.3$. Le zone scure sono le zone dove il coefficiente in questione è negativo positivo. Il grafico per c non è mostrato perché fornisce ovviamente l'intero piano.

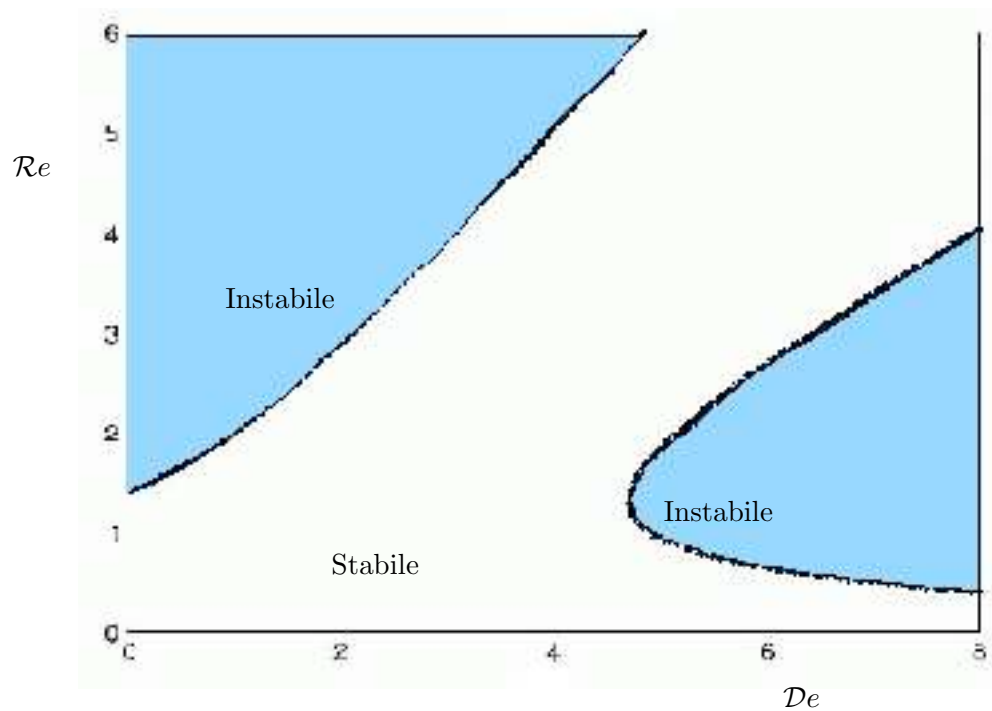


Figura 4.3: Diagramma di stabilità.

dalla curva inferiore sono di origine puramente elastica, al contrario di quelle delimitate dalla curva superiore, che sono invece di carattere inerziale. Come ben si nota dalla figura, il limite newtoniano ($De \rightarrow 0$), corrisponde al valore critico del numero di Reynolds previsto, ovvero $\sqrt{2}$.

In definitiva, facendo riferimento alla figura 4.3 possiamo osservare che nel caso di perturbazione trasversa, le condizioni di stabilità sono individuate dalla parte superiore della curva: questo significa che all'aumentare del numero di Deborah si ha una maggiore stabilità del flusso, e quindi in ultima analisi che i polimeri stabilizzano il flusso. Questo, come notato in precedenza, è diretta conseguenza della drag reduction. Anche nel caso di perturbazione non trasversa si ottiene un concetto molto simile, con l'unica differenza che all'aumentare del numero di Deborah si incontrano instabilità di natura elastica che apparentemente interrompono il meccanismo di stabilizzazione e innescano invece una instabilizzazione.

4.3 Una generalizzazione del modello di Oldroyd: la diffusività conformazionale

La diffusione dei polimeri, trascurata sino ad ora, può essere considerata aggiungendo un termine diffusivo nell'equazione di evoluzione del tensore di conformazione¹. Lo studio delle equazioni con l'aggiunta di un termine diffusivo è inoltre una prassi comunemente seguita nelle simulazioni numeriche dirette: l'aggiunta di tale termine infatti sopprime le instabilità spurie generate dagli errori algoritmici. Costituisce perciò materia di interesse capire se la drag reduction dedotta da studi numerici è un artefatto dovuto all'aggiunta di questo termine o un fenomeno fisico indipendente.

Consideriamo allora le equazioni complete per il modello di Oldroyd, fornite dalla (4.32) e da questa nuova equazione per il tensore di conformazione, ottenuta considerando anche la diffusività:

$$\partial_t \sigma_{\delta\beta} + u_\gamma \partial_\gamma \sigma_{\delta\beta} = \partial_\gamma v_\delta \sigma_{\gamma\beta} + \sigma_{\delta\gamma} \partial_\gamma u_\beta - \frac{1}{\tau} (\sigma_{\delta\beta} - \delta_{\delta\beta}) + \alpha \partial^2 \sigma_{\delta\beta} \quad (4.68)$$

¹Per capire quale significato abbia il termine diffusivo supponiamo per semplicità di poter trascurare gli effetti codeformazionali e di rilassamento del polimero: avremo allora questa equazione:

$$\partial_t \sigma_{\beta\gamma} = \alpha \partial^2 \sigma_{\beta\gamma} \quad (4.66)$$

dove α è il coefficiente di diffusione (o diffusività). In termini di autovalori si ha che il vettore costituito dai tre autovalori della matrice σ evolve secondo la legge della diffusione: in particolare, se il tensore di conformazione è già diagonale si ha che, detto $s_\beta = \sigma_{\beta\beta}$

$$\partial_t s_\beta = \alpha \partial^2 s_\beta \quad (4.67)$$

La (4.67) sommata su β indica che il comportamento del modulo del vettore di conformazione è diffusivo.

Con le semplificazioni del flusso di Kolmogorov, e una forzante del tipo $F(z) = \nu K \cos(\frac{z}{L})$ otteniamo il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \nu \frac{d^2}{dz^2} U(z) + \frac{\eta \nu}{\tau} \frac{d}{dz} \sigma_{xz} + \nu K \cos\left(\frac{z}{L}\right) &= 0 \\ \frac{d}{dz} \sigma_{zz} &= 0 \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} -2 \sigma_{xz} \frac{d}{dz} U(z) + \frac{\sigma_{xx}-1}{\tau} - \alpha \frac{d^2}{dz^2} \sigma_{xx} &= 0 \\ -\frac{d}{dz} U(z) \sigma_{zz} + \frac{\sigma_{xz}}{\tau} - \alpha \frac{d^2}{dz^2} \sigma_{xz} &= 0 \\ \frac{\sigma_{zz}-1}{\tau} - \alpha \frac{d^2}{dz^2} \sigma_{zz} & \end{aligned} \quad (4.70)$$

La seconda delle (4.69) a sistema con la terza delle (4.70) impone

$$\sigma_{zz} = 1$$

con la quale possiamo risolvere il sistema formato dalla prima delle (4.69) e dalla seconda delle (4.70), con l'opportuna scelta delle costanti di integrazione, ovvero imponendo che i campi siano finiti per $z = \pm\infty$:

$$U(z) = C_U + \frac{(K L^4 + L^2 \tau K \alpha) \cos\left(\frac{z}{L}\right)}{L^2 \eta + L^2 + \tau \alpha} \quad (4.71)$$

$$\sigma_{xz} = -\frac{K \tau L^3 \sin\left(\frac{z}{L}\right)}{L^2 \eta + L^2 + \tau \alpha}. \quad (4.72)$$

La costante di integrazione C_U può essere posta a zero imponendo che il campo di fondo abbia media nulla. Imponendo inoltre che il campo di fondo sia indipendente dalle caratteristiche dei polimeri, ovvero

$$U(z) = V \cos\left(\frac{z}{L}\right)$$

otteniamo

$$K = \frac{V (L^2 \eta + L^2 + \tau \alpha)}{L^2 (L^2 + \tau \alpha)}$$

La prima delle (4.69) può essere a questo punto risolta. Risulta:

$$\sigma_{xx} = 1 + \frac{2 \tau^2 V^2 L^2 \sin\left(\frac{z}{L}\right)^2}{L^4 + 5 \tau \alpha L^2 + 4 \tau^2 \alpha^2} + \frac{4 \tau^3 V^2 \alpha}{L^4 + 5 \tau \alpha L^2 + 4 \tau^2 \alpha^2} \quad (4.73)$$

e σ_{xz} diventa:

$$\sigma_{xz} = -\frac{V \tau L \sin\left(\frac{z}{L}\right)}{L^2 + \tau \alpha} \quad (4.74)$$

Come nei casi precedenti applichiamo il metodo multiscale a questo problema, e studiamo le equazioni ai vari ordini in ϵ . Consideriamo al solito la

decomposizione di Reynolds per i campi \vec{u} , σ e p , le loro espansioni asintotiche e i nuovi operatori di derivazione. Con notazione precedentemente discussa, all'ordine ϵ^0 avremo che²:

$$w_z^{(0)} = \langle w_z^{(0)} \rangle \quad (4.75)$$

$$q^{(0)} = \langle q^{(0)} \rangle \quad (4.76)$$

$$w_x^{(0)} = \frac{V(-L^3\tau\nu\eta + 2L^3\tau\alpha + L^5 + \alpha^2\tau^2L)}{\nu(L^2\eta + L^2 + \tau\alpha)(L^2 + \tau\alpha)} \sin\left(\frac{z}{L}\right) \langle w_z^{(0)} \rangle + \langle w_x^{(0)} \rangle \quad (4.77)$$

All'ordine 1 abbiamo un sistema di 5 equazioni accoppiate tra di loro: in particolare l'equazione per la divergenza, insieme alla sua condizione di risolubilità fornisce un'equazione chiusa in $w_z^{(1)}$, e la condizione di risolubilità esprime l'incompressibilità dei campi medi all'ordine 0:

$$\nabla_X \langle w_x^{(0)} \rangle + \nabla_Z \langle w_z^{(0)} \rangle = 0 \quad (4.78)$$

L'equazione per $\zeta_{zz}^{(1)}$ può essere a questo punto risolta, e di conseguenza il sistema costituito dalle equazioni per $w_x^{(1)}$ e $\zeta_{xz}^{(1)}$, mutuamente accoppiate. Infine possiamo risolvere l'equazione per $\zeta_{xx}^{(1)}$ in cui a questo punto è tutto noto. L'equazione per la divergenza all'ordine 2 dà la condizione di incompressibilità sulla perturbazione, analoga alla (4.78), ma sui campi medi all'ordine 1:

$$\nabla_X \langle w_x^{(1)} \rangle + \nabla_Z \langle w_z^{(1)} \rangle = 0 \quad (4.79)$$

A questo punto, mediando le equazioni all'ordine 2 per la perturbazione della velocità otteniamo come negli altri casi:

$$\begin{aligned} \partial_T \langle w_x^{(0)} \rangle + 2\partial_X \langle U w_x^{(1)} \rangle + \partial_Z \langle w_z^{(1)} U \rangle = -\partial_X \langle q^{(1)} \rangle \\ + \nu (\partial_X^2 + \partial_Z^2) \langle w_x^{(0)} \rangle \\ + \frac{\eta\nu}{\tau} \left(\partial_X \langle \zeta_{xx}^{(1)} \rangle + \partial_Z \langle \zeta_{zx}^{(1)} \rangle \right) \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} \partial_T \langle w_z^{(0)} \rangle + \partial_X \langle U w_z^{(1)} \rangle = -\partial_Z \langle q^{(1)} \rangle + \nu (\partial_X^2 + \partial_Z^2) \langle w_z^{(0)} \rangle \\ + \frac{\eta\nu}{\tau} \left(\partial_X \langle \zeta_{xz}^{(1)} \rangle + \partial_Z \langle \zeta_{zz}^{(1)} \rangle \right) \end{aligned}$$

Esplicitando le medie nella (4.80), sottraendo la prima delle due derivate rispetto a Z alla seconda derivata rispetto a X otteniamo un'unica equazione in termini dei campi a grande scala all'ordine zero e nella perturbazione pressoria all'ordine 1.

Ricorrendo alla funzione corrente con la definizione:

$$\langle w_x^{(0)} \rangle = \frac{1}{V} \nabla_Z \psi \quad \langle w_z^{(0)} \rangle = -\frac{1}{V} \nabla_X \psi \quad (4.81)$$

²Le equazioni e le soluzioni per la perturbazione ζ e le equazioni di ordine superiore al primo sono riportate in appendice.

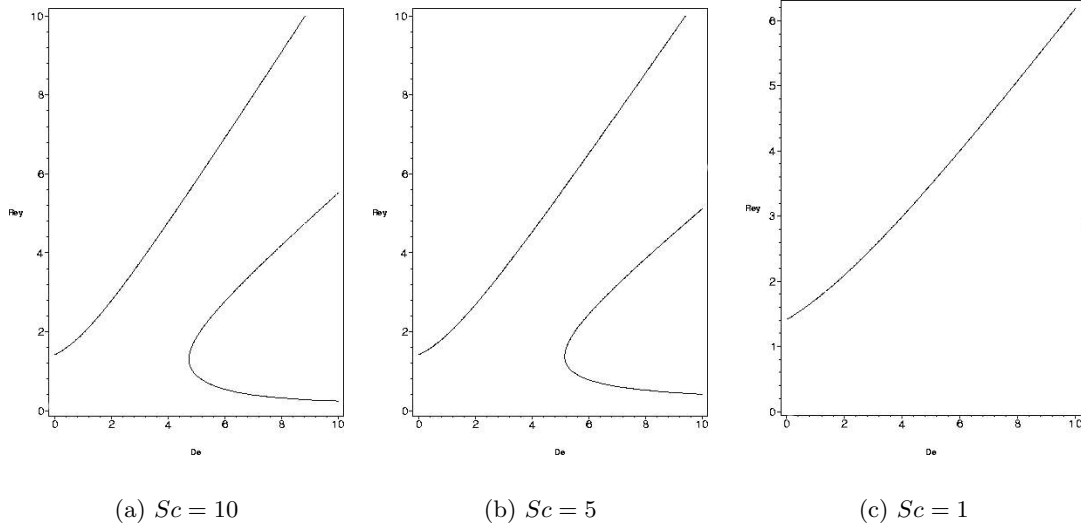


Figura 4.4: Le curve separatrici del dominio di stabilità nel caso diffusivo: la curva in basso, determinata dall'equazione $\Delta = 0$ si sposta sempre più a destra mano a mano che il numero di Schmidt diminuisce.

otteniamo la solita equazione chiusa nella funzione ψ : sostituendo i suoi modi normali, e con le solite identificazioni

$$\psi(\vec{k}) = e^{ikX + imZ} \quad \frac{k}{m} = \tan \theta \quad (4.82)$$

otteniamo una forma quadratica in $\cot \theta$, i cui coefficienti sono riportati in appendice. Sui coefficienti trovati dobbiamo imporre le condizioni di positività dell'intera forma quadratica.

I domini piani che si ottengono sono mostrati in figura 4.4 per vari valori del numero di Schmidt e per $\eta = 0.3$. Il numero di Schmidt è definito come

$$Sc = \frac{\nu}{\alpha}$$

e confronta il peso del termine viscoso rispetto a quello diffusivo.

La zona di instabilità elastica, come evidente da fig. 4.4, si sposta nella direzione positiva dell'asse $Re = 0$ con il diminuire del numero di Schmidt, e quindi in definitiva con il prevalere dell'effetto diffusivo su quello elastico.

Per scandagliare il limite per $Sc \rightarrow 0$ e identificare i diversi regimi nell'equazione di evoluzione per il tensore di conformazione possiamo ragionare in modo analogo a quanto fatto per le equazioni di Navier-Stokes. Consideriamo l'equazione di evoluzione per il tensore di conformazione e vediamo il bilancio dei vari termini:

$$\partial_t \sigma_{\delta\beta} + u_\gamma \partial_\gamma \sigma_{\delta\beta} = \partial_\gamma v_\delta \sigma_{\gamma\beta} + \sigma_{\delta\gamma} \partial_\gamma u_\beta - \frac{1}{\tau} (\sigma_{\delta\beta} - \delta_{\delta\beta}) + \alpha \partial^2 \sigma_{\delta\beta} \quad (4.83)$$

I termini della (4.83) che contengono un termine nel gradiente della velocità sono scalati con un fattore V/L , quello contenente il laplaciano va scalato con α/L^2 . Questi confronti in termini dei parametri adimensionali risultano essere:

$$\frac{\alpha}{L^2} \sim \frac{V}{L} \Rightarrow \frac{1}{Sc} \sim Re \quad (4.84)$$

$$\frac{\alpha}{L^2} \sim \frac{1}{\tau} \Rightarrow \frac{1}{Sc} \sim \frac{Re}{De} \quad (4.85)$$

Vediamo allora le caratteristiche dei vari regimi:

$$Sc \ll \frac{1}{Re}$$

$Sc \gg \frac{De}{Re}$ È questo il caso di comportamento non diffusivo del paragrafo 4.2, che conduce, come già ampiamente visto al valore rinormalizzato del numero di Reynolds critico.

$Sc \ll \frac{De}{Re}$ È questo il caso in cui l'elemento dominante è il termine diffusivo: la (4.83) è un'equazione della diffusione. La soluzione stazionaria di questa equazione è quella costante, e si ha perciò disaccoppiamento tra il campo di velocità e il tensore di conformazione: il valore del numero di Reynolds critico è quello del caso newtoniano.

In figura 4.5 è rappresentato il piano (\mathcal{E}, Sc) , dove con \mathcal{E} indichiamo l'elasticità, definita come:

$$\mathcal{E} = \frac{De}{Re}$$

Supponiamo di fissare un certo valore del numero di Schmidt che soddisfi la condizione $Sc \ll 1/Re$: allora ci stiamo muovendo sulla linea verticale tratteggiata a sinistra della linea continua in figura 4.5. Supponiamo per il momento che \mathcal{E} sia maggiore di Sc . Ci troviamo al di sopra della bisettrice: diminuendo \mathcal{E} (il che significa sostanzialmente diminuire il numero di Deborah), passiamo da un regime che porterebbe al valore $Re_c = \sqrt{2}$ a un regime che conduce invece a $Re_c = \sqrt{2}(1 + \eta)$. La zona di passaggio, identificabile circa come la distanza tra i punti A e B di figura 4.5 si assottiglia sempre di più mano mano che diminuiamo il numero di Schmidt scelto. Questa degenerazione, dovuta a quello che si chiama *boundary layer*, spiega il comportamento del grafico di figura 4.6, dove si vede bene il passaggio da un regime all'altro.

Vale la pena di notare che il regime $Sc \rightarrow 0$ non può essere ottenuto in modo banale facendo un'operazione di limite sulla forma quadratica, poichè la struttura dei campi di perturbazione e delle loro equazioni cambia radicalmente. Le condizioni di risolubilità sulle equazioni per le perturbazioni ai vari ordini infatti sono singolari in questo limite, ovvero l'operazione di limite sulle condizioni di risolubilità non fornisce un risultato consistente con

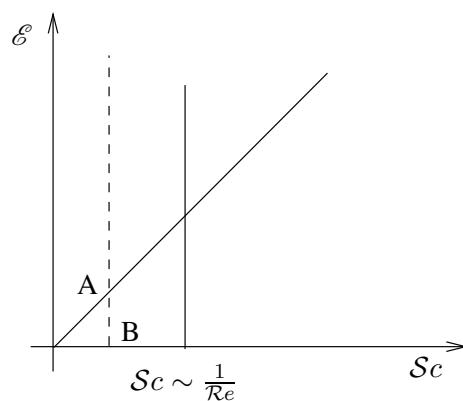


Figura 4.5: La visualizzazione grafica dei regimi asintotici per l'equazione di evoluzione del tensore di conformazione.

