

Università degli Studi di Genova
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali

Tesi di Laurea in Fisica

Anno accademico 2004-2005



Effetti lagrangiani sui processi di condensazione in un modello di convezione turbolenta

Relatori: Dott. A. Mazzino
Dott. A. Seminara

Correlatore: Prof. R. Collina

Candidato: Marco Tizzi

ad annina

Indice

Indice	1
Introduzione	5
1 Microfisica delle nuvole	13
1.1 Nucleazione	14
1.1.1 Nucleazione omogenea	14
1.1.2 Nucleazione eterogenea	16
1.2 Condensazione ed evaporazione	17
1.2.1 Raffreddamento dell'aria umida	18
1.2.2 Leggi di diffusione	21
1.2.3 Crescita diffusiva delle gocce	23
1.2.4 Spettro classico dei raggi	27
1.3 Coalescenza	29
1.3.1 Modello continuo	30
1.3.2 Modello stocastico	31
2 Elementi di turbolenza omogenea	33
2.1 Fenomenologia della turbolenza	33
2.2 Strumenti statistici	36
2.2.1 Variabili aleatorie e campi stocastici	36
2.2.2 Energia e spettri di campi turbolenti	39
2.3 Turbolenza di un flusso omogeneo isotropo	41
2.3.1 Bilancio energetico	41
2.3.2 Teoria di Kolmogorov	42
2.3.3 Turbolenza bidimensionale	47
2.4 Turbolenza scalare	48
2.4.1 Teoria di Kolmogorov–Obukhov–Corrsin	49
2.4.2 Teoria di Bolgiano–Obukhov	51
2.5 Intermittenza	59
2.5.1 Intermittenza a piccola scala	60

2.5.2	Intermittenza a grande scala	62
3	Modello di condensazione turbolenta	63
3.1	Modello turbolento	64
3.1.1	Campo di velocità	65
3.1.2	Campo di temperatura	66
3.1.3	Campo di soprassaturazione	67
3.1.4	Posizioni delle gocce	68
3.1.5	Raggi delle gocce	68
3.1.6	Equazioni del modello	69
3.2	Modello adottato	70
3.2.1	Codice pseudospettrale	70
3.2.2	Equazioni euleriane integrate	73
3.2.3	Equazioni lagrangiane e correlazione	76
3.2.4	Regimi raggiungibili	78
4	Condensazione turbolenta non retroattiva	81
4.1	Regime di Kolmogorov	83
4.1.1	Approssimazioni	83
4.1.2	Analisi euleriana	84
4.1.3	Analisi lagrangiana	85
4.2	Regime di Bolgiano instabile	86
4.2.1	Scelta dei parametri	87
4.2.2	Analisi euleriana	90
4.2.3	Analisi lagrangiana	96
4.3	Regime di Bolgiano forzato	108
4.3.1	Analisi euleriana	109
4.3.2	Analisi lagrangiana	112
4.4	Regime di convezione umida	117
5	Condensazione turbolenta localmente retroattiva	119
5.1	Evoluzione senza rinascita delle gocce	119
5.1.1	Analisi qualitativa	120
5.1.2	Analisi al variare del tasso di crescita	124
5.1.3	Analisi comparative ulteriori	132
5.2	Evoluzione con rinascita delle gocce	135
5.2.1	Rinascita incondizionata	137
5.2.2	Rinascita condizionata	139
	Conclusioni	145

A	Grandezze fisiche	149
A.1	Variabilità termica	149
A.2	Dipendenza termica esplicita	151
A.3	Parametri	155
B	Codice pseudospettrale	157
B.1	Discretizzazione spaziale e trasformate di Fourier efficienti . .	157
B.2	Discretizzazione temporale	159
B.2.1	Metodo di Eulero	159
B.2.2	Metodo di Runge–Kutta del secondo ordine	160
B.3	Metodo pseudospettrale e discretizzazione temporale	161
B.3.1	Integrazione delle equazioni dei campi euleriani	162
B.3.2	Integrazione delle equazioni delle variabili lagrangiane .	165
B.4	Stabilità	165
	Bibliografia	167

Introduzione

L'atmosfera terrestre è un ambiente caratterizzato da una forte stratificazione; le sue proprietà, infatti, soprattutto per effetto del campo gravitazionale, dipendono in maniera determinante dalla quota. I fenomeni che vi hanno luogo sono perciò strettamente collegati a questa struttura verticale. Nella fascia più interna, la *troposfera*, sono concentrati i quattro quinti della massa gassosa presente in atmosfera e, soprattutto, il novantanove per cento del vapore acqueo. È in questo strato che si verificano quasi tutti i fenomeni meteorologici.

A sua volta la troposfera mostra al proprio interno una natura stratificata. Più in particolare, la maggiore pressione caratteristica delle quote più basse — unitamente alla maggiore vicinanza alla superficie terrestre, che restituisce sotto forma di calore la radiazione solare da cui è investita — è responsabile della presenza dell'aria più calda ai livelli inferiori. Allontanandosi dalla superficie s'incontra via via aria sempre più rarefatta e quindi fredda. Questa condizione, in apparenza statica, si dimostra in realtà il motore dei flussi turbolenti che si sviluppano in atmosfera e, di conseguenza, di gran parte dei fenomeni ivi osservati. Infatti lo scenario può risultare instabile, in quanto l'aria è tanto meno densa quanto più calda: la massa d'aria presente a bassa quota tende, allora, a salire, mentre contemporaneamente le masse fredde e dense degli strati più elevati tendono a scendere. Questa dinamica innesca un meccanismo di convezione turbolenta che è alla base di molti eventi meteorologici, tra i quali la formazione delle nuvole cumuliformi — oggetto di studio di questo lavoro di tesi — mediante la progressiva saturazione dell'aria umida provocata dalle correnti ascensionali.

Le nuvole sono un *aerosol*, cioè una soluzione colloidale di particelle liquide — perlopiù goccioline d'acqua — e solide — microcristalli di ghiaccio, polveri... — in un mezzo gassoso quale l'aria umida. Esse costituiscono uno stupefacente laboratorio naturale, sia per la straordinaria varietà di fenomeni relativi a discipline differenti che vi si manifesta, sia per l'ampia gamma di scale spaziali che coinvolge il loro studio, dalle goccioline submicrometriche ai moti turbolenti globali che avvengono su distanze dell'ordine del chilometro.

Le nuvole possono assumere forme e caratteristiche assai diverse a seconda



Figura 1

delle condizioni in cui si formano. Si distinguono, per esempio, le nubi a sviluppo orizzontale (*stratiformi*) da quelle a sviluppo verticale (*cumuliformi*). Altre distinzioni riguardano la loro composizione interna, che può essere determinata dall'altezza e dal territorio sopra a cui crescono e si evolvono: alle quote più alte si incontrano nuvole essenzialmente di particelle ghiacciate (*cirri*) e sopra gli oceani nuvole con goccioline di alta salinità (*nuvole marittime*). Del resto la classificazione delle nubi nella loro pressoché infinita varietà ha appassionato per secoli gli scienziati.

Tuttavia, nonostante questo notevole assortimento, è possibile schematizzare la formazione delle precipitazioni in un quadro comune, costituito da tre fasi successive: la *nucleazione*, la *condensazione* e/o il *brinamento* e la *coalescenza*.

Durante la prima fase, in un ambiente divenuto soprassaturo di vapor acqueo, avviene la nascita dei primi embrioni delle particelle, che a seconda del tipo di nube possono essere liquide e/o ghiacciate. La nucleazione è solitamente innescata da corpuscoli solidi estranei, i cosiddetti *nuclei di condensazione*, che svolgono un ruolo catalizzante; sulla loro superficie, infatti, è favorito il deposito e la condensazione delle molecole di vapore, che man mano arrivano a ricoprire l'intero nucleo. Tale meccanismo, denominato *nucleazione eterogenea*, è in grado di giustificare la grande densità di goccioline presenti in questa fase nella nuvola. L'assenza dei nuclei di condensazione (*nucleazione omogenea*), al contrario, richiederebbe livelli di soprassaturazione superiori al trecento per cento e quindi incompatibili con quelli osservati in atmosfera, dell'ordine del per cento. Al termine di questa fase il raggio delle particelle appena nucleate è di fatto pari a quello del nucleo ($R \sim 0.1 \mu\text{m}$).

Successivamente è il flusso diffusivo di vapore a determinare la crescita di dimensione delle particelle: il vapore, colpendo la loro superficie, viene assorbito per condensazione sulle goccioline e per sublimazione sui microcristalli. Siccome il

tempo impiegato dalle particelle a raggiungere l'equilibrio termodinamico è molto inferiore ai tempi tipici dell'accrescimento diffusivo, per la descrizione del processo è ragionevole assumere lo stato microscopico delle particelle come stazionario (*approssimazione quasistatica*). La taglia relativamente piccola ($R \lesssim 20 \mu\text{m}$) permette di studiare le singole particelle come isolate, in quanto la frequenza dei loro urti è ancora trascurabile.

Quando, però, i loro raggi superano i venti micrometri, la crescita diffusiva diventa trascurabile rispetto al meccanismo di coalescenza. Infatti in questa terza fase le particelle più grandi, iniziando a risentire dell'inerzia e quindi dell'attrazione gravitazionale, urtano e assorbono quelle più piccole incontrate lungo la propria traiettoria. La crescita delle particelle diviene così molto veloce, in una sorta di reazione a catena, e, se le dimensioni superano il millimetro, può infine provocare la loro precipitazione sotto forma di pioggia, neve, grandine. . .

Per un'analisi più dettagliata di questi fenomeni è, però, necessario restringere il campo d'indagine, dal momento che l'evoluzione specifica delle particelle e le previsioni quantitative dipendono in maniera decisiva dalla tipologia di nuvola analizzata. Focalizziamo allora l'attenzione sulle nuvole cumuliformi *calde*, comuni nubi sviluppate in altezza e prive di particelle ghiacciate. Esse sono percorse da correnti ascensionali che trasportano l'aria umida più calda dalla base della nuvola alla sua sommità. In questa ascesa l'aria si espande pressoché adiabaticamente e di conseguenza si raffredda. Ma al diminuire della temperatura la tensione di vapor saturo cala e, a parità di vapore disponibile, l'ambiente diventa vieppiù saturo, sinché a una certa quota non viene oltrepassata la soglia di saturazione, attivando il processo di nucleazione.

La nucleazione prepara una popolazione di goccioline relativamente omogenea, che ricalca quella dei nuclei di condensazione. La fase di condensazione eredita perciò un insieme di particelle di taglia e comportamento simili. Permangono tali caratteristiche anche in seguito alla crescita diffusiva o il quadro muta notevolmente? La risposta a questo interrogativo è decisiva per poter comprendere la fase successiva di coalescenza e soprattutto per stabilire se tale fase possa essere innescata efficacemente o invece non riesca a svilupparsi. Per questo la condensazione svolge un ruolo cruciale nella formazione della nuvola. Non solo: è uno dei processi che lasciano ancora molti quesiti aperti, alla luce soprattutto della discrepanza riscontrata tra previsioni teoriche dei modelli sviluppati e osservazioni sperimentali. È pertanto su questo stadio di evoluzione delle goccioline che intendiamo concentrare il nostro studio.

Il modello classico di condensazione (esposto diffusamente in [31] e presentato sommariamente nel capitolo 1) impiega quale oggetto d'indagine il *volume fluido*, una porzione di spazio molto più piccola delle dimensioni della nuvola e molto più

grande di quelle delle goccioline; il volume fluido contiene normalmente circa un litro d'aria e al suo interno le variabili termodinamiche sono considerate uniformi. Utilizzando le leggi della termodinamica classica, viene descritto il raffreddamento adiabatico del volume attraverso le variabili T e $s := e/e_s - 1$ (con e ed e_s rispettivamente tensione di vapore e tensione di vapor saturo); esse rappresentano la temperatura e la *soprassaturazione* del volume fluido ascendente a velocità verticale $w \simeq 1 \text{ m s}^{-1}$ ed evolvono secondo le

$$\frac{d}{dt}T = -\Gamma_a w + R_s s \quad (1a)$$

$$\frac{d}{dt}s = A_1 w - \frac{1}{\tau_s} s \quad (1b)$$

dove Γ_a (*tasso di raffreddamento adiabatico*), R_s (*tasso di riscaldamento per condensazione*), A_1 e τ_s (*tempo di assorbimento della soprassaturazione*) sono quantità determinate dalle proprietà termodinamiche del volume e sono ritenute costanti. Queste equazioni testimoniano come da un lato il volume si raffreddi e si saturi salendo di quota, dall'altro si riscaldi e perda vapore per effetto della condensazione sulle gocce, che assorbono vapore liberando calore.

Le equazioni classiche per la diffusione di vapore e calore permettono inoltre di descrivere in approssimazione quasistatica l'evoluzione del raggio delle gocce contenute nel volume

$$\frac{d}{dt}R^2 = 2A_3 s \quad (1c)$$

dove anche A_3 (*tasso di crescita per condensazione*) è un coefficiente determinato dalle quantità termodinamiche del volume e assunto costante. Mediando su tutte le gocce presenti nel volume la soluzione della (1c) $R^2(t) = R^2(0) + 2A_3 s t$ (dove $R(0)$ è il raggio ereditato dalla fase di nucleazione), avendo potuto considerare s circa costante, si ricava la legge di evoluzione classica per lo spettro dei raggi

$$\langle R^2 \rangle(t) = \langle R^2 \rangle(0) + 2A_3 \langle s \rangle t \quad (2)$$

Lo spettro, dunque, trasla rigidamente nel tempo: ciò implica che la varianza sia costante e che quindi la distribuzione al crescere del raggio si stringa sempre di più intorno al valor medio; implica altresì che il raggio cresca solo se l'ambiente è soprassaturo; e che infine la distribuzione prodotta dalla nucleazione venga trasmessa colla stessa forma alla fase successiva di coalescenza. Tutte e tre queste previsioni si rivelano erronee e registrano il fallimento del modello classico. Infatti numerose osservazioni sperimentali hanno mostrato come durante la condensazione lo spettro dei raggi subisca un forte ampliamento, come l'accrescimento possa avvenire in zone mediamente sottosature e come siano spesso presenti distribuzioni a due picchi (*bimodali*) intorno ai raggi maggiori e minori del valor

medio, mentre la popolazione appena nucleata si addensa attorno a un valore centrale comune.

Affinamenti del modello classico hanno considerato l'immissione nella nuvola di nuovi nuclei di condensazione esterni anche durante la condensazione e dunque l'afflusso continuo di nuove goccioline nucleate ([25]), ma l'effetto risulta troppo ridotto per poter motivare le osservazioni.

La ragione cardinale per cui il modello classico non è in grado di prevedere l'*ampliamento dello spettro* risiede nella mancata inclusione in esso dei fenomeni turbolenti presenti in atmosfera e in particolar modo nel tipo di nuvola analizzato.

Tuttavia l'inclusione della sola turbolenza di per sé non basta a giustificare i valori di ampliamento dello spettro misurati. Il modello sviluppato da Bartlett e Jonas nel 1972 ([1]), per esempio, trattava w come una variabile temporale stocastica, ma prevedeva fluttuazioni temporali per s insufficienti a produrre un allargamento apprezzabile dello spettro.

Più recentemente sono stati elaborati diversi modelli turbolenti in cui si è cercato di prendere in considerazione molteplici aspetti trascurati dai modelli classici. Ad esempio in [39, 40] nel 2001 è stato affrontato il problema della crescita per condensazione confrontando la situazione non turbolenta con quella turbolenta mediante simulazioni numeriche. In particolare è stata valutata l'importanza della nonuniformità a piccole scale della distribuzione spaziale delle posizioni e dei raggi delle goccioline e gli effetti della sedimentazione dovuti all'inerzia, tenendo anche conto del ruolo del raffreddamento verticale. Neppure questo *approccio microscopico*, però, riesce ad osservare risultati significativi di ampliamento spettrale.

Che cosa occorre, dunque, per riuscire a interpretare la realtà della crescita delle gocce per condensazione, se anche la turbolenza sembra non essere sufficiente? Il punto cruciale è che la turbolenza va inserita nel suo corretto contesto. Consideriamo, infatti, due goccioline appartenenti al volume fluido sotto esame. In una decina di minuti, ovvero nel tempo caratteristico associato alla condensazione, il trasporto turbolento le avrà separate di una distanza confrontabile alla dimensione della nuvola stessa, tanto da fargli conoscere gran parte dei valori di soprassaturazione presenti nell'intera nuvola! Pertanto, volendo considerare un sistema turbolento, occorre abbandonare il volume fluido come oggetto di studio, in quanto fuorviante e inadeguato, e dedicarsi all'analisi globale della nuvola, poiché, come si vede, la decina di decenni di scale spaziali coinvolte nello sviluppo di una nube sono tutte dinamicamente accoppiate.

Un primo modello in questa direzione è stato presentato nel 2004 in [6, 33] con risultati molto incoraggianti. Il modello è caratterizzato dal trasporto turbolento del campo scalare $s(\mathbf{x}, t)$ e considera valide le equazioni classiche di evoluzione

delle gocce. La differenza è che la soprassaturazione da esse percepita è ora un campo turbolento. La risoluzione delle equazioni per via stocastica indica un debole ampliamento dello spettro. Le simulazioni numeriche, effettuate su un dominio piano corrispondente alla grandi scale della nuvola, rivelano, invece, come la correlazione presente tra traiettorie delle goccioline e zone soprassature provochi un cospicuo ampliamento spettrale. Infatti, mentre le goccioline che si ritrovano nelle zone sottosature vanno incontro a evaporazione, quelle che sperimentano valori positivi di s possono accrescere liberamente il proprio raggio. In tal modo il raggio medio sale anche in ambienti mediamente saturi.

Il mio lavoro di tesi ha riguardato l'ulteriore sviluppo di un modello di condensazione basato su una descrizione turbolenta globale in cui il flusso si trova in un regime convettivo, come effettivamente accade nelle nuvole calde cumuliformi. Ho quindi incluso nel modello il campo turbolento di temperatura $T(\mathbf{x}, t)$, che tramite la spinta di Archimede attiva la convezione turbolenta: le variazioni termiche locali producono fluttuazioni di densità che innescano i moti vorticosi nel campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Il dominio spaziale oggetto del modello è quella porzione interna alla nuvola denominata *nucleo quasiadiabatico*; le sue dimensioni sono sempre dell'ordine di grandezza dell'intera nuvola, ma in tale nucleo è possibile trascurare gli effetti di bordo e considerare le trasformazioni termodinamiche come pressoché adiabatiche. E in effetti è proprio questo nucleo a rappresentare il laboratorio di formazione ed evoluzione del cumulo ed è qui che la convezione turbolenta diviene decisiva, costituendo il motore dell'intero processo. Il modello, presentato nel dettaglio al capitolo 3, prevede una forte interdipendenza tra tutte le variabili che descrivono il sistema, come si evince dalle loro equazioni evolutive

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_a} \boldsymbol{\partial} p + (1 - \beta(T - T_m)) \mathbf{g} + \nu_a \partial^2 \mathbf{v} \quad (3a)$$

$$\partial_t T + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} T = -\Gamma_a w + R_s(T, \mathbf{X}_i, R_i) s + \kappa'_a \partial^2 T \quad (3b)$$

$$\partial_t s + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} s = A_1 w - \frac{1}{\tau_s} (\mathbf{X}_i, R_i) s + D'_v \partial^2 s \quad (3c)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}_i = \mathbf{V}_i + \sqrt{2D_v} \boldsymbol{\eta}_i \quad (3d)$$

$$\frac{d}{dt} R_i^2 = 2A_3(T) S_i \quad (3e)$$

dove ρ_a è la densità dell'aria, p la sua pressione, β il coefficiente di espansione termica, T_m la temperatura di riferimento media a metà nuvola, $\mathbf{g} = -g\hat{z}$ l'accelerazione di gravità, ν_a la viscosità cinematica dell'aria, κ'_a e D'_v le diffusività termica e di vapore, $\boldsymbol{\eta}_i$ un rumore bianco e $\mathbf{V}_i = \mathbf{v}(\mathbf{X}_i(t), t)$ e $S_i = s(\mathbf{X}_i(t), t)$. Le due ultime equazioni mostrano come l'iesima gocciolina evolva secondo il

modello classico, ma sentendo campi turbolenti variabili localmente e quindi differenti per ogni gocciolina.

Un tale sistema non può essere risolto analiticamente e richiede il supporto dell'integrazione numerica. Le esigenze di calcolo, però, impediscono cogliere attuali strumenti di risolvere tutti i circa 10^{26} gradi di libertà tipici di una nuvola. Ho quindi integrato il sistema (3) su un dominio piano discreto di 128×128 nodi, inserendovi un numero di gocce ($N = 20000$) statisticamente significativo e rappresentativo della popolazione presente in una nuvola, ma non paragonabile con esso. Non potendo risolvere tutte le scale spaziali, inoltre, ho scelto di indagare la turbolenza di grande scala, ovvero quella che coinvolge le scale dal mezzo chilometro ai cinque metri. Per le scale inferiori si è ritenuto valido il modello classico.