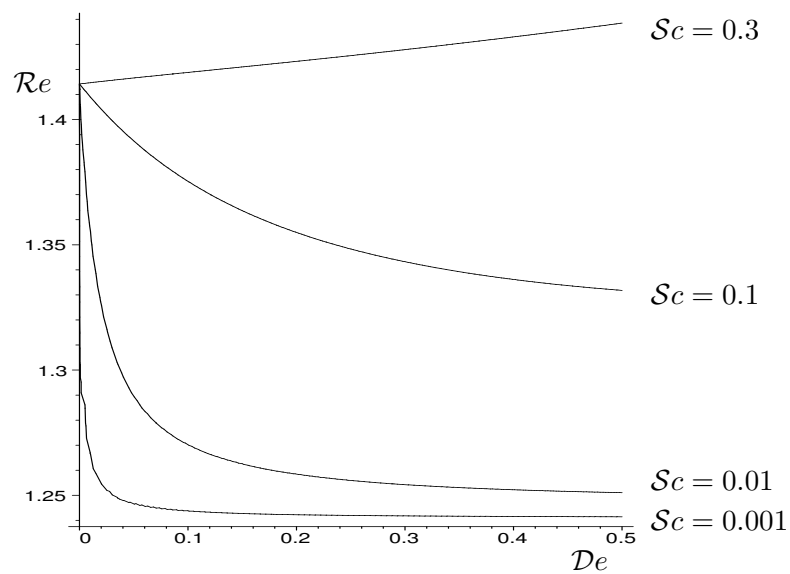


Figura 4.6: Il baffo superiore della curva di stabilità per diversi valori del numero di Schmidt: al diminuire di Sc è sempre più evidente la zona di passaggio da un regime all'altro, e si vede bene come la larghezza in termini di range del numero di Deborah è sempre più piccola.

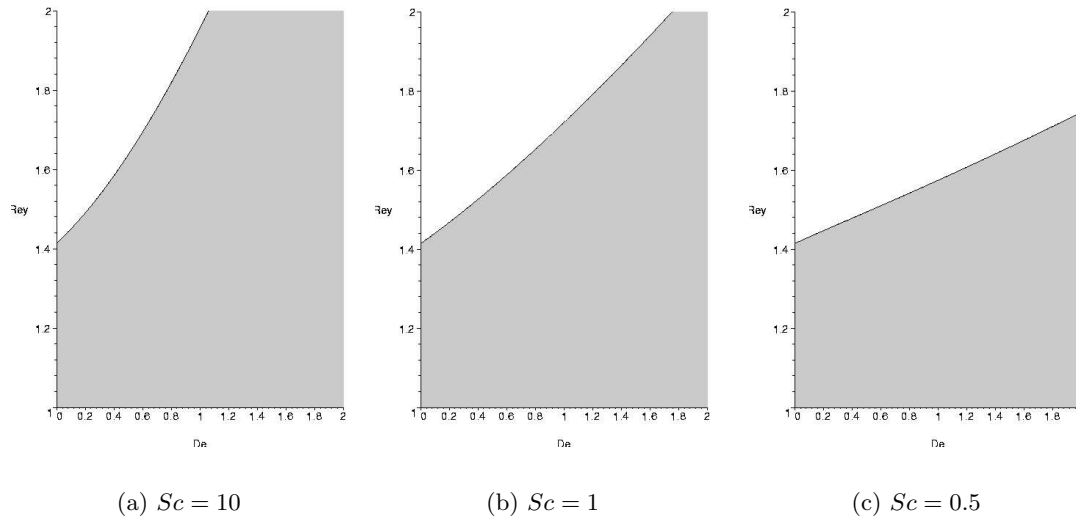


Figura 4.7: I domini di stabilità nel caso diffusivo: le zone scure sono le zone stabili.

lo stesso calcolo fatto però partendo con equazioni in cui è già stato fatto un bilancio tra i vari termini.

Il limite per $De \rightarrow 0$ invece è non singolare, e si trova che la condizione di stabilità fornisce il valore critico $\sqrt{2}(1 + \eta)$, come nel caso non diffusivo.

In conclusione possiamo notare che la presenza di diffusione sul tensore di conformazione diminuisce il valore del numero di Reynolds critico a Deborah fissati: infatti la curva marginale (si pensi alle perturbazioni trasversali) si abbassa rispetto al caso non diffusivo.

Possiamo affermare quindi che rispetto al caso newtoniano vi è un aumento della stabilità del tutto analogo al caso non diffusivo. Questa è prova del fatto che la diffusività non introduce stabilizzazioni spurie che possono confondersi con la drag reduction. La riduzione delle forze di drag osservata nelle simulazioni numeriche dirette è perciò un effetto fisico genuino.

4.4 Il regime di saturazione

Se studiamo l'andamento del parametro a della forma quadratica in funzione di η (ovvero della concentrazione) troviamo, come mostrano le figure 4.8 e 4.9, un indizio della saturazione prevista anche dall'asintoto MDR.

Consideriamo per il momento il caso del paragrafo 4.2: se cerchiamo di capire cosa accada alla curva di stabilità nel regime $\eta \rightarrow \infty$ troviamo una

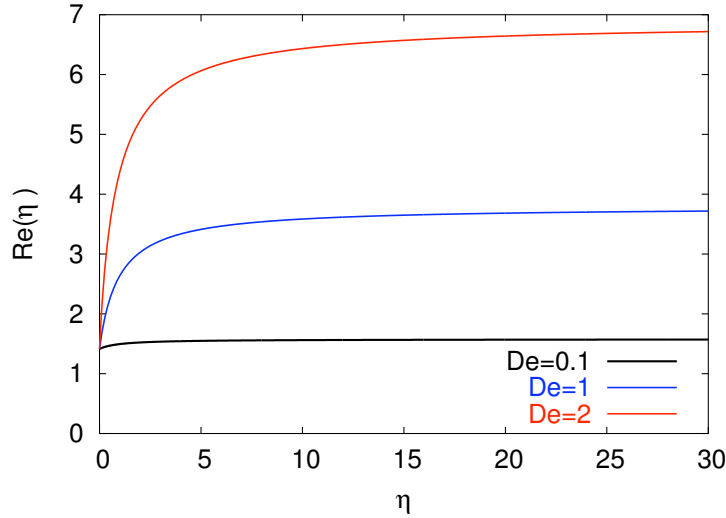


Figura 4.8: Dipendenza del numero di Reynolds critico dalla concentrazione dei polimeri per vari numeri di Deborah in assenza di diffusività.

curva alla quale la marginale tende:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} a(\eta, De, Re) = \frac{Re^2 - 3DeRe - 2 - De^2}{2Re} \quad (4.86)$$

In figura 4.8 ci sono gli andamenti del numero di Reynolds critico al variare della concentrazione: si può vedere chiaramente che all'aumentare di η , per basse concentrazioni, si ha un aumento del numero di Reynolds critico (a numeri di Deborah fissati), il che significa che la stabilità aumenta. Dopo un certo valore di η si ha saturazione, ovvero l'aggiunta di polimeri non ha più nessun effetto sulla stabilità del flusso. Questo effetto viene registrato anche in presenza di turbolenza, e in letteratura viene chiamato asintoto MDR.

Si può facilmente osservare da fig. 4.8, che all'aumentare di Deborah il regime di saturazione avviene per concentrazioni sempre più basse: questo è supportato dal fatto che l'allungamento dei polimeri è dell'ordine di $\sqrt{1 + De^2}$, e quindi diventa sempre più grande con il crescere di Deborah: siccome i valori tipici di η sono intorno a 10^{-1} si ha che la saturazione è un effetto importante quando c'è forte allungamento.

La situazione è circa la stessa in caso di presenza di diffusività (vedi paragrafo 4.3): la curva marginale di stabilità in regime di saturazione è indipendente dal numero di Schmidt, e questo significa che il valore del numero di Reynolds critico (per Deborah fissati) tende allo stesso valore di saturazione. Ciò che cambia, come si vede dalla figura 4.9 è la regione a piccoli η in cui il modo di tendere all'asintoto è più lento. Ancora una volta questa è una conferma del fatto che l'aggiunta di un termine diffusivo non crea drag reduction indotta, poiché il suo effetto è di instabilizzazione.

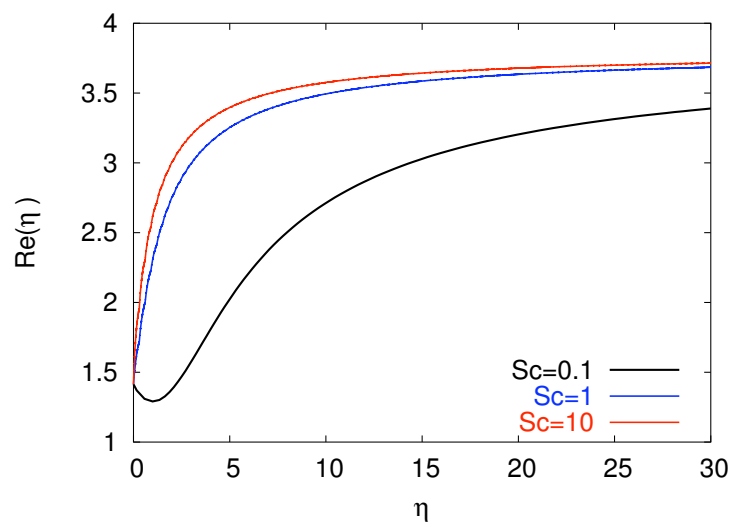


Figura 4.9: Dipendenza del numero di Reynolds critico dalla concentrazione dei polimeri per vari numeri di Schmidt, con $De = 1$.

Capitolo 5

Analisi non lineare

L'analisi di stabilità lineare effettuata nel precedente capitolo mette in evidenza un embrionale indizio di drag reduction. Scopo di questo capitolo è cercarne altri per mezzo dell'analisi non lineare, che mette in gioco uno studio del tutto differente.

Vedremo che lo svolgimento di un'analisi non lineare non consente di giungere fino allo studio della curva marginale di stabilità, ma permette tuttavia di fare considerazioni euristiche sul comportamento del sistema, e di tracciarne un qualitativo schema fenomenologico.

Nelle ipotesi sin qui considerate, dei termini non lineari non si è mai tenuto conto. Questa ipotesi, dà luogo alla creazione della fenomenologia descritta nel precedente capitolo. Nel caso che i termini non lineari non siano trascurabili, otteniamo dei comportamenti del sistema assai differenti dai casi presi in esame fin'ora, e sarà lo scopo di questo capitolo esplorare i diversi regimi in cui la non linearità del sistema è determinante ai fini dello studio della stabilità del flusso e quindi del verificarsi o meno della drag reduction¹.

I casi che verranno studiati sono:

- ampiezza della perturbazione tanto grande da rendere non trascurabili i termini non lineari del tipo $\partial_\alpha w_\alpha w_\beta$ nell'equazione (4.39) e (4.40). Questo porta a nuove equazioni per le perturbazioni;

¹Si può vedere, ad esempio in [38], che la dinamica non lineare di un flusso è largamente determinata dalle simmetrie da esso possedute: in particolare le proprietà di parità, specularità, e più in generale di chiralità, portano alla presenza o meno di termini nelle equazioni per la perturbazione, che cambiano radicalmente la fenomenologia del sistema e la sua stabilità. La conservazione della parità implica il possedere o meno un centro di simmetria, quella di specularità, di possedere una simmetria rispetto ad un asse. La chiralità di un sistema di riferimento, classicamente, rappresenta la proprietà di quest'ultimo di essere destrorso o sinistrorso. La diversa chiralità di uno stesso flusso, è riconoscibile in una immagine speculare ma non per una rotazione. Gli effetti collegati alle simmetrie per cambiamento della chiralità del sistema di riferimento sono detti chirali [39].

- tensore viscosità turbolenta negativo (vedi cap. 3). Si hanno quindi amplificazioni del campo a grande scala fino ad arrivare ad un regime in cui i termini non lineari non sono più trascurabili.

Studieremo questi due casi separatamente, poichè si originano da scelte diverse nei rapporti di scala del campo e delle grandezze in gioco.

5.1 Il caso sotto soglia: un segno di drag reduction

Nel caso di un flusso con viscosità turbolenta positiva, il cui flusso base sia dotato di simmetria di tipo speculare [38] (come il flusso di Kolmogorov), dobbiamo chiederci: in che regime il termine non lineare è confrontabile con il termine diffusivo nella eq. (4.39)? Il moto a grande scala ha scala spaziale $O(\epsilon^0)$, e tutte le derivate di grande scala danno un contributo ϵ . Questo significa che il termine diffusivo è dell'ordine

$$\nabla^2|w| \sim \epsilon^2[w]$$

dove con $[\]$ indichiamo l'ordine di grandezza. Per il termine non lineare invece:

$$\nabla w^2 \sim \epsilon[w]^2.$$

I due termini diventano confrontabili quando

$$[w] \sim \epsilon.$$

Allora le equazioni (4.32) e (4.33) contengono tutti i termini, e le espansioni (4.41) sono sostituite dalle seguenti:

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \epsilon \vec{w}^{(1)}(z, t, X, Z, T) + \epsilon^2 \vec{w}^{(2)}(z, t, X, Z, T) + \dots \\ q &= \epsilon q^{(1)}(z, t, X, Z, T) + \epsilon^2 q^{(2)}(z, t, X, Z, T) + \dots \\ \zeta &= \epsilon \zeta^{(1)}(z, t, X, Z, T) + \epsilon^2 \zeta^{(2)}(z, t, X, Z, T) + \dots \end{aligned} \quad (5.1)$$

Otteniamo come di consueto una gerarchia di equazioni ai vari ordini in ϵ . Al primo ordine in ϵ si ha:

$$\partial_z w_z^{(1)} = 0 \quad (5.2)$$

$$-\frac{\eta\nu}{\tau} \partial_z \zeta_{xz}^{(1)} - \langle w_z^{(1)} \rangle \partial_z U + \nu \partial_z^2 w_x^{(1)} = 0 \quad (5.3)$$

$$\partial_z q^{(1)} - \frac{\eta\nu}{\tau} \partial_z \zeta_{zz}^{(1)} = 0$$

$$-2\partial_z w_x^{(1)} \tau \partial_z U + 4\langle w_z^{(1)} \rangle \tau^2 \partial_z U \partial_z^2 U - 2\partial_z U \zeta_{xz}^{(1)} + \frac{1}{\tau} \zeta_{xx}^{(1)} = 0$$

$$\langle w_z^{(1)} \rangle \tau \partial_z^2 U - \partial_z U \zeta_{zz}^{(1)} - \partial_z w_x^{(1)} + \zeta_{xz}^{(1)} = 0 \quad (5.4)$$

$$\zeta_{zz}^{(1)} = 0$$

Le soluzioni sono:

$$w_z^{(1)} = \langle w_z^{(1)} \rangle \quad (5.5)$$

$$w_x^{(1)} = \frac{\langle w_z^{(1)} \rangle V (-\tau \eta \nu + L^2) \sin\left(\frac{z}{L}\right)}{L \nu (\eta + 1)} + \langle w_x^{(1)} \rangle \quad (5.6)$$

$$q^{(1)} = \langle q^{(1)} \rangle \quad (5.7)$$

Le soluzioni per la perturbazione al tensore di conformazione non sono riportate per brevità.

Le equazioni all'ordine ϵ^2 sono:

$$\nabla_X w_x^{(1)} + \nabla_Z \langle w_z^{(1)} \rangle + \partial_z w_z^{(2)} = 0 \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} w_z^{(2)} \partial_z U + \partial_z w_z^{(2)} U - \nu \partial_z \left(\partial_z w_x^{(2)} + 2 \nabla_Z w_x^{(1)} \right) + \\ - \frac{\eta \nu}{\tau} \left(\zeta_{xx}^{(1)} + \nabla_Z \zeta_{xz}^{(1)} + \partial_z \zeta_{xz}^{(2)} \right) + \nabla_Z \langle w_z^{(1)} \rangle U + \\ + 2U \nabla_X w_x^{(1)} + \langle w_z^{(1)} \rangle \partial_z w_x^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \partial_z q^{(2)} + \nabla_X \langle w_z^{(1)} \rangle U - \frac{\eta \nu}{\tau} \left(\partial_X \zeta_{xz}^{(1)} + \nabla_Z \zeta_{zz}^{(1)} + \partial_z \zeta_{zz}^{(2)} \right) + \\ - \nu \partial^2 w_z^{(2)} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \nabla_X \zeta_{xx}^{(1)} U + \nabla_X w_x^{(1)} + 2\tau^2 \nabla_X w_x^{(1)} (\partial_z U)^2 - \partial_z w_z^{(2)} + \\ - 2\tau^2 \partial_z w_z^{(2)} (\partial_z U)^2 - \zeta_{xx}^{(2)} - \nabla_Z \langle w_z^{(1)} \rangle - 2\tau^2 \nabla_Z \langle w_z^{(1)} \rangle (\partial_z U)^2 + \\ - 4\tau^2 w_z^{(2)} \partial_z^2 U \partial_z U + 2\partial_z U \zeta_{xz}^{(2)} + 2\tau \partial_z U \partial_z w_x^{(2)} + \\ + 2\tau \partial_z U \nabla_Z w_x^{(1)} - 2\partial_z w_x^{(1)} \zeta_{xz}^{(1)} = 0 \\ - U \nabla_X \zeta_{xz}^{(1)} + \nabla_X \langle w_z^{(1)} \rangle + 2\tau^2 \nabla_X \langle w_z^{(1)} \rangle (\partial_z U)^2 - \tau w_z^{(2)} \partial_z^2 U + \\ + \nabla_Z w_x^{(1)} - \partial_z w_x^{(1)} \zeta_{zz}^{(1)} + \partial_z U \zeta_{zz}^{(2)} + \partial_z w_x^{(2)} - \zeta_{xz}^{(2)} = 0 \\ 2\tau \nabla_X \langle w_z^{(1)} \rangle \partial_z U + \nabla_Z \langle w_z^{(1)} \rangle - U \nabla_X \zeta_{zz}^{(1)} - \nabla_X w_x^{(1)} + \\ - \zeta_{zz}^{(2)} + \partial_z w_z^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

All'ordine 2 le condizioni di risolubilità sulle equazioni per $\vec{w}^{(2)}$ forniscono d'altra parte

$$q^{(1)} = 0 \quad (5.11)$$

e quindi le soluzioni per la perturbazione al campo di velocità sono espresse da:

$$\begin{aligned} w_x^{(2)} = - \frac{V(\eta\nu\tau - L^2)}{(\eta+1)L\nu} \langle w_z^{(2)} \rangle \sin\left(\frac{z}{L}\right) - \frac{V(2\eta\nu\tau - L^2)}{(\eta+1)\nu} \nabla_Z \langle w_z^{(1)} \rangle \cos\left(\frac{z}{L}\right) + \\ + \frac{V(\eta\nu\tau - L^2)}{(\eta+1)^2\nu^2} \langle w_z^{(1)} \rangle^2 \cos\left(\frac{z}{L}\right) + \frac{V^2\eta\tau^2}{2L(\eta+1)} \nabla_X \langle w_z^{(1)} \rangle \sin\left(\frac{2z}{L}\right) + \\ + \frac{V(\eta\nu\tau - 2L^2)}{(\eta+1)\nu} \nabla_X \langle w_x^{(1)} \rangle \cos\left(\frac{z}{L}\right) + \langle w_x^{(2)} \rangle \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$w_z^{(2)} = -\frac{\nabla_X \langle w_z^{(1)} \rangle V(\tau \eta \nu - L^2) \cos\left(\frac{z}{L}\right)}{\nu(\eta + 1)} + \langle w_z^{(2)} \rangle \quad (5.13)$$

Dalla condizione di risolubilità per l'equazione all'ordine ϵ^3 per il campo \vec{w} otteniamo un'equazione a grande scala per il campo $\vec{w}^{(1)2}$. La condizione di risolubilità fornisce:

$$\nabla_X \langle w_x^{(2)} \rangle + \nabla_Z \langle w_z^{(2)} \rangle = 0 \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \partial_T \langle w_x^{(1)} \rangle &= -\nabla_X \langle q^{(2)} \rangle + \nu \left(\nabla_X^2 \langle w_x^{(1)} \rangle + \nabla_Z^2 \langle w_x^{(1)} \rangle \right) + \\ &\quad - \langle w_x^{(1)} \nabla_X w_x^{(1)} \rangle + \frac{\eta \nu}{\tau} \left(\nabla_X \langle \zeta_{xx}^{(2)} \rangle + \nabla_Z \langle \zeta_{xz}^{(2)} \rangle \right) + \\ &\quad - 2 \langle U \nabla_X w_x^{(2)} \rangle - \langle U \nabla_Z w_z^{(2)} \rangle + \\ &\quad - \langle w_z^{(1)} \partial_z w_x^{(2)} \rangle - \langle w_z^{(1)} \nabla_Z w_x^{(1)} \rangle - \langle w_z^{(2)} \partial_z w_x^{(1)} \rangle \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \partial_T \langle w_z^{(1)} \rangle &= -\nabla_X \langle w_z^{(2)} U \rangle + \nu \left(\nabla_X^2 \langle w_z^{(1)} \rangle + \nabla_Z^2 \langle w_z^{(1)} \rangle \right) + \\ &\quad - \langle w_x^{(1)} \nabla_X w_z^{(1)} \rangle + \frac{\eta \nu}{\tau} \left(\nabla_X \langle \zeta_{xz}^{(2)} \rangle + \nabla_Z \langle \zeta_{zz}^{(2)} \rangle \right) - \nabla_Z \langle q^{(2)} \rangle + \\ &\quad - \langle w_z^{(1)} \partial_z w_z^{(2)} \rangle - \langle w_z^{(1)} \nabla_Z w_z^{(1)} \rangle - \langle w_z^{(2)} \partial_z w_z^{(1)} \rangle \end{aligned}$$

Ciò che si può dedurre da questo caso è sostanzialmente un'evidenza matematica della drag reduction: consideriamo infatti un flusso con la proprietà di essere invariante per simmetria rispetto all'origine, e supponiamo anche che la perturbazione sia soltanto trasversale ($\langle w_x \rangle = 0$).

Prendiamo in considerazione allora il campo di velocità in direzione x , studiando la differenza δ tra il campo w_x , privato della sua componente a grande scala, e il corrispondente campo in condizioni newtoniane:

$$\delta = \frac{V \tau \eta (2L^2 + \nu \tau)}{L^2 \nu (1 + \eta)^2} \cos\left(\frac{z}{L}\right) \langle w_z^{(1)} \rangle^2 \quad (5.16)$$

Il coefficiente del termine oscillante è sempre positivo. Questo fatto può essere interpretato come effetto di drag reduction come segue: la portata su un intero periodo, per la conformazione del flusso di Kolmogorov è ovviamente nulla, ma l'ampiezza delle oscillazioni rispetto al caso newtoniano è incrementata. Ciò significa che la portata, misurata su una frazione di periodo è maggiore in presenza di polimeri.

Lo studio delle condizioni di risolubilità ai vari ordini, nel caso newtoniano [38], permette di concludere che la dinamica di grande scala di flussi con viscosità turbolenta positiva è governato da equazioni di Navier-Stokes

²L'equazione (5.15) in realtà non è chiusa, a patto di non porre $\langle w_z^{(1)} \rangle = 0$. Questa condizione, in questo contesto apparentemente restrittiva, sarà più chiara nel prossimo paragrafo.

bidimensionali che non amplificano i modi di oscillazione nel tempo. Tali equazioni hanno soluzioni regolari per ogni valore di T . La struttura delle equazioni nel caso non newtoniano è analoga a quella del caso newtoniano [38]:

$$\begin{aligned}
\partial_T \langle w_x^{(1)} \rangle &= -\nabla_X \langle q^{(2)} \rangle + \nu(\eta + 1) \left(\nabla_X^2 \langle w_x^{(1)} \rangle + \nabla_Z^2 \langle w_x^{(1)} \rangle \right) + \\
&\quad -\nabla_X \langle w_x^{(1)} \rangle^2 - \nabla_Z \langle w_z^{(1)} \rangle \langle w_x^{(1)} \rangle + \beta \nabla_X^2 \langle w_x^{(1)} \rangle + \gamma \nabla_X \langle w_z^{(1)} \rangle^2 \\
\partial_T \langle w_z^{(1)} \rangle &= -\nabla_Z \langle q^{(2)} \rangle + \nu(\eta + 1) \left(\nabla_X^2 \langle w_z^{(1)} \rangle + \nabla_Z^2 \langle w_z^{(1)} \rangle \right) + \\
&\quad + \alpha \nabla_X^2 \langle w_z^{(1)} \rangle + \nabla_Z \langle w_z^{(1)} \rangle^2 + \nabla_Z \langle w_z^{(2)} \rangle \langle w_z^{(1)} \rangle
\end{aligned} \tag{5.17}$$

I coefficienti α , β , γ sono:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{V^2(\nu^2\eta^2\tau^2 + (3\nu L^2\tau + 3\tau^2\nu^2)\eta - L^4)}{2\nu(1+\eta)L^2} \\
\beta &= \frac{V^2(7\nu^2\eta^2\tau^2 + (-17\nu L^2\tau - 3\tau^2\nu^2)\eta + 7L^4)}{2\nu(1+\eta)L^2} \\
\gamma &= -\frac{V^2(-3\nu^2 L^2\tau^2\eta^2 + (2\nu^2 L^2\tau^2 + 4\tau\nu L^4 + 2\nu^3\tau^3)\eta - L^6)}{2(1+\eta)^2 L^4\nu^2}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Pertanto le soluzioni delle (5.17) sono stabili, ovvero i modi decadono nel tempo.

5.2 Il caso sopra soglia: la struttura Cahn-Hillard

Per analizzare la dinamica del sistema appena sopra la soglia di stabilità dobbiamo scegliere come di consueto i giusti ordini di grandezza per le variabili in gioco. Mettiamoci quindi nella condizione in cui l'ampiezza iniziale delle perturbazioni a grande scala è inizialmente piccola (per fissare le idee più piccola di ϵ), ma la viscosità turbolenta è negativa, e corrisponde a un valore del numero di Reynolds appena sopra la soglia di stabilità³. In questa situazione ci aspettiamo che possa avvenire che l'ampiezza delle perturbazioni cresca grazie a meccanismi di interazione non lineare.

Detta ν_c la viscosità turbolenta critica, possiamo scegliere per esempio ν in modo tale che sia:

$$\nu - \nu_c = O(\epsilon)$$

Gli operatori di derivazione a grande scala portano un fattore ϵ , e quindi avremmo che il termine viscoso è scalato con ϵ^3 . Tale termine può essere bilanciato da un termine che contiene tre derivate, la presenza del quale

³Il valore di soglia del numero di Reynolds è determinato con l'analisi lineare (vedi cap. 4, paragrafo 4.2), imponendo la condizione di trasversalità e risolvendo $\nu_E = 0$ rispetto al numero di Reynolds.

però violerebbe la conservazione della parità. Salendo con gli ordini di ϵ scegliamo:

$$\nu - \nu_c = O(\epsilon^2)$$

Questa scelta porta un termine del quarto ordine in ϵ , il cui bilancio può avvenire per via di termini del tipo $\nabla^4 w$, che permettono la conservazione della parità. Dovremo allora capire a che ordine del campo w i termini non lineari diventano paragonabili al termine viscoso.

La crescita del campo è maggiore nelle direzioni in cui la viscosità turbolenta è maggiormente negativa. Questo porta ad avere un'equazione quasi unidimensionale, e come conseguenza alla scomparsa dei termini non lineari di tipo avvevativo ($\mathbf{u} \cdot \partial \mathbf{u}$). Gli unici termini non lineari possibili devono contenere il campo di velocità al terzo grado e due operatori di derivazione, uno che consenta la conservazione della quantità di moto e uno che rispetti l'invarianza per parità⁴. Intendendo con $[w]$ l'ordine di grandezza della perturbazione a grande scala abbiamo che:

$$\nu = \nu_c (1 - \alpha \epsilon^2) \quad (5.19)$$

$$\nu \partial^2 [w] = \nu_c \epsilon^2 \nabla^2 [w] - \nu_c \alpha \epsilon^4 [w] \quad (5.20)$$

I termini non lineari sono allora del tipo:

$$\partial^2 [w]^3 = \epsilon^2 [w]^3.$$

La richiesta che questo termine diventi comparabile con il termine viscoso fornisce

$$[w] \sim \epsilon.$$

Questa scelta porta a scegliere grande scala temporale nella forma:

$$\partial_t \rightarrow \epsilon^4 \partial_T$$

Fatte queste precisazioni, possiamo osservare che la direzione di massima crescita della perturbazione, per quello che riguarda le instabilità inerziali è la direzione trasversa. Per questo motivo possiamo imporre che la perturbazione sia solo trasversa ($\langle w_x^{(n)} \rangle = 0, \forall n$). Grazie alla richiesta di incompressibilità questo significa che tutte le variabili dipendono dalla sola X .

L'approccio è sempre quello perturbativo a scale multiple. Lo sviluppo è quello della (5.1). I dettagli dei calcoli, piuttosto lunghi e noiosi, non sono riportati. È opportuno osservare tuttavia che l'accoppiamento tra i campi di perturbazione w_x e w_z non porta ad una totale libertà nella scelta dei

⁴La conservazione della quantità di moto è verificata se l'integrale sul volume dell'equazione per il campo di velocità è nullo. Nel caso in questione questa proprietà è assicurata dalla presenza di un termine di divergenza, il cui integrale, per il teorema della divergenza, è nullo.

valori medi dei campi ai vari ordini⁵.

Il calcolo porta all'enucleazione di un'equazione a grande scala per il campo $\langle w_z^{(1)} \rangle$ detta equazione di Cahn-Hilliard [40–45] che ha la struttura:

$$\partial_T \langle w_z^{(1)} \rangle = \nabla_X \left\{ \left(-A + B \langle w_z^{(1)} \rangle^2 \right) \nabla_X \langle w_z^{(1)} \rangle \right\} - C \nabla_X^4 \langle w_z^{(1)} \rangle \quad (5.21)$$

I coefficienti A , B , C , riportati in appendice, sono funzioni dei parametri del problema (η , De , Re).

La dinamica dell'equazione di Cahn-Hilliard

L'equazione di Cahn-Hilliard è integrabile [37, 43] nel senso che gli stati stazionari dell'equazione possono essere espressi tramite funzioni ellittiche: con condizioni al contorno periodiche e per tempi lunghi la soluzione tende a uno stato stazionario che minimizza un certo funzionale di Lyapunov. Tuttavia la dinamica nel tempo di transizione è non banale. Lo stato stazionario si può raggiungere con un processo “aritmetico” di cascata inversa in cui si eccitano scale sempre più grandi tramite un susseguirsi di stati di quasi-equilibrio molto lunghi nel tempo.

Consideriamo l'equazione di Cahn-Hilliard per la funzione corrente [43] nella forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Psi \right)^3 + \alpha \frac{\partial^4}{\partial x^4} \Psi = 0 \quad (5.22)$$

La periodicità nella direzione x può essere scelta a piacere oppure si può fissare a 2π e far variare il coefficiente α . Se scegliamo di far variare α possiamo osservare che a grandi periodicità spaziali L corrispondono piccoli α , visto che $\alpha \propto L^{-2}$ ⁶. Siamo di fatto interessati a studiare regimi di piccoli

⁵La scelta (lecita e a priori ragionevole), di avere una componente non nulla del campo di velocità a grande scala $w_z^{(2)}$ fa uscire il problema da uno spazio di soluzioni periodiche e contemporaneamente comporta che il campo $w_x^{(4)}$ abbia media diversa da zero.

⁶Supponiamo di poter fare un'analisi lineare per tempi molto piccoli: possiamo supporre che

$$\Psi \sim e^{\omega t + i k x}$$

La relazione di dispersione che otteniamo per tempi molto piccoli è:

$$\omega \simeq -\alpha k^4 + k^2$$

Se scegliamo periodicità spaziale L e consideriamo la situazione critica, ($\omega \sim 0$) avremo che:

$$\left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 n^2 - \alpha^{(L)} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 n^4 = 0$$

Nel caso di periodicità fissata a 2π :

$$n^2 - \alpha^{(2\pi)} n^4 = 0$$

Eguagliando i due parametri di controllo otteniamo che scegliendo la periodicità 2π possiamo modulare con

$$\alpha^{(2\pi)} \propto \frac{\alpha^{(L)}}{L^2}$$

α , in modo che i numeri d'onda linearmente instabili siano $O(\alpha^{-1/2})$: infatti si ha stabilità se

$$\omega \sim k^2 (1 - \alpha k^2) < 0 \rightarrow k > \alpha^{-1/2}$$

Si può notare che il funzionale di Lyapunov dal quale si può risalire agli stati stazionari dell'equazione è nella forma:

$$\mathcal{F}[\Psi] = -\frac{1}{8} \int \left[4 \left(\frac{\partial}{\partial x} \Psi \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x} \Psi \right)^4 - 4\alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi \right)^2 \right] dx, \quad (5.23)$$

con l'eguaglianza:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\delta \mathcal{F}[\Psi]}{\delta \Psi} \quad (5.24)$$

La derivata funzionale è definita come segue:

$$\frac{\delta \mathcal{F}[\Psi(x)]}{\delta \Psi(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}[\Psi(x) + \epsilon \delta(x-y)] - \mathcal{F}[\Psi(x)]}{\epsilon} \quad (5.25)$$

Quando si scelgono condizioni al contorno periodiche in X , la soluzione tende dopo lungo tempo allo stato stazionario che minimizza il funzionale $\mathcal{F}[\Psi]$. L'esistenza di questo funzionale implica l'esistenza di tali stati [44,47]. Le soluzioni in un dominio limitato si smorzano col tempo fino a diventare stazionarie. Si può vedere [41] che se α è piccolo gli stati con periodo $2\pi/n$, per $n \gg 1$, sono instabili per perturbazioni di periodo $O(1)$. Alcune analisi numeriche hanno dimostrato [48] che la soluzione per $n = 2$ è instabile. Queste osservazioni suggeriscono che lo stato stabile sia quello per $n = 1$.

I modi con numero d'onda vicino al valore $k_m = \sqrt{1/2\alpha}$ sono quelli che massimizzano la funzione $\omega(k)$ e quindi quelli che inizialmente hanno il ritmo di crescita più veloce se le perturbazioni hanno piccola ampiezza per tutti i modi. Il termine non lineare provoca un meccanismo di forte auto amplificazione che porta alla saturazione del modo k_m e allo smorzamento degli altri modi. Questo stato non è stabile [41]: risultati numerici [43] mostrano che per $\alpha = 0.02$ il modo $k = 4$ predomina velocemente, ha tendenza a saturare, ma subito il modo $k = 3$ prende il suo posto, instaurando un lungo plateau di stabilità (metastabile) in cui esso domina sugli altri modi. Il modo successivo ($k = 2$), cresce lentamente fino a raggiungere il modo $k = 3$. Il sistema velocemente si riorganizza con la predominanza del modo $k = 2$ che a sua volta ha un plateau più lungo del precedente. Si vede che l'effetto continua fino al modo $k = 1$.

La dinamica che globalmente si evince è la seguente: quando α è piccolo la soluzione si evolve con una successione di stati metastabili vicini a soluzioni di periodo $2\pi/n$: il numero di celle di periodicità inizia da un valore vicino al corrispondente del numero d'onda k_m e decresce con il tempo fino a che

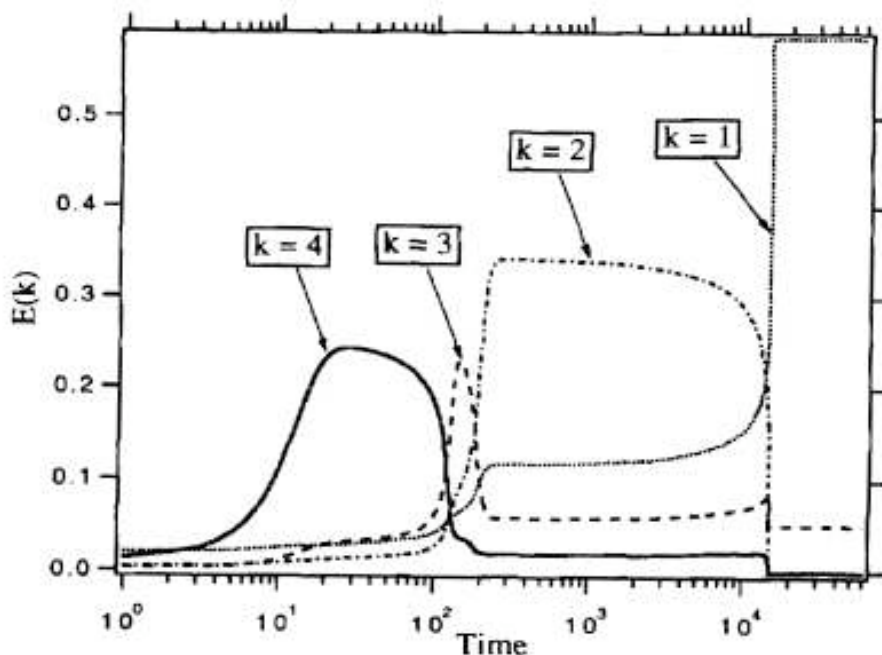


Figura 5.1: Da [37]: i risultati delle simulazioni numeriche per l'equazione di Cahn-Hilliard, ovvero i risultati di She [43].

non rimane una cella sola. I plateau, con il passare del tempo sono sempre più lunghi, a dimostrazione del fatto che, diminuendo il numero d'onda, le soluzioni periodiche sono sempre più vicine ad uno stato stabile.

Questa situazione, come precedentemente detto corrisponde a scegliere grandi periodicità, ovvero ad avere un gran numero di modi linearmente instabili. In questa situazione [37] esistono molte soluzioni stazionarie, che, localmente possiedono la struttura cosiddetta di *kink* e *anti-kink*:

$$v = \pm C^{\frac{1}{2}} \tanh \left[C^{\frac{1}{2}} (X - X_0) \right] \quad (5.26)$$

L'interazione tra *kink* e *anti-kink* avviene nel seguente modo:

- se si incontra una coppia *kink-antikink*, questa si annichila
- in interazioni con numero superiore di strutture (tre picchi) vale una legge di parità: nel caso si incontrino due *kink* e un'*anti-kink* sopravvive una *kink* di scala spaziale maggiore, e viceversa.

Lo scenario che si presenta nello spazio di Fourier, precedentemente descritto può essere reinterpretato in termini di variabili ordinarie e per il flusso di Kolmogorov, per avere una descrizione qualitativa del tipo di fenomeno in gioco. Supponiamo di ricostruire il flusso totale con il flusso base e la componente a grande scala del campo di perturbazione: per grandi separazioni

di scale si ha una soluzione quasi cellulare. Una soluzione che permanga per lungo tempo, di periodo $2\pi/n$, corrisponde a un sistema di n vortici con vorticità dello stesso segno, che hanno estensione spaziale $O(1/n)$ lungo la direzione X e $O(\epsilon)$ nella direzione Z . La transizione dal sistema a n celle a quello con $n - 1$ celle corrisponde ad una riorganizzazione del sistema con il numero di vortici lungo l'asse X diminuito di uno. La successione di 'perdita' di vortici $n, n - 1, n - 2, \dots$ può essere vista come un procedimento di cascata inverso: ogni passaggio della successione corrisponde ad un aumento di scala del vortice nella direzione X . Il processo viene definito *arithmetic pairing cascade* [43], per distinguere questo tipo di pairing da quello tipico di alcuni layer di mescolamento in cui il numero di vortici si dimezza ad ogni passaggio. Un'altra differenza con il classico meccanismo di pairing è la natura più 'locale' nello spazio di Fourier, poiché l'energia si sposta in modo più continuo nello spazio dei numeri d'onda. Infine il processo di cascata è detto inverso per via del fatto che contrariamente al caso della turbolenza 3D, l'energia passa da eddy piccoli a eddy grandi.

Analisi di stabilità

⁷ Sull'equazione di Cahn-Hilliard, riportata qui sotto per comodità, dobbiamo imporre le condizioni di stabilità e verificare che possano esistere (con questi coefficienti) delle zone nello spazio delle fasi in cui si hanno stati stazionari.

$$\partial_T \langle w_z^{(1)} \rangle = \nabla_X \left\{ \left(-A + B \langle w_z^{(1)} \rangle^2 \right) \nabla_X \langle w_z^{(1)} \rangle \right\} - C \nabla_X^4 \langle w_z^{(1)} \rangle \quad (5.28)$$

In linea di principio la richiesta di stabilità di questa equazione è non banale, tuttavia, con l'aiuto di osservazioni euristiche possiamo ricavare dei criteri generici.