Ho organizzato l'analisi numerica in tre principali passi successivi di affinamento. Infatti la complessità del sistema (3) e le numerose retroazioni tra i campi richiedono in una prima fase alcune approssimazioni. La logica seguita è quella di cercare di discernere il contributo dei singoli effetti per poi passare a una grado di complessità maggiore.

A un primo stadio (cap. 4) ho considerato il sistema privo di retroazioni lagrangiane. Vale a dire che i coefficienti dei termini in s in (3b) e (3c) in questa fase sono stati considerati costanti. Ciò equivale a tener conto dell'effetto delle gocce sull'assorbimento di vapore e sul rilascio di calore per condensazione come una proprietà media globale. In realtà, a parte alcune simulazioni esplorative, ho lavorato nell'approssimazione di R_{gs} trascurabile, legittima quando la densità di gocce è bassa. Il regime del flusso è in tali condizioni il regime convettivo bidimensionale esposto da Bolgiano e Obukhov nel 1959. Ho quindi studiato la dipendenza delle proprietà lagrangiane dalle strutture tipiche del flusso e in particolare dai notevoli sbalzi energetici tipici della convezione verticale.

A un secondo stadio (§ 5.1) — ed è questa la novità più rilevante introdotta in questo lavoro di tesi — ho permesso la retroazione locale su s da parte delle traiettorie e dell'evoluzione dei raggi delle goccioline. $1/\tau_s$ diventa in tal modo un campo locale proporzionale punto per punto alla somma dei raggi delle gocce circostanti. Fisicamente ciò significa che si ha assorbimento di vapore ($-s/\tau_s$) solo laddove siano effettivamente presenti goccioline sulle quali esso condensa e in misura tanto maggiore quanto più crescono le gocce. Questo effetto potrebbe, per esempio, ridurre l'ampliamento dello spettro, sottraendo vapore all'ambiente soprassaturo.

A un terzo stadio (§ 5.2), infine, oltre alla retroazione lagrangiana sul campo euleriano s , ho anche considerato il continuo ingresso nel sistema di nuove particelle appena nucleate su nuclei di condensazione risucchiati dall'esterno dalla nuvola. Nelle simulazioni, quindi, anziché immettere un numero prefissato di

gocce all'inizio, ho anche considerato la rinascita delle gocce che avviene durante l'evoluzione, stimando che mediamente per ogni goccia evaporata subentri una nuova goccia nucleata. Qui ho distinto due casi, a seconda che la rinascita avvenga in maniera casuale nel nucleo quasiadiabatico o invece solo nelle zone a soprassaturazione superiore all'un percento. Quest'ultimo caso rappresenta il massimo punto di sviluppo di questa tesi e la situazione più vicina alla realtà qui simulata.

La tesi è organizzata in cinque capitoli

- Nel primo capitolo è esposto il modello classico di formazione delle nuvole. In particolare è descritta nel dettaglio la fase di condensazione, con una attenzione speciale sul fenomeno del raffreddamento adiabatico, indispensabile per comprendere da dove nasca la convezione.
- Nel secondo capitolo sono introdotti elementi di turbolenza. Partendo da una disamina fenomenologica è presentata la teoria di scala di Kolmogorov e a seguire le teorie classiche di turbolenza scalare. La teoria di Bolgiano–Obukhov, che descrive la convezione termica, è approfondita più nel dettaglio.
- Nel terzo capitolo è esposto il modello convettivo turbolento di condensazione da me sviluppato. A seguire è esposto il modello utilizzato per le diverse simulazioni e quindi alcune peculiarità dell'integrazione numerica sul piano. Sono inoltre discusse le retroazioni euleriane e lagrangiane presenti nel modello.
- Nel quarto capitolo è presentata l'analisi numerica relativa alle simulazioni in cui l'evoluzione delle gocce non ha retroazione sul campo di soprassaturazione ($1/\tau_s$ costante). Ampio spazio viene dedicato all'analisi euleriana del regime di Bolgiano–Obukhov.
- Nel quinto capitolo è presentata l'analisi numerica relativa alle simulazioni in cui, invece, l'evoluzione delle gocce è localmente retroattiva sul campo di soprassaturazione attraverso l'assorbimento di vapore ($1/\tau_s$ campo locale). Nella prima parte è analizzata l'evoluzione senza rinascita delle gocce, mentre nella seconda si considera anche questo effetto.

Capitolo 1

Microfisica delle nuvole

In questo capitolo è presentato il modello classico di microfisica delle nuvole *calde*, ovvero di quelle nubi la cui temperatura è compresa fra 0 e 20 °C. Tale modello costituisce il punto di partenza per il lavoro sviluppato in questa tesi.

Classicamente si concentra l'attenzione su una porzione di spazio, detta *volume fluido*, di scala molto maggiore delle dimensioni delle goccioline, ma molto più piccola dell'intera nuvola. All'interno del volume fluido il campo di soprassaturazione è assunto spazialmente uniforme: se ne considera cioè esclusivamente l'evoluzione temporale. Il volume fluido raggiunge tipicamente le dimensioni del litro e in una nuvola sviluppata contiene circa centomila goccioline, che nel modello classico sperimentano lo stesso valore di soprassaturazione dipendente dal tempo. Il loro raggio dipende da tale valore ed evolve quindi in maniera identica per tutte le goccioline contenute nel volume fluido. Il modello classico prevede un'evoluzione dello spettro delle dimensioni delle goccioline tendente al restringimento attorno al valor medio, mentre le osservazioni sperimentali indicano al contrario un ampliamento di tale spettro.

Generalizzazioni successive di questo modello considerano la possibilità di una continua immissione dall'ambiente esterno nella nuvola di nuove particelle solide attorno alle quali è favorita la formazione di nuove goccioline ([25]). Tale fenomeno di risucchio, denominato *entrainment*, produce un allargamento dello spettro che giustifica solo le osservazioni sulle nuvole marittime, assumendo ipotesi non realistiche sullo spettro di dimensioni dei nuclei di condensazione inseriti.

Riteniamo che il fallimento del modello classico sia dovuto alla scarsa significatività del volume fluido come oggetto di indagine in presenza di turbolenza. Infatti due goccioline inizialmente appartenenti allo stesso volume fluido si separano molto rapidamente se trasportate da un campo di velocità turbolento e nell'intervallo di tempo caratteristico della condensazione si spostano su distanze dell'ordine della scala spaziale dell'intera nuvola. Una statistica sulle goccioline appartenenti a un singolo volume fluido risulta quindi non significativa, mentre

appare indispensabile una descrizione globale della nuvola, che sarà oggetto del capitolo 3.

La formazione delle gocce di pioggia avviene in tre fasi:

Nucleazione Dalla fase di vapore le molecole si aggregano a formare gocce molto piccole, il cui raggio dipende dall'umidità dell'ambiente in cui si formano.

Condensazione Le goccioline che si sono formate aumentano il loro raggio grazie alla condensazione di ulteriori molecole di vapor acqueo.

Coalescenza Le gocce iniziano a cadere, ognuna con velocità terminale differente, dipendente dalla sua dimensione. Il meccanismo di aggregazione in questa fase è l'urto tra le gocce.

Benché questo lavoro sia circoscritto alla fase di condensazione, riteniamo utile una descrizione dell'intero processo di formazione delle gocce di pioggia a partire dal campo di vapore acqueo. La trattazione seguirà parzialmente quella presentata in [31], a cui rimandiamo per ulteriori approfondimenti.

1.1 Nucleazione

Nel processo di *nucleazione* avviene la transizione del sistema da uno stato disordinato — il vapore acqueo — a uno stato maggiormente ordinato, rappresentato dalla presenza di gocce. In quella che viene chiamata nucleazione *omogenea* le molecole di vapore urtano casualmente le une contro le altre e danno luogo alla formazione di gocce d'acqua. Si distingue questo caso dalla nucleazione *eterogenea*, nella quale l'aggregazione delle molecole di vapore avviene sulla superficie di una particella solida estranea, chiamata genericamente *nucleo di condensazione* o *CCN*.

1.1.1 Nucleazione omogenea

Le gocce si formano solo se il bilancio energetico è favorevole. La formazione di una goccia di raggio R richiede un'energia di attivazione E_{sup} legata alla tensione superficiale e fornisce un'energia E_{vol} proporzionale al volume (data dall'aumento di energia libera di Gibbs che si verifica nel passaggio di fase):

$$\Delta E = E_{sup} - E_{vol} = 4\pi R^2 \sigma_{vl} - \frac{4}{3}\pi R^3 n_l (\mu_v - \mu_l) \quad (1.1)$$

dove σ_{vl} è il lavoro richiesto dalla formazione di un'unità di superficie di interfaccia, μ_v e μ_l i potenziali chimici¹ rispettivamente del vapore e dell'acqua liquida e n_l la densità numerica di molecole d'acqua per unità di volume all'interno della goccia.

Si può dimostrare che sussiste la relazione

$$\mu_v - \mu_l = k_B T \log \frac{e}{e_s} \quad (1.2)$$

con k_B costante di Boltzmann, e ed e_s rispettivamente tensione di vapore e di vapore saturo e T temperatura assoluta. Dalle (1.1) e (1.2) segue che l'andamento di ΔE in funzione del raggio R dipende in modo cruciale dalla pressione di vapore. Infatti l'energia di volume nell'equazione (1.1) risulta negativa, nulla o positiva a seconda che l'ambiente sia sottosaturato, saturo o soprassaturo ($E_{vol} \lesseqgtr 0$ per $e \lesseqgtr e_s$). Come schematizzato in figura 1.1 solo in quest'ultimo caso la funzione $\Delta E(R)$ presenta un estremo relativo in R_c , detto *raggio critico*.

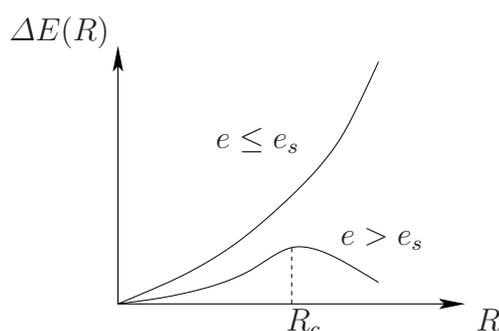


Figura 1.1: Schema dell'andamento dell'energia di una gocciolina in fase di nucleazione in funzione del raggio nei due casi $e \leq e_s$ ed $e > e_s$. Si noti che l'aumento del raggio corrisponde a una diminuzione di energia solo in un ambiente soprassaturo per goccioline che superano il raggio critico R_c .

Il processo di nucleazione è casuale e genera gocce caratterizzate da raggi R distribuiti secondo uno certo spettro. Per $R < R_c$ la funzione $\Delta E(R)$ è crescente; pertanto il processo di evaporazione, che porta alla diminuzione del raggio delle gocce, è energeticamente favorito e la goccia appena formata evapora fino a scomparire. Sopravvivono solo le gocce che al momento della formazione in un ambiente soprassaturo hanno raggio $R > R_c$: per esse la funzione $\Delta E(R)$ è decrescente e quindi è favorito energeticamente l'aumento del raggio per condensazione. Le goccioline che sopravvivono si dicono *attivate*.

¹Ricordiamo che il potenziale chimico è equivalente all'energia libera di Gibbs (o *entalpia libera*) molare.

Derivando la (1.1) si ricava il valore di R_c :

$$\frac{\partial}{\partial R} \Delta E = 0 \iff R_c = \frac{2\sigma_{vl}}{n_l k_B T \log \frac{e}{e_s}} \quad (1.3)$$

Il raggio critico dipende, quindi, dalla soprassaturazione $s = e/e_s - 1$. Come preannunciato, R_c assume un valore positivo solo nel caso in cui l'ambiente sia soprassaturo ($e/e_s > 1$, ovvero $s > 0$). In caso, invece, di ambiente sottosaturo o saturo ($e/e_s \leq 1$, ovvero $s \leq 0$), si ottengono valori negativi o infiniti, a testimonianza di come in queste condizioni non sia mai favorita la crescita delle goccioline.

Occorre però osservare che in una nuvola sviluppata la densità di goccioline attivate è superiore all'ordine delle diecimila per volume fluido! Affinché tale valore sia conseguente al processo di nucleazione omogenea è necessario che l'ambiente sia caratterizzato da una soprassaturazione di almeno il trecento per cento. In atmosfera, al contrario, s supera raramente l'un per cento. Possiamo perciò concludere che la nucleazione omogenea gioca un ruolo trascurabile all'interno delle nuvole.

1.1.2 Nucleazione eterogenea

In natura è presente un meccanismo di aggregazione più efficace di quello descritto; si tratta della nucleazione eterogenea. Essa avviene in presenza di particelle estranee (i nuclei di condensazione) che agiscono come catalizzatori. Le molecole di vapore che si depositano sulla superficie di questi nuclei condensano rapidamente e formano uno strato d'acqua in fase liquida, come schematizzato in figura 1.2.

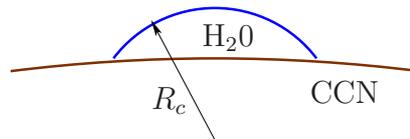


Figura 1.2: Nucleazione eterogenea: le molecole di vapore condensano sulla superficie di una particella solida estranea e formano uno strato d'acqua di forma curva.

Per descrivere questo tipo di nucleazione si possono sfruttare i concetti introdotti per la nucleazione omogenea, con la differenza che il raggio critico assume qui il significato più generale di raggio critico di curvatura. L'efficacia della nucleazione eterogenea è ulteriormente accentuata dalla geometria dello strato

d'acqua che si forma sulla superficie del nucleo di condensazione: N molecole che condensano attorno a un nucleo, come in figura 1.2, danno luogo a un raggio di curvatura maggiore del raggio della sfera formata dalle stesse N molecole. Ciò significa che la goccia embrionale, se eterogenea, ha più probabilità di superare il raggio critico di curvatura e quindi di sopravvivere.

Quando le molecole d'acqua circondano l'intero nucleo di condensazione si ha la formazione di una goccia contenente al proprio interno il nucleo stesso. Per questo motivo la formazione di gocce sufficientemente grandi è strettamente legata alla dimensione dei nuclei.

In natura sono presenti nuclei di condensazione solubili e non solubili. La solubilità del nucleo aumenta ulteriormente l'efficacia del processo. In altre parole l'attivazione delle goccioline è massimamente favorita in presenza di nuclei di condensazione grandi e solubili. Alla fine di questa prima fase lo spettro dei raggi delle gocce è fortemente influenzato dalle caratteristiche dei nuclei di condensazione presenti.

1.2 Condensazione ed evaporazione

Consideriamo la popolazione di gocce generata dal processo di nucleazione con raggio eccedente quello critico R_c . La fase successiva vede l'aumento delle dimensioni di queste gocce causato dalla *condensazione*. Il meccanismo opposto, l'*evaporazione*, provoca la diminuzione del raggio delle gocce.

La condensazione avviene in corrispondenza di un flusso di molecole di vapore che investe la goccia, mentre il flusso di molecole dalla goccia verso l'ambiente esterno provoca l'evaporazione.

Classicamente si considera lo stato di condensazione dell'intera goccia come se fosse all'equilibrio termodinamico; sono cioè considerate costanti le quantità termodinamiche microscopiche associate alla gocciolina. Tale approssimazione (detta *quasistatica*) è pienamente giustificata in condizioni atmosferiche tipiche in quanto il tempo impiegato per raggiungere l'equilibrio termodinamico locale risulta molto minore dei tempi associati alla crescita per condensazione. L'introduzione della turbolenza non pregiudica la validità dell'approssimazione quasistatica dello stato di condensazione, in quanto i tempi impiegati dalla gocciolina per raggiungere l'equilibrio termodinamico risultano comunque molto più piccoli della scala temporale minima associata alle fluttuazioni turbolente (per una discussione dettagliata si veda [39]). L'equazione classica di condensazione sarà quindi considerata valida anche nell'ambito del modello turbolento introdotto nel capitolo 3.

1.2.1 Raffreddamento dell'aria umida

Per comprendere quali siano le equazioni che governano questa fase della crescita delle gocce occorre inquadrare precisamente il problema nel contesto atmosferico. Infatti in ambienti diversi si vengono a formare tipologie di nuvola differenti. In questo lavoro siamo interessati allo studio di una nuvola calda, ovvero priva di fenomeni di brinamento e congelamento e quindi di particelle ghiacciate, e *cumuliforme*, cioè a sviluppo verticale e di altezza che può raggiungere anche qualche chilometro. In particolare l'analisi si concentrerà sul cosiddetto *nucleo quasiadiabatico* della nube, ovvero in quella parte al centro della nube ove i fenomeni di bordo sono trascurabili e le trasformazioni sono approssimativamente adiabatiche.

Termodinamica dell'aria umida

L'ambiente in cui si forma la nuvola, trascurando per il momento i nuclei di condensazione, è inizialmente costituito da aria umida, ovvero da un sistema omogeneo di aria e di una piccola quantità di vapore acqueo (solitamente il *rapporto di mescolanza* tra le densità dell'aria secca e del vapore² è dell'ordine del per cento: $r_v = \rho_v/\rho_a \sim 1\%$). Sia le due frazioni sia il sistema si comportano in ottima approssimazione (superiore al permille) come un gas perfetto, secondo quindi la relativa equazione di stato

$$e = \rho_v R_v T \quad (1.4a)$$

$$p_a = \rho_a R_a T \quad (1.4b)$$

per le pressioni parziali, tradizionalmente denominate *tensioni*, e

$$p = \rho R_u T \quad (1.4c)$$

per quella totale. $R_X = \mathcal{R}/M_X$ è la costante universale dei gas \mathcal{R} specifica per la specie X di massa molecolare M_X . Stante un rapporto tra tensioni parziali e tra densità dell'ordine del per cento, una volta utilizzata la (1.4c) per i calcoli espliciti, per i valori finali da inserire nelle equazioni saranno spesso approssimativamente validi quelli ricavati dalla (1.4b).

Poiché la densità dell'aria è circa costante (si veda l'appendice A), la (1.4b) mostra la *stratificazione* dell'aria: al salire di quota la pressione atmosferica decresce (circa del dieci per cento a chilometro) e con essa quindi anche la temperatura. In atmosfera, perciò, esiste un gradiente termico medio verticale e negativo di modulo

$$\Gamma_g := -\partial_z T \quad (1.5)$$

²Nella notazione adottata il pedice a indica l'aria secca, u l'aria umida, v il vapore acqueo, l l'acqua liquida, h l'acqua come composto chimico e s la condizione di saturazione

Nel momento in cui le prime goccioline sono nucleate, l'acqua è presente nel sistema in due fasi, aeriforme e liquida. All'equilibrio la pressione parziale, ovvero la *tensione di vapor saturo*, segue l'equazione di Clausius–Clapeyron, che per la condensazione-evaporazione può essere approssimativamente espressa mediante la derivata logaritmica come

$$\frac{d}{dT} \log e_s \simeq \frac{L_e}{R_v T^2} \quad (1.6)$$

dove L_e è il calore latente specifico di evaporazione per l'acqua pura. Di qui si vede la forte dipendenza dalla temperatura di e_s , che risulta strettamente crescente in T proporzionalmente a $e^{-L_e/R_v T}$.

Raffreddamento adiabatico dell'aria

In tale contesto qual è, però, il meccanismo che attiva la condensazione del vapore sulle gocce? L'aria umida, infatti, inizialmente sottosatura, diventa sempre più satura fino a raggiungere la soprassaturazione — dando vita al processo di formazione ed evoluzione delle goccioline — senza nel frattempo aver ricevuto nuovo vapore dall'esterno.

Vediamo schematicamente quel che accade: essendo meno densa, l'aria calda presente a bassa quota per effetto della stratificazione tende a salire in virtù della forza di Archimede; l'aria ascendente si espande adiabaticamente, raffreddandosi vieppiù; di conseguenza la tensione di vapor saturo subirà un forte decremento, regolato dalla (1.6); in questo modo e_s avvicina sempre di più e , sinché quest'ultimo non diviene maggiore e l'aria è infine soprassatura ($e/e_s > 1$). Cerchiamo allora di valutare quantitativamente questo fenomeno.

Un volume di aria secca ascendente, nonostante possa ricevere calore dall'esterno per mezzo della radiazione, dell'attrito, dei mescolamenti ambientali, vede decrescere la propria temperatura per l'effetto prevalente dell'espansione. Perciò si può assumere il processo come adiabatico reversibile (isentropico). Usando le proprietà di isentropia ($c_{p_a} dT = dp/\rho_a$) e di equilibrio idrodinamico ($\frac{d}{dz} p_a = -g\rho_a$) e l'equazione di stato (1.4b) si può ricavare il *tasso verticale di raffreddamento adiabatico secco*

$$\Gamma_a := - \left(\frac{d}{dz} T \right)_a \simeq \frac{g}{c_{p_a}} \quad (1.7)$$

dove c_{p_a} è il calore specifico a pressione costante dell'aria secca e g l'accelerazione di gravità. L'aria secca, dunque, si raffredda di circa dieci gradi al chilometro.