- Il coefficiente A , come imposto dalle ipotesi di viscosità turbolenta negativa è positivo.
- Il termine con coefficiente C , se k è grande, è quello dominante. La richiesta di stabilità in questo regime ($\omega(k) < 0$) impone che sia $C > 0$.
- Il coefficiente B infine deve essere tale che la viscosità turbolenta generalizzata

$$-A + B \langle w_z^{(1)} \rangle$$

⁷La (5.21) nel limite newtoniano $\eta \rightarrow 0$ diventa:

$$\partial_T \langle w_z^{(1)} \rangle = \nabla_X \left\{ \left(-LV\alpha\sqrt{2} - 2\frac{\sqrt{2}L}{V} \langle w_z^{(1)} \rangle^2 \right) \nabla_X \langle w_z^{(1)} \rangle \right\} - \frac{3L^3V}{\sqrt{2}} \nabla_X^4 \langle w_z^{(1)} \rangle \quad (5.27)$$

Le condizioni richieste sull'equazione generale sono evidentemente soddisfatte sempre.

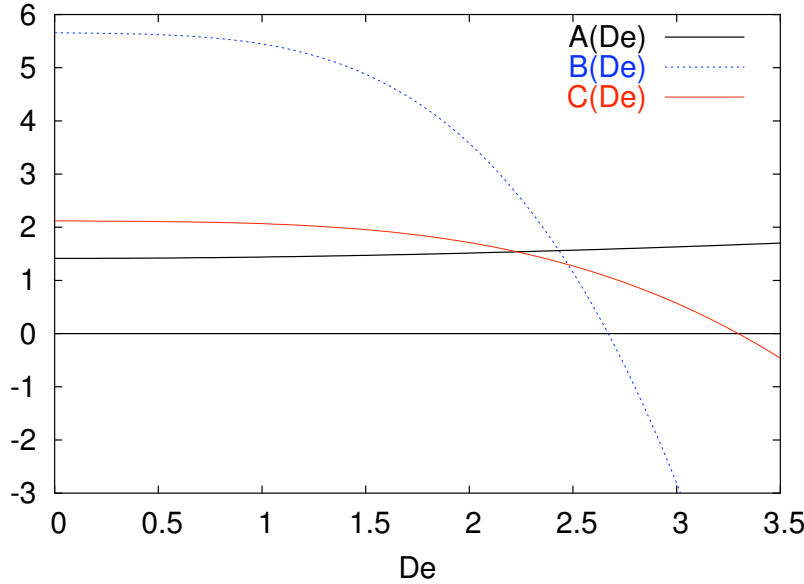


Figura 5.2: Studio del segno dei coefficienti dell'equazione di Cahn-Hilliard: per numeri di Deborah minori di 3, le richieste fatte sono soddisfatte. Oltre questo limite il fenomeno non è più descritto da questa fenomenologia, e vanno fatte delle altre ipotesi.

cambi segno se $\langle w_z^{(1)} \rangle$ diventa dell'ordine di $\sqrt{|A|/|B|}$: infatti si raggiungerà un regime in cui $\langle w_z^{(1)} \rangle$ cresce molto velocemente. Per fare in modo che questa crescita, legata al carattere non lineare della dinamica, sia saturata, questo coefficiente deve cambiare segno, e perché succeda ciò deve essere

$$-A + \text{sgn}(B)A \sim 0$$

per qualche valore di T , e quindi in definitiva deve essere $B > 0$.

Nel caso non newtoniano, i parametri sono funzioni essenzialmente del numero di Deborah. L'andamento dei parametri nel caso non newtoniano è tracciato in Fig. 5.2. Si vede come le condizioni di stabilità richieste siano verificate per numeri di Deborah minori di 2.5. Il parametro B cambia segno per $De \sim 2.7$, ovvero prima del parametro C ($De \sim 3.3$). In corrispondenza di questo valore il comportamento non lineare è determinato dal termine non lineare di ordine successivo, che deve perciò essere considerato nelle equazioni per la perturbazione (4.39). Il comportamento del sistema richiede di considerare strutture del tipo

$$\nabla_X \langle w_z \rangle^4 \nabla_X \langle w_z \rangle$$

determinate al solito, da considerazioni che impongono conservazione di parità e quantità di moto: il termine non lineare che potevamo considerare è

quello contenente quattro campi, ma questo non avrebbe consentito di utilizzare due operatori di derivazione, per motivi di parità. Allora possiamo utilizzare cinque campi e due operatori di derivazione, uno dei quali assicura la conservazione del momento e l'altro mantiene le simmetrie.

Il sistema va studiato vicino al valore del numero di Deborah $\mathcal{D}e_B$ per il quale B cambia segno:

$$\mathcal{D}e = \mathcal{D}e_B(1 + \beta\epsilon)$$

L'ampiezza della perturbazione va scelta in modo che:

$$\mathbf{w} = \epsilon^{\frac{1}{2}} \mathbf{w}^{(\frac{1}{2})}(z, X, T) + \epsilon \mathbf{w}^{(1)}(z, X, T) + \epsilon^{\frac{3}{2}} \mathbf{w}^{(\frac{3}{2})}(z, X, T)$$

Infatti l'ordine di grandezza dei termini non lineare e viscoso sarà:

$$\partial^2 w^5 \sim \epsilon^2 [w]^5$$

$$\nu \partial^2 w \sim \epsilon^4 [w]$$

che sono comparabili proprio per $[w] \sim \epsilon^{1/2}$.

Queste scelte portano ad un'equazione del tipo

$$\partial_T \langle w^{(\frac{1}{2})} \rangle = \nabla_X \left[\left(-A - B' \langle w^{(\frac{1}{2})} \rangle^2 + D \langle w^{(\frac{1}{2})} \rangle^4 \right) \nabla_X \langle w^{(\frac{1}{2})} \rangle \right] - C \nabla_X^4 \langle w^{(\frac{1}{2})} \rangle$$

mai emersa nello studio di fenomeni non lineari. La fenomenologia di questa equazione non è stata mai studiata, e costituisce una frontiera nell'argomento.

Capitolo 6

Simulazioni numeriche

Il grado di validità delle ipotesi che consentono l'applicazione della tecnica multiscala non sono a priori valutabile: se la dinamica del sistema avvenga a scale ben separate oppure no è da verificare a posteriori con un confronto di un'analisi non a scale multiple. Nel seguito verranno utilizzati come termini di confronto i risultati delle simulazioni numeriche effettuate sul modello di Oldroyd per il flusso di Kolmogorov.

Cercherò di spiegare quindi la filosofia di questa analisi numerica e di confrontare i risultati da me ottenuti con quelli di questo studio, per capire in che misura l'approccio multiscala e tutte le conclusioni che ne derivano sono da considerarsi un risultato accettabile.

I metodi per 'simulare' le equazioni della fluidodinamica sono moltissimi, e vasta è la letteratura in merito. In questo capitolo mi occuperò soltanto di descrivere il metodo usato per le simulazioni eseguite per i casi analizzati in questa tesi.

6.1 La discretizzazione

Per risolvere un sistema di equazioni differenziali con un calcolatore, è necessario costruire una griglia (3D o 2D a seconda del problema iniziale). Il passo e il numero di nodi della griglia corrispondono alla precisione e al dominio sui cui studiamo l'equazione. Le incognite del problema perciò diventano le funzioni calcolate sui nodi; le funzioni derivate possono essere espresse in termini di differenze finite, e quindi in definitiva, non sono incognite. Vale la pena di notare che la discretizzazione può anche essere fatta in spazio di Fourier. I nodi della griglia corrisponderanno in questo caso a vettori d'onda assegnati.

Consideriamo allora il solito sistema per le perturbazioni, e vediamo come possiamo ricavarne un sistema discreto.

Il primo passo sta nel cercare di esprimere le equazioni (una per la funzione

corrente e tre per il tensore di conformazione) in termini di modi di Fourier ¹:

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \hat{\Psi}(k, \omega)$$

$$\zeta(\vec{x}, t) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \hat{\zeta}(k_x, z)$$

Si ottengono così delle equazioni le cui incognite sono le ampiezze spettrali dei campi, che coinvolgono i numeri d'onda k_x e k_z . A questo punto, scelto il numero massimo di modi N , il sistema viene ridotto nella forma

$$\mathcal{A}\underline{y} = \lambda\mathcal{B}\underline{y}$$

in cui i vettori \underline{y} sono n -ple del tipo:

$$\begin{pmatrix} \hat{\Psi}(k_z^{(1)}), \dots, \hat{\Psi}(k_z^{(N)}) \\ \hat{\zeta}_{xx}(k_z^{(1)}), \dots, \hat{\zeta}_{xx}(k_z^{(N)}) \\ \hat{\zeta}_{xz}(k_z^{(1)}), \dots, \hat{\zeta}_{xz}(k_z^{(N)}) \\ \hat{\zeta}_{zz}(k_z^{(1)}), \dots, \hat{\zeta}_{zz}(k_z^{(N)}) \end{pmatrix}$$

e in cui la dipendenza da k_x nelle ampiezze è rimossa per comodità, ma è presente nelle matrici dei coefficienti.

Vale la pena di osservare che a seconda del tipo di accoppiamento, le matrici \mathcal{A} e \mathcal{B} avranno più o meno termini fuori diagonale ².

6.2 Il metodo di Arnoldi

Restringiamo l'attenzione ai metodi numerici che sfruttano la trasformazione del problema differenziale originario in un problema agli autovalori (al più generalizzato) del tipo:

$$\mathcal{A}\underline{y} = \lambda\mathcal{B}\underline{y}$$

Nel caso dell'analisi di stabilità di sistemi viscoelastici, queste matrici sono di dimensioni normalmente elevate e non Hermitiane [49].

Per fissare le idee consideriamo una matrice \mathcal{S} , $n \times n$. Il problema consiste nel cercare una matrice \mathcal{N} , $m \times m$ (con $m \ll n$), i cui autovalori approssimino quelli della matrice \mathcal{S} . Con alcuni metodi di ortogonalizzazione si può realizzare questo tipo di trasformazione, fissando m a seconda del numero di autovalori che si vogliono trovare.

¹L'operazione di trasformata di Fourier lungo z richiede il calcolo di semplici integrali di convoluzione.

²Questo fatto in apparenza a non particolarmente interessante è invece fondamentale per l'efficienza dell'algoritmo.

6.2.1 L'algoritmo di Arnoldi per un problema standard agli autovalori

Consideriamo il problema:

$$\mathcal{C}v = \lambda v$$

dove in generale $\mathcal{C}_{ij} \in \mathbb{C}$, la matrice è asimmetrica e di ordine n : l'algoritmo consiste nel costruire una base ortonormale per lo spazio:

$$\mathfrak{K}(\mathcal{C}, \underline{v}_1, m) \equiv \{\underline{v}_1, \mathcal{C}\underline{v}_1, \dots, \mathcal{C}^{m-1}\underline{v}_1\}$$

dove m è la dimensione dello spazio³. Per trovare i vettori della base si ricorre al seguente processo iterativo. Dato \underline{v}_1 vettore di norma ℓ_2 unitaria si possono ricavare i successivi elementi della base con la relazione:

$$\hat{\underline{v}}_{j+1} = \mathcal{C}\underline{v}_j - \sum_{i=1}^j h_{ij}\underline{v}_i,$$

la matrice h essendo definita come

$$h_{ij} = \begin{cases} (\underline{v}_i, \mathcal{C}\underline{v}_j) & i \leq j \\ (\underline{v}_{j+1}, \underline{v}_{j+1}) & i = j + 1 \end{cases}$$

I vettori della base dello spazio \mathfrak{K} sono dati in definitiva da:

$$\underline{v}_{j+1} = \frac{\hat{\underline{v}}_{j+1}}{h_{j+1j}} \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, m-1$$

È facile vedere che la base così costruita è ortonormale⁴. I coefficienti h_{ij} formano una matrice \mathcal{H} triangolare, detta matrice di Hessemberg, in quanto per essi vale la proprietà

$$h_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow i \geq j + 1$$

³Tale spazio è detto sottospazio di Krylov.

⁴**Prova:**

- i) Dimostriamo innanzitutto per induzione che ogni vettore $\hat{\underline{v}}_{n+1}$ è ortogonale a tutti i precedenti.

Proviamolo per $n = 1$:

$$(\hat{\underline{v}}_2, \hat{\underline{v}}_1) = (\hat{\underline{v}}_1, \mathcal{C}\hat{\underline{v}}_1) - h_{11}(\hat{\underline{v}}_1, \hat{\underline{v}}_1) = 0$$

Allora, supposto che valga per n dimostriamo che vale anche per $n + 1$:

$$\begin{aligned} (\hat{\underline{v}}_{n+1}, \hat{\underline{v}}_n) &= (\hat{\underline{v}}_n, \mathcal{C}\hat{\underline{v}}_n) - \sum_{i=1}^n h_{in}(\hat{\underline{v}}_i, \hat{\underline{v}}_n) = \\ &= h_{nn} - \sum_{i=1}^n h_{in}\delta_{in} = 0 \end{aligned} \quad (*)$$

- ii) Per prova diretta si vede che la base è ortogonale: presi due vettori della base $\hat{\underline{v}}_k$ e $\hat{\underline{v}}_l$ sarà sempre $k > l$ o viceversa. Allora basta scrivere la (*), esplicitando nel prodotto scalare il vettore il cui indice è più piccolo dell'altro.

Gli autovalori di questa matrice approssimano quelli della matrice \mathcal{C} , e può essere mostrato che l'approssimazione migliora al crescere della dimensione del sottospazio \mathfrak{K} . Costruendo una matrice con i vettori della base del sottospazio di Krylov si possono mettere in relazione gli autovettori della matrice \mathcal{C} con quelli della nuova matrice \mathcal{H} .

Estensione al problema degli autovalori generalizzato

Un problema del tipo:

$$\mathcal{A}\underline{v} = \lambda\mathcal{B}\underline{v}$$

con \mathcal{A} non degenerare, può essere convertito in un problema ordinario agli autovalori scrivendo:

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}\underline{v} = \frac{1}{\lambda}\underline{v}$$

Il procedimento di Arnoldi può essere allora applicato al problema agli autovalori reciproci. Gli autovettori infatti rimangono invarianti per questa trasformazione. L'unica accortezza da usare è quella di tenere conto che l'algoritmo di Arnoldi assicura la massima convergenza per gli autovalori estremali. In questo caso perciò la convergenza è più veloce per gli autovalori $1/\lambda$ minori.

6.3 Confronto tra simulazioni e calcoli teorici

Come abbiamo già notato, la validità dell'ipotesi di separazione di scala, che rende efficace l'approccio multiscala, è da verificare a posteriori. Il risultato che ci aspetteremmo è di trovare dei regimi di validità di questa ipotesi, che oltre a confermarci che l'interazione è del tipo grande scala e piccola scala, rendono i calcoli fatti utili a predire l'andamento di alcune quantità in tali regimi.

Dai confronti illustrati nelle figure emerge che l'approccio multiscala è molto buono generalmente in una zona adiacente l'origine degli assi (piccoli \mathcal{Re} , piccoli \mathcal{De}). Questo può voler dire che c'è uno dei due parametri che gioca un ruolo chiave nel tipo di interazione che avviene nel nostro sistema. Un'analisi della validità del metodo multiscala si può fare studiando le coordinate $(\mathcal{De}, \mathcal{Re}, \mathcal{Sc})$ del punto in cui la curva multiscala si distacca dalla curva numerica.

In particolare si può osservare che le uniche grandezze che variano in modo correlato sono il numero di Reynolds e il numero di Schmidt. Intuitivamente infatti ci aspettiamo che la precisione del multiscala dipenda in modo monotono da uno o più dei parametri del sistema. Graficando il numero di Reynolds con l'inverso del numero di Schmidt si ottiene la curva rappresentata in figura 6.3 dalla quale si evince che la curva prevista dall'approccio

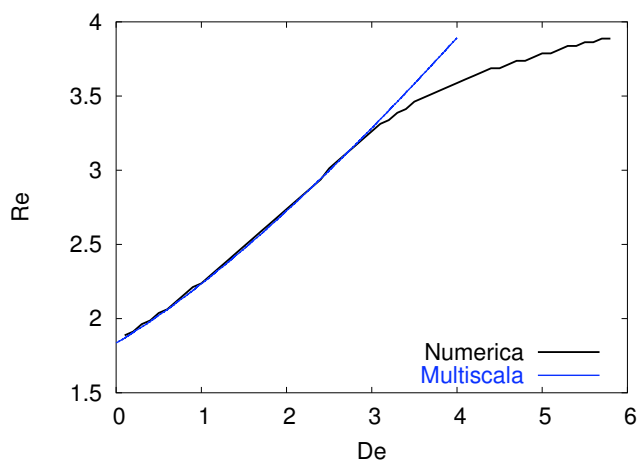
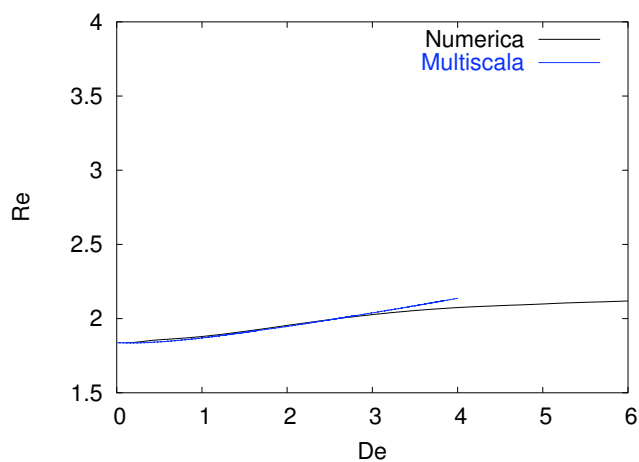
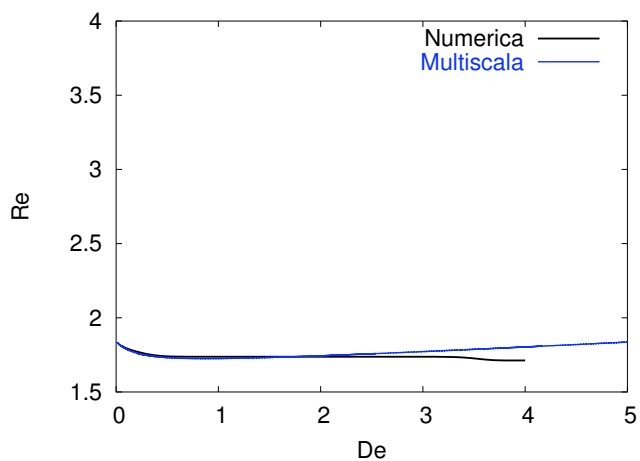
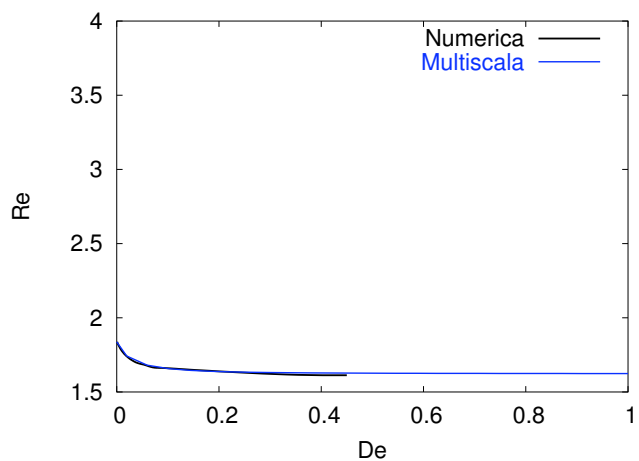
(a) $Sc = 1$ (b) $Sc = 0.25$ (c) $Sc = 0.1$ (d) $Sc = 0.01$

Figura 6.1: La curva di stabilità marginale ottenuta dall'analisi teorica con approccio multiscala e quella ottenuta con l'analisi numerica. Si nota chiaramente come l'approccio multiscala sia in ottimo accordo con il calcolo numerico per bassi valori del numero di Deborah.

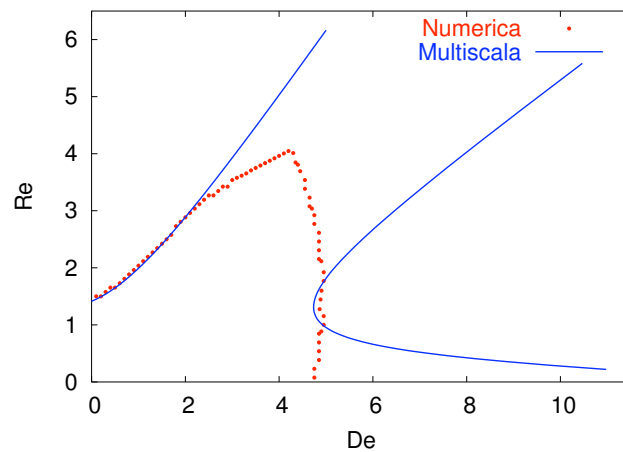


Figura 6.2: Il confronto tra curve di stabilità marginali nel caso non diffusivo.

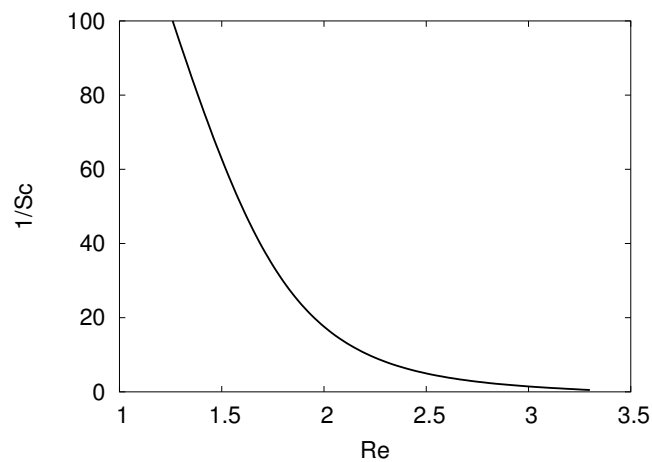


Figura 6.3: Le coordinate del punto di distacco tra la curva predetta dall'approccio multiscala e quella predetta dall'analisi numerica.

multiscala è, mano a mano che il numero di Schmidt diminuisce, sempre più aderente alla curva numerica. In linea di massima quindi ci aspettiamo che il parametro che gioca il ruolo fondamentale nella determinazione del tipo di fenomenologia (almeno nel regime di bassi numeri di Deborah) sia il numero di Reynolds.

Non ho attualmente a disposizione dati a sufficienza per poter stabilire un criterio analogo per la zona del diagramma di stabilità a numeri di Deborah più alti.

Conclusioni

I calcoli eseguiti sono relativi ad un flusso molto semplice 2D, che consente però di avere il campo di velocità in forma analitica. In un caso 3D si dovrebbe invece ricorrere ad una forma numerica oppure alla considerazione di proprietà statistiche. Questo porterebbe nel primo caso a dover considerare un approccio numerico, e nel secondo a dover trattare tutto il problema in modo statistico.

Il modello Oldroyd-B è un'approssimazione piuttosto grossolana dei polimeri; tuttavia come abbiamo visto consente di trarre qualche conclusione e di verificare delle ipotesi. Le evidenze di drag reduction ottenute nel corso della mia tesi sono piuttosto chiare, ancorché relative ad un caso bidimensionale.

L'approccio multiscala ha consentito di trovare dei risultati analitici approssimati, e grazie alle dipendenze funzionali in tal modo determinate, ha consentito di ricavare conclusioni interessanti che in caso di analisi numerica avrebbero potuto essere state individuate solo empiricamente con processi di fit.

I risultati di questa tesi non chiudono di certo il problema della comprensione della drag reduction, ma consentono di acquisire alcune certezze teoriche su questo fenomeno gettando luce su certe evidenze e ombra su altre.

Nel caso non diffusivo si trova che la curva marginale di stabilità è tale da aumentare il valore del numero di Reynolds necessario a innescare amplificazioni delle perturbazioni. L'effetto dei polimeri è quindi in questo caso stabilizzante.

Nel caso diffusivo si è dimostrato in maniera chiara come l'aggiunta di un termine di diffusione nell'equazione di evoluzione per il tensore di conformazione non introduca stabilizzazioni spurie o effetti di drag reduction indotti. Questo può essere d'aiuto per l'interpretazione dei risultati di simulazioni DNS.

Nel caso di analisi debolmente non lineare si è trovato che la fenomenologia del sistema sotto la soglia di stabilità è determinata da un'equazione non lineare che porta allo smorzamento dei modi di oscillazione e non presenta

perciò comportamenti molto diversi dal caso newtoniano. La fenomenologia del sistema sopra la soglia critica è invece dettata da un'equazione di tipo Cahn-Hilliard, ed è analoga al caso newtoniano.

Lo studio di questa equazione al variare dei parametri del sistema costituisce uno dei prossimi passi verso la comprensione di come la presenza di additivi polimerici in un flusso influenzi le grandezze fluidodinamiche del flusso e di come possa provocare una riduzione delle forze di drag.

L'analisi debolmente non lineare effettuata nel regime di alti numeri di Deborah costituisce invece uno studio totalmente nuovo, e definisce nuovi campi di ricerca nell'ambito dello studio di fenomeni non lineari.

In conclusione, si è genericamente provato lo stretto rapporto tra i meccanismi di stabilità fluidodinamica e la presenza di polimeri. Questa conclusione apre la strada ad una riformulazione della teoria della drag reduction più generale di quelle preesistenti e basata su presupposti nuovi. Lo sviluppo di una teoria che colleghi in modo chiaro la stabilità di un flusso a piccole perturbazioni con le variazioni locali della viscosità è una prospettiva interessante che forse potrà in questo modo chiarire alcune osservazioni sperimentali di drag reduction, ed estendere l'applicazione di questo effetto in diversi ambiti tecnologici.

I temi e le osservazioni sviluppatasi nella mia tesi infine, aprono la strada alla comprensione del comportamento di flussi con altri tipi di additivi, che grazie a questo semplice modello possono essere studiati in modo semplice ma efficace.

Appendici

Appendice A

Teoremi di stabilità

A.1 Il Teorema di Squire

Teorema 4 (Squire)

A ogni perturbazione tridimensionale su un flusso newtoniano, che reca instabilità corrisponde una perturbazione bidimensionale maggiormente instabile [7].

Prova:

Consideriamo la trasformazione di Squire:

$$\bar{k} = (k_x^2 + k_y^2)^{\frac{1}{2}} \quad \bar{c} = c \quad \bar{k}u' = k_x \hat{u}' + k_y \hat{w}' \quad (\text{A.1})$$

$$\bar{v}' = \hat{v}' \quad \frac{\bar{p}'}{\bar{k}} = \frac{\hat{p}'}{k_x} \quad \bar{k}\overline{\mathcal{R}e} = k_x \mathcal{R}e \quad (\text{A.2})$$

Sostituendo la (1.18) nelle (1.15), (1.16), (1.17), e tenendo conto della (A.1) si ottiene:

$$i\bar{k}(U - c)\bar{u}' + \bar{v}'(\partial_y U) = -i\bar{k}\bar{p}' + \frac{1}{\mathcal{R}e}(\partial_y^2 \bar{u}' - \bar{k}^2 \bar{u}') \quad (\text{A.3})$$

$$i\bar{k}(U - c)\bar{v}' = -\partial_y \bar{p}' + \frac{1}{\mathcal{R}e}(\partial_y^2 \bar{v}' - \bar{k}^2 \bar{v}') \quad (\text{A.4})$$

$$i\bar{k}\bar{u}' + \partial_y \bar{v}' = 0 \quad (\text{A.5})$$

Le (A.3), (A.4), (A.5) sono la versione bidimensionale delle (1.15), (1.16), (1.17) a patto di attuare l'identificazione:

$$k_x = k \quad (\text{A.6})$$

$$k_y = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\hat{w}' = 0 \quad (\text{A.8})$$

Visto che $\bar{k} > k$, il problema bidimensionale associato al problema originario, tramite la trasformazione di Squire, ha un numero

di Reynolds minore. Potremo allora considerare una perturbazione bidimensionale per determinare il valore critico del numero di Reynolds $\mathcal{R}e_c$ oltre il quale si verifica l'instabilità. In altre parole, se immaginiamo di fare una rotazione del sistema di riferimento in modo tale che l'asse delle ascisse sia nella direzione di \vec{v}' , allora avremo che solo il flusso base interagisce con la perturbazione, sicché si ha una riduzione del numero di Reynolds nel nuovo sistema di coordinate.

Il tasso di crescita della perturbazione bidimensionale è $e^{\bar{k}\Im m[\bar{c}]}$, che è maggiore del corrispondente tasso di crescita della perturbazione tridimensionale, perché $\bar{k} > k$. Si ha così un flusso bidimensionale maggiormente instabile.

A.2 Il teorema di Rayleigh

Teorema 5 (Criterio del flesso di Rayleigh)

Condizione necessaria affinché un flusso parallelo non viscoso sia instabile è che il profilo del flusso base $U(y)$ abbia un punto di flesso.

Prova:

Consideriamo l'equazione di Raileigh nella forma:

$$\partial_y^2 \phi - k^2 \phi - \frac{\partial_y^2 U}{U - c} \phi = 0 \quad (\text{A.9})$$

e consideriamo quei modi per i quali $\Im m[c] > 0^1$. Moltiplichiamo l'equazione per ϕ^* e integriamo tra le pareti fisiche, applicando la condizione al contorno $\phi = 0$. Il primo termine della (A.9) diventa:

$$\int \phi^* \partial_y^2 \phi dy = \phi^* \partial_y \phi|_{y_1}^{y_2} - \int (\partial_y \phi^*) \partial_y \phi dy = - \int |\partial_y \phi|^2 \quad (\text{A.10})$$

La (A.9) diventa perciò:

$$\int (|\partial_y \phi|^2 + k^2 |\phi|^2) dy - \int \frac{\partial_y^2 U}{U - c} |\phi|^2 dy = 0 \quad (\text{A.11})$$

di cui il primo termine è reale. La parte immaginaria del secondo termine deve perciò essere nulla, e tale richiesta è formalizzata nella seguente equazione:

$$\Im m[c] \int \frac{\partial_y^2 U}{|U - c|^2} |\phi|^2 dy = 0 \quad (\text{A.12})$$

¹e perciò $U - c \neq 0$

Questa condizione è soddisfatta solo se $\partial_y^2 U$ cambia segno almeno una volta nell'intervallo (y_1, y_2) , o, in altre parole, il profilo di base deve avere almeno un punto di flesso. È ovvio però che l'esistenza di un punto di flesso non garantisce $\Im m[c] \neq 0$, e quindi il criterio di Rayleigh costituisce una condizione soltanto necessaria.

A.3 Il teorema di Fjortoft

Teorema 6 (Fjortoft)

Condizione necessaria affinché un flusso parallelo non viscoso sia instabile è che in qualche punto del flusso sia verificata la condizione

$$(\partial_y^2 U)(U - U_f) < 0$$

dove U_f è il valore della velocità in corrispondenza del flesso.

Prova:

Consideriamo la parte reale dell'equazione (A.11), e supponiamo che $\Im m[c] \neq 0$, e che esista un punto di flesso:

$$\int \frac{\partial_y^2 U (U - \Re e[c])}{|U - c|^2} |\phi|^2 dy = - \int (|\partial_y \phi|^2 + k^2 |\phi|^2) dy \quad (\text{A.13})$$

Segue dalla (A.12) che

$$(\Re e[c] - U_f) \int \frac{\partial_y^2 U}{|U - c|^2} |\phi|^2 dy = 0 \quad (\text{A.14})$$

Sommando membro a membro la (A.13) e la (A.14) si ottiene che

$$\int \frac{(\partial_y^2 U)(U - U_f)}{|U - c|^2} |\phi|^2 dy < 0 \quad (\text{A.15})$$

sicché il numeratore della (A.15) deve essere negativo in qualche punto del flusso².

²Una formulazione alternativa del teorema di Fjortoft consiste nel dire che la vorticità deve avere un massimo all'interno del dominio di studio del flusso, e non sui bordi.

Appendice B

Il metodo multiscala applicato al problema di Navier-Stokes

L'idea è quella di applicare la tecnica multiscala alle equazioni di Navier-Stokes [35], sperando di poter trovare un tensore viscosità turbolenta, facendo primariamente due considerazioni di carattere generale:

- nello studio del trasporto di quantità vettoriali (come la quantità di moto o per esempio un campo magnetico) si vede che il comportamento non è necessariamente diffusivo.
- il trasporto di quantità scalari su scale molto più grandi di quelle del campo turbolento, è normalmente favorito, mentre nel caso di quantità vettoriali di solito si registra il contrario.

Consideriamo ora il problema di Navier-Stokes del cap.1 riportato qui di seguito:

$$\partial_t v_\alpha + v_\beta \partial_\beta v_\alpha = -\partial_\alpha p + \nu \partial^2 v_\beta + f_\alpha \quad (\text{B.1})$$

in cui stiamo considerando un flusso di base imperturbato (p, \vec{v}) dove le funzioni v_α e p sono periodiche nello spazio e nel tempo, e dove f_α è una forzante funzione dello spazio e del tempo, periodica anch'essa, e supponiamo che

$$\langle f_\alpha \rangle = 0 \quad \langle v_\alpha \rangle = 0 \quad \forall \alpha$$

dove $\langle \rangle$ è la media spazio-temporale. Vogliamo cercare di capire come si modifica tale flusso quando è soggetto ad una piccola perturbazione a grande scala (P, \vec{W}) .

Si può vedere il tensore di crosscorrelazione del flusso base $R_{\alpha\gamma} = \langle v_\alpha v_\gamma \rangle$, nel caso della perturbazione sopra menzionata, viene modificato di

$$\delta R_{\alpha\gamma} = -\alpha_{\alpha\gamma\beta} W_\beta - \nu_{\alpha\gamma\beta\delta} \partial_\beta W_\delta + O(\partial^2 W) \quad (\text{B.2})$$

in cui la forma dei due tensori α e ν verrà precisata più avanti. Se è presente solo il termine proporzionale al gradiente della perturbazione allora c'è un cambiamento del trasporto molecolare della quantità di moto. La presenza di \vec{f} , che forza il flusso a piccole scale, può rompere l'invarianza Galileana; allora una perturbazione a grande scala (come \vec{W}) anche costante può portare ad alterazioni non banali della dinamica a piccola scala del campo di velocità. Questo è sostanzialmente ciò che ci dice l'equazione (B.2). Questo effetto, detto AKA (Anisotropic Kinetic Alpha) è il contributo idrodinamico all'effetto α noto in magnetoidrodinamica [36]. La forma del tensore $\alpha_{\alpha\beta\gamma}$ fa sì che solo i flussi invarianti per parità sono privi del primo termine nell'eq. (B.2), cosicché ci occuperemo in questa sezione solo di tali flussi¹. Intuitivamente l'invarianza per parità denota la presenza di un centro di simmetria spaziale.

L'introduzione della perturbazione fa sì che si ha:

$$\begin{pmatrix} p \\ \vec{v} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} p + \lambda P \\ \vec{v} + \lambda \vec{W} \end{pmatrix} \quad \lambda \ll 1 \quad (\text{B.3})$$

in cui la grandezza della perturbazione è controllata dal parametro λ . Le equazioni di Navier-Stokes linearizzate per la perturbazione (vedi Cap.1) risultano essere in forma operatoriale²:

$$\mathfrak{A} \begin{pmatrix} P \\ \vec{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{PP} & \mathfrak{A}_{PW} \\ \mathfrak{A}_{WP} & \mathfrak{A}_{WW} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ \vec{W} \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$\mathfrak{A}_{PP} = 0 \quad \mathfrak{A}_{PW_\alpha} = \partial_\alpha \quad \mathfrak{A}_{W_\alpha P} = \partial_\alpha \quad (\text{B.5})$$

$$\mathfrak{A}_{W_\alpha W_\beta} = (\partial_t - \nu \partial^2) \delta_{\alpha\beta} + \partial_\gamma \delta_{\alpha\beta} v_\gamma + \partial_\gamma \delta_{\gamma\beta} v_\alpha \quad (\text{B.6})$$

B.0.1 Proprietà dell'operatore \mathcal{A}

È immediato notare che l'operatore \mathcal{A} si trasforma secondo l'operatore \mathcal{P} nel seguente modo:

$$\mathcal{P}\mathcal{A}_{PW} = -\mathcal{A}_{PW} \quad \mathcal{P}\mathcal{A}_{WP} = -\mathcal{A}_{WP} \quad \mathcal{P}\mathcal{A}_{WW} = \mathcal{A}_{WW} \quad (\text{B.7})$$

Nel seguito avremo a che fare con la soluzione di problemi del tipo:

$$\mathcal{A}\psi = \varphi \quad (\text{B.8})$$

Per tali problemi vale il seguente

¹In questo contesto l'operatore parità è definito come una simultanea inversione di velocità e posizione senza cambiamenti nella pressione:

$$\mathcal{P}\vec{x} = -\vec{x} \quad \mathcal{P}\vec{v} = -\vec{v} \quad \mathcal{P}\vec{p} = \vec{p}$$

²Per convenzione indicheremo con \mathcal{A} l'operatore \mathfrak{A} tutte le volte che agisce su funzioni periodiche con periodicità uguali a quelle della forzante.

Teorema 7

Condizione necessaria e sufficiente per la solubilità dell'equazione (B.8) è che

- $\langle \varphi \rangle = 0$
- $\exists \tilde{\mathcal{A}}^{-1}$ inverso di $\tilde{\mathcal{A}}$ che la è restrizione di \mathcal{A} sulle funzioni periodiche a media nulla.

Prova:

\Rightarrow Supponiamo di mediare la (B.8): siccome l'operatore \mathcal{A} contiene almeno una derivata spaziale o temporale avremo che la media del primo membro è nulla, poiché:

$$\psi = \langle \psi \rangle + \tilde{\psi}$$

dove $\tilde{\psi}$ ha media nulla³. Allora φ deve avere media nulla.

\Leftarrow È banale osservare che se la restrizione di \mathcal{A} alle funzioni periodiche a media nulla è invertibile, allora applicando l'operatore $\tilde{\mathcal{A}}^{-1}$ a entrambi i membri della (B.8) otteniamo una soluzione formale per ψ .