Analogamente, nel caso sia presente umidità, fin quando l'aria non diventa satura, essa si raffredda isentropicamente a un *tasso verticale di raffreddamento adiabatico umido* che in condizioni atmosferiche tipiche vale $\Gamma_u \approx \Gamma_a$.

Raggiunta la saturazione, nel volume fluido ascendente inizia un processo di condensazione del vapore presente; si libera, dunque, del calore latente e, se le gocce formatesi iniziano ad abbandonare il volume, la trasformazione non risulta più isentropica. Tuttavia, sotto approssimazioni differenti che portano a un risultato analogo, si può ancora ricavare un *tasso verticale di raffreddamento saturo*

$$\Gamma_s := - \left(\frac{d}{dz} T \right)_s = \frac{g}{c_{p_a} + L_e \frac{d}{dT} r_{vs}} \quad (1.8)$$

che vale poco meno del sessanta per cento di quello secco. La presenza di *entrainment* comporta un addendo aggiuntivo a numeratore, dipendente però da nuove variabili. Nel proseguio trascureremo sempre questo apporto, che nel nucleo della nube è meno influente che sui bordi.

Dinamica di una nuvola cumuliforme

Abbiamo ora gli strumenti per poter presentare le leggi che descrivono le proprietà classiche di un volume fluido ascendente in una nuvola a sviluppo verticale. Poiché $\frac{d}{dt} = w \frac{d}{dz}$ (con $w = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}}$ velocità verticale), la legge di evoluzione della temperatura, che fornisce il *tasso temporale di raffreddamento*, è data semplicemente dalla (1.8)

$$\frac{d}{dt} T = - \frac{g}{c_{p_a}} w - \frac{L_e}{c_{p_a}} \frac{d}{dt} r_v = -\Gamma_a w - \frac{L_e}{c_{p_a}} \frac{d}{dt} r_v \quad (1.9a)$$

in cui abbiamo sostituito r_{vs} con r_v per tenere conto della debole soprassaturazione presente dopo il processo di raffreddamento. Per quel che riguarda la soprassaturazione notiamo che usando le (1.4) si ha

$$r_v = \frac{R_a}{R_v} \frac{e}{p - e} \simeq \frac{e}{e_s} \frac{R_a}{R_v} \frac{e_s}{p} = (1 + s) \left(\frac{R_a}{R_v} \frac{e_s}{p} \right)$$

Derivando questa espressione, usando l'equazione di Clausius–Clapeyron (1.6) e assumendo l'ambiente in equilibrio idrostatico ($\frac{d}{dt} p \simeq -gpw/R_a T$) si ricava

$$\frac{d}{dt} s \simeq \frac{R_v p}{R_a e_s} \frac{d}{dt} r_v - (1 + s) \left(\frac{L_e}{R_v T^2} \frac{d}{dt} T + \frac{g}{R_a T} w \right)$$

Sostituiamo poi la (1.9a) in quest'ultima equazione e approssimiamo $1 + s \simeq 1$, legittimati da una soprassaturazione dell'ordine dell'un per cento all'interno della nuvola; allora otteniamo in definitiva

$$\frac{d}{dt} s \simeq - \left(\frac{gL_e}{c_{p_a} R_v T^2} - \frac{g}{R_a T} \right) w + \left(\frac{R_v p}{R_a e_s} - \frac{L_e^2}{c_{p_a} R_v T^2} \right) \frac{d}{dt} r_v = A_1 w + \rho A_2 \frac{d}{dt} r_v \quad (1.9b)$$

dove A_1 (*tasso verticale di saturazione*) e A_2 (*coefficiente di assorbimento*) possono essere ritenute costanti all'interno del volume fluido e — per sbalzi termici limitati nel caso di A_2 — anche durante la sua evoluzione, avendo variazioni per grado di alcuni permille e del quattro per cento rispettivamente (app. A).

Infine, se l'*entrainment* è trascurabile, la conservazione della massa dell'acqua nel passaggio di fase dà in maniera ovvia

$$\frac{d}{dt}r_v = -\frac{d}{dt}r_l \quad (1.10)$$

1.2.2 Leggi di diffusione

Analizziamo ora quel che accade a livello molecolare. L'ambiente è caratterizzato da un duplice processo diffusivo che coinvolge per un verso il vapore, per l'altro il calore. Entrambi i fenomeni svolgono un ruolo determinante quando il flusso diffusivo investe l'interfaccia delle gocce nucleate, provocando la condensazione del vapore sulla goccia e la contestuale liberazione di calore latente (o, viceversa, l'evaporazione e l'assorbimento di calore).

Diffusione del vapore

Se $\mathbf{j}_v = \rho_v \mathbf{v} - D_v \boldsymbol{\partial} \rho_v$ è il *flusso di vapore* per l'aria umida in moto a velocità \mathbf{v} e D_v la *diffusività di vapore*, l'equazione di continuità ($\partial_t \rho_v + \boldsymbol{\partial} \cdot \mathbf{j}_v = 0$) e l'incompressibilità del flusso ($\boldsymbol{\partial} \cdot \mathbf{v} = 0$) sanciscono una dinamica per il campo di vapore $\rho_v(\mathbf{x}, t)$ regolata dall'equazione di diffusione convettiva

$$\partial_t \rho_v + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} \rho_v = D_v \partial^2 \rho_v \quad (1.11)$$

La (1.11) può essere risolta esplicitamente sotto le tre ipotesi semplificative di sfericità delle gocce, stazionarietà dello stato diffusivo e simmetria sferica rispetto al centro della goccia per il campo di vapore; tali ipotesi sono tanto più valide quanto più piccole sono le goccioline. Poiché inizialmente siamo interessati a valutare l'effetto di crescita della goccia per via unicamente diffusiva, consideriamo per ora il caso di una goccia immobile: il campo di vapore $\rho_v(r)$ risulta, allora, armonico in virtù della (1.11), che diviene una semplice equazione di Laplace con condizioni al contorno ρ_{v_∞} all'infinito (ovvero, in pratica, ρ_v del volume fluido) e ρ_{v_R} sulla superficie della gocciolina. Si ha, quindi, la soluzione

$$\rho_v(r) = \rho_{v_\infty} - \frac{R}{r}(\rho_{v_\infty} - \rho_{v_R}) \quad (1.12)$$

La diffusione di vapore sulla superficie S della gocciolina ne provoca una variazione della massa (e quindi del raggio) a un ritmo dato dal flusso di \mathbf{j}_v

$$\left(\frac{d}{dt} M \right)_0 = - \int_S \mathbf{j}_v \cdot d\hat{\mathbf{S}} = \int_S D_v (\partial_r \rho_v)_R dS = 4\pi D_v R (\rho_{v_\infty} - \rho_{v_R}) \quad (1.13)$$

dove il pedice 0 indica che stiamo trattando il caso immoto. Supponendo che il raggio della gocciolina sia abbastanza grande da poter trascurare gli effetti di curvatura sulla tensione di vapore, si può utilizzare l'equazione di stato (1.4a) e ricavare infine che le gocce crescono a un tasso

$$\left(\frac{d}{dt}M\right)_0 = \frac{4\pi D_v}{R_v} R \left(\frac{e_\infty}{T_\infty} - \frac{e_R}{T_R}\right) \quad (1.14)$$

In realtà, oltre alle tre ipotesi formulate, abbiamo anche utilizzato un modello continuo; ma, quando le particelle sono molto piccole, ossia di dimensioni comparabili a quelle del libero cammino medio λ_v delle molecole di vapore, tale modello diviene inservibile e all'interno di una cortecchia sferica di spessore λ_v intorno alla goccia occorre utilizzare la teoria cinetica dei gas. Tuttavia questa e altre correzioni dovute alle approssimazioni operate non cambiano il quadro ricavato. Pertanto la (1.14) rimane valida a patto di sostituire a D_v una diffusività efficace D'_v . Tale correzione è tanto più importante quanto più piccole sono le gocce. In particolare per le goccioline submicrometriche $D'_v \sim 10^{-(p+1)} D_v$ per raggi $R \sim 10^{-p} \mu\text{m}$ e $p \in \mathbb{N}$. Ai raggi tipici della condensazione ($5 \mu\text{m} \leq R \leq 20 \mu\text{m}$) la correzione va comunque ancora tenuta in conto.

Diffusione del calore

In maniera del tutto analoga, le differenze di temperatura presenti nell'ambiente producono una conduzione di calore attraverso l'aria, che dalla legge di Fourier è quantificata mediante il *flusso di calore* $\mathbf{j}_q = k_u \boldsymbol{\partial} T$, in cui k_u è la conduttività termica dell'aria umida. Il volumetto δV scambia nel tempo dt una quantità di calore $dQ = -\boldsymbol{\partial} \cdot \mathbf{j}_q \delta V dt$ coll'ambiente circostante. Essendo l'aria calda o fredda libera di espandersi o contrarsi in prossimità della goccia, possiamo ritenere che tale scambio avvenga a pressione costante ($dH = dQ$, con $H = h\rho\delta V$ entalpia e $h = c_p dT$ entalpia specifica); utilizziamo, inoltre, la conservazione della massa ($d(\rho\delta V) = 0$) e ricordiamo che la *derivata lagrangiana* vale $\frac{d}{dt} = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial}$; otteniamo, allora, per il campo di temperatura un'equazione di diffusione convettiva del tutto analoga a quella per la densità di vapore (1.11)

$$\partial_t T + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} T = \varkappa_u \partial^2 T \quad (1.15)$$

in cui $\varkappa_u = k_u/c_p\rho$ è la *diffusività termica* dell'aria umida. Si sono ignorati gli effetti di attrito e di radiazione poiché effettivamente trascurabili in questo contesto. Rileviamo, poi, che, essendo $\varkappa_u \approx D_v$, i tempi tipici di diffusione risultano dello stesso ordine e quindi l'approssimazione quasistatica ancora valida. Nel proseguio impiegheremo sempre k_a e \varkappa_a in luogo dei corrispettivi umidi, in quanto il valore osservato è approssimativamente uguale.

Stante l'analogia tra le equazioni (1.11) e (1.15) e la identica simmetria del problema, la soluzione sarà ancora del tipo (1.12), sostituendo T a ρ_v .

Di conseguenza sarà del tutto analoga anche l'espressione per il flusso di \mathbf{j}_q , che esprime il tasso di trasferimento di calore dall'ambiente a una gocciolina ferma:

$$\left(\frac{d}{dt}Q\right)_0 = - \int_S \mathbf{j}_q \cdot d\hat{\mathbf{S}} = 4\pi k_a R (T_\infty - T_R) \quad (1.16)$$

Nuovamente il risultato rimane valido anche considerando gli effetti discreti, purché si corregga questa relazione impiegando la conduttività termica efficace k'_a .

1.2.3 Crescita diffusiva delle gocce

Crescita di una goccia stazionaria

Abbiamo dunque visto come la diffusione di vapore sulla superficie di una goccia ne provochi un aumento della massa per condensazione fornito dalla (1.14). Poiché

$$\frac{d}{dt}M = 4\pi\rho_h R^2 \frac{d}{dt}R \quad (1.17)$$

questo aumento corrisponde a una crescita diffusiva del raggio a un ritmo

$$R \frac{d}{dt}R = \frac{D'_v}{R_v} \left(\frac{e_\infty}{T_\infty} - \frac{e_R}{T_R} \right) \quad (1.18)$$

In codesto processo la goccia libera calore verso l'esterno. Se immaginiamo che la conduzione di tale calore avvenga istantaneamente, il bilancio energetico del processo assicura che il calore emesso per condensazione eguaglia quello assorbito per diffusione

$$\left(\frac{d}{dt}Q\right)_0 = -L_e \left(\frac{d}{dt}M\right)_0 \quad (1.19)$$

Non siamo però ancora in grado di stabilire come esattamente cresca il raggio nel tempo, dal momento che il sistema di equazioni non è ancora chiuso. Infatti nella (1.18) compaiono le due ulteriori incognite T_R ed e_R ; occorre dunque trovare delle relazioni che permettano di esprimerle in funzione delle altre variabili del sistema. Queste relazioni sono garantite dal bilancio energetico per la temperatura e dall'equazione di Clausius–Clapeyron per la tensione.

Sostituendo, infatti, la (1.16) nella (1.19) e usando la (1.17), si trova che la temperatura sulla superficie della goccia vale

$$T_R = T_\infty + \frac{\rho_h L_e}{k'_a} R \frac{d}{dt}R = T_\infty (1 + \delta_T) \quad (1.20)$$

in cui, nelle condizioni tipiche di crescita di una goccia, $\delta_T \leq 10^{-5}$; un numero così piccolo indica con quanta efficacia sia dissipato dalla conduzione il calore rilasciato dalla condensazione.

Supponendo, inoltre, che l'ambiente sia in condizioni di saturazione — com'è ragionevole fare, visto che i valori atmosferici tipici della soprassaturazione sono dell'ordine dell'un per cento — è possibile utilizzare l'equazione di Clausius–Clapeyron (1.6). In tal caso la tensione diviene funzione della sola temperatura ed $e_{sR} = e_s(T_R)$:

$$e_s(T_R) = e_s(T_\infty) e^{\frac{L_e}{R_v} \left(\frac{1}{T_\infty} - \frac{1}{T_R} \right)} \quad (1.21)$$

Possiamo infine sostituire la (1.20) e la (1.21) nell'equazione di evoluzione del raggio della gocciolina (1.18), ottenendo

$$R \frac{d}{dt} R = \frac{D'_v}{\rho'_h R_v} \frac{e_s(T_\infty)}{T_\infty} \left(1 + s_\infty - \frac{1}{1 + \delta_T} e^{\frac{L_e}{R_v} \frac{1}{T_\infty} \left(\frac{\delta_T}{1 + \delta_T} \right) + c + d} \right) \quad (1.22)$$

dove ρ'_h è la densità della soluzione acquosa costituente la goccia e c e d sono le correzioni dovute alla curvatura e alla salinità della goccia, invero significative solo per gocce submicrometriche. Tenendo conto di ciò ($e^{c+d} \simeq 1 + c + d$) e ricordando che $\delta_T \ll 1$ ($(1 + \delta)^{-1} \simeq 1$ ed $e^{\alpha \delta_T} \simeq 1 + \alpha \delta_T$), possiamo semplificare questa equazione ricavando

$$R \frac{d}{dt} R \simeq \frac{s_\infty - c - d}{\frac{\rho'_h R_v T_\infty}{D'_v e_s(T_\infty)} + \frac{L_e \rho'_h}{k'_a T_\infty} \left(\frac{L_e}{R_v T_\infty} - 1 \right)} = A_3 (s_\infty - c - d) \quad (1.23)$$

dove il *tasso di crescita per condensazione* A_3 può essere considerato una costante in maniera simile a quella vista per A_2 a pagina 20. Il raggio iniziale dipende dalla salinità della goccia, che risulta tanto più piccola quanto più diluita e meno salata. In breve tempo, tuttavia, le gocce più piccole tendono a raggiungere la stessa taglia di quelle più grandi, giacché $c + d$ tende a zero al crescere del raggio. Superato un breve lasso temporale iniziale, pertanto, la popolazione di gocce, al di là della propria salinità, evolve secondo la stessa legge.

Crescita di gocce non inerziali in nuvole cumuliformi

Abbiamo dunque risolto il problema della crescita del raggio di una singola gocciolina ferma in un ambiente con soprassaturazione s_∞ debolmente positiva e temperatura T_∞ . L'infinito, infatti, rispetto alla gocciolina microscopica, è ben rappresentato dal macroscopico volume fluido, all'interno del quale — ricordiamo — classicamente le variabili termodinamiche sono considerate uniformi. A dire il vero, però, il nostro problema era quello di studiare la fase di condensazione nel nucleo quasiadiabatico di una nuvola cumuliforme. Occorre dunque considerare

N goccioline che evolvono secondo la (1.23), dove però temperatura e soprassaturazione non sono più assegnate quali condizioni al contorno, ma evolvono in base alle equazioni della dinamica.

Poiché siamo ancora nella fase di condensazione e le goccioline hanno raggi inferiori ai venti micrometri, possono tranquillamente essere considerate particelle fluide (o traccianti), poiché l'effetto della massa diventa rilevante solo nella fase successiva e soprattutto per raggi superiori ai cinquanta micrometri. Le gocce sono pertanto trasportate dal flusso e nel modello classico sono considerate sempre contenute nel volume fluido ascendente. Quest'ultimo, nella nuvola sotto esame, si espande adiabaticamente salendo e di conseguenza si raffredda e si satura viepiù, come abbiamo visto nel paragrafo 1.2.1. Questo processo è descritto dalle equazioni (1.9), che chiudono il problema classico della crescita delle gocce in un volume fluido ascendente.

Esplicitiamo, allora, il sistema di equazioni che governa questa crescita. Siccome nelle (1.9) compare la derivata $\frac{d}{dt}r_v$, cerchiamo di esprimerla in funzione delle quantità note del sistema. Utilizzando la conservazione della massa d'acqua (1.10), ricordando che per definizione $\rho_l = r_l\rho$, tenendo conto che nella fase sotto esame i raggi son già sufficientemente grandi per poter trascurare nella (1.23) le correzioni dovute a curvatura e salinità, si ha

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}r_v &= \frac{d}{dt}r_l = \frac{1}{\rho} \left(\frac{d}{dt}\rho_l - r_l \frac{d}{dt}\rho \right) \simeq \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}\rho_l \simeq \frac{1}{M_a} \frac{d}{dt}M_l \\ &= \frac{4\pi\rho_h}{3M_a} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt}R_i^3 = \frac{4\pi\rho_h}{M_a} \sum_{i=1}^N (R_i)A_3s = \frac{4\pi\rho_h n \bar{R}}{\rho_a} A_3s = A_4A_3s \end{aligned} \quad (1.24)$$

dove M_a è la massa del volume fluido secco, M_l la massa d'acqua presente nel volume, n la densità numerica di gocce e \bar{R} il loro raggio medio (A_4 , *coefficiente di retroazione lagrangiana*, cresce con esso e, quindi, non è una costante durante la condensazione).

Le gocce non inerziali presenti nel volume fluido ascendente adiabaticamente con velocità w in una nuvola cumuliforme evolvono pertanto secondo il sistema

$$\frac{d}{dt}T = -\Gamma_a w + \frac{L_e A_3 A_4}{c_{p_a}} s = -\Gamma_a w + R_s s \quad (1.25a)$$

$$\frac{d}{dt}s = A_1 w - \rho_a A_2 A_3 A_4 s = A_1 w - \frac{1}{\tau_s} s \quad (1.25b)$$

$$\frac{d}{dt}R_i^2 = 2A_3 s \quad (1.25c)$$

dove abbiamo riscritto i coefficienti dei termini nella soprassaturazione usando il *tasso di riscaldamento per condensazione* R_s e il *tempo di assorbimento della soprassaturazione* τ_s .

Nel modello classico queste grandezze sono considerate costanti. Oggetto del mio lavoro di tesi sarà, tra l'altro, proprio la rimozione di tale approssimazione e l'introduzione, in particolare, del campo $1/\tau_s$ localmente proporzionale alla somma dei raggi (contenuta in A_4), come vedremo soprattutto nei capitoli 3 e 5. In tal modo l'evoluzione delle gocce influenzerà la dinamica delle variabili termodinamiche. Del resto è proprio questo il significato dei termini in s nelle (1.25): in un ambiente soprassaturato le gocce accrescono il proprio raggio ($A_3 s$) assorbendo vapore ($-s/\tau_s$) e liberando contestualmente calore ($R_s s$). Considerare costanti questi coefficienti significa considerare tale fenomeno come efficace, ovvero come un effetto medio dovuto a tutte le gocce presenti, che nel contesto classico, ovvero nel volume fluido, è una buona approssimazione. Piuttosto, come vedremo a breve, è il volume fluido ad essere un oggetto errato di studio.

Evidente, infine, è il ruolo svolto dai termini in w : la corrente ascensionale d'aria trasporta in alto il volume fluido, che si raffredda adiabaticamente ($-\Gamma_a w$) diventando, quindi, sempre più soprassaturato ($A_1 w$).