Il teorema 7 ci assicura di poter scrivere formalmente la soluzione della (B.8) nella forma:

$$\psi = \tilde{\mathcal{A}}^{-1}\varphi + \left(\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1}\mathcal{A} \right) \langle \psi \rangle \quad (\text{B.9})$$

B.0.2 La determinazione del tensore viscosità turbolenta

Introduciamo le usuali variabili lente e gli operatori di derivazione:

$$\begin{aligned} \vec{X} & \quad \vec{x} & \vec{X} &= \epsilon \vec{x} \\ T & \quad t & T &= \epsilon^2 t \\ \partial_\alpha & \rightarrow \partial_\alpha + \epsilon \nabla_\alpha & \text{con} & \quad \nabla_\alpha = \frac{\partial}{\partial X_\alpha}, \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \\ \partial_t & \rightarrow \partial_t + \epsilon^2 \partial_T \end{aligned}$$

L'equazione per la perturbazione (B.4) può essere riscritta in forma compatta come:

$$(\mathcal{A} + \epsilon \mathcal{B} + \epsilon^2 \mathcal{C}) \begin{pmatrix} P \\ \vec{W} \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

³Dire che $\langle \varphi \rangle = 0$ è equivalente a dire che φ è ortogonale nel senso di L^2 sulle funzioni periodiche alle costanti. Le funzioni costanti appartengono al kernel dell'operatore \mathcal{A}^\dagger .

dove \mathcal{A} è già stato definito e dipende solo dalle variabili veloci, e \mathcal{B} e \mathcal{C} sono definiti come segue:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{B}_{PW} \\ \mathcal{B}_{WP} & \mathcal{B}_{WW} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{C}_{WW} \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$\mathcal{B}_{PP} = 0 \quad \mathcal{B}_{PW_\alpha} = \nabla_\alpha \quad \mathcal{B}_{W_\alpha P} = \nabla_\alpha \quad (\text{B.12})$$

$$\mathcal{B}_{W_\alpha W_\beta} = -2\nu\delta_{\alpha\beta}\partial_\gamma\nabla_\gamma + \nabla_\gamma\delta_{\alpha\beta}v_\gamma + \nabla_\gamma\delta_{\gamma\beta}v_\alpha \quad (\text{B.13})$$

$$\mathcal{C}_{W_\alpha W_\beta} = (\partial_T - \nu\nabla^2)\delta_{\alpha\beta} \quad (\text{B.14})$$

Naturalmente, come di consueto siamo interessati ad uno sviluppo perturbativo:

$$\begin{pmatrix} P \\ \vec{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{(0)} \\ \vec{W}^{(0)} \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} P^{(1)} \\ \vec{W}^{(1)} \end{pmatrix} + \epsilon^2 \begin{pmatrix} P^{(2)} \\ \vec{W}^{(2)} \end{pmatrix} + \dots \quad (\text{B.15})$$

e come di consueto otteniamo equazioni ai vari ordini in ϵ

$$O(\epsilon^0) \quad \mathcal{A} \begin{pmatrix} P^{(0)} \\ \vec{W}^{(0)} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{B.16})$$

$$O(\epsilon^1) \quad \mathcal{A} \begin{pmatrix} P^{(1)} \\ \vec{W}^{(1)} \end{pmatrix} + \mathcal{B} \begin{pmatrix} P^{(0)} \\ \vec{W}^{(0)} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{B.17})$$

$$O(\epsilon^2) \quad \mathcal{A} \begin{pmatrix} P^{(2)} \\ \vec{W}^{(2)} \end{pmatrix} + \mathcal{B} \begin{pmatrix} P^{(1)} \\ \vec{W}^{(1)} \end{pmatrix} + \mathcal{C} \begin{pmatrix} P^{(0)} \\ \vec{W}^{(0)} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{B.18})$$

⋮

Dall'equazione (B.16) si ottiene facilmente ricordando la (B.9) che:

$$\begin{pmatrix} P^{(0)} \\ \vec{W}^{(0)} \end{pmatrix} = (\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1}\mathcal{A}) \begin{pmatrix} \langle P^{(0)} \rangle \\ \langle \vec{W}^{(0)} \rangle \end{pmatrix} \quad (\text{B.19})$$

Sostituendo nella (B.17) otteniamo:

$$\begin{pmatrix} P^{(0)} \\ \vec{W}^{(0)} \end{pmatrix} = \mathcal{B} (\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1}\mathcal{A}) \begin{pmatrix} \langle P^{(0)} \rangle \\ \langle \vec{W}^{(0)} \rangle \end{pmatrix} \quad (\text{B.20})$$

Ricordando il teorema 7 abbiamo che questa equazione è risolubile se:

$$\langle \mathcal{B} (\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1}\mathcal{A}) \begin{pmatrix} \langle P^{(0)} \rangle \\ \langle \vec{W}^{(0)} \rangle \end{pmatrix} \rangle = 0 \quad (\text{B.21})$$

Osservando che l'operazione $\langle \rangle$ è fatta sulle variabili veloci e quindi commuta con ∇_α , e che una funzione su cui agisce $\tilde{\mathcal{A}}^{-1}$ è ancora una funzione a media nulla, dalla (B.21) abbiamo che:

$$\nabla_\alpha \langle W_\alpha^{(0)} \rangle = 0 \quad (\text{B.22})$$

$$\nabla_\alpha \langle P^{(0)} \rangle + \langle \mathcal{B}_{WW} (\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1}\mathcal{A})_{WW} \langle \vec{W}^{(0)} \rangle \rangle = 0 \quad (\text{B.23})$$

dove la notazione Ω_{WW} indica il blocco WW dell'operatore Ω . Data l'identificazione:

$$\mathcal{B}^\gamma_{W_\alpha W_\mu} = -2\nu\delta_{\alpha\mu}\partial_\gamma + \delta_{\alpha\mu}v_\gamma + \delta_{\gamma\mu}v_\alpha$$

e visto che gli operatori di derivazione su variabili lente commutano con i corrispondenti operatori su variabili veloci, abbiamo che:

$$\nabla_\alpha \langle P^{(0)} \rangle + \langle \mathcal{B}^\gamma_{W_\alpha W_\mu} \left(\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{A} \right)_{W_\mu W_\beta} \rangle \nabla_\gamma \langle W_\beta^{(0)} \rangle = 0 \quad (\text{B.24})$$

dove $\langle \Omega \rangle \equiv \langle \Omega \rangle$. Si può vedere che:

$$\alpha_{\alpha\gamma\beta} = \langle \mathcal{B}^\gamma_{W_\alpha W_\mu} \left(\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{A} \right)_{W_\mu W_\beta} \rangle \quad (\text{B.25})$$

dove $\alpha_{\alpha\gamma\beta}$ è il tensore dell'equazione (B.2). Quando questo tensore è non nullo, la condizione (B.24) non ci permette di scegliere la funzione $\vec{W}^{(0)}|_{T=0}$ in modo arbitrario. Ciò implica che questa analisi non è più corretta, e questo deriva dal fatto che in presenza di effetto AKA [36] la dinamica a grande scala è al primo ordine in ϵ sia nello spazio che nel tempo, e perciò la relazione di scala tra t e T scelta all'inizio di questo paragrafo non è più quella corretta⁴. Assumeremo d'ora innanzi che il nostro flusso sia invariante per parità, in modo da assicurarci l'assenza del termine (B.25) nella (B.2). È facile vedere che si hanno le seguenti proprietà di parità:

$$\mathcal{P} \mathcal{B}^\gamma_{W_\alpha W_\mu} = -\mathcal{B}^\gamma_{W_\alpha W_\mu} \quad (\text{B.26})$$

$$\mathcal{P} \left(\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{A} \right)_{W_\mu W_\beta} = \left(\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{A} \right)_{W_\mu W_\beta} \quad (\text{B.27})$$

Allora l'operatore $\alpha_{\alpha\gamma\beta}$ cosiccome è definito nella (B.25) si annulla. L'equazione (B.17) si riduce alla sola (B.22) e:

$$\nabla_\alpha \langle P^{(0)} \rangle = 0 \quad (\text{B.28})$$

Ciò significa che $\langle P^{(0)} \rangle$ è una costante, e siccome nelle equazioni la pressione appare sempre sotto gradiente possiamo assumere

$$\langle P^{(0)} \rangle = 0$$

senza ledere la generalità. La soluzione della (B.18) fornisce:

$$\left(\begin{array}{c} P^{(1)} \\ \vec{W}^{(1)} \end{array} \right) = -\tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{B} \left(\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{A} \right) \left(\begin{array}{c} \langle P^{(0)} \rangle \\ \langle \vec{W}^{(0)} \rangle \end{array} \right) + \left(\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{A} \right) \left(\begin{array}{c} \langle P^{(1)} \rangle \\ \langle \vec{W}^{(1)} \rangle \end{array} \right) \quad (\text{B.29})$$

La condizione di solubilità per la (B.18) ci dice che:

$$\langle \mathcal{B} \rangle \left(\begin{array}{c} P^{(1)} \\ \vec{W}^{(1)} \end{array} \right) + \langle \mathcal{C} \rangle \left(\begin{array}{c} P^{(0)} \\ \vec{W}^{(0)} \end{array} \right) = 0 \quad (\text{B.30})$$

⁴Essendo effetti al primo ordine dovremmo avere $T = \epsilon t$.

Conoscendo la soluzione per l'ordine zero abbiamo che:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B} \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{B} (\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{A}) \rangle \left(\frac{\langle P^{(0)} \rangle}{\langle \vec{W}^{(0)} \rangle} \right) - \langle \mathcal{B} (\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{A}) \rangle \left(\frac{\langle P^{(1)} \rangle}{\langle \vec{W}^{(1)} \rangle} \right) + \\ - \langle \mathcal{C} (\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{A}) \rangle \left(\frac{\langle P^{(0)} \rangle}{\langle \vec{W}^{(0)} \rangle} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Separando le componenti P e \vec{W} otteniamo:

$$\nabla_\alpha \langle W_\alpha^{(1)} \rangle = 0 \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{aligned} \partial_T \langle W_\alpha^{(0)} \rangle = -\nabla_\alpha \langle P^{(1)} \rangle + \\ + \left(\nu \delta_{\gamma\beta} \delta_{\alpha\delta} + \left\langle \left(\mathcal{B}^\gamma \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{B}^\beta (\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{A}) \right)_{W_\alpha W_\delta} \right\rangle \right) \nabla_\gamma \nabla_\beta \langle W_\delta^{(0)} \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

dove si ha che:

$$\nu_{\alpha\gamma\beta\delta} = \nu \delta_{\gamma\beta} \delta_{\alpha\delta} + \left\langle \left(\mathcal{B}^\gamma \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{B}^\beta (\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{A}) \right)_{W_\alpha W_\delta} \right\rangle \quad (\text{B.34})$$

L'equazione (B.33) è formalmente un'equazione diffusiva cui è aggiunto un termine di pressione, in cui l'analogo della diffusività turbolenta del caso dello scalare passivo, è il tensore del quarto ordine *viscosità turbolenta*.

È necessario ora fare alcune importanti osservazioni:

- Le ipotesi fatte nel teorema 7 garantiscono l'esistenza dell'operatore $\tilde{\mathcal{A}}^{-1}$, inverso dell'operatore Navier-Stokes nel caso di funzione a media nulla. Tuttavia la forma esplicita di tale operatore non è in generale trovabile, a meno di poter fare delle approssimazioni, o di casi particolarmente semplici.
- Nel caso più generale di flusso anisotropo il tensore viscosità turbolenta è un tensore del quarto ordine: esso infatti connette linearmente il gradiente del campo di velocità a grande scala con il relativo flusso di quantità di moto che sono entrambi tensori del secondo ordine.
- Il termine nella pressione nella (B.33) implica, dato che in generale il termine viscoso non ha divergenza nulla, che c'è un campo di pressione non banale a grande scala.
- Nel caso isotropo abbiamo che:

$$\partial_T \langle \vec{W}^{(0)} \rangle = \nu_E \nabla^2 \langle \vec{W}^{(0)} \rangle \quad (\text{B.35})$$

$$\nabla_\alpha \langle W_\alpha^{(0)} \rangle = 0 \quad (\text{B.36})$$

dove la E di ν_E sta per *eddy*.

- Nel caso dello scalare passivo la diffusività turbolenta è definita positiva, e la rispettiva equazione è diffusiva. Nel caso della viscosità turbolenta, l'equazione in questione è solo formalmente diffusiva, poiché il coefficiente di diffusione non ha la proprietà di essere definito positivo⁵. Fisicamente questo deriva dal fatto che, contrariamente al caso dello scalare passivo, la quantità di moto a grande scala non è solo trasportata dal flusso base, ma può essere incrementata dallo sforzo di taglio.

Osservazioni

In generale, la determinazione del tensore viscosità turbolenta richiede la risoluzione di problemi ausiliari (B.16), (B.17), (B.18) nelle sole variabili veloci, che a meno di casi semplici non sono banali.

Un approccio possibile [38] è l'espansione del tensore viscosità turbolenta in serie:

$$\nu_{\alpha\beta\gamma\eta} = \nu\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\eta} + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_{\alpha\beta\gamma\eta}^{(n)} \nu^{-n} \quad (\text{B.37})$$

La convergenza di questa serie è garantita per piccoli numeri di Reynolds (ovvero viscosità abbastanza grandi). Il raggio di convergenza è determinato da una singolarità nel piano complesso ($1/\nu$) vicino all'origine. Fuori dal cerchio di convergenza il tensore va prolungato analiticamente.

È facile vedere che per flussi isotropi l'espansione (B.37) diventa:

$$\nu_E = \nu + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_E^{(n)} \nu^{-n} \quad (\text{B.38})$$

⁵Il flusso di Kolmogorov, esaminato nel capitolo 4, paragrafo 4.1, è un esempio di flusso che in alcune condizioni possiede componenti negative del tensore viscosità turbolenta.

Appendice C

Il caso diffusivo del modello Oldroyd

C.1 Equazioni per le perturbazioni

C.1.1 Ordine ϵ^0

L'equazione per la divergenza è

$$\partial_z w_z^{(0)} = 0 \quad (\text{C.1})$$

Le equazioni per $\vec{w}^{(0)}$ sono:

$$-\nu \partial_z^2 w_x^{(0)} + \partial_z w_z^{(0)} V \cos\left(\frac{z}{L}\right) - \frac{w_z^{(0)} V \sin\left(\frac{z}{L}\right)}{L} - \frac{\eta \nu \partial_z \zeta_{xz}^{(0)}}{\tau} = 0 \quad (\text{C.2})$$

$$-\frac{\eta \nu \partial_z \zeta_{zz}^{(0)}}{\tau} + \partial_z q^{(0)} - \nu \partial_z^2 w_z^{(0)} = 0 \quad (\text{C.3})$$

e quelle per $\zeta^{(0)}$:

$$\begin{aligned} & \frac{2\partial_z w_x^{(0)} V \tau L \sin\left(\frac{z}{L}\right)}{L^2 + \tau \alpha} + \frac{4w_z^{(0)} \tau^2 V^2 L \sin\left(\frac{z}{L}\right) \cos\left(\frac{z}{L}\right)}{L^4 + 5\tau \alpha L^2 + 4\tau^2 \alpha^2} + \frac{2V \sin\left(\frac{z}{L}\right) \zeta_{xz}^{(0)}}{L} \\ & - \alpha \partial_z^2 \zeta_{xx}^{(0)} + \frac{\zeta_{xx}^{(0)}}{\tau} + \partial_z w_z^{(0)} \left(1 + \frac{2\tau^2 V^2 L^2 \sin^2\left(\frac{z}{L}\right)}{L^4 + 5\tau \alpha L^2 + 4\tau^2 \alpha^2} \right. \\ & \left. + \frac{4\tau^3 V^2 \alpha}{L^4 + 5\tau \alpha L^2 + 4\tau^2 \alpha^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} & -\frac{w_z^{(0)} V \tau \cos\left(\frac{z}{L}\right)}{L^2 + \tau \alpha} + \frac{V \sin\left(\frac{z}{L}\right) \zeta_{zz}^{(0)}}{L} \\ & - \alpha \partial_z^2 \zeta_{xz}^{(0)} - \partial_z w_x^{(0)} + \frac{\zeta_{xz}^{(0)}}{\tau} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$-\alpha \partial_z^2 \zeta_{zz}^{(0)} + \frac{\zeta_{zz}^{(0)}}{\tau} - \partial_z w_z^{(0)} = 0 \quad (\text{C.6})$$

Le corrispondenti soluzioni per la velocità sono:

$$q^{(0)} = \langle q^{(0)} \rangle \quad (\text{C.7})$$

$$w_x^{(0)} = \frac{V(-L^3 \tau \nu \eta + 2L^3 \tau \alpha + L^5 + \alpha^2 \tau^2 L)}{\nu(L^2 \eta + L^2 + \tau \alpha)(L^2 + \tau \alpha)} \sin\left(\frac{z}{L}\right) \langle w_z^{(0)} \rangle + \langle w_x^{(0)} \rangle \quad (\text{C.8})$$

$$w_z^{(0)} = \langle w_z^{(0)} \rangle \quad (\text{C.9})$$

e per il tensore di conformazione:

$$\begin{aligned} \zeta_{xx}^{(0)} = & -L^3 \tau^2 V^2 \left[\frac{12L^4 \tau \alpha + 6\tau^3 \nu \alpha^2 + 8\tau^3 \alpha^3}{\nu(L^2 + \tau \alpha)^2 (4\tau \alpha + L^2)^2 (L^2 \eta + L^2 + \tau \alpha)} \right. \\ & + \frac{9L^2 \tau^2 \nu \alpha - 2L^2 \tau^2 \eta \nu \alpha + 18L^2 \tau^2 \alpha^2 + 2L^6}{\nu(L^2 + \tau \alpha)^2 (4\tau \alpha + L^2)^2 (L^2 \eta + L^2 + \tau \alpha)} \\ & \left. + \frac{L^4 \tau \eta \nu + 3L^4 \tau \nu}{\nu(L^2 + \tau \alpha)^2 (4\tau \alpha + L^2)^2 (L^2 \eta + L^2 + \tau \alpha)} \right] \sin\left(\frac{2z}{L}\right) \langle w_z^{(0)} \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

$$\zeta_{xz}^{(0)} = \frac{L^2 \tau V (L^2 + \tau \alpha + \nu \tau)}{\nu(L^2 \eta + L^2 + \tau \alpha)(L^2 + \tau \alpha)} \cos\left(\frac{z}{L}\right) \langle w_z^{(0)} \rangle \quad (\text{C.11})$$

$$\zeta_{zz}^{(0)} = 0 \quad (\text{C.12})$$

C.1.2 Ordine ϵ

All'ordine 1 avremo per la divergenza:

$$\begin{aligned} & \frac{(-L^3 \tau V \nu \eta + 2L^3 \tau V \alpha + \alpha^2 \tau^2 V L + L^5 V)}{\nu(L^2 + \tau \alpha)(L^2 \eta + L^2 + \tau \alpha)} \sin\left(\frac{z}{L}\right) \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle \\ & + \frac{(\nu L^4 \eta + \nu L^4 + 2\nu \tau \alpha L^2 + \nu \tau \alpha L^2 \eta + \nu \tau^2 \alpha^2)}{\nu(L^2 + \tau \alpha)(L^2 \eta + L^2 + \tau \alpha)} \nabla_X \langle w_x^{(0)} \rangle \\ & + \nabla_Z \langle w_z^{(0)} \rangle + \partial_z w_z^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

per la velocità:

$$\begin{aligned}
& \nabla_Z \langle w_z^{(0)} \rangle V \cos\left(\frac{z}{L}\right) + 2V \cos\left(\frac{z}{L}\right) \\
& \left(\frac{(-L^3 \tau V \nu \eta + 2L^3 \tau V \alpha + \alpha^2 \tau^2 V L + L^5 V) \sin\left(\frac{z}{L}\right)}{\nu(L^2 + \tau \alpha)(L^2 \eta + L^2 + \tau \alpha)} \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle \right. \\
& \left. + \frac{(\nu L^4 \eta + \nu L^4 + 2\nu \tau \alpha L^2 + \nu \tau \alpha L^2 \eta + \nu \tau^2 \alpha^2)}{\nu(L^2 + \tau \alpha)(L^2 \eta + L^2 + \tau \alpha)} \nabla_X \langle w_x^{(0)} \rangle \right) \\
& + \partial_z w_z^{(1)} V \cos\left(\frac{z}{L}\right) + \nabla_X \langle q^{(0)} \rangle \\
& - \frac{\eta \nu}{\tau} \left(\left[-8 \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle V^2 \tau^5 L^3 \alpha^3 - 6 \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle V^2 \tau^5 L^3 \nu \alpha^2 \right. \right. \\
& \quad - 2 \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle V^2 \tau^2 L^9 - 3 \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle V^2 \tau^3 L^7 \nu \\
& \quad - \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle V^2 \tau^3 L^7 \eta \nu - 12 \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle V^2 \tau^3 L^7 \alpha \\
& \quad - 18 \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle V^2 \tau^4 L^5 \alpha^2 + 2 \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle V^2 \tau^4 L^5 \eta \nu \alpha \\
& \quad \left. - 9 \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle V^2 \tau^4 L^5 \nu \alpha \right] \sin\left(\frac{2z}{L}\right) / (33 \nu L^6 \eta \tau^2 \alpha^2 + 10 \nu L^8 \eta \tau \alpha \\
& + \nu L^{10} \eta + 40 \nu \tau^3 \alpha^3 L^4 \eta + 16 \nu \tau^4 \alpha^4 L^2 \eta + 43 \nu L^6 \tau^2 \alpha^2 + 11 \nu L^8 \tau \alpha + \nu L^{10} \\
& \quad + 73 \nu L^4 \tau^3 \alpha^3 + 56 \nu \tau^4 \alpha^4 L^2 + 16 \nu \tau^5 \alpha^5) \\
& \quad + \frac{L^2 \tau \nabla_Z \langle w_z^{(0)} \rangle V \cos\left(\frac{z}{L}\right) (L^2 + \tau \alpha + \nu \tau)}{\nu(L^2 + \tau \alpha)(L^2 \eta + L^2 + \tau \alpha)} + \partial_z \zeta_{xz}^{(1)} \Big) - \\
& \nu \left(\partial_z^2 w_x^{(1)} + \frac{2(-L^3 \tau V \nu \eta + 2L^3 \tau V \alpha + \alpha^2 \tau^2 V L + L^5 V) \cos\left(\frac{z}{L}\right) \nabla_Z \langle w_z^{(0)} \rangle}{\nu(L^2 + \tau \alpha)(L^2 \eta + L^2 + \tau \alpha) L} \right) \\
& \quad - \frac{w_z^{(1)} V \sin\left(\frac{z}{L}\right)}{L} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\eta \nu}{\tau} \left(\frac{L^2 \tau \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle V \cos\left(\frac{z}{L}\right) (L^2 + \tau \alpha + \nu \tau)}{\nu(L^2 + \tau \alpha)(L^2 \eta + L^2 + \tau \alpha)} + \partial_z \zeta_{zz}^{(1)} \right) \\
& + \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle V \cos\left(\frac{z}{L}\right) + \nabla_Z \langle q^{(0)} \rangle + \partial_z q^{(1)} - \nu \partial_z^2 w_z^{(1)} = 0
\end{aligned} \tag{C.14}$$

Per il tensore di conformazione abbiamo che:

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{(-L^3\tau V\nu\eta + 2L^3\tau V\alpha + \alpha^2\tau^2VL + L^5V)\sin(\frac{z}{L})\nabla_X\langle w_z^{(0)}\rangle}{\nu(L^2 + \tau\alpha)(L^2\eta + L^2 + \tau\alpha)} \right. \\
& \left. + \frac{(\nu L^4\eta + \nu L^4 + 2\nu\tau\alpha L^2 + \nu\tau\alpha L^2\eta + \nu\tau^2\alpha^2)\nabla_X\langle w_x^{(0)}\rangle}{\nu(L^2 + \tau\alpha)(L^2\eta + L^2 + \tau\alpha)} \right) \\
& \left(1 + \frac{2\tau^2V^2L^2\sin(\frac{z}{L})^2}{(L^4 + 5\tau\alpha L^2 + 4\tau^2\alpha^2)} + \frac{4\tau^3V^2\alpha}{(L^4 + 5\tau\alpha L^2 + 4\tau^2\alpha^2)} \right) \\
& + \left(-8\nabla_X\langle w_z^{(0)}\rangle V^2\tau^5L^3\alpha^3 - 6\nabla_X\langle w_z^{(0)}\rangle V^2\tau^5L^3\nu\alpha^2 \right. \\
& \quad -2\nabla_X\langle w_z^{(0)}\rangle V^2\tau^2L^9 - 3\nabla_X\langle w_z^{(0)}\rangle V^2\tau^3L^7\nu \\
& \quad -\nabla_X\langle w_z^{(0)}\rangle V^2\tau^3L^7\eta\nu - 12\nabla_X\langle w_z^{(0)}\rangle V^2\tau^3L^7\alpha \\
& \quad -18\nabla_X\langle w_z^{(0)}\rangle V^2\tau^4L^5\alpha^2 + 2\nabla_X\langle w_z^{(0)}\rangle V^2\tau^4L^5\eta\nu\alpha \\
& \quad \left. -9\nabla_X\langle w_z^{(0)}\rangle V^2\tau^4L^5\nu\alpha \right) \sin(\frac{2z}{L})V\cos(\frac{z}{L}) / (33\nu L^6\eta\tau^2\alpha^2 \\
& + 10\nu L^8\eta\tau\alpha + \nu L^{10}\eta + 40\nu\tau^3\alpha^3L^4\eta + 16\nu\tau^4\alpha^4L^2\eta + 43\nu L^6\tau^2\alpha^2 \\
& + 11\nu L^8\tau\alpha + \nu L^{10} + 73\nu L^4\tau^3\alpha^3 + 56\nu\tau^4\alpha^4L^2 + 16\nu\tau^5\alpha^5) \\
& + \frac{\zeta_{xx}^{(1)}}{\tau} + \nabla_Z\langle w_z^{(0)}\rangle \left(1 + \frac{2\tau^2V^2L^2\sin(\frac{z}{L})^2}{(L^4 + 5\tau\alpha L^2 + 4\tau^2\alpha^2)} + \frac{4\tau^3V^2\alpha}{(L^4 + 5\tau\alpha L^2 + 4\tau^2\alpha^2)} \right) \\
& + \frac{4w_z^{(1)}\tau^2V^2L\sin(\frac{z}{L})\cos(\frac{z}{L})}{(L^4 + 5\tau\alpha L^2 + 4\tau^2\alpha^2)} + \partial_z w_z^{(1)} \left(1 + \frac{2\tau^2V^2L^2\sin(\frac{z}{L})^2}{(L^4 + 5\tau\alpha L^2 + 4\tau^2\alpha^2)} + \frac{4\tau^3V^2\alpha}{(L^4 + 5\tau\alpha L^2 + 4\tau^2\alpha^2)} \right) \\
& \quad + \frac{2V\sin(\frac{z}{L})\zeta_{xz}^{(1)}}{L} - \alpha \left[\partial_z^2 \zeta_{xx}^{(1)} \right. \\
& \quad + 4(-8\nabla_Z\langle w_z^{(0)}\rangle V^2\tau^5L^3\alpha^3 - 6\nabla_Z\langle w_z^{(0)}\rangle V^2\tau^5L^3\nu\alpha^2 \\
& \quad \quad -2\nabla_Z\langle w_z^{(0)}\rangle V^2\tau^2L^9 - 3\nabla_Z\langle w_z^{(0)}\rangle V^2\tau^3L^7\nu \\
& \quad \quad -\nabla_Z\langle w_z^{(0)}\rangle V^2\tau^3L^7\eta\nu - 12\nabla_Z\langle w_z^{(0)}\rangle V^2\tau^3L^7\alpha \\
& \quad \quad \left. -18\nabla_Z\langle w_z^{(0)}\rangle V^2\tau^4L^5\alpha^2 + 2\nabla_Z\langle w_z^{(0)}\rangle V^2\tau^4L^5\eta\nu\alpha \right. \\
& \quad \quad \left. -9\nabla_Z\langle w_z^{(0)}\rangle V^2\tau^4L^5\nu\alpha \right) \cos(\frac{2z}{L}) / ((33\nu L^6\eta\tau^2\alpha^2 + 10\nu L^8\eta\tau\alpha \\
& + \nu L^{10}\eta + 40\nu\tau^3\alpha^3L^4\eta + 16\nu\tau^4\alpha^4L^2\eta + 43\nu L^6\tau^2\alpha^2 + 11\nu L^8\tau\alpha + \nu L^{10} \\
& \quad + 73\nu L^4\tau^3\alpha^3 + 56\nu\tau^4\alpha^4L^2 + 16\nu\tau^5\alpha^5)L) \left. \right] + 2 \left(\partial_z w_x^{(1)} \right. \\
& \quad \left. \frac{(-L^3\tau V\nu\eta + 2L^3\tau V\alpha + \alpha^2\tau^2VL + L^5V)\sin(\frac{z}{L})\nabla_Z\langle w_z^{(0)}\rangle}{\nu(L^2 + \tau\alpha)(L^2\eta + L^2 + \tau\alpha)} \right. \\
& \left. + \frac{(\nu L^4\eta + \nu L^4 + 2\nu\tau\alpha L^2 + \nu\tau\alpha L^2\eta + \nu\tau^2\alpha^2)\nabla_Z\langle w_x^{(0)}\rangle}{\nu(L^2 + \tau\alpha)(L^2\eta + L^2 + \tau\alpha)} \right) V\tau L\sin(\frac{z}{L}) / (L^2 + \tau\alpha) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{V^2 \cos\left(\frac{z}{L}\right)^2 L^2 \tau \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle (L^2 + \tau\alpha + \nu\tau)}{\nu(L^2 + \tau\alpha)(L^2\eta + L^2 + \tau\alpha)} \\
& - \frac{\nabla_Z \langle w_z^{(0)} \rangle V \tau L \sin\left(\frac{z}{L}\right)}{L^2 + \tau\alpha} \\
& - \left(1 + \frac{2\tau^2 V^2 L^2 \sin\left(\frac{z}{L}\right)^2}{L^4 + 5\tau\alpha L^2 + 4\tau^2 \alpha^2} + \frac{4\tau^3 V^2 \alpha}{L^4 + 5\tau\alpha L^2 + 4\tau^2 \alpha^2} \right) \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle \\
& - \frac{w_z^{(1)} V \tau \cos\left(\frac{z}{L}\right)}{L^2 + \tau\alpha} - \frac{\partial_z w_z^{(1)} V \tau L \sin\left(\frac{z}{L}\right)}{L^2 + \tau\alpha} \\
& + \frac{V \sin\left(\frac{z}{L}\right) \zeta_{zz}^{(1)}}{L} \\
& + \frac{V \tau L \sin\left(\frac{z}{L}\right) \partial_z w_z^{(1)} + \nabla_Z \langle w_z^{(0)} \rangle}{L^2 + \tau\alpha} + \frac{\zeta_{xz}^{(1)}}{\tau} \\
& - \frac{(-L^3 \tau V \nu \eta + 2L^3 \tau V \alpha + \alpha^2 \tau^2 V L + L^5 V) \sin\left(\frac{z}{L}\right) \nabla_Z \langle w_z^{(0)} \rangle}{\nu(L^2 + \tau\alpha)(L^2\eta + L^2 + \tau\alpha)} \\
& - \frac{(\nu L^4 \eta + \nu L^4 + 2\nu\tau\alpha L^2 + \nu\tau\alpha L^2 \eta + \nu\tau^2 \alpha^2) (\nabla_Z \langle w_x^{(0)} \rangle)}{\nu(L^2 + \tau\alpha)(L^2\eta + L^2 + \tau\alpha)} \\
& - \alpha \left(\partial_z^2 \zeta_{xz}^{(1)} - \frac{2L\tau \nabla_Z \langle w_z^{(0)} \rangle V \sin\left(\frac{z}{L}\right) (L^2 + \tau\alpha + \nu\tau)}{\nu(L^2 + \tau\alpha)(L^2\eta + L^2 + \tau\alpha)} \right) - \partial_z w_x^{(1)} = 0 \\
& \frac{2\nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle V \tau L \sin\left(\frac{z}{L}\right)}{L^2 + \tau\alpha} \\
& + \frac{(-L^3 \tau V \nu \eta + 2L^3 \tau V \alpha + \alpha^2 \tau^2 V L + L^5 V) \sin\left(\frac{z}{L}\right) \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle}{\nu(L^2 + \tau\alpha)(L^2\eta + L^2 + \tau\alpha)} \\
& + \frac{(\nu L^4 \eta + \nu L^4 + 2\nu\tau\alpha L^2 + \nu\tau\alpha L^2 \eta + \nu\tau^2 \alpha^2) \nabla_X \langle w_x^{(0)} \rangle}{\nu(L^2 + \tau\alpha)(L^2\eta + L^2 + \tau\alpha)} \\
& + \frac{\zeta_{zz}^{(1)}}{\tau} - \nabla_Z \langle w_z^{(0)} \rangle - \partial_z w_z^{(1)} - \alpha \partial_z^2 \zeta_{zz}^{(1)} = 0
\end{aligned}$$

Le soluzioni di queste equazioni sono:

$$\begin{aligned}
\zeta_{zz}^{(1)} = -\tau \frac{2V((\alpha + \nu)\tau + L^2)L^3 \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle \sin\left(\frac{z}{L}\right)}{((\eta + 1)L^2 + \tau\alpha)\nu(L^2 + \tau\alpha)} \\
- \tau (-\nabla_Z \langle w_z^{(0)} \rangle + \nabla_X \langle w_x^{(0)} \rangle)
\end{aligned} \tag{C.15}$$

$$w_z^{(1)} = -\frac{(L^4 V \tau \eta \nu - 2 L^4 V \tau \alpha - L^2 V \tau^2 \alpha^2 - L^6 V) \cos\left(\frac{z}{L}\right) \nabla_X \langle w_z^{(0)} \rangle}{\nu (L^4 \eta + L^4 + 2 \tau \alpha L^2 + \tau \alpha L^2 \eta + \tau^2 \alpha^2)} + \langle w_z^{(1)} \rangle \quad (\text{C.16})$$

C.2 Coefficienti della forma quadratica

$$a = \left\{ (\mathcal{S}c^3 \mathcal{R}e^3 \mathcal{D}e^2 + 3 \mathcal{S}c^3 \mathcal{D}e \mathcal{R}e^4 + (-\mathcal{R}e^5 + 2 \mathcal{R}e^3) \mathcal{S}c^3) \eta^4 \right. \\ + \left[((4 \mathcal{R}e^2 - 3 \mathcal{R}e^4) \mathcal{S}c^2 + 9 \mathcal{R}e^4 \mathcal{S}c^3) \mathcal{D}e + 2 \mathcal{S}c^2 \mathcal{R}e^2 \mathcal{D}e^3 + (8 \mathcal{R}e^3 - 4 \mathcal{R}e^5) \mathcal{S}c^3 \right. \\ + (5 \mathcal{S}c^3 \mathcal{R}e^3 + 5 \mathcal{R}e^3 \mathcal{S}c^2) \mathcal{D}e^2 \left. \right] \eta^3 + \left[(12 \mathcal{R}e^3 - 6 \mathcal{R}e^5) \mathcal{S}c^3 \right. \\ + ((14 \mathcal{R}e^2 - 9 \mathcal{R}e^4) \mathcal{S}c^2 + 9 \mathcal{R}e^4 \mathcal{S}c^3) \mathcal{D}e + (2 \mathcal{R}e^2 \mathcal{S}c + 7 \mathcal{R}e^2 \mathcal{S}c^2) \mathcal{D}e^3 \\ + (7 \mathcal{S}c^3 \mathcal{R}e^3 + 10 \mathcal{R}e^3 \mathcal{S}c^2 + (-3 \mathcal{R}e^3 + 2 \mathcal{R}e) \mathcal{S}c) \mathcal{D}e^2 \left. \right] \eta^2 + (2 \mathcal{S}c \mathcal{R}e \mathcal{D}e^4 \\ + (8 \mathcal{R}e^3 - 4 \mathcal{R}e^5) \mathcal{S}c^3 + ((16 \mathcal{R}e^2 - 9 \mathcal{R}e^4) \mathcal{S}c^2 + 3 \mathcal{R}e^4 \mathcal{S}c^3) \mathcal{D}e \\ + (3 \mathcal{S}c^3 \mathcal{R}e^3 + 5 \mathcal{R}e^3 \mathcal{S}c^2 + (8 \mathcal{R}e - 6 \mathcal{R}e^3) \mathcal{S}c) \mathcal{D}e^2 \\ + (5 \mathcal{R}e^2 \mathcal{S}c^2 + 2 \mathcal{R}e^2 \mathcal{S}c - \mathcal{R}e^2) \mathcal{D}e^3) \eta + (-\mathcal{R}e^2 + 2) \mathcal{D}e^3 \\ + (-\mathcal{R}e^5 + 2 \mathcal{R}e^3) \mathcal{S}c^3 + (6 \mathcal{R}e - 3 \mathcal{R}e^3) \mathcal{S}c \mathcal{D}e^2 + (6 \mathcal{R}e^2 - 3 \mathcal{R}e^4) \mathcal{S}c^2 \mathcal{D}e \left. \right\} \times \\ \times \frac{1}{2 \mathcal{R}e (\mathcal{D}e + (1 + \eta)^2 \mathcal{R}e \mathcal{S}c)^2 (\mathcal{R}e (1 + \eta) \mathcal{S}c + \mathcal{D}e)^2}$$

$$\begin{aligned}
b = & (-2\eta \mathcal{D}e^5 \mathcal{R}e \mathcal{S}c + \{(-7\eta^2 - 11\eta \\
& + 4\eta^3) \mathcal{R}e^2 \mathcal{S}c^2 + (-18\eta^2 - 18\eta) \mathcal{R}e^2 \mathcal{S}c + 4 + (7\eta + 7) \mathcal{R}e^2\} \mathcal{D}e^4 \\
& + \{(6\eta^5 - 12\eta^2 + 18\eta^3 - 12\eta + 24\eta^4) \mathcal{R}e^3 \mathcal{S}c^3 + (-10\eta^4 \\
& - 77\eta^3 - 57\eta - 124\eta^2) \mathcal{R}e^3 \mathcal{S}c^2 \\
& + ((59\eta + 3\eta^3 + 28 + 34\eta^2) \mathcal{R}e^3 + (8\eta^2 + 16 + 24\eta) \mathcal{R}e) \mathcal{S}c\} \mathcal{D}e^3 \\
& + \{(7\eta^6 + 25\eta^5 - 3\eta + 10\eta^3 + 30\eta^4 - 5\eta^2) \mathcal{R}e^4 \mathcal{S}c^4 \\
& + (-195\eta^2 - 56\eta - 27\eta^5 - 249\eta^3 - 137\eta^4) \mathcal{R}e^4 \mathcal{S}c^3 \\
& + [(139\eta + 42 + 13\eta^4 + 165\eta^2 + 81\eta^3) \mathcal{R}e^4 + (76\eta^2 + 4\eta^4 \\
& + 72\eta + 24 + 32\eta^3) \mathcal{R}e^2] \mathcal{S}c^2\} \mathcal{D}e^2 \\
& + \{(-170\eta^3 - 85\eta^5 - 17\eta - 170\eta^4 - 17\eta^6 - 85\eta^2) \mathcal{R}e^5 \mathcal{S}c^4 \\
& + [(129\eta + 236\eta^2 + 214\eta^3 + 17\eta^5 + 28 + 96\eta^4) \mathcal{R}e^5 \\
& + (128\eta^2 + 48\eta^4 + 72\eta + 8\eta^5 + 112\eta^3 + 16) \mathcal{R}e^3] \mathcal{S}c^3\} \mathcal{D}e \\
& + [(4\eta^6 + 80\eta^3 + 60\eta^2 + 24\eta^5 + 24\eta + 60\eta^4 + 4) \mathcal{R}e^4 \\
& + (7\eta^6 + 42\eta + 105\eta^4 + 42\eta^5 + 7 + 105\eta^2 + 140\eta^3) \mathcal{R}e^6] \mathcal{S}c^4\} \times \\
& \times \frac{1}{2\mathcal{R}e(\mathcal{D}e + (1 + \eta)^2 \mathcal{R}e \mathcal{S}c)^2 (\mathcal{R}e(1 + \eta) \mathcal{S}c + \mathcal{D}e)^2} \\
c = & \frac{1}{\mathcal{R}e} \tag{C.17}
\end{aligned}$$

Dove abbiamo introdotto:

$$\mathcal{R}e = \frac{VL}{\nu(1 + \eta)}$$

$$\mathcal{S}c = \frac{\nu}{\alpha}$$

Il numero di Schmidt ($\mathcal{S}c$), è un parametro di controllo, che confronta il peso del termine viscoso, con quello diffusivo.