Con quale intensità avvengono questi fenomeni? Diamo alcuni riferimenti numerici per meglio orientarsi nella dinamica di condensazione classica. Nelle nuvole cumuliformi è osservata una velocità verticale media intorno al valore³ $w_m = 1 \text{ m s}^{-1}$ e una soprassaturazione tipicamente pari a $s_m = 1\%$. Per una temperatura $T_m = 2 \text{ }^\circ\text{C}$ e una concentrazione bassa di gocce $n_m = 30000 \text{ dm}^{-3}$, per i vari coefficienti si ricavano i valori: $\Gamma_a \simeq 9.8 \text{ K km}^{-1}$, $R_s \simeq 0.7 \text{ K s}^{-1}$, $A_1 \simeq 0.6 \text{ km}^{-1}$, $\tau_s \simeq 10 \text{ s}$, $A_3 \simeq 72 \text{ } \mu\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$. Ciò significa che ogni dieci minuti il volume salendo si raffredda di circa sei gradi e per condensazione si riscalda di circa quattro gradi; nello stesso periodo, inoltre, salendo si satura del trenta per cento e assorbe vapore perdendo un sessanta per cento di soprassaturazione. I raggi, infine, nel frattempo crescono di circa trenta micrometri. Ci riferiamo ai dieci minuti perché in questo tempo il volume fluido percorre seicento metri, ovvero una distanza dell'ordine del nucleo della nuvola. In realtà qui abbiamo sovrastimato le quantità, in quanto la nuvola conosce anche zone sottosature e correnti discensive che attutiscono questi effetti. La fase di condensazione, che da questi dati sembrerebbe durare un tempo $\tau_{con} = t_{0_{coa}} - t_{0_{con}}$ intorno al tempo caratteristico del nucleo del cumulo τ_L , in realtà dura solitamente circa mezzora, ovvero qualche τ_L .

³Col pedice m indicheremo d'ora in avanti le quantità osservate come medie in atmosfera e prese a riferimento nel modello: in quello classico, quindi, le quantità medie del volume fluido, in quello turbolento quelle tipiche a metà nuvola

1.2.4 Spettro classico dei raggi

Evoluzione del raggio

Vogliamo ora concentrare l'attenzione sull'equazione di crescita dei raggi per condensazione (1.25c), in cui la funzione $s(t)$ è determinata dall'equazione evolutiva classica per la soprassaturazione (1.25b) e il fattore A_3 è considerato costante per tutte le gocce presenti nel volume fluido considerato. La soluzione della corrispondente equazione per il raggio quadro R^2 di una gocciolina contenuta in tale volume con condizione iniziale R_0^2 è

$$R^2(t) = R_0^2 + 2A_3 \int_0^t s(t') dt' \simeq R_0^2 + 2A_3 \bar{s} t \quad (1.26)$$

in cui il valore di soprassaturazione $s(t')$ è approssimato con il suo valor medio, sulla base di una stima delle fluttuazioni temporali di soprassaturazione ritrovabile in [31].

La densità di goccioline tipica di una nuvola sviluppata indica la presenza di un numero molto elevato di goccioline ($N \approx 10^5$) all'interno di ogni volume fluido considerato (le cui dimensioni sono tipicamente dell'ordine del litro). All'interno di questo volume è quindi possibile considerare la statistica al variare del tempo dei valori assunti dal raggio delle goccioline, che evolvono classicamente sperimentando tutte lo stesso valore di soprassaturazione funzione del tempo. Come vedremo nel capitolo 3, in presenza di turbolenza la statistica dei raggi assunti dalle goccioline all'interno di un volume fluido non è rappresentativa del comportamento delle goccioline nell'intera nuvola. Infatti goccioline appartenenti al volume fluido in considerazione si separano rapidamente trasportate dal flusso turbolento ed evolvono sperimentando i valori di soprassaturazione presenti in tutta la nuvola. Questo rende necessaria una descrizione del campo di soprassaturazione estesa all'intero cumulo sotto esame.

Evoluzione dello spettro dei raggi

Esaminiamo quindi la previsione statistica ottenuta classicamente mediante l'analisi di un singolo volume fluido nell'ipotesi in cui al suo interno la soprassaturazione sia uniforme. L'equazione (1.26) descrive il processo di condensazione che ha inizio con la fine del processo di nucleazione. Per questo motivo all'istante iniziale si ha una popolazione di particelle con una certa distribuzione di taglie che chiameremo $P_0(R_0^2)$. Nella trattazione non interessa la forma esplicita di tale distribuzione, che dipende dalle peculiarità dei nuclei di condensazione e dalle condizioni atmosferiche e risulta molto stretta attorno a un valor medio di qualche micrometro.

La soluzione (1.26) ha, quindi, come condizioni iniziali tutti i possibili valori assunti da R^2 , distribuiti secondo la $P_0(R_0^2)$, con valor medio R_0^2 e varianza σ_0^2 . Mediando la stessa (1.26) su tutte le particelle presenti nel volume fluido si ottiene

$$\langle R^2 \rangle(t) = \langle R^2 \rangle_0 + 2A_3 \bar{\sigma} t \quad (1.27a)$$

$$\sigma^2(t) = \sigma_0^2. \quad (1.27b)$$

L'evoluzione $P(R^2, t)$ della distribuzione iniziale è, perciò, una traslazione rigida della stessa con valor medio che cresce linearmente nel tempo e varianza costante:

$$P(R^2, t) = P(R_0^2 + 2A_3 \bar{\sigma} t) \equiv P_0(R^2 - 2A_3 \bar{\sigma} t)$$

Nell'evoluzione di $P(R^2, t)$ non è evidentemente previsto un allargamento dello spettro, in quanto la varianza della distribuzione è costante. La grandezza d'interesse, indicativa della dispersione di $P(R^2, t)$, non è però tanto la sua varianza $\sigma^2(t)$, quanto piuttosto la varianza normalizzata al valor medio della distribuzione

$$\frac{\langle R^4(t) \rangle - \langle R^2(t) \rangle^2}{\langle R^2(t) \rangle^2} \quad (1.28)$$

Tale rapporto tende a zero nel limite per t tendente a infinito. Possiamo concludere che l'incremento del valor medio della distribuzione non è accostato a un analogo aumento della varianza. Quando $\langle R^2 \rangle(t)$ è sufficientemente elevato, la dispersione iniziale diventa trascurabile e tutte le gocce appaiono circa della stessa dimensione $\langle R^2 \rangle(t)$. In questo senso la $P(R, t)$ perde memoria della distribuzione iniziale e tende a stringersi attorno al suo valor medio.

Osservazioni sperimentali

Le previsioni del modello classico della crescita per condensazione delle gocce confligge però nettamente colle osservazioni sperimentali degli spettri dei raggi. Sono tre i principali aspetti in cui fallisce tale modello.

Ampliamento dello spettro Superata la fase di nucleazione, si osserva sperimentalmente che la crescita del raggio medio è accompagnata da un allargamento dello spettro delle taglie, che prepara una popolazione di gocce con raggi molto diversi.

Bimodalità dello spettro Inoltre tale popolazione nel tempo tende a separarsi in due gruppi di diversa taglia: le gocce di raggio dell'ordine di quello iniziale e le gocce di raggio tendente a quello di attivazione della coalescenza. La $P(R, t)$, dunque, oltre ad avere una varianza crescente, evolve anche la propria forma da una distribuzione unimodale $P_0(R, 0)$ preparata dalla nucleazione a una bimodale.

Condensazione in ambiente sottosaturo In atmosfera è stata osservata la formazione di gocce di pioggia anche in ambienti sottosaturi, mentre dalla (1.27) risulta che il meccanismo di condensazione richiede la presenza di un ambiente globalmente soprassaturo. Infatti se l'ambiente fosse sottosaturo classicamente si andrebbe incontro a una progressiva evaporazione delle gocce e quindi a un decremento del raggio medio.

Questi tre aspetti sono peraltro strettamente legati, in quanto un ambiente in cui coesistano zone sottosature e soprassature potrebbe essere in grado di separare la popolazione di particelle e la distribuzione bimodale che si verrebbe a creare favorirebbe l'ampliamento spettrale. Non solo: sono anche tre aspetti cardinali nella formazione di una nuvola, poiché rendono efficace la successiva fase di coalescenza. Infatti, un modello che preveda l'ampliamento dello spettro, descrive la formazione di una popolazione di gocce costituita, alla fine della fase di condensazione, da gocce con raggi molto diversi. Poiché la probabilità di urto tra due gocce è proporzionale alla loro velocità relativa, la presenza di gocce con taglie, e quindi velocità terminali, molto diverse, aumenta l'efficacia degli urti.

È per questo che il tentativo di trovare un modello di condensazione che riesca a spiegare tutti questi aspetti risulta fondamentale per la comprensione dell'intero fenomeno di formazione delle nubi. Il mio studio si è pertanto concentrato sulla fase di condensazione, formulando un modello per un cumulo in convezione turbolenta (cap. 3). Successivamente ho messo alla prova questo modello turbolento con simulazioni numeriche al calcolatore (cap. 4–5).

1.3 Coalescenza

Le gocce in crescita per condensazione sono soggette alla forza gravitazionale e all'attrito dell'aria. Per le gocce più piccole ($R < 0.1$ mm) la forza d'attrito supera l'attrazione gravitazionale; perciò esse fluttuano in sospensione all'interno della nuvola. Con l'aumentare delle dimensioni la competizione fra le due forze si sbilancia a favore dell'attrazione gravitazionale e le gocce precipitano con una velocità terminale che dipende dalla loro dimensione.

In fase di caduta le gocce più grandi, che hanno velocità terminale maggiore, possono urtare contro gocce più lente che incontrano sulla loro traiettoria. Dopo l'urto è possibile che le due gocce proseguano separatamente il moto, ma con probabilità prossima all'unità si uniscono a formare una goccia di dimensioni maggiori. Il processo di urto tra gocce seguito dalla loro unione è chiamato *coalescenza*.

Esistono due diversi modi per descrivere il meccanismo di coalescenza. Il primo considera che l'acqua all'interno della nuvola sia distribuita uniformemente

e che, quindi, una goccia in fase di caduta incrementi la sua massa in modo continuo. Il secondo tiene conto della natura discreta delle gocce e tratta il fenomeno sotto un'ottica stocastica.

1.3.1 Modello continuo

Consideriamo una particella di massa M . Essa spazza il volume in cui è localizzata una particella di massa M' a un ritmo dato dal *nucleo di raccolta* (*collection kernel*), definito come

$$K(M, M') = E_{rac}(M, M')A_M|v(M) - v(M')| \quad (1.29)$$

in cui $v(M)$ e $v(M')$ sono le velocità della due particelle⁴ e A_M la sezione d'urto effettiva spazzata dalla particella (che, per gocce sferiche di raggi R e R' , vale $\pi(R + R')^2$). Il fattore E_{rac} rappresenta l'*efficienza di raccolta*, ovvero il prodotto dell'*efficienza di collisione* E_{col} e dell'*efficienza di coalescenza* E_{coa} . La prima, uguale al rapporto tra sezioni d'urto effettiva e geometrica, è determinata principalmente dal flusso relativo di aria intorno alla goccia. Infatti le particelle presenti lungo la traiettoria della goccia possono essere spinte dal flusso verso l'esterno e quindi evitare l'urto ($E_{col} < 1$). Al contrario il flusso d'aria può trasportare particelle dall'esterno sulla traiettoria della goccia in considerazione e quindi provocare l'urto ($E_{col} > 1$). Una volta avvenuto l'urto le due gocce non necessariamente si uniscono. L'efficienza di coalescenza è, appunto, la probabilità che la collisione fra due gocce sia seguita dalla loro unione. Esiste infatti la possibilità che le due particelle proseguano separatamente le loro traiettorie dopo l'urto, benché sia un evento piuttosto raro soprattutto per particelle cariche e quando la differenza tra i raggi è maggiore. Per questo motivo al fattore di coalescenza si assegna tipicamente il valore unitario.

Nel modello continuo l'effetto totale di crescita dovuto a tutti i possibili urti si ottiene integrando l'incremento di massa $d\left(\frac{d}{dt}M\right)_{cont}$ subito dalla particella di massa M per effetto degli urti colle $n(M')dM'$ gocce di taglia compresa tra M' e $M' + dM'$ presenti nell'unità di volume:

$$\left(\frac{d}{dt}M\right)_{cont} = \int_0^\infty K(M, M')n(M')M'dM' \quad (1.30)$$

Ciò presuppone che la crescita per coalescenza sia un processo continuo, ipotesi che risulta incompatibile con la natura discreta delle goccioline.

⁴Nell'equazione (1.29) compare il valore assoluto della differenza di velocità, che risulta superfluo nel caso in cui si descriva la coalescenza di gocce piccole da parte di una particella più grande che precipita più velocemente ($M > M'$). In questo modo, però, l'equazione descrive anche il caso in cui la particella abbia massa minore di M' , cioè la coalescenza di gocce grandi da parte di una particella più piccola che precipita con velocità minore.

1.3.2 Modello stocastico

Si può comprendere la natura probabilistica del meccanismo considerando la distribuzione di taglie $n(M, t)$, dove $n(M, t)dM$ è il numero di particelle di massa compresa fra M e $M + dM$ al tempo t contenute nell'unità di volume.

Sfruttando la (1.29) — ancora valida in questo contesto — la probabilità che avvengano l'urto e l'unione di una particolare goccia di massa M e una generica gocciolina di massa M' nell'intervallo Δt è determinata dalla relazione

$$P = K(M, M')n(M', t)dM'\Delta t \quad (1.31)$$

dove abbiamo assunto che Δt sia sufficientemente piccolo perché si possa trascurare la probabilità che avvengano due urti nello stesso intervallo Δt . Sfruttando la (1.31) otteniamo che il numero medio di particelle di massa M che urta con particelle di massa M' nell'intervallo di tempo Δt è pari a

$$Pn(M, t)dM = K(M, M')n(M, t)n(M', t)dMdM'\Delta t$$

cioè

$$\frac{Pn(M, t)}{\Delta t} = K(M, M')n(M, t)n(M', t)dM' \quad (1.32)$$

che esprime il ritmo al quale il numero di gocce di massa M diminuisce a causa della coalescenza con gocce di massa M' .

Integrando su tutti i possibili valori assunti da M' si ottiene l'effetto totale degli urti sul ritmo al quale scompaiono le gocce di massa M :

$$I_1(M) = \int_0^\infty K(M, M')n(M, t)n(M', t)dM' \quad (1.33)$$

Similmente gocce di taglie inferiori possono urtare e unirsi a formare una goccia di massa M , contribuendo all'incremento di $n(M, t)$ attraverso:

$$I_2(M) = \frac{1}{2} \int_0^M K(M - M', M')n(M - M', t)n(M', t)dM' \quad (1.34)$$

dove è incluso il fattore un mezzo per evitare il conteggio doppio della stessa coppia di particelle. Sottraendo la (1.33) dalla (1.34) si ottiene l'equazione differenziale per $n(M, t)$:

$$(\partial_t n(M, t))_{stoc} = I_2(M) - I_1(M) \quad (1.35)$$

Capitolo 2

Elementi di turbolenza omogenea

Nel capitolo 1 si è reso evidente come per una corretta comprensione dei processi di condensazione che contribuiscono alla formazione delle nuvole sia indispensabile includere l'apporto della turbolenza al sistema. A tal fine occorre considerare le soluzioni turbolente delle leggi di evoluzione dei campi; in particolare, il flusso obbedisce alle equazioni di Navier–Stokes, le quali, sotto certe condizioni, sono responsabili, appunto, dell'attivazione di una dinamica turbolenta.

È opportuno, allora, prima ancora di entrare nello specifico del modello di condensazione utilizzato in questo lavoro di tesi, dedicare questo capitolo a un'esposizione più generale di alcune nozioni fondamentali di turbolenza omogenea. Alla presentazione fenomenologica dei flussi turbolenti (§ 2.1) e ai cenni di statistica utili alla trattazione seguirà l'esposizione delle leggi di scala classiche per il campo di velocità (*Kolmogorov, 1941*), degli scalari passivo (*Kolmogorov–Obukhov–Corrsin, 1951*) e attivo (*Bolgiano–Obukhov, 1959*). Saranno inoltre analizzate alcune peculiarità della turbolenza bidimensionale (§ 2.3.3), in quanto oggetto dell'analisi numerica di questa tesi. Si menzioneranno, infine, alcune correzioni di evidenza sperimentale alle predizioni classiche (§ 2.5).

2.1 Fenomenologia della turbolenza

Benché il moto dei fluidi sia governato dall'equazione di Navier–Stokes, che ne suggerisce la natura deterministica, sotto opportune condizioni legate ai parametri del flusso, il campo di moto si rivela altamente imprevedibile.

Si osservi, ad esempio, la figura 2.1, nella quale è riportata la traccia temporale del campo di velocità in regime turbolento: il segnale appare disorganizzato

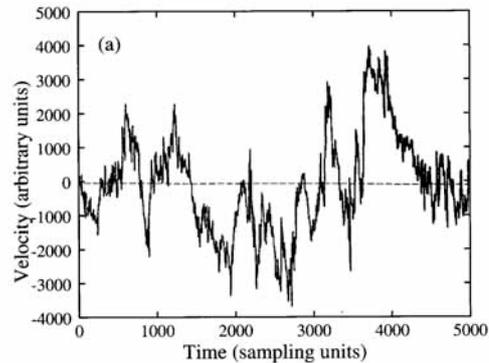


Figura 2.1: Traccia della velocità in funzione del tempo (misurato in unità di campionamento) in una galleria del vento con $Re = 2720$ (da [14]).

e presenta strutture a tutte le scale. La presenza di un gran numero di gradi di libertà interagenti tra loro non linearmente rende necessario avvicinarsi allo studio della dinamica della turbolenza affiancando alle equazioni di Navier–Stokes ulteriori strumenti matematici.

Se da un lato per uno studio sistematico della dinamica turbolenta occorre che il fenomeno sia predicibile, richiedendo l'utilizzo di osservabili fisiche riproducibili, l'analisi teorica e numerosi esperimenti hanno permesso di osservare che l'elevato grado di irregolarità di tali regimi non impedisce la presenza di simmetrie e proprietà riproducibili del flusso, purché si affronti lo studio mediante una descrizione statistica.

Ma come si può determinare quando il flusso si trovi in condizioni tali da impedire la descrizione accurata di ogni grado di libertà attivo del sistema mediante le sole equazioni di Navier–Stokes, necessitando l'intervento dell'analisi statistica? A tal fine occorre considerare il parametro adimensionale che controlla la *complessità* del moto del fluido: il *numero di Reynolds*, definito come $Re := \frac{\lambda v_\lambda}{\nu}$, dove λ è la scala tipica di lunghezza a cui la velocità del flusso è v_λ e ν è la viscosità cinematica del fluido. Per valori via via crescenti di tale numero si osserva sperimentalmente la transizione del flusso da un regime laminare a uno turbolento. Nella trattazione seguente riporteremo considerazioni per la *turbolenza pienamente sviluppata*, individuata da elevati valori del numero di Reynolds, tralasciando la fase di transizione a tale regime (se interessati si consulti, ad esempio, [26]).

La turbolenza è caratterizzata dall'esistenza di un gran numero di scale spa-

ziali¹, alcune delle quali assumono un ruolo importante nella descrizione della dinamica. In quest'ottica, allora, diviene interessante esaminare, fissata la scala spaziale, il peso relativo dei termini che compaiono nell'equazione del moto. Un'analisi di questo tipo applicata alle equazioni di Navier–Stokes, permette di determinare il contributo di ogni termine al bilancio energetico del sistema; permette, inoltre, di individuare le scale spaziali in cui si sviluppa completamente la turbolenza.

Consideriamo, dunque, nuovamente le equazioni di Navier–Stokes nelle ipotesi di incompressibilità del campo di velocità e di assenza di sorgenti di massa:

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \partial \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \partial p + \nu \partial^2 \mathbf{v} \quad (2.1a)$$

$$\partial \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.1b)$$

Onde evitare qualunque effetto di bordo si assume periodicità ai bordi del dominio spaziale.

In tali ipotesi, al bilancio energetico contribuiscono il termine di forzante, f_i , e quello viscoso, $\nu \partial^2 v_i$: l'uno come *sorgente* e l'altro come *pozzo* di energia². La scala tipica del primo, indicata comunemente con L , prende il nome di *scala integrale*, quella del secondo, η , di *scala viscosa*. Nel bilancio energetico non rientrano invece né il gradiente della pressione $\partial_i p$, a causa dell'ipotesi d'incompressibilità, né il termine non lineare $v_j \partial_j v_i$, che in media non contribuisce alla variazione di energia globale e, quindi, non immette né dissipa energia nel sistema, ma la redistribuisce tra le varie scale del moto (meccanismo noto come *avvezione*); più precisamente, il termine $v_j \partial_j v_i$ permette un flusso di energia dalle grandi verso le piccole scale ([14]). Ne consegue che l'energia di ogni scala spaziale risulta pari all'energia iniettata a tale scala dalla forzante, diminuita dell'energia dissipata a tale scala dal termine viscoso e dell'energia trasferita alle scale più piccole dal termine non lineare. Ad alti numeri di Reynolds, la separazione tra le scale di iniezione e di dissipazione di energia può raggiungere valori molto elevati. Nell'intervallo di scale intermedio, detto *dominio* (o *range*) *inerziale*, il termine non

¹Il concetto di scala spaziale può essere introdotto facendo riferimento alla descrizione del campo di velocità nello spazio di Fourier. Supponiamo di operare mediante la trasformata di Fourier su un campo dipendente dallo spazio e dal tempo. Lo spettro di Fourier che ne risulta è composto da una varietà di modi, ma può accadere che un numero ristretto di essi risulti predominante. In questo caso, indicando con k^* l'ordine di grandezza dei modi predominanti, possiamo affermare che la scala spaziale r^* che caratterizza il campo considerato corrisponde al reciproco di k^* . Per una definizione quantitativa della scala r^* si veda per esempio [13].

²Le quantità in gioco nella teoria della turbolenza sono tutte solitamente espresse per unità di massa e pertanto dovrebbero essere menzionate come grandezze specifiche; tuttavia comunemente si omette spesso questa specificazione, riferendosi per esempio senza abiguità semplicemente a energie e potenze.

lineare trasferisce l'energia iniettata alle grandi scale a quelle via via più piccole, sino alla scala diffusiva dove la dissipazione, divenendo confrontabile col contributo del termine avvevativo, distrugge questo meccanismo: è questo il fenomeno che viene comunemente denominato *cascata energetica*.

Come vedremo nel seguito, la teoria statistica del flusso turbolento si concentra nel dominio inerziale, in quanto la dinamica è qui potenzialmente³ indipendente dal processo di iniezione e dissipazione.

2.2 Strumenti statistici

Prima di procedere alla presentazione delle teorie classiche della turbolenza è opportuno introdurre alcuni strumenti statistici essenziali a questo scopo.

2.2.1 Variabili aleatorie e campi stocastici

Consideriamo un spazio Ω dotato di una misura \mathcal{P} e indichiamo con \mathcal{T} gli insiemi misurabili. La terna $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ è denominata *spazio di probabilità* se la misura \mathcal{P} soddisfa la proprietà $\mathcal{P}(\Omega) = 1$. In tal caso si definisce \mathcal{P} *una misura di probabilità* e gli insiemi \mathcal{T} *eventi*.

Variabili aleatorie

Qualunque applicazione misurabile X da uno spazio di probabilità Ω a un generico spazio misurabile $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$, con \mathcal{M} misura sullo spazio \mathcal{E} , si chiama *variabile aleatoria* o *casuale*. Se l'insieme \mathcal{E} è finito o numerabile si dice che la variabile aleatoria è *discreta*; altrimenti che è *continua*.

La *legge* P_X della variabile aleatoria X è la composizione di funzioni $\mathcal{P} \cdot X^{-1}$, cioè la misura di probabilità di tutti gli insiemi misurabili dello spazio di arrivo \mathcal{E} indotta dalla misura di probabilità presente nello spazio degli eventi Ω :

$$P_X(A) = \mathcal{P}\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$

Nel caso finito la legge di X è conosciuta a partire dalle probabilità dei singoli eventi. Se \mathcal{E} coincide con \mathbb{R} si dice che la variabile aleatoria è *numerica* o *scalare*. Nel caso in cui \mathcal{E} coincida con \mathbb{R}^n si attribuisce alla variabile un carattere *vettoriale*.

³È il problema dell'universalità: la tendenza di differenti sistemi turbolenti di mostrare, alle piccole scale, la stessa statistica se le misure sono fatte lontano dai bordi fisici del sistema.

Se la variabile numerica è continua, gli insiemi misurabili⁴ dello spazio di arrivo \mathbb{R} sono tutti quelli contenuti nella sigmalgebra di Borel \mathcal{B}^5 (per le nozioni fondamentali di teoria della misura si veda per esempio [20]). Allora, sotto opportune ipotesi⁶, la legge può essere scritta sotto forma di integrale:

$$P_X(X \in [a, b]) = \int_a^b p(x) dx$$

In questo caso $p(x)$ è detta *densità di probabilità* della variabile X .

Se la variabile numerica X è integrabile rispetto alla misura di probabilità P si definisce il suo *valor medio* come

$$E(X) \equiv \langle X \rangle = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$$

Nel caso di valor medio nullo la variabile si dice *centrata*. Il *momento di ordine* p della variabile casuale X è pari a:

$$\langle (X - E(X))^p \rangle = \int_{\mathbb{R}} (x - E(X))^p dP_X(x)$$

In particolare per $p = 2$ si ottiene la *varianza*

$$V(X) \equiv \sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

che misura la dispersione dei valori assunti dalla variabile casuale.

Una variabile casuale centrata è detta *gaussiana* se la sua densità di probabilità vale

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

Le definizioni precedentemente introdotte per variabili aleatorie scalari possono essere generalizzate in modo naturale a variabili vettoriali ennedimensionali. Se \mathbf{X} è centrata si può introdurre il *tensore di covarianza*

$$\Gamma_{\mu\nu} = \langle X_{\mu} X_{\nu} \rangle$$

mentre la *correlazione* è definita dal rapporto (non sommato sugli indici)

$$\frac{\langle X_{\mu} X_{\nu} \rangle}{\sqrt{\langle X_{\mu}^2 \rangle \langle X_{\nu}^2 \rangle}}$$

⁴Consideriamo \mathbb{R} colla misura di Lebesgue.

⁵Identificando lo spazio Ω colla totalità delle condizioni iniziali per il campo di velocità, un esempio di applicazione X è la componente x del campo di velocità in un dato punto ad un dato istante.

⁶In questa sede non ci occupiamo nel dettaglio delle suddette ipotesi, per approfondimenti si veda [11].

Per conservare l'invarianza della proprietà di gaussianità per trasformazioni lineari non è sufficiente che ogni componente X_μ di \mathbf{X} sia gaussiana: \mathbf{X} è detta gaussiana se e solo se per ogni vettore \mathbf{a} è tale la quantità scalare $\mathbf{a} \cdot \mathbf{X}$.

Campi stocastici

Una generalizzazione dei concetti fin qui esposti è costituita dall'introduzione dei *campi casuali* o *processi stocastici*. Si definisce campo stocastico un insieme di variabili casuali indicizzato da indici continui, che qui identifichiamo con un indice vettoriale spaziale e uno scalare temporale.

Le quantità statistiche relative ai campi casuali sono definite punto per punto e ad ogni istante come estensione naturale delle definizioni introdotte per le variabili casuali. Sono quindi campi scalari, per esempio, le funzioni delle quattro variabili spaziotemporali⁷. Nell'estendere ai campi le grandezze caratteristiche occorre prestare attenzione alle dipendenze spaziotemporali. Nel caso della covarianza, infatti, si definiscono due differenti grandezze a seconda che i campi coinvolti siano calcolati in punti e istanti distinti o coincidenti.

La *funzione di covarianza spaziotemporale* (detta anche *correlazione*) è definita come

$$\Gamma_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \langle X_\mu(\mathbf{x}, t) X_\nu(\mathbf{x}', t') \rangle \quad (2.2)$$

Se $\Gamma_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = S(\mathbf{x} - \mathbf{x}')Q(|t - t'|)$, il campo stocastico è detto *omogeneo* e *stazionario*. Se inoltre $Q(|t - t'|) = \delta(t - t')$, il campo stocastico è detto *deltacorrelato nel tempo*.

In particolare calcolando la (2.2) per $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ e $t = t'$ si ottiene la funzione di covarianza a punti uniti

$$\Gamma_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t) = \langle X_\mu(\mathbf{x}, t) X_\nu(\mathbf{x}, t) \rangle \quad (2.3)$$

di grande importanza in turbolenza. Infatti, per campi stazionari e omogenei tale valore non dipende né da \mathbf{x} né da t : campi di questo tipo sono statisticamente costanti nello spazio e nel tempo.

A partire dalle precedenti definizioni, infine, è possibile costruire la generica *funzione di struttura di ordine p*. L'interesse ricade soprattutto sull'ordine due:

$$S_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \langle (X_\mu(\mathbf{x}, t) - X_\mu(\mathbf{x}', t'))(X_\nu(\mathbf{x}, t) - X_\nu(\mathbf{x}', t')) \rangle \quad (2.4)$$

Un campo stocastico $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ è detto *campo gaussiano* se per ogni funzione di prova $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ risulta gaussiana la quantità $\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt$.

⁷Un esempio di campo stocastico è il campo di velocità funzione delle variabili temporali e spaziali e della condizione iniziale

2.2.2 Energia e spettri di campi turbolenti

Un primo approccio per comprendere le caratteristiche della dinamica di un regime turbolento pienamente sviluppato è l'analisi delle equazioni mediante semplici ragionamenti di bilancio energetico tra i termini in gioco alle varie scale. Da questa analisi, in particolare, è possibile estrarre l'andamento degli spettri e dei flussi energetici all'interno di una certa banda di numeri d'onda, per esempio quella inerziale, come si vedrà per la teoria di Kolmogorov.

Leggi di scala

In via del tutto generale, si considerino in uno spazio di dimensione n due funzioni⁸ $A(\mathbf{r}) = A(r)$ e $B(k) = \int \mathcal{B}(\mathbf{k})k^{n-1}d\Omega_k$ tali che $\mathcal{B}(\mathbf{k}) \propto (\mathcal{F}A)(\mathbf{k})$. Se in un certo intervallo di scale I corrispondente al dominio \hat{I} in spazio di Fourier i due campi scalano secondo le potenze ξ_A e ξ_B , ovvero

$$\begin{cases} A(r) \sim r^{\xi_A} & r \in I \\ B(k) \sim k^{\xi_B} & k \in \hat{I} \end{cases} \quad (2.5a)$$

ci si domanda quale relazione intercorra tra i due esponenti. Ebbene, poiché r e k sono inversamente proporzionali, il legame è semplicemente⁹

$$\xi_B = -\xi_A - 1 \quad (2.5b)$$

utile ai fini di un rapido passaggio tra leggi di scala negli spazi reale e di Fourier.

Campo scalare

Supponiamo che il flusso sia caratterizzato oltreché dal campo di velocità anche da un secondo campo stocastico X , per esempio scalare e supposto omogeneo e isotropo. Per analizzare la statistica del flusso, allora, tralasciando inizialmente i fenomeni di anomalia di scala (§ 2.5), occorre considerare l'andamento delle funzioni di struttura di ordine p

$$S_X^p(r) = \langle (\delta_r X)^p \rangle$$

⁸Per semplicità i moduli dei vettori saranno indicati nel seguito con $r = |\mathbf{r}|$ e $k = |\mathbf{k}|$.

⁹Infatti si ha

$$\begin{aligned} A(r) &= A(\mathbf{r}) \propto \int \mathcal{B}(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{k} \propto \int \mathcal{B}(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}k^{n-1}d\Omega_k dk \propto \int B(k)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}dk \\ &\sim B(k)dk \end{aligned}$$

Pertanto, siccome $k \propto r^{-1}$, usando la (2.5a) si perviene agevolmente alla relazione $r^{\xi_A} \propto r^{-\xi_B}r^{-1}$.

e soprattutto il caso $p = 2$.

Il campo è detto *scalare attivo* o *scalare passivo* a seconda che nell'equazione per la velocità sia o meno presente un termine di retroazione, ovvero compaia o meno in qualunque forma, anche funzionale, il campo X .

In un flusso turbolento lo scalare soddisfa un'equazione di trasporto detta *equazione di avvezione-diffusione*,

$$\partial_t X + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} X = f_X + D_X \partial^2 X \quad (2.6)$$

con f_X forzante e D_X diffusività per lo scalare.

Passando alla corrispondente equazione in spazio di Fourier, moltiplicando per $\hat{X}^*(\mathbf{k})/2$ e mediando sulle realizzazioni, si ottiene il bilancio per l'intensità dello scalare

$$\partial_t \frac{1}{2} \langle |\hat{X}(\mathbf{k})|^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle |\hat{f}_X(\mathbf{k})|^2 \rangle - \langle \Re[\hat{X}^* \mathcal{F}(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} X)](\mathbf{k}) \rangle - 2D_X k^2 \frac{1}{2} \langle |\hat{X}(\mathbf{k})|^2 \rangle$$

Il primo membro rappresenta la derivata dell'intensità di scalare, mentre a secondo membro si trovano nell'ordine il *tasso di iniezione*, la redistribuzione energetica dovuta al termine avveztivo e il *tasso di dissipazione* relativi all'intensità di scalare. Si può dunque scrivere più concisamente

$$\partial_t E_X = \iota_X + \pi_X + \varepsilon_X$$

con ovvio significato dei simboli.

Spettri energetici

Si definiscono inoltre due importanti funzioni del modulo del numero d'onda: lo *spettro di energia scalare*¹⁰

$$E_X(k, t) = \int E_X(\mathbf{k}, t) d\Omega_k = \int \frac{1}{2} |\hat{X}|^2(\mathbf{k}, t) d\Omega_k$$

e il *flusso di energia scalare*

$$\Pi_X(k, t) = \int_0^k \frac{d}{dt} E_X(\mathbf{k}', t) \Big|_{nl} d\Omega_{k'} dk' = \int_0^k \Re[\hat{X}^* \mathcal{F}(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} X)](\mathbf{k}', t) d\Omega_{k'} dk'$$

dove, la limitazione nl si riferisce al termine non lineare. Poiché E_X risulta proporzionale alla trasformata di Fourier della S_X^2 , le (2.5) permettono di determinare nel dominio d'interesse la forma degli spettri energetici a partire dalla

¹⁰Parlare di energia — come si farà nel seguito — costituisce un abuso di linguaggio indotto dall'analogia col caso del campo di velocità.

funzione di struttura (o viceversa). Simile relazione intercorre tra il flusso e la sua antitrasformata.

Del tutto analoga la situazione in cui intervenga un campo vettoriale \mathbf{X} che obbedisca a un'equazione del tipo (2.6), purché la si moltiplichi per il campo scalarmente, anziché col prodotto classico. In particolare, se $\mathbf{X} = \mathbf{v}$ si ritrovano energia, dissipazione e flussi canonici.

2.3 Turbolenza di un flusso omogeneo isotropo

La teoria statistica della turbolenza riguarda le funzioni di correlazione del campo di velocità. Essendo la velocità un campo vettoriale, le funzioni di correlazione sono in generale tensori, funzioni delle variabili temporale e spaziali. Di conseguenza, per ridurre la complessità matematica del problema, lo studio della turbolenza è stato, almeno inizialmente, affrontato nel contesto di un modello omogeneo e isotropo.

Perché ignorare gli effetti dell'anisotropia? Molti flussi turbolenti suggeriscono alcune forme di isotropia e la prima formulazione sistematica, il lavoro di Kolmogorov [20, 14], predice un recupero di isotropia a scale sufficientemente piccole. Esistono evidenze sperimentali e analisi teoriche indicanti, però, il contrario (si veda, per esempio, [3]). In questo paragrafo, tuttavia, ci limiteremo ad esporre le leggi di scala classiche: la teoria di Kolmogorov del 1941 (denominata brevemente *K41*), la Kolmogorov–Obukhov–Corrsin del 1951 (*KOC51*, [10, 28]) e la Bolgiano–Obukhov del 1959 ([4, 29]). Infatti, per gli interessi di questo lavoro di tesi gli effetti di anisotropia non sono rilevanti e le teorie classiche della turbolenza, in particolare quella di Bolgiano per la dinamica della convezione, sono sufficienti a descrivere i regimi catturati dal nostro modello. Un'ampia discussione sul problema dell'anisotropia si trova in [3, 41] e nelle referenze interne insieme a un modello matematico per descrivere gli effetti non trascurabili di anisotropia.

2.3.1 Bilancio energetico

Riprendiamo l'esame delle equazioni di Navier–Stokes. La soluzione delle (2.1) sia un campo di velocità statisticamente omogeneo e isotropo. Le (2.1), inoltre, senza il termine di forzante sono invarianti per rotazioni. Tale simmetria potrebbe essere rotta solo dalla presenza di una forzante o da condizioni al contorno anisotrope.

Si consideri un flusso turbolento lontano dai bordi (assumendo per esempio condizioni al contorno periodiche) e una forzante $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ statisticamente isotropa, omogenea e stazionaria. Moltiplicando scalarmente la (2.1a) per $\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{r})$ e mediando sullo spazio si ottiene l'equazione per la potenza in funzione della scala r . Sfruttando le ipotesi sui campi (la condizione di isotropia non sarebbe necessaria) è possibile allora stimare il valore del contributo del termine non lineare alla variazione di energia $\varepsilon(r) \equiv -\partial_t \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \Big|_{nl}$, che costituisce il *flusso medio di energia* cinetica nello spazio reale:

$$\begin{aligned} \varepsilon(r) = & -\frac{1}{4} \partial_r \cdot \langle |\delta_r \mathbf{v}|^2 \delta_r \mathbf{v} \rangle = -\partial_t \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \\ & + \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) + \mathbf{f}(-\mathbf{x} + \mathbf{r})) \rangle \\ & + \nu \partial_r^2 \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \end{aligned} \quad (2.7)$$

dove ∂_r denota le derivate parziali rispetto all'incremento vettoriale \mathbf{r} e

$$\langle |\delta_r \mathbf{v}|^2 \delta_r \mathbf{v} \rangle \equiv \langle |\delta_r \mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 \delta_r \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle$$

per omogeneità ([14]). Osservando che per un valore fissato di $\nu > 0$ e nel limite per $r \rightarrow 0$ la relazione precedente diventa

$$\partial_t \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}^2(\mathbf{x}) \rangle = \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle + \nu \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \partial^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle \quad (2.8)$$

si ritrova il bilancio energetico a cui si accennava sopra: la variazione di energia cinetica specifica media è dovuta solo all'iniezione della forzante e alla dissipazione del termine viscoso.

In seguito assumeremo che il sistema turbolento sia in uno stato stazionario¹¹, ovvero che $\partial_t \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}^2 \rangle = 0$: l'energia cinetica specifica è allora in media finita e costante.

È rilevante notare che il limite della (2.7) prima per $\nu \rightarrow 0$ e poi per $r \rightarrow 0$ non si annulla affatto, ma, anzi, assume un valore finito non nullo. In teoria dei campi tale situazione è nota come *anomalia dissipativa*. Questo limite, come si vedrà nei paragrafi successivi, è importante per la comprensione del comportamento del flusso nel dominio inerziale.

2.3.2 Teoria di Kolmogorov

Allo stato attuale non esiste una teoria deduttiva completa che, a partire dalle equazioni di Navier–Stokes, fornisca una previsione esatta della dinamica dei

¹¹La stazionarietà è garantita dal termine di forzante non nullo. In caso contrario la turbolenza è destinata, nel tempo, ad esaurirsi: si parla allora di *turbolenza in decadimento*.

flussi turbolenti. L'approccio fenomenologico di Kolmogorov rinuncia a questo obiettivo e si propone di interpretare le leggi sperimentali alla luce di ipotesi fenomenologiche compatibili colle osservazioni.

Leggi empiriche

Kolmogorov intende spiegare due leggi empiriche:

Legge dei due terzi In flussi turbolenti a elevati numeri di Reynolds l'incremento quadratico medio di velocità $\langle(\delta_r v)^2\rangle$ tra due punti distanti r è proporzionale a $r^{2/3}$.

Legge della dissipazione finita Nel limite $\nu \rightarrow 0$, mantenendo costanti tutti gli altri parametri del flusso, il *tasso di dissipazione* specifico medio tende ad un valore finito indipendente dalla viscosità cinematica ν (*anomalia dissipativa*).

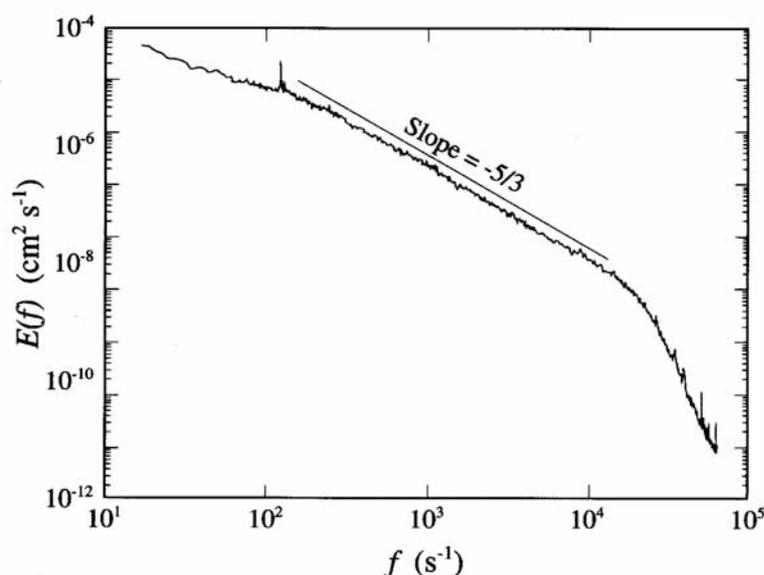


Figura 2.2: Grafico in scala logaritmica dello spettro di energia del flusso fra due cilindri rotanti con $Re = 1200$ ([14]).

La legge dei due terzi è equivalente a stabilire che lo spettro di energia $E(k)$ segua una legge di scala a potenza $k^{-5/3}$. Tale legge è confermata da numerose misure di spettro. Si osserva, infatti, che per numeri di Reynolds elevati le geometrie di flusso più differenti danno uno spettro di energia analogo a quello

mostrato in figura 2.2. Si osserva, inoltre, che l'accordo colla legge a potenza si verifica solo per un opportuno intervallo di scale. Kolmogorov riesce a fornire una giustificazione matematica del fatto che tale intervallo di scale coincida proprio col dominio inerziale. Analogamente anche la seconda legge empirica, suffragata da numerosi esperimenti disponibili in letteratura, può essere spiegata alla luce delle ipotesi assunte da Kolmogorov.

Ipotesi di universalità

La teoria formulata da Kolmogorov nel 1941 osserva che le possibili simmetrie del sistema di equazioni sono rotte dal meccanismo responsabile dell'attivazione del flusso turbolento, ma che tuttavia la simmetria è recuperata in un senso statistico. La teoria si basa, quindi, su due ipotesi fondamentali di universalità:

Prima ipotesi di universalità Per valori del numero di Reynolds elevati ma finiti le proprietà statistiche delle piccole scale¹² sono unicamente e universalmente determinate dalla conoscenza della scala spaziale r , del tasso di dissipazione di energia cinetica specifica media $\varepsilon \equiv \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \langle v^2 \rangle$ e della viscosità cinematica ν .

Seconda ipotesi di universalità Nel limite $Re \rightarrow \infty$ ($\nu \rightarrow 0$), le proprietà statistiche delle piccole scale sono unicamente e universalmente determinate dalla scala r e dal tasso ε .

Legge dei quattro quinti

Mediante la K41, inoltre, è possibile dimostrare una relazione esatta per la funzione di struttura del terzo ordine.

Legge dei quattro quinti Nel limite $Re \rightarrow \infty$, la funzione di struttura longitudinale del terzo ordine per un flusso turbolento omogeneo e isotropo, valutata per incrementi r piccoli se confrontati colla scala integrale, è data in termini di ε (assunto avere valore finito non nullo) da:

$$\langle (\delta_{r\parallel} v)^3 \rangle = -\frac{4}{5} \varepsilon r \quad (2.9)$$

Dominio inerziale

La teoria K41 è interessata al comportamento del flusso turbolento nel dominio inerziale, come già accennato alla fine del paragrafo 2.1, ove se ne descri-

¹²Per piccole scale r si intendono le scale tali che $\eta \ll r \ll L$. Tale intervallo di scale corrisponde al dominio inerziale a cui abbiamo accennato nel paragrafo 2.1.

vevano le principali caratteristiche. Anche le due leggi sperimentali, presentate a pagina 43, descrivono le proprietà di questo intervallo di scale.

In un regime di turbolenza completamente sviluppata (caratterizzato da numeri di Reynolds tendenti a infinito o, equivalentemente, da definizione, da viscosità cinematica tendente a zero) è possibile giustificare l'esistenza del dominio inerziale, purché si ricorra a tre necessarie ipotesi aggiuntive.

Ipotesi di forzante a grande scala La forzante f agisce solo alle scale spaziali maggiori della scala integrale L , ovvero ha uno spettro confinato nella banda a numeri d'onda inferiori a $K = 1/L$.

Ipotesi di stazionarietà Per grandi tempi il flusso tende ad uno stato statisticamente stazionario con un'energia specifica media finita E .

Ipotesi di dissipazione finita Nel limite $Re \rightarrow \infty$ ($\nu \rightarrow 0$) il tasso di dissipazione dell'energia cinetica specifica media $\varepsilon(\nu)$ tende ad un valore finito positivo ε .

Si consideri l'equazione (2.7) nel limite per $\nu \rightarrow 0$; in questo caso si annullano gli effetti della viscosità anche alle scale piccole ma finite, dove, peraltro, l'influenza diretta della forzante è eliminata dalla prima ipotesi ora formulata. In regime stazionario, come da seconda ipotesi, pertanto si ottiene:

$$-\frac{1}{4} \partial_r \cdot \langle |\delta_r \mathbf{v}|^2 \delta_r \mathbf{v} \rangle = \varepsilon \quad (2.10)$$

Tale relazione quantifica il meccanismo di cascata energetica sintetizzato nel paragrafo 2.1: in turbolenza pienamente sviluppata in uno stato statisticamente stazionario il flusso di energia è indipendente dalla scala considerata ed è, quindi, costante e uguale all'energia iniettata a monte e dissipata a valle del processo.

A questo punto si hanno gli elementi per poter giudicare tra quali numeri d'onda debba individuarsi il cosiddetto dominio inerziale: nella banda in cui è possibile considerare valida la relazione (2.10). Kolmogorov, infatti, ipotizza che l'estensione del dominio inerziale (che indicheremo con RI) sia tale da poter considerare il flusso ε una costante. È giustificato, quindi, anche il nome dato a tale intervallo di scale: se oltre la scala integrale il termine prevalente nella (2.1a) è la forzante e al di sotto della scala viscosa la viscosità, la dinamica nell'intervallo intermedio è invece dominata dal termine di inerzia. Più esplicitamente Kolmogorov assume l'esistenza di un intervallo di scale molto minori della scala integrale, molto maggiori della scala viscosa, ma sufficientemente piccole da poter approssimare il tasso di dissipazione costante; più formalmente:

$$RI = \{r | \varepsilon(r) \simeq \varepsilon(0) = \varepsilon; \eta \ll r \ll L\} \quad (2.11)$$

Scala viscosa

È possibile stimare con più precisione fino a quale scala sussista la cascata o, equivalentemente, fino a quale scala si estenda il dominio inerziale? Kolmogorov, nel 1941, con ragionamenti puramente dimensionali, fornisce una stima qualitativa, cioè a meno di fattori numerici, della scala viscosa η . Infatti, si consideri la relazione (2.7) calcolata alla scala dissipativa, assunta come spartiacque a cui avvenga il bilancio tra contributo inerziale e dissipativo. Utilizzando le ipotesi di forzante a grande scala e stazionarietà e notando che dimensionalmente $[\varepsilon] = [l]^2[t]^{-3}$, ovvero che

$$\varepsilon \sim r^{-1}(\delta_r v)^3 \quad (2.12)$$

alla scala viscosa si ricava

$$\varepsilon = \nu\eta^{-2}(\delta_\eta v)^2 = \nu\eta^{-2}\varepsilon^{2/3}\eta^{2/3}$$

da cui si ottiene

$$\eta = \nu^{3/4}\varepsilon^{-1/4} \quad (2.13)$$

Nota l'espressione per la scala dissipativa, si può fornire una valutazione dei gradi di libertà di un flusso turbolento, mediante una stima del numero di scale attive, cioè delle scale appartenenti al dominio inerziale. Siccome dalla (2.12) discende che $\delta_r v \sim \varepsilon^{1/3}r^{1/3}$, il grado di complessità della scala r è valutabile come $Re(r) \simeq \nu^{-1}\varepsilon^{1/3}r^{4/3}$. Prendendo come numero di Reynolds del sistema $Re(L)$ e notando che per la (2.13) $Re(\eta) \sim 1$, si trova che

$$\frac{L}{\eta} \sim Re^{3/4} \rightarrow N_n \sim Re^{3n/4}$$

dove n è la dimensione spaziale del flusso in esame e N_n è il numero dei suoi gradi di libertà attivi.

Funzioni di struttura e spettro energetico

Esaminiamo ora le previsioni della teoria per le funzioni di struttura di ordine p del campo di velocità $S_v^p(r) = \langle (\delta_r v)^p \rangle$ valutate nel dominio inerziale. Dalla prima ipotesi di universalità segue che

$$S_v^p(r) = C_p \varepsilon^{p/3} r^{p/3} \quad r \in RI \quad (2.14)$$

dove C_p è un fattore adimensionale a carattere universale¹³. Dalla legge dei quattro quinti (la cui dimostrazione parte dalla relazione (2.7), come ricavato in dettaglio in [14]), segue che per $p = 3$ si ha il valore esatto $C_3 = -\frac{4}{5}$.

¹³Già nel 1942 Landau muove, però, una critica all'ipotesi di universalità per le funzioni di struttura di ordine $p > 3$

La K41 contiene l'*invarianza di scala* globale per il campo di velocità. In altri termini, gli incrementi spaziali $\delta_r v$ dipendono dalla separazione r come una potenza a esponente frazionario, cioè $\delta_r v \sim r^h$ con $h < 1$. Dall'ipotesi di universalità si deduce che $h = \frac{1}{3}$.

Come si vedrà nel paragrafo 2.5, la consistenza tra risultati sperimentali e teoria di Kolmogorov diventa discutibile per le funzioni di struttura di ordine $p > 3$.

Dalla legge dei due terzi otteniamo agevolmente una previsione per lo *spettro di energia cinetica* valida nel dominio inerziale. Applichiamo infatti l'equazione (2.14) alla funzione di struttura di ordine $n = 2$:

$$\langle (\delta_r v)^2 \rangle \sim \varepsilon^{2/3} r^{2/3} \quad (2.15)$$

Il primo membro corrisponde, a meno di un fattore $1/2$, all'energia cinetica che caratterizza la scala r . Lo spettro è dunque proporzionale alla trasformata della funzione di struttura di ordine due, come già osservato a pagina 40, e quindi si può utilizzare la (2.5b), da cui si ricava

$$E_v(k) \sim k^{-5/3} \quad (2.16)$$

che risulta in ottimo accordo colle osservazioni sperimentali (si veda figura 2.2).

2.3.3 Turbolenza bidimensionale

Questo paragrafo è dedicato a una descrizione qualitativa delle soluzioni delle equazioni di Navier–Stokes per un flusso incompressibile ad alti numeri di Reynolds nel caso in cui la struttura del flusso dipenda solo da due coordinate cartesiane x e z . La seconda componente del campo di velocità soddisfa, in queste ipotesi, un'equazione di avvezione-diffusione senza termine di accoppiamento con il flusso nel piano xz . Senza perdita di generalità si può assumere che la velocità \mathbf{v} possieda solo due componenti u e w e possa essere descritta nel formalismo della *funzione di corrente* ψ . Le equazioni di Navier–Stokes possono essere ridotte allora ad un'equazione scalare per l'unica componente della *vorticità* $\boldsymbol{\omega} := \boldsymbol{\partial} \times \mathbf{v} = (\partial_z u - \partial_x w) \hat{\mathbf{y}} = \omega \hat{\mathbf{y}}$

$$\partial_t \omega + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} \omega = f_\omega + \nu \partial^2 \omega \quad (2.17a)$$

$$\omega = -\partial^2 \psi \quad (2.17b)$$

essendo la velocità espressa come $\mathbf{v} := \boldsymbol{\partial} \times \psi \hat{\mathbf{y}} = -\partial_z \psi \hat{\mathbf{x}} + \partial_x \psi \hat{\mathbf{z}}$.

Ciò che distingue la turbolenza bidimensionale da quella tridimensionale è la conservazione della vorticità lungo le traiettorie fluide nel limite in cui la viscosità

e la forzante siano trascurabili. Infatti sotto l'effetto del solo termine non lineare non può variare l'*enstrofia*

$$\Omega := \frac{1}{2} \langle \omega^2 \rangle$$

Kraichnan nel 1967 ipotizza (si veda [21]) che l'iniezione di energia a una certa scala l_ω a un tasso costante ε provocasse un flusso di energia da quella scala verso le grandi scale. Tale fenomeno, che prese il nome di *cascata inversa*, è stato ampiamente verificato con simulazioni numeriche ed esperimenti. Lo spettro di energia cinetica segue anche in due dimensioni una legge del tipo $k^{-5/3}$. Quando la cascata inversa raggiunge le grandi scale¹⁴ si formano vortici di dimensioni comparabili a quelle dell'intero sistema.

Affinché sia soddisfatto il principio di conservazione dell'energia è necessario ipotizzare che il sistema dissipi energia a queste scale introducendo un ulteriore termine nell'equazione per la velocità nella forma $(-1)^{q-1} \alpha_q \partial^{2q} \mathbf{v}$, con $q \leq 0$ e intero (nello spazio di Fourier questa richiesta implica che il nuovo termine divenga significativo solo a numeri d'onda molto piccoli). Questo intervento si scarica automaticamente nell'equazione per la vorticità (2.17a) semplicemente sostituendo ω a \mathbf{v} . In particolare si può scegliere il cosiddetto termine di *attrito costante di Ekman* f_L in cui $q = 0$ (ovvero $f_L = -\alpha_0 \omega$). La forma dello spettro alle piccole scale può dipendere dal tipo di meccanismo dissipativo che si ipotizza essere presente alle grandi scale.

In due dimensioni è l'*enstrofia* a compiere cascata diretta (si veda [37]). La previsione teorica per lo spettro di *enstrofia* è una legge del tipo k^{-3} , ma tale andamento non è stato verificato in modo conclusivo attraverso esperimenti o simulazioni. Le questioni ancora aperte riguardo la turbolenza bidimensionale sono infatti numerose. Per una descrizione dello stato dell'arte si veda [37].

2.4 Turbolenza scalare

Un campo di velocità turbolento è capace di trasportare e mescolare sostanze scalari disperse nel fluido. Esempi sono la concentrazione di una sostanza chimica e il campo di temperatura.

Come si accennava nel paragrafo 2.2.2, si distinguono due tipologie di campi scalari. Se gli effetti dinamici del campo scalare sul campo di velocità che lo trasporta sono trascurabili, si parla di campo scalare passivo; al contrario, se il campo trasportato influenza il campo di velocità, lo scalare è detto attivo. Si riconsiderino gli esempi precedenti: una sostanza chimica può essere considerata passiva se le reazioni chimiche sono trascurabili; analogamente, la temperatura

¹⁴Cioè le dimensioni spaziali dell'intero sistema, se assumiamo condizioni al contorno periodiche.

è passiva se la spinta di Archimede può essere trascurata.

L'evoluzione di un campo scalare ϑ , sia esso passivo o attivo, trasportato da un campo di velocità incompressibile \mathbf{v} è descritto da un'equazione di avvezione-diffusione:

$$\partial_t \vartheta + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} \vartheta = f_\vartheta + D_\vartheta \partial^2 \vartheta \quad (2.18)$$

dove D_ϑ è la diffusività molecolare dello scalare e f_ϑ è il termine di forzante. A questa equazione deve essere associata la condizione iniziale $\vartheta(\mathbf{x}, 0) = \vartheta_0(\mathbf{x})$.

Sebbene la dinamica dei campi scalari passivi e attivi sia governata dalla stessa equazione la loro natura è nettamente diversa. Lo scalare passivo appartiene al mondo dei problemi lineari: l'equazione 2.18 risulta, infatti, lineare nel campo ϑ . Poiché la dinamica dello scalare è analoga a quella dei flussi turbolenti tridimensionali, lo scalare passivo è stato oggetto di numerosi studi negli ultimi anni, permettendo di comprendere più ampiamente la turbolenza tridimensionale.

Se ϑ , invece, è un campo attivo, il campo di velocità dipende funzionalmente dallo scalare; soddisfa cioè le equazioni di Navier–Stokes a cui è aggiunto il termine di accoppiamento $\mathbf{F}(\vartheta, \boldsymbol{\partial} \vartheta, \dots)$. La forma esplicita della *forza retroattiva* \mathbf{F} è determinata dal sistema fisico esaminato. Nel caso passivo, essendo assente il termine di accoppiamento, le proprietà statistiche di \mathbf{v} sono indipendenti da quelle del campo ϑ e possono così essere fissate. Esistono alcune situazioni fisiche in cui i campi scalari attivo e passivo si comportano in modo simile: lo studio del passivo è, allora, anche in questo caso, utile per una comprensione più chiara del problema attivo.

Per una descrizione dello stato dell'arte su analogie e differenze tra i due campi scalari si veda [5].

Nelle simulazioni numeriche effettuate in questo lavoro di tesi intervengono sia campi attivi sia passivi; inoltre verranno presentati confronti su proprietà lagrangiane dei campi tra regimi di scalare passivo e attivo. Perciò di seguito verranno presentate due teorie classiche per i due casi, rispettivamente. La trattazione utilizza il linguaggio dei campi, ovvero la descrizione euleriana, equivalente alla descrizione lagrangiana, qui tralasciata (per approfondimenti si vedano [5, 12]).

2.4.1 Teoria di Kolmogorov–Obukhov–Corrsin

Si consideri l'equazione evolutiva per lo scalare (2.18) indentificando ϑ con uno scalare passivo. Per descrivere le proprietà dello scalare si consideri un campo vettoriale invariante di scala $\delta_r v \sim r^h$ ($h = 1/3$; si veda pagina 46) la cui dinamica è descritta dalle 2.1.

La presenza di una sorgente ($f_\vartheta \neq 0$) mantiene le fluttuazioni del campo in uno stato stazionario. L'energia scalare $E_\vartheta = \frac{1}{2}\langle \vartheta^2 \rangle$ è iniettata alla scala integrale L_ϑ ad un tasso $\nu_\vartheta = \frac{1}{2}\langle f_\vartheta^2 \rangle$. Durante l'evoluzione il termine inerziale, come nel caso del campo di velocità, è responsabile della comparsa di fluttuazioni a scale via via più piccole fino alla *scala diffusiva* η_ϑ in corrispondenza della quale il termine diffusivo risulta paragonabile al termine avvevativo. Al di sotto di tale scala, il prevalere del termine diffusivo su quello inerziale, attenua le fluttuazioni e il campo diventa spazialmente regolare. Qui l'energia scalare iniettata a grande scala viene infine dissipata al tasso $\varepsilon_\vartheta = D_\vartheta \langle |\boldsymbol{\vartheta}|^2 \rangle$.

Quali sono le leggi di scala del *regime di KOC51*? Per la velocità semplicemente le medesime della K41, poiché lo scalare non ne influenza la dinamica. Per ϑ il ragionamento è analogo e porta tra l'altro alla stessa legge di scala. Vediamo più nel dettaglio come lo si ricava, anche per un migliore confronto col caso attivo. Anche per lo scalare ipotizziamo l'esistenza di un dominio di scale non influenzato né dal meccanismo iniettivo né da quello dissipativo. In tale banda, detta *dominio convettivo*, si attiva un fenomeno del tutto analogo alla cascata energetica, che si manifesta nella presenza di un flusso costante di energia scalare verso le piccole scale. All'interno dell'intersezione tra i due domini in cui i flussi cinetico e scalare possono essere considerati entrambi costanti e pari ai rispettivi tassi di dissipazione, ovvero nel cosiddetto *dominio inerziale-convettivo*¹⁵

$$RI = \{r \mid \varepsilon_v(r) \simeq \varepsilon_v(0) = \varepsilon_v; \varepsilon_\vartheta(r) \simeq \varepsilon_\vartheta(0) = \varepsilon_\vartheta; \eta_v, \eta_\vartheta \ll r \ll L_v, L_\vartheta\}$$

valgono allora le relazioni

$$\begin{cases} r^{-1}(\delta_r v)^3 \sim \varepsilon_v \\ r^{-1}\delta_r v(\delta_r \vartheta)^2 \sim \varepsilon_\vartheta \end{cases} \quad r \in RI \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \delta_r v \sim \varepsilon_v^{1/3} r^{1/3} \\ \delta_r \vartheta \sim \varepsilon_v^{-1/6} \varepsilon_\vartheta^{1/2} r^{1/3} \end{cases} \quad r \in RI \quad (2.19)$$

Per quel che riguarda gli spettri, in definitiva, le leggi di scala sono

$$\begin{cases} S_v^2(r) \sim \varepsilon^{2/3} r^{2/3} \\ S_\vartheta^2(r) \sim \varepsilon_v^{-1/3} \varepsilon_\vartheta r^{2/3} \\ \Pi_v(r) \propto \varepsilon_v \\ \Pi_\vartheta(r) \propto \varepsilon_\vartheta \end{cases} \quad r \in RI \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} E_v(k) \sim k^{2/3} \\ E_\vartheta(k) \sim k^{2/3} \\ \Pi_v(k) \simeq \text{cost} < 0 \\ \Pi_\vartheta(k) \simeq \text{cost} > 0 \end{cases} \quad k \in \hat{RI} \quad (2.20)$$

con \hat{RI} dominio inerziale nello spazio di Fourier.

La KOC51, quindi, determina la legge di scala tramite il bilancio nelle equazioni (2.1a) e (2.18) tra i termini presenti nel caso stazionario alla scala dissipativa,

¹⁵Nel proseguio chiameremo tale intervallo semplicemente inerziale, per brevità e per non generare confusioni colla dinamica convettiva che presenteremo nel paragrafo 2.4.2

quello avvevivo e quello diffusivo, e dalla presenza di un regime di cascata per entrambi i campi.

Inoltre pure nel caso scalare sussiste ancora il fenomeno noto come anomalia dissipativa: considerando il limite per D_ϑ tendente a zero, si trova che esso non corrisponde ad un regime senza diffusione. Infatti in questo limite la riduzione della scala diffusiva permette al termine inerziale di produrre delle fluttuazioni a scale sempre più piccole: il tasso di dissipazione ε_ϑ tende ad un limite finito non nullo.

Queste proprietà, come precedentemente accennato, sono analoghe a quelle per il campo di velocità nel caso tridimensionale. Altre proprietà riscontrate nella turbolenza di Navier–Stokes ed esaurientemente spiegate, sono le leggi di scala anomale e l'intermittenza a piccole scale (si rimanda al paragrafo 2.5). Per una rassegna dei risultati ottenuti e dei problemi aperti si veda per esempio [35].

2.4.2 Teoria di Bolgiano–Obukhov

Prendiamo ora in esame il campo di temperatura di un fluido immerso in un campo gravitazionale. La temperatura è uno scalare attivo: le sue fluttuazioni inducono fluttuazioni nel campo di densità, che a loro volta influenzano il flusso attraverso la forza retroattiva, che qui è rappresentata dalla spinta di Archimede (*buoyancy*) in approssimazione di Boussinesq (si vedano il paragrafo 3.1.1 e per maggiori dettagli [23])

$$\mathbf{F}(\vartheta) = (1 - \beta(\vartheta - \vartheta_0))\mathbf{g}$$

Struttura spaziale e anisotropia

L'effetto di spinta non trascurabile si manifesta colla presenza nel flusso di *pennacchi termici*, strutture ben organizzate di flusso più caldo che sale o di flusso più freddo che discende, a cui si deve il trasporto turbolento di energia. Questa intelaiatura termica, differentemente dal flusso, rende il campo scalare spazialmente molto strutturato: in certe zone del flusso tra punti poco separati si osservano piccole differenze di temperatura; ma in altri punti la stessa separazione racchiude un gradiente termico elevato. La causa di ciò è lo scontro continuo tra pennacchi freddi e caldi, che comporta la presenza di superfici d'interfaccia, i *fronti termici*, in cui le variazioni del campo scalare assumono valori molto grandi rispetto alla varianza del campo stesso.

Un altro aspetto da curare con più attenzione nel caso attivo è la presenza di anisotropia. È infatti evidente dall'equazione del flusso che la spinta archimedeana non è un termine invariante per rotazioni: introduce, semmai, una direzione privilegiata, l'asse verticale. La teoria di Kolmogorov assume turbolenza isotropa

ipotizzando che l'anisotropia eventualmente presente a grande scala non venga trasportata per effetto del *mescolamento* (*mixing*) alle scale più piccole e che quindi il dominio inerziale non ne risenta. Se ciò è in prima approssimazione vero per molti regimi, in generale si è verificato che le componenti anisotrope possono essere non sottodominanti e, anzi, importanti. Nel caso del *regime di Bolgiano–Obukhov*, perdipiù, il termine retroattivo — come vedremo a pagina 53 — non può essere considerato alla stregua di una forzante a grande scala, poiché in generale interviene a tutte le scale. Questo, per esempio, comporta che le leggi di scala previste dalla teoria classica non siano in realtà corrette e debbono essere riviste alla luce dell'intermittenza (si veda il paragrafo 2.5). Tuttavia in questa trattazione trascureremo queste correzioni, in quanto nel modello utilizzato si sono rivelate poco importanti. Nell'analisi numerica, per esempio, sono state osservate leggi di scala pienamente compatibili con quelle di Bolgiano (§ 4.2).

Fenomenologia della convezione bidimensionale

Analizziamo più nel dettaglio il regime convettivo di Bolgiano nel caso bidimensionale nell'approssimazione di Boussinesq¹⁶, considerando le equazioni di Navier–Stokes per vorticità e temperatura

$$\partial_t \omega + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} \omega = -\alpha_0 \omega + \beta \mathbf{g} \times \boldsymbol{\partial} \vartheta + \nu \partial^2 \omega \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\partial} \times \psi \hat{\mathbf{y}} \quad (2.21b)$$

$$\omega = -\partial^2 \psi \quad (2.21c)$$

$$\partial_t \vartheta + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} \vartheta = f_\vartheta + D_\vartheta \partial^2 \vartheta \quad (2.21d)$$

ove si è incluso l'attrito costante di Ekman $-\alpha_0 \omega$, che dissipa a grande scala l'energia proveniente dalla cascata inversa presente in due dimensioni; la forzante a piccola scala per la vorticità f_ω , invece, non è più necessaria, in quanto nel regime di Bolgiano canonico il sistema si autosostiene mediante l'immissione di energia da parte della retroazione termica sulla velocità.

Cerchiamo, ora, di comprendere la dinamica mediante alcuni accenni di fenomenologia della convezione turbolenta bidimensionale (per approfondimenti ulteriori si veda [36]). La temperatura segue ancora un'equazione di avvezione-diffusione con forzante a grande scala; perciò lo schema dinamico non è particolarmente diverso dal caso passivo, se non per il fatto che l'avvezione termica è guidata da una velocità forzata dalla temperatura stessa e quindi strutturata in generale diversamente. L'energia scalare è perciò ancora iniettata alla grande

¹⁶Ricordiamo che in tale approssimazione le variazioni di densità sono proporzionali a quelle di temperatura.

scala e dissipata alla piccola e il flusso nell'intervallo intermedio è, allo stato stazionario, ancora costante: la temperatura subisce nuovamente un meccanismo di cascata diretta.

Per quanto riguarda il campo di velocità, invece, occorre considerare l'apporto della retroazione. La lunghezza di scala l_B a cui i termini di Archimede e non lineare si bilanciano è detta *scala di Bolgiano*. A scale più piccole, $r \ll l_B$, il termine inerziale è maggiore di quello di spinta: il campo di temperatura si comporta, allora, come approssimativamente passivo e la velocità è soggetta a cascata inversa. A scale maggiori, invece, i due contributi si bilanciano e il campo di velocità, accoppiato a quello termico, dà luogo a un flusso negativo di energia (quindi sempre dalle scale minori a quelle maggiori) in generale, però, non più costante. In tale intervallo di scale le fluttuazioni di temperatura, come già rilevato, sono trasferite ancora dalle grandi alle piccole scale fino alla scala diffusiva. È importante puntualizzare come, a differenza di quanto accade nella turbolenza bidimensionale non convettiva, qui il tasso di iniezione-dissipazione di energia ε_v non sia costante, ma dipenda dalla scala: infatti l'iniezione di energia, rappresentata dalla spinta di Archimede, ora non è più confinata alle piccole scale.

Dominio di Bolgiano

In questo caso di scalare attivo, dunque, sono individuabili due intervalli di scale attigui in cui il flusso segue due regimi distinti: sotto la scala di Bolgiano, nel dominio inerziale RI , si osserva il regime di KOC51; sopra, nel *dominio di Bolgiano* RB , il regime convettivo di Bolgiano.

Nell'analisi della convezione turbolenta siamo interessati a quest'ultimo; la dinamica convettiva in due dimensioni sarà determinata dalle leggi scala del flusso in RB . Come illustrato per la KOC51, cerchiamo allora queste leggi. Mentre lì, però, in ogni banda prevale un unico termine delle equazioni di Navier–Stokes e il bilanciamento tra due termini avviene a una determinata scala, qui la banda d'interesse è invece precisamente individuata da tutte quelle scale in cui vale il bilancio tra termini non lineare e retroattivo e in cui si abbia contemporaneamente cascata diretta per lo scalare:

$$RB = \{r \mid \mathbf{v} \cdot \partial \omega \approx \beta g \partial_x \vartheta; \varepsilon_\vartheta(r) \simeq \varepsilon_\vartheta(0) = \varepsilon_\vartheta; \eta_v, \eta_\vartheta, l_B \ll r \ll \mu_v, L_\vartheta\}$$

dove μ_v è la *scala di attrito*, a cui agisce l'attrito di Ekman. Si noti che, siccome l'accelerazione di gravità è verticale, la spinta archimedeica per la vorticità si riduce al gradiente termico orizzontale.

Leggi di scala

Moltiplicando la (2.21a) per la velocità e mediando, il bilancio richiesto diviene

$$\langle \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} \omega \rangle \approx \langle \mathbf{v} \beta g \partial_x \vartheta \rangle$$

dalla quale, unitamente alla considerazione per cui, essendo la vorticità il rotore della velocità, $\delta_r \omega \sim r^{-1} \delta_r v$, si ricava

$$\begin{cases} r^{-2} (\delta_r v)^3 \sim \beta g r^{-1} \delta_r v \delta_r \vartheta \\ r^{-1} \delta_r v (\delta_r \vartheta)^2 \sim \varepsilon_\vartheta \end{cases} \quad r \in RB \quad (2.22)$$

Svolgendo i calcoli¹⁷ gli incrementi scalano, in funzione del parametro di accoppiamento βg , del tasso di dissipazione scalare ε_ϑ e della distanza r , come

$$\begin{cases} \delta_r v \sim (\beta g)^{2/5} \varepsilon_\vartheta^{1/5} r^{3/5} \\ \delta_r \vartheta \sim (\beta g)^{-1/5} \varepsilon_\vartheta^{2/5} r^{1/5} \end{cases} \quad r \in RB$$

Poiché il flusso di energia cinetica altro non è che la redistribuzione di energia tra le varie scale, esso sarà proporzionale all'energia del termine inerziale, ovvero a $r^{-1} (\delta_r v)^3$, mentre quello termico sarà costante e proporzionale al tasso di dissipazione, come da definizione del regime di Bolgiano. Con ciò si hanno tutti gli elementi per presentare le leggi di scala nel dominio di Bolgiano e mediante la (2.5b) nella corrispondente banda di numeri d'onda:

$$\begin{cases} S_v^2(r) \sim (\beta g)^{4/5} \varepsilon_\vartheta^{2/5} r^{6/5} \\ S_\vartheta^2(r) \sim (\beta g)^{-2/5} \varepsilon_\vartheta^{4/5} r^{2/5} \\ \Pi_v(r) \sim (\beta g)^{6/5} \varepsilon_\vartheta^{3/5} r^{4/5} \\ \Pi_\vartheta(r) \propto \varepsilon_\vartheta \end{cases} \quad r \in RB \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} E_v(k) \sim k^{-11/5} \\ E_\vartheta(k) \sim k^{-7/5} \\ \Pi_v(k) \sim k^{-9/5} < 0 \\ \Pi_\vartheta(k) \simeq \text{cost} > 0 \end{cases} \quad k \in \hat{RB} \quad (2.23)$$

È importante rilevare come, nonostante i segni dei flussi restino identici al caso passivo, il flusso di energia cinetica non sia più costante, ma obbedisca anch'esso a una legge di scala. Sarebbe quindi scorretto parlare di cascata inversa anche nel caso convettivo, essendo questa denominazione riferita a una redistribuzione energetica costante. Tuttavia spesso la dinamica del flusso convettivo è ancora indicata col termine di cascata.

Interessante è anche osservare come varino in valore assoluto i flussi. La cascata, in questo senso lato, è maggiore nel caso passivo o attivo? Mediante la (2.23) e la (2.20) possiamo fornire una stima qualitativa. Se k_B è la scala di

¹⁷Dalla prima relazione si ricava $\delta_r \vartheta \sim (\beta g)^{-1} r^{-1} (\delta_r v)^2$, che sostituita nella seconda dà $(\delta_r v)^5 \sim (\beta g)^2 \varepsilon_\vartheta r^3$.

Bolgiano nello spazio di Fourier, sopra il flusso Π_v sarà costante (KOC51), sotto scalerà come $k^{-9/5}$ (Bolgiano). Per la continuità del flusso si può immaginare di raccordare gli andamenti nei due regimi alla scala di passaggio: $\Pi_v(k_B) = \varepsilon_v$, con ε_v tasso dissipativo nel settore passivo. Allora, prolungando da questo punto tramite le leggi di scala della rispettiva banda, si trova

$$\begin{cases} |\Pi_v| > \varepsilon_v & k \in \hat{R}B \\ |\Pi_v| = \varepsilon_v & k \in \hat{R}I \end{cases}$$

Se immaginassimo, quindi, di utilizzare la (2.23) per tutte le scale, troveremo che il regime di Bolgiano sottostima il flusso presente nel dominio inerziale; viceversa, se supponessimo che a tutte le scale valgano le (2.20), ovvero che ovunque il flusso sia costante, sarebbe il regime di KOC51 a sottostimare il flusso nel dominio di Bolgiano, come si osserva nello schema in figura 2.3(b).

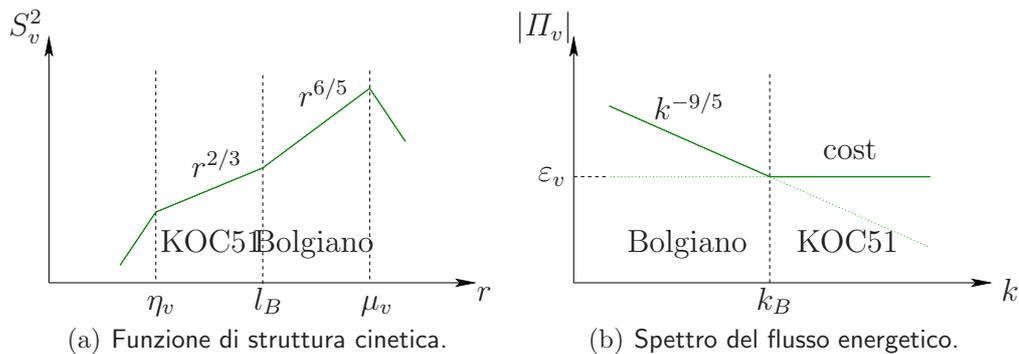


Figura 2.3: Schemi in scala bilogarithmica delle leggi di scala della teoria di Bolgiano–Obukhov nei vari domini.

Due regimi turbolenti e due dissipativi

Un fluido guidato dalle (2.21) può trovarsi, dunque, in quattro regimi di flusso differenti a seconda della scala; in generale, osservando una generica funzione di struttura della velocità, incontreremo: il regime dissipativo di piccola scala sotto la scala viscosa η_v , il regime di scalare passivo tra η_v e la scala di Bolgiano l_B , il regime convettivo tra l_B e la scala di attrito μ_v e il regime dissipativo di grande scala sopra μ_v (si veda il grafico teorico in figura 2.3(a))

Tuttavia non è scontato che un flusso presenti sempre entrambi i regimi turbolenti. Supponiamo, infatti, che la scala di Bolgiano sia troppo piccola, ovvero dell'ordine di quella viscosa: è evidente che in tal caso non sussiste una banda

sufficientemente larga perché possa svilupparsi una dinamica di tipo KOC51; viceversa, nel caso di l_B troppo grande, per esempio confrontabile con μ_v , è la dinamica alla Bolgiano–Obukhov a non trovare scale in cui svilupparsi.

Questa caratteristica dei flussi accoppiati a uno scalare attivo è assai interessante, in quanto, per esempio, permette di osservare il fenomeno della convezione bidimensionale senza il disturbo provocato da un regime di scalare passivo adiacente. Se nelle simulazioni numeriche, infatti, si deve considerare lo spazio fisico come una griglia, per quanto fitta possa essere gli spettri saranno definiti in un dominio limitato superiormente; si ha allora a disposizione un numero finito di numeri d'onda. Ma più fasi di regime il sistema possiede, più bande sono occupate sia dal regime puro in questione, sia dalle frequenze di passaggio da uno all'altro. Ecco perché per studiare in maniera ottimale la convezione turbolenta è opportuno scegliere configurazioni che selezionino una scala di Bolgiano inferiore a quella viscosa.

Scala di Bolgiano

Vediamo allora come sono definite le scale in gioco in funzione dei parametri del fluido. Per determinare il valore di l_B basta ricordare le leggi di scala di scalare attivo e passivo: è questa la scala a cui convivono il flusso alla Kolmogorov e alla Bolgiano. Semplificando $\delta_r v$ in ambo i membri della prima riga della (2.22), per definizione alla scala di Bolgiano il bilancio è esatto

$$l_B^{-2} \delta_{l_B} v = \beta g l_B^{-1} \delta_{l_B} \vartheta$$

Inoltre a questa scala, se si proviene dalle scale inferiori, gli incrementi dei campi seguiranno la legge descritta a destra nella (2.19), che inserita nella precedente relazione dà

$$\varepsilon_v^{2/3} l_B^{-2} l_B^{2/3} = \beta g \varepsilon_v^{-1/6} \varepsilon_\vartheta^{1/2} l_B^{-1} l_B^{1/3}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene il valore della scala di Bolgiano in funzione del parametro retroattivo e dei tassi di dissipazione

$$l_B = (\beta g)^{-3/2} \varepsilon_v^{5/4} \varepsilon_\vartheta^{-3/4} \quad (2.24)$$

Un sistema a $l_B < \eta_v$ non presenta, dunque, intervalli di scale in cui valgono le (2.20) della KOC51, ma un'unico intervallo di regime turbolento, quello convettivo (più le due zone dissipative). Perciò in questo caso, con abuso di linguaggio e non essendo possibile confusione, per analogia alla KOC51 spesso RB viene chiamato dominio inerziale, intendendo ora un intervallo di scale in cui vi sia turbolenza e gli spettri scalino secondo una precisa legge di potenza.

Scala di attrito

Per determinare, invece, il valore della scala di attrito basta bilanciare le energie dei termini inerziale e di Ekman (ottenute come al solito moltiplicando i rispettivi termini per v) alla scala μ_v

$$\mu_v^{-1}(\delta_{\mu_v} v)^3 = \alpha_0(\delta_{\mu_v} v)^2$$

Semplificando e imponendo poi la (2.23) per l'incremento del campo di velocità, si trova

$$\mu_v^{-1}(\beta g)^{2/5} \varepsilon_\vartheta^{1/5} \mu_v^{-2/5} = \alpha_0$$

da cui si ricava

$$\mu_v = \beta g \alpha_0^{-5/2} \varepsilon_\vartheta^{1/2} \quad (2.25)$$

Scale viscosa e diffusiva

Resta dunque da stabilire ove si collochino le scale dissipative. Qui però occorre distinguere due casi a seconda che il sistema sviluppi o meno una dinamica alla Kolmogorov. Equivalentemente, dipende dalla collocazione reciproca tra scale di Bolgiano e viscosa. Se quest'ultima è più piccola della prima, il flusso scala come KOC51 e vale ancora la (2.13); altrimenti, scala alla Bolgiano e la relazione sarà differente.

Il principio è il medesimo: alla scala η_v contributo inerziale e dissipativo di piccola scala devono equilibrarsi

$$\eta_v^{-1}(\delta_{\eta_v} v)^3 = \nu \eta_v^{-2}(\delta_{\eta_v} v)^2$$

che semplificando dà $r\delta_{\eta_v} v = \nu$. Non restano che da applicare le (2.20) o le (2.23) per l'incremento del campo di velocità, nei due casi accennati, per trovare

$$\eta_v = \begin{cases} \nu^{3/4} \varepsilon_v^{-1/4} & \eta_v < l_B \\ \nu^{5/8} (\beta g)^{-1/4} \varepsilon_\vartheta^{-1/8} & \eta_\vartheta, l_B < \eta_v \end{cases} \quad (2.26)$$

Simile è il caso della scala diffusiva dello scalare. Poiché il dominio di Bolgiano si colloca a scale molto più grandi sia della scala diffusiva sia di Bolgiano, potrebbe anche capitare che queste due siano in ordine inverso. Vale il ragionamento precedente: se η_ϑ si trova prima di l_B si può supporre che valga la (2.20), altrimenti la (2.23), da cui

$$\eta_\vartheta = \begin{cases} D_\vartheta^{3/4} \varepsilon_v^{-1/4} & \eta_v < \eta_\vartheta < l_B \\ D_\vartheta^{5/8} (\beta g)^{-1/4} \varepsilon_\vartheta^{-1/8} & \eta_v, l_B < \eta_\vartheta \end{cases} \quad (2.27)$$

Si notino le estensioni di validità delle relazioni precedenti: per la velocità occorre trovarsi sopra la scala diffusiva scalare affinché abbia senso parlare di Bolgiano; per la temperatura sopra la scala viscosa perché la velocità non sia già puramente diffusiva. Le due relazioni (2.26) e (2.27) nel caso che il passaggio sia tra dominio di Bolgiano e dissipativo (seconde righe) si escludono reciprocamente.

Universalità e intermittenza

Ma alla luce delle riflessioni su inomogeneità e anisotropia, quanto sono corrette queste previsioni? E ancora: la convezione è universale, ovvero indipendente dal meccanismo iniettivo? Evidenze sperimentali convergenti permettono di dare delle risposte.

Il campo di velocità in due dimensioni presenta un buon accordo colla statistica gaussiana ed è universale rispetto alla forzante termica. La statistica della temperatura mostra, invece, esponenti di scala anomali (si veda il paragrafo 2.5) universali, cioè con valori indipendenti dalla f_ϑ e coincidenti con quelli di uno scalare passivo che evolva nello stesso flusso.

L'universalità è stata affrontata in [8] considerando i due casi di forzante f_ϑ casuale e a gradiente medio.

Il caso di una forzante a gradiente medio è interessante per l'interpretazione dei moti convettivi in regioni intermedie dello strato limite in atmosfera, come pure — è il nostro caso — per lo studio della formazione dei cumuli in atmosfera. Infatti l'ambiente atmosferico, come abbiamo osservato nel capitolo 1, è caratterizzato dalla stratificazione, in particolare termica; in prima approssimazione la temperatura cala linearmente al salire di quota. In questo caso lo scalare attivo viene scomposto in una componente a media nulla ϑ' , il campo turbolento di *fluttuazione termica*, e in un profilo medio $\vartheta_0(\mathbf{x}, t) = \vartheta_0(\mathbf{x}_0, t) + \mathbf{\Gamma} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ proporzionale alla coordinata dell'asse gravitazionale lungo il quale è diretto il gradiente di grande scala $\mathbf{\Gamma}$; ciò si traduce nell'imposizione nell'equazione (2.18) per il campo fluttuazione ϑ' di una forzante¹⁸ $f_\vartheta = -\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{v}$, attiva alla scala integrale scalare.

Come si può osservare in figura 2.4(a), le strutture principali del campo di temperatura sono i pennacchi di fluido caldo e freddo. Ad esempio, un pennacchio caldo è costituito da una regione di fluido più caldo ben mescolato limitato da una sottile interfaccia che divide la regione ben mescolata da quella a fluido più freddo circostante. Lo spessore dell'interfaccia è stimata essere dell'ordine della scala diffusiva.

È interessante valutare come vari la funzione di struttura tra separazioni tutte interne a un pennacchio e a cavallo del loro fronte, utilizzando come metro

¹⁸Prendendo $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$, si ha similmente $\mathbf{\Gamma} = -\Gamma\hat{\mathbf{z}}$ e $f_\vartheta = \Gamma w$

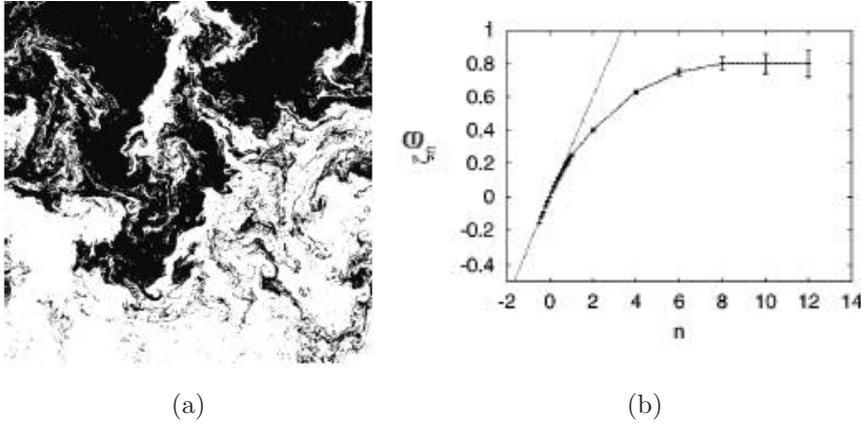


Figura 2.4: Risultati numerici ottenuti nel caso in cui la forzante termica imiti l'effetto di un gradiente medio sovrainposto ([9]). (a) Immagine bicolore del campo di temperatura. Le regioni nere rappresentano il fluido freddo, quelle bianche il fluido caldo. (b) Esponente di scala ζ_n^ϑ nella funzione di struttura di ordine n nel caso di grandi escursioni del campo di temperatura (linea puntinata) e di deboli fluttuazioni dello scalare (linea tratteggiata). Nel primo caso si nota a $n > 8$ il fenomeno della saturazione dell'esponente (§ 2.5). La seconda curva è nella potenza αn con $\alpha = 0.3$. Il valore atteso per α è $1/5$.

la deviazione standard $\sigma_\vartheta := (\langle \vartheta^2 \rangle - \langle \vartheta \rangle^2)^{1/2}$. Ebbene, mentre all'interno del pennacchio le differenze di temperatura sono molto minori ($\delta_r \vartheta \ll \sigma_\vartheta$), sui confini all'opposto sono molto maggiori ($\delta_r \vartheta \gg \sigma_\vartheta$). All'interfaccia del pennacchio il campo di temperatura è *intermittente*, come verrà specificato nel paragrafo 2.5, e presenta saturazione negli esponenti di scala anomali, come si vede nella figura 2.4(b)

2.5 Intermittenza

I lavori sperimentali hanno messo in luce delle deviazioni dalle teorie classiche della turbolenza presentate in questo capitolo. In particolare vogliamo qui analizzare la violazione della predizione dimensionale.

Kolmogorov ipotizza, infatti, che le funzioni di struttura di ordine p del campo di velocità scalino, nel dominio inerziale, con un esponente ξ_p pari a $p/3$. I flussi reali, però, non soddisfano questa relazione: l'esponente ξ_p non è una funzione lineare di p con coefficiente $1/3$, ma una funzione concava e non decrescente di p . Per valori di p superiori a 3 la differenza fra il valore previsto da Kolmogorov e il valore reale assunto da ξ_p cresce con l'ordine p .

2.5.1 Intermittenza a piccola scala

Questa proprietà è chiamata *anomalia di scala*, la cui conseguenza più importante è l'*intermittenza a piccola scala*. In modo qualitativo, il termine intermittenza indica una situazione in cui la statistica alle piccole scale è caratterizzata dall'alternarsi di fluttuazioni piccole (fluttuazioni cioè molto minori del loro valore quadratico medio) e molto probabili, con grandi fluttuazioni (ovvero molto maggiori del loro valore quadratico medio), che si verificano con una frequenza maggiore di quella che si avrebbe nel caso gaussiano.

Si esamini più nel dettaglio l'intermittenza a piccola scala: le quantità statistiche che possono evidenziarla sono quelle basate sulle differenze di velocità $\delta_r v$. Non è possibile, partendo dalla densità di probabilità di una data fluttuazione di velocità a una data scala r , ottenere la densità di probabilità della stessa fluttuazione a un'altra scala semplicemente moltiplicando per un fattore opportuno. In altri termini la quantità $\varepsilon_v^{-1/3} r^{-1/3} \delta_r v$ non è indipendente dalla scala r come ipotizza la K41 (pag. 44). Le fluttuazioni di velocità sono sempre più intense al diminuire della scala considerata. Infatti la densità di probabilità di $\delta_r v$ al diminuire della scala diventa sempre più non gaussiana: con un picco centrale via via più stretto e le code via via più lunghe, di tipo esponenziale (e quindi più alte di quelle gaussiane).

La conseguenza per le funzioni di struttura è l'esplicita dipendenza dalla scala integrale L :

$$\langle (\delta_r v)^p \rangle \sim \varepsilon_v^{p/3} L^{p/3 - \zeta_v^p} r^{\zeta_v^p} \quad (2.28)$$

dove $\zeta_v^p \neq p/3$ (si veda [14]). In tal caso questo esponente di scala è detto *anomalo*. La presenza esplicita nella 2.28 della scala integrale L anche per scale appartenenti al dominio inerziale segnala la rottura dell'invarianza di scala (da qui il nome anomalia di scala, per sottolineare la rottura di una simmetria della teoria).

Un fenomeno simile si presenta anche nel contesto dello scalare passivo (su quello attivo ci soffermeremo dopo): la distribuzione delle fluttuazioni a piccole scale dello scalare è lontana dall'essere gaussiana. Questa proprietà è interpretata come un fenomeno indipendente da quello del campo di velocità. Infatti si osserva intermittenza nello scalare anche quando il campo di velocità è gaussiano. Inoltre l'esponente di scala ζ_ϑ^p , definito dalla

$$\langle (\delta_r \vartheta)^p \rangle \sim \varepsilon_\vartheta^{p/3} L^{p/3 - \zeta_\vartheta^p} r^{\zeta_\vartheta^p} \quad (2.29)$$

è più piccolo dell'analogo per il campo di velocità ζ_v^p .

L'intermittenza a piccole scale del campo scalare è in genere dovuta alla presenza di strutture fortemente localizzate e associate a grandi gradienti.

La struttura asintotica a grandi p mostra la saturazione degli esponenti di scala a un valore limite indipendente da p sia per il campo di velocità ($\zeta_v^p \rightarrow \zeta_v^\infty$) sia per lo scalare passivo ($\zeta_\theta^p \rightarrow \zeta_\theta^\infty$). Si vedano a tal proposito [5] e le referenze interne. Nel caso del campo scalare la saturazione è connessa alla presenza di *fronti*¹⁹. Risultati sperimentali hanno evidenziato l'universalità dell'esponente anomalo, ma non della costante che compare nel prefattore delle funzioni di struttura ([14]).

Affrontiamo, ora, il problema dello scalare attivo considerato nel paragrafo precedente, ossia la convezione termica in approssimazione di Boussinesq. Come si anticipava esistono evidenze sperimentali per poter parlare di intermittenza. Anche in questo caso è presente il fenomeno della saturazione dell'esponente ζ_θ^p : il valore limite è 0,8 (come si può osservare nella figura 2.5), che sembrerebbe aver carattere universale rispetto alla forzante del campo di temperatura (si confrontino le figure 2.4(b) e 2.5). Questo fenomeno, ben noto per lo scalare passivo, è connesso alla presenza di fronti: queste quasidiscontinuità corrispondono alle interfacce tra il fluido caldo che sale e quello freddo che scende.

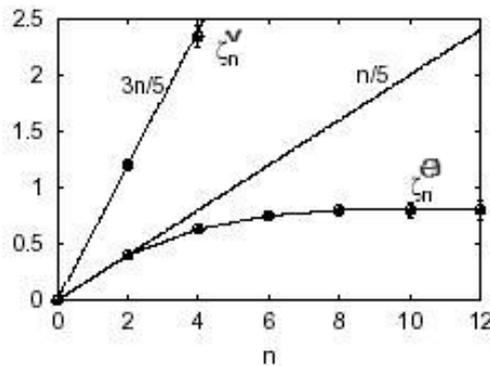


Figura 2.5: Problema convettivo nel caso di forzante casuale sul campo di temperatura (da [8]). Esponente di scala della temperatura, ζ_θ^p , e della velocità, ζ_v^p . Le linee tratteggiate costituiscono la predizione dalla teoria: $n/5$ per la temperatura e $3n/5$ per la velocità. Si noti che per $n > 8$ gli esponenti di scala della temperatura saturano ad un valore costante di 0,8. Si osserva un andamento analogo nel caso in cui la forzante imiti un gradiente medio sovrainposto (fig. 2.4(b)).

¹⁹Per fronte si intende un brusco cambiamento, quasi una discontinuità, nella struttura spaziale del campo. Per approfondimenti si veda [7].

2.5.2 Intermittenza a grande scala

Se invece si considera la misura ad un sol punto, si tengono in conto le fluttuazioni globali presenti a tutte le scale. Tali misure sono dominate dai contributi delle grandi scale. Ne segue che la statistica ad un sol punto non è sensibile all'intermittenza delle piccole scale. La statistica sperimentale a un sol punto per le fluttuazioni del campo di velocità in due dimensioni mostra un buon accordo della densità di probabilità con un andamento gaussiano, che indica assenza di *intermittenza a grande scala*.

Vale un discorso diverso per lo scalare: misure in esperimenti di convezione di Rayleigh-Bérnard della PDF a un sol punto del campo di temperatura presentano code esponenziali. Tale fenomeno di intermittenza a grande scala è caratteristico delle sostanze trasportate dai flussi turbolenti.

Capitolo 3

Modello di condensazione turbolenta

Nel capitolo 1 abbiamo mostrato come il modello classico di condensazione fallisca nella previsione dell'evoluzione dello spettro dei raggi delle goccioline. In particolare in tale modello le gocce crescono solo se l'ambiente è soprassaturo e con una distribuzione che anziché ampliarsi nel tempo si restringe sempre più. Abbiamo altresì illustrato come la ragione di queste errate previsioni risiedano nell'oggetto preso come unità di analisi — il volume fluido, che in un ambiente turbolento, qual è la nuvola, non è un oggetto significativo. Infatti, per effetto della turbolenza, in breve tutte le particelle che lo compongono si separano a distanze confrontabili con quelle della nuvola stessa. Inoltre il flusso turbolento tipico della formazione di una nuvola cumuliforme è la convezione termica.

Pertanto le proprietà della convezione e del trasporto turbolenti, descritte nel capitolo 2, vengono ritenute cruciali per la comprensione dei meccanismi di condensazione.

Questo capitolo è quindi dedicato ad esporre il modello turbolento di condensazione che ho sviluppato per il mio lavoro di tesi, evolvendo i modelli esposti in [6, 33], ove si studia la dinamica turbolenta sull'intera nuvola, ma in una prima approssimazione in cui il flusso non è convettivo, e in [39, 40], ove al contrario si considera convezione turbolenta, all'interno però di un volume fluido.

Nel paragrafo 3.1 verranno presentate e discusse le equazioni del sistema, mentre nel paragrafo 3.2 verrà illustrato il modello successivamente impiegato per le analisi numeriche. In questo lavoro, infatti, non ho indagato la possibilità di risoluzione stocastica delle equazioni, ma ho affinato lo studio della condensazione mediante simulazioni al computer, includendovi le retroazioni realmente presenti in natura e nel modello. Nel paragrafo 3.2.4 verranno appunto discussi i vari regimi che il sistema può raggiungere a seconda degli effetti inclusi nella descrizione. Il modello qui esposto, infatti, non presenta campi passivi e soprattutto

permette alla parte lagrangiana del sistema (le gocce) di influenzare direttamente la parte euleriana (i campi turbolenti).

Alcune delle proprietà statistiche dei campi turbolenti possono essere riprodotte sfruttando modelli stocastici, come il modello di Kraichnan ([15]) adottato in [33]. Sotto opportune ipotesi per le proprietà statistiche dei campi euleriani, in [33] si risolvono le equazioni di Fokker–Planck ([32]) associate alla parte lagrangiana o si riesce a calcolare una stima della varianza della distribuzione dei raggi. Tali modelli indicano che anche sotto ipotesi irrealistiche, quali la deltacorrelazione dei campi, è previsto un’ampliamento dello spettro dei raggi, che tuttavia risulta insufficiente ($\sigma(R^2) \propto \sqrt{t}$ nel modello stocastico temporale). Non presenteremo dunque questi risultati, già approfonditi in [33], se non per quel che riguarda la stima della correlazione presente tra traiettorie e campo di soprassaturazione. Tale correlazione risulta responsabile dell’ampliamento dello spettro e della crescita dei raggi anche in ambienti mediamente sottosaturi (§ 3.2.3).

3.1 Modello turbolento

In questo paragrafo intendo generalizzare il modello di condensazione descritto nel paragrafo 1.2, introducendo le equazioni che governano il trasporto turbolento. Le variabili che determinano lo stato di condensazione nella nuvola sono cinque:

- il campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$;
- il campo di temperatura $T(\mathbf{x}, t)$;
- il campo di soprassaturazione $s(\mathbf{x}, t)$;
- le posizioni delle N gocce $\mathbf{X}_i(t)$.
- i raggi delle N gocce $R_i(t)$.

Dobbiamo dunque scrivere e discutere le equazioni che regolano l’evoluzione delle incognite sopra elencate nel modello turbolento completo oggetto di questo lavoro di tesi. Per le nozioni fondamentali di meccanica dei fluidi, che supporremo note, si vedano per esempio [23] o [2, 24].

Discuteremo volta per volta il ruolo svolto nelle equazioni dai singoli termini, tralasciando la discussione relativa all’avvezione e alla dissipazione, già ampiamente trattata nel capitolo 2.

3.1.1 Campo di velocità

Il sistema che vogliamo descrivere è il nucleo di una nuvola cumuliforme, immersa perciò nel campo gravitazionale terrestre e costituita da aria umida e da un numero elevato di goccioline non inerziali da essa trasportate. Il campo vettoriale di velocità del cumulo $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ può allora essere assunto incompressibile ($\partial \cdot \mathbf{v} = 0$) e risulta soluzione delle equazioni di Navier–Stokes per un fluido soggetto a gravità $\mathbf{g} = -g\hat{z}$ e in *approssimazione di Boussinesq*.

Questa approssimazione è applicabile in condizioni di incompressibilità e di piccole differenze di temperatura¹; in tali condizioni, infatti, le proprietà dei fluidi — quali per esempio viscosità, conduttività, calori specifici — dipendono debolmente dalla temperatura e possono essere considerate costanti e pari a quelle dell'aria secca. Per la densità del fluido vale un ragionamento leggermente diverso. Le sue variazioni, pure deboli, non possono però essere trascurate nel termine che immette energia nel sistema, ovvero il termine di gravità. Infatti ragionamenti di analisi dimensionale permettono di mostrare come il valore di questo termine possa essere confrontabile con quello di avvezione (§ 2.4.2). L'approssimazione di Boussinesq consiste allora nel porre densità costante in tutti i termini delle equazioni di Navier–Stokes, tranne che in quello gravitazionale. Omettendo la dipendenza dall'evento (\mathbf{x}, t) nei campi, le equazioni per il flusso incompressibile sono

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \partial \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_{a_m}} \partial p + \frac{\rho_a}{\rho_{a_m}} \mathbf{g} + \nu_a \partial^2 \mathbf{v} \quad (3.1)$$

ove ρ_{a_m} è la densità di riferimento ed è pari a quella media dell'aria a metà nuvola. Il termine in \mathbf{g} può essere semplificato al prim'ordine ricorrendo all'equazione costitutiva per la densità

$$\rho_a = \rho_{a_m} (1 - \beta(T - T_m)) \quad (3.2)$$

in cui $\beta = \frac{d}{dT} \log \rho_a$ è il *coefficiente di espansione termica*. Per un gas perfetto, come in ottima approssimazione è l'aria, dall'equazione di stato (1.4c) si ricava $\beta = 1/T$.

In definitiva il campo di velocità è soluzione delle equazioni di Navier–Stokes

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \partial \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_{a_m}} \partial p + (1 - \beta(T - T_m)) \mathbf{g} + \nu_a \partial^2 \mathbf{v} \quad (3.3)$$

Galleggiamento Il termine gravitazionale, esprimibile anche nella forma più compatta $\mathbf{g}T_m/T$, rappresenta la forza di Archimede per unità di massa

¹Per piccole differenze di temperatura s'intendono variazioni inferiori ai 10 K. Nel caso sotto esame occorrerebbe considerare nuvole oltre il chilometro di altezza per superare questo limite, mentre il nucleo analizzato è dell'ordine del mezzo chilometro

(*spinta archimedeana* o, come sovente in letteratura, *buoyancy*). Esso svolge il ruolo d'immettere energia cinetica nel flusso per mezzo delle differenze termiche. Infatti il suo effetto è quello di accentuare o attutire l'attrazione gravitazionale a seconda che la massa fluida sia più fredda o più calda della temperatura media: l'aria più calda, infatti, è meno densa e perciò tende a salire, mentre quella più fredda, essendo più densa, tende a scendere. Tale termine riveste quindi un ruolo cardine in atmosfera e soprattutto durante la formazione della nuvola, in quanto costituisce il motore del flusso e, in un ambiente stratificato, della convezione turbolenta globale. Si noti, inoltre, che tramite la spinta archimedeana il campo di temperatura risulta retroattivo su quello di velocità.

3.1.2 Campo di temperatura

Il campo scalare di temperatura $T(\mathbf{x}, t)$ è, quindi, sottoposto a trasporto attivo in virtù del termine di accoppiamento in βg . L'equazione che descrive questo trasporto non è che l'estensione turbolenta della (1.25a) vista per il modello classico

$$\partial_t T + \mathbf{v} \cdot \partial T = -\Gamma_a w + R_s(T, \mathbf{X}_i, R_i)s + \kappa'_a \partial^2 T \quad (3.4)$$

con $i = 1, N$ indice delle N goccioline.

Raffreddamento adiabatico Il termine $-\Gamma_a w$, come già mostrato, testimonia il raffreddamento subito dall'aria che salendo si espande pressoché adiabaticamente. La differenza sostanziale dal modello classico è che ora $w(\mathbf{x}, t)$ è un campo turbolento e non una caratteristica, costante e positiva, del volume fluido là considerato. Qui, poiché siamo in un contesto di convezione turbolenta, può assumere anche valori negativi, causando il riscaldamento dell