Appendice D

Dinamica sopra soglia: l'equazione di Cahn-Hillard

D.1 I calcoli

La gerarchia di equazioni ai vari ordini in ϵ fornisce per l'ordine 1:

$$\partial_z w_z^{(1)} = 0 \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{V}{L} \langle w_z^{(1)} \rangle \sin\left(\frac{z}{L}\right) + \frac{\eta \nu_c V}{L \mathcal{D}e} \partial_z \zeta_{xz}^{(1)} + \nu_c \partial_z^2 w_x^{(1)} = 0 \\ \partial_z q^{(1)} - \frac{\eta \nu_c V}{L \mathcal{D}e} \partial_z \zeta_{zz}^{(1)} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{V}{L \mathcal{D}e} \zeta_{xx}^{(1)} + \frac{2V}{L} \sin\left(\frac{z}{L}\right) \zeta_{xz}^{(1)} + 2 \mathcal{D}e \sin\left(\frac{z}{L}\right) \partial_z w_x^{(1)} + \\ + \frac{4 \mathcal{D}e^2}{L} \sin\left(\frac{z}{L}\right) \cos\left(\frac{z}{L}\right) \langle w_z^{(1)} \rangle = 0 \\ \frac{V}{L \mathcal{D}e} \zeta_{xz}^{(1)} - \frac{\mathcal{D}e}{L} \cos\left(\frac{z}{L}\right) \langle w_z^{(1)} \rangle + \frac{V}{L} \sin\left(\frac{z}{L}\right) \zeta_{zz}^{(1)} - \partial_z w_x^{(1)} = 0 \\ \zeta_{zz}^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

e le relative soluzioni sono:

$$w_z^{(1)} = \langle w_z^{(1)} \rangle \quad (\text{D.4})$$

$$w_x^{(1)} = \frac{1}{\nu_c(\eta+1)} \langle w_z^{(1)} \rangle \sin\left(\frac{z}{L}\right) (LV - \eta \nu_c \mathcal{D}e) \quad (\text{D.5})$$

$$q^{(1)} = \langle q^{(1)} \rangle$$

$$\begin{aligned} \zeta_{xx}^{(1)} = -2 \mathcal{D}e^2 \frac{3 \mathcal{D}e + \frac{2(LV - \eta \nu_c \mathcal{D}e)}{\nu_c(\eta+1)}}{V} \cos\left(\frac{z}{L}\right) \sin\left(\frac{z}{L}\right) \langle w_z^{(1)} \rangle \\ \zeta_{xz}^{(1)} = \mathcal{D}e \frac{\mathcal{D}e + \frac{LV - \eta \nu_c \mathcal{D}e}{\nu_c(\eta+1)}}{V} \cos\left(\frac{z}{L}\right) \langle w_z^{(1)} \rangle \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

$$\zeta_{zz}^{(1)} = 0$$

Si noti che la costante di integrazione relativa alla scelta di $\langle w_x^{(1)} \rangle$ è stata scelta nulla per le richieste fatte in partenza. La condizione di solubilità all'ordine 2 impone:

$$\langle q^{(1)} \rangle = 0$$

All'ordine 2 avremo:

$$\frac{LV - \eta\nu_c \mathcal{D}e}{\nu_c(\eta + 1)} \sin\left(\frac{z}{L}\right) \nabla_X \langle w_z^{(1)} \rangle + \partial_z w_z^{(2)} = 0 \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{aligned} & \frac{V(LV - \eta\nu_c \mathcal{D}e)}{\nu_c(\eta + 1)} \cos\left(\frac{z}{L}\right) \sin\left(\frac{z}{L}\right) \langle w_z^{(1)} \rangle + \\ & - \frac{\eta\nu_c V}{L\mathcal{D}e} \left(- \frac{2\mathcal{D}e^2}{V} (3\mathcal{D}e + \frac{2(LV - \eta\nu_c \mathcal{D}e)}{\nu_c(\eta + 1)}) \nabla_X \langle w_z^{(1)} \rangle \cos\left(\frac{z}{L}\right) \sin\left(\frac{z}{L}\right) + \right. \\ & \left. + \partial_z \zeta_{xz}^{(2)} - \nu_c \partial_z^2 w_x^{(2)} - \frac{(LV - \eta\nu_c \mathcal{D}e)}{\nu_c(\eta + 1)} \cos\left(\frac{z}{L}\right) \nabla_X \langle w_z^{(1)} \rangle V \sin\left(\frac{z}{L}\right) \right. \\ & \left. + \frac{(LV - \eta\nu_c \mathcal{D}e)}{\nu_c(\eta + 1)L} \cos\left(\frac{z}{L}\right) \langle w_z^{(1)} \rangle^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

in cui le equazioni per le perturbazioni al tensore di conformazione sono state omesse volutamente, con relative soluzioni:

D.2 I coefficienti dell'equazione

I coefficienti dell'equazione (5.21) sono:

$$\begin{aligned} A = & \frac{L}{8} \left(\frac{-12V^2 \alpha \mathcal{D}e \eta^2 \sqrt{13\eta^2 \mathcal{D}e^2 + 16\eta + 8 + 8\eta^2 + 12\eta \mathcal{D}e^2}}{((3\mathcal{D}e\eta + \sqrt{13\eta^2 \mathcal{D}e^2 + 16\eta + 8 + 8\eta^2 + 12\eta \mathcal{D}e^2})(\eta + 1)^2 V)} + \right. \\ & + \frac{-48V^2 \alpha \eta \mathcal{D}e^2 - 100V^2 \alpha \eta^2 \mathcal{D}e^2 - 52V^2 \alpha \eta^3 \mathcal{D}e^2 - 32V^2 \alpha \eta^3}{((3\mathcal{D}e\eta + \sqrt{13\eta^2 \mathcal{D}e^2 + 16\eta + 8 + 8\eta^2 + 12\eta \mathcal{D}e^2})(\eta + 1)^2 V)} + \\ & + \frac{-12V^2 \alpha \mathcal{D}e \eta \sqrt{13\eta^2 \mathcal{D}e^2 + 16\eta + 8 + 8\eta^2 + 12\eta \mathcal{D}e^2}}{((3\mathcal{D}e\eta + \sqrt{13\eta^2 \mathcal{D}e^2 + 16\eta + 8 + 8\eta^2 + 12\eta \mathcal{D}e^2})(\eta + 1)^2 V)} + \\ & \left. + \frac{-96V^2 \alpha \eta - 96V^2 \alpha \eta^2 - 32V^2 \alpha}{((3\mathcal{D}e\eta + \sqrt{13\eta^2 \mathcal{D}e^2 + 16\eta + 8 + 8\eta^2 + 12\eta \mathcal{D}e^2})(\eta + 1)^2 V)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B = & \frac{L}{8} \left(\frac{64 + 80\eta^3 \mathcal{D}e^2 + 64\eta \mathcal{D}e^2 - 20\eta \mathcal{D}e^3 \sqrt{13\eta^2 \mathcal{D}e^2 + 16\eta + 8 + 8\eta^2 + 12\eta \mathcal{D}e^2}}{((3\mathcal{D}e\eta + \sqrt{13\eta^2 \mathcal{D}e^2 + 16\eta + 8 + 8\eta^2 + 12\eta \mathcal{D}e^2})(\eta + 1)^2 V)} + \right. \\
& + \frac{144\eta^2 \mathcal{D}e^2 + 192\eta^2 - 40\eta \mathcal{D}e^4 + 192\eta + 64\eta^3 - 24\eta^3 \mathcal{D}e^4}{((3\mathcal{D}e\eta + \sqrt{13\eta^2 \mathcal{D}e^2 + 16\eta + 8 + 8\eta^2 + 12\eta \mathcal{D}e^2})(\eta + 1)^2 V)} + \\
& + \frac{16\mathcal{D}e\eta(1 + \eta) \sqrt{13\eta^2 \mathcal{D}e^2 + 16\eta + 8 + 8\eta^2 + 12\eta \mathcal{D}e^2} - 76\eta^2 \mathcal{D}e^4}{((3\mathcal{D}e\eta + \sqrt{13\eta^2 \mathcal{D}e^2 + 16\eta + 8 + 8\eta^2 + 12\eta \mathcal{D}e^2})(\eta + 1)^2 V)} + \\
& \left. + \frac{-8\eta^2 \mathcal{D}e^3 \sqrt{13\eta^2 \mathcal{D}e^2 + 16\eta + 8 + 8\eta^2 + 12\eta \mathcal{D}e^2}}{((3\mathcal{D}e\eta + \sqrt{13\eta^2 \mathcal{D}e^2 + 16\eta + 8 + 8\eta^2 + 12\eta \mathcal{D}e^2})(\eta + 1)^2 V)} \right) \\
C = & \frac{L}{8} \left(\frac{13V^2 L^2 \eta \mathcal{D}e^3 \sqrt{13\eta^2 \mathcal{D}e^2 + 16\eta + 8 + 8\eta^2 + 12\eta \mathcal{D}e^2}}{((3\mathcal{D}e\eta + \sqrt{13\eta^2 \mathcal{D}e^2 + 16\eta + 8 + 8\eta^2 + 12\eta \mathcal{D}e^2})(\eta + 1)^2 V)} + \right. \\
& + \frac{10V^2 L^2 \eta \mathcal{D}e^4 - 58V^2 L^2 \eta^3 \mathcal{D}e^2 + 7V^2 L^2 \eta^2 \mathcal{D}e^4 + 3V^2 L^2 \eta^3 \mathcal{D}e^4}{((3\mathcal{D}e\eta + \sqrt{13\eta^2 \mathcal{D}e^2 + 16\eta + 8 + 8\eta^2 + 12\eta \mathcal{D}e^2})(\eta + 1)^2 V)} + \\
& + \frac{-8V^2 L^2 \mathcal{D}e\eta(1 + \eta) \sqrt{13\eta^2 \mathcal{D}e^2 + 16\eta + 8 + 8\eta^2 + 12\eta \mathcal{D}e^2}}{((3\mathcal{D}e\eta + \sqrt{13\eta^2 \mathcal{D}e^2 + 16\eta + 8 + 8\eta^2 + 12\eta \mathcal{D}e^2})(\eta + 1)^2 V)} + \\
& + \frac{7V^2 L^2 \eta^2 \mathcal{D}e^3 \sqrt{13\eta^2 \mathcal{D}e^2 + 16\eta + 8 + 8\eta^2 + 12\eta \mathcal{D}e^2}}{((3\mathcal{D}e\eta + \sqrt{13\eta^2 \mathcal{D}e^2 + 16\eta + 8 + 8\eta^2 + 12\eta \mathcal{D}e^2})(\eta + 1)^2 V)} + \\
& + \frac{-58V^2 L^2 \eta \mathcal{D}e^2 - 116V^2 L^2 \eta^2 \mathcal{D}e^2 - 144V^2 L^2 \eta^2 - 144L^2 V^2 \eta}{((3\mathcal{D}e\eta + \sqrt{13\eta^2 \mathcal{D}e^2 + 16\eta + 8 + 8\eta^2 + 12\eta \mathcal{D}e^2})(\eta + 1)^2 V)} + \\
& \left. + \frac{-48V^2 L^2 \eta^3 - 48L^2 V^2}{((3\mathcal{D}e\eta + \sqrt{13\eta^2 \mathcal{D}e^2 + 16\eta + 8 + 8\eta^2 + 12\eta \mathcal{D}e^2})(\eta + 1)^2 V)} \right)
\end{aligned}$$

Ringraziamenti

Durante lo svolgimento di questa tesi mi sono state vicine moltissime persone, a tutte le quali rivolgo questo ringraziamento.

Per avermi sostenuto ogni giorno ringrazio Federica e la mia famiglia, che hanno saputo con ferma dolcezza farmi capire ciò che non andava, che hanno saputo indirizzare i miei sforzi nella direzione giusta e hanno saputo confortarmi nei momenti del bisogno: mia madre per le chiacchierate del mattino, per le domande sulla tesi, se è bella, se sono soddisfatto, se sono fiero, per avermi permesso di fare quello che volevo sempre, senza preoccuparmi d'altro; mio padre per le rare ma proficue chiacchierate sul futuro, e per la condivisione della passione per la ricerca, per il mondo della cultura in generale; Federica perché senza di lei questa tesi non esisterebbe, e la mia vita sarebbe diversa, perché sa rispettare ogni mia scelta, e sa dividerne con me i motivi, perché sa chi sono e mi rispetta lo stesso. Ringrazio Benedetta e Matteo che stimo molto e dei quali ricambio l'affetto; per la loro capacità di mettermi davanti ai miei difetti, per la loro voglia di mettersi in gioco, la loro voglia di parlare con me.

Ringrazio tutta la Comunità Capi del Ge XXVI, e in particolare Maria, che ha saputo darmi parole di conforto in alcuni momenti non facili. Ringrazio Alberto che è sempre presente, e tutti gli amici della Croce Blu.

Ringrazio tutti i miei compagni di Università per i consigli che mi hanno saputo dare e il sostegno, in particolare Trazza, Luciano, La Silviazza, Augu, Giulia e ovviamente Andrea, che ha saputo farmi diventare un vero principiante di Linux e non più un analfabeta, e che si è fumato con me diversi milioni. Ringrazio i giocatori di Basket, e ringrazio i miei compagni di laboratorio Lorenzo, Francesco, Massimiliano, Marta, Matteo Fabrizio, Marta, Andrea, Fede e Luca e i consiglieri di ogni momento Aldo e Gianluca.

Il ringraziamento più grande va al Dott. A. Mazzino che con professionalità, pazienza e grande determinazione mi ha seguito giorno dopo giorno nella tesi e ha permesso tutto questo. Ho trovato in lui una persona disponibile e seria, amichevole e di grande aiuto. A lui e a sua moglie Anita vanno anche i miei complimenti e migliori auguri. Un grazie anche al Prof. Festa e al Prof. Ratto che mi hanno condotto per mano nella direzione verso la quale sto andando (e cioè...?).

Bibliografia

- [1] U.Frisch, *Turbulence: the legacy of A.N.Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995
- [2] J.J.Lumley. *Drag reduction by additives*, Ann. Rev. Fl. Mech., **1**, (1969), 367-383
- [3] E.J.Hinch, *Mechanical models of dilute polymer solutions in strong flows*, Phys.Fluids, **20**, (1977), S22-S30
- [4] R.H.Nadolink, W.W.Haigh, *Bibliography on skin friction reduction with polymers and other boundary-layer additives*, ASME Appl.Mech.Rev. **48**, (1995), 351-460
- [5] R.B.Bird, O.Hassager, R.C.Armstrong, C.F.Curtiss, *Dynamics of polymeric liquids*, Wiley-Interscience, 1987
- [6] L.D.Landau, E.M.Lifshitz. *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, 1987
- [7] H.B.Squire, *On the stability of a three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls*, Proc.R. Soc. London, Ser. A, **142**, (1933), 621
- [8] K.R.Sreenivasan, C.M.White, *The onset of drag reduction by dilute polymer additives, and the maximum drag reduction asymptote*, J.Fl. Mech., **409**, (2000), 149-164
- [9] A.Gyr, W.Bewersdorff, *Drag reduction of turbulent flows by additives*, Kluwer Academic Publishers, 1995
- [10] E.Balkovsky, A.Fouxon, V.Lebedev, *Turbulence of polymer solutions*, Phys. Rev. E, **64** 5), (2001), 056301(14)
- [11] E.Balkovsky, A.Fouxon, V.Lebedev. *Turbulent dynamics of polymer solutions*, Phys.Rev.Lett., **84** 20), (2000), 4765(4)
- [12] J.L.Thiffeault, *Finite extension of polymers in turbulent flow*, arXiv:nlin, CD/0210045 v1, (2002)

-
- [13] M.Chertkov *Polymer stretching by turbulence*, Phys. Rev. Lett., **84** (20), (2000), 4761(4)
- [14] P.Ilg, E.De Angelis, I.V.Karlin, C.Casciola, S.Succi, *Polymer dynamics in wall turbulent flow*, Europhys. Lett., **58** (4), (2002), 616-622
- [15] J.G.Oldroyd. *On the formulation of rheological equations of state*, Proc. Roy. Soc. London, A **200**, (1950), 523-541
- [16] M.T.Landhal, *Dynamics of boundary layer turbulence and the mechanism of drag reduction*, Phys. Fluids, **20**, (1977), S55-S63
- [17] N.S.Berman. *Drag reduction by polymers*, Ann.Rev.Fluid Mech., **10**, (1978), 47-64
- [18] J.J.Lumley. *Drag reduction in two phase and polymer flows*, Phys. Fluids, **20**, (1977), S64-S70
- [19] P.K.Kundu, I.M.Cohen. *Fluid Mechanics* S.Diego Accademic press, 2002
- [20] P.S.Virk, *Drag reduction fundamentals*, AIChE J., **21**, (1975), 625-656
- [21] P.S.Virk, E.W.Merrill, H.Mickley, K.Smith, E.L.Mollo-Christensen, *The Toms phenomenon: turbulent pipe flow fo diluite polymer solutions*, J.Fluid Mech., **30** (2), (1967), 305-328
- [22] B.A.Toms, 1949 *Observation on the flow of linear polymer solutions through straight tubes at large Reynolds numbers*, Proc. Intl. Rheological Congress, (1949)
- [23] M.Tabor, P.G.DeGennes, *A cascade theory of drag reduction*, Europhys. Lett., **2** (7), (1986), 519-522
- [24] P.G.DeGennes, *Introduction to polymer dynamics*, Cambridge University Press, 1990
- [25] R.G.Larson, *Instabilities in viscoelastic flows*, Rheol. Acta, **31**, (1992), 213-263
- [26] M.Sokolov, R.I.Tanner, Phys.Fluids, **15**, (1972), 534
- [27] E.S.G.Shaqfeh, R.G.Larson, G.H.Frederickson, *The stability of gravity driven viscoelastic film-flow at low to moderate reynolds number*, J.Non Newt. Fluid Mech., **31**, (1989), 87-113
- [28] P.G.Drazin, W.D.Reid, *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press, 1981

-
- [29] B.J.Bayly, S.A.Orszag, T.Herbert, *Instability mechanisms in shear-flow transition*, Annu. Rev. Fluid Mech., **20**, (1988), 359-391
- [30] A.Groisman, V.Steinberg, *Elastic vs. inertial instability in a polymer solution flow*, Europhys. Lett., **43** (2), (1998), 165-170
- [31] L.Biferale, A.Crisanti, M.Vergassola, A.Vulpiani, *Eddy diffusivities in scalar transport*, Phys.Fluids, **7** (11), (1995), 2725-2734
- [32] D.W.McLaughlin, G.C.Papanicolau, O.R.Pironneau, *Convection of microstructure and related problems*, SIAM J.Appl.Math, **45**, (1985), 780
- [33] A.Bensoussan, J.L.Lions, G.C.Papanicolau, *Asymptotic analysis for periodic structure*, North-Holland Publ.Comp., 1978
- [34] A.Mazzino, *Effective correlation times in turbulent scalar transport*, Phys.Rev.E, **56** (5), (1997), 5500-5510
- [35] B.Dubrulle, U.Frisch, *Eddy viscosity of parity-invariant flow*, Phys. Rev. A, **43** (10), (1991), 5355-5364
- [36] U.Frisch, Z.S.She, P.L.Sulem, *Large-scale flow driven by the anisotropic kinetic alpha effect*, Physica D, **28**, (1987), 382-392
- [37] U.Frisch, B.Legras, B.Villone, *Large-scale Kolmogorov flow on the beta-plane and resonant wave interactions*, Physica D, **94**, (1996), 36-56
- [38] S.Gama, M.Vergassola, U.Frisch, *Negative eddy viscosity in isotropically forced flow*, J.Fluid Mech., **260**, (1994), 95-126
- [39] M.Vergassola, *Chiral non-linearities in forced 2D Navier-Stokes flows*, Europhys. Lett., **24** (1), (1993), 41-45
- [40] J.W.Cahn, J.E.Hilliard, *Free energy of a non uniform system*, J.Chem.Phys., **28**, (1958), 258
- [41] A.A.Nepomniashii, *On stability of secondary flows of a viscous fluid in unbounded space*, Appl.Math.Mech., **40**, (1976), 886
- [42] A.Novick-Cohen, L.A.Segel, *Nonlinear aspects of the Cahn-Hilliard equation*, Physica D, **10**, (1984), 277-298
- [43] Z.S.She, *Metastability and vortex pairing in the Kolmogorov flow*, Phys.Lett.A, **124** (3), (1987), 161-164
- [44] G.I.Sivashinsky, *Weak turbulence in periodic flows*, Physica D, **17**, (1985), 243-255

-
- [45] S.J.Watson, F.Otto, B.Y.Rubinstein, S.H.Davis, *Coarsening dynamics of the convective Cahn-Hilliard equation*, *Physica D*, **178**, (2003), 127-148
- [46] S.J.Watson, F.Otto, B.Y.Rubinstein, S.H.Davis, *Coarsening dynamics of the convective Cahn-Hilliard equation*, Preprint 2002, Max Planck Institute for Mathematics in the sciences, Leipzig, April 2002, <http://www.mis.mpg.de>
- [47] Y.Pomeau, S.Zaleski, *Wavelength selection in one dimensional cellular structures*, *J. de Physique*, **42**, (1981), 515
- [48] C.J.Chapman, M.R.E.Proctor, *Nonlinear Rayleigh-Bénard convection between poorly conducting boundaries*, *J.Fluid Mech.*, **101**, (1980), 759-782
- [49] R.Sureshkumar, A.N.Beris, *Linear stability analysis of viscoelastic Poiseuille flow using an Arnoldi-based orthogonalization algorithm*, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **56**, (1995), 151-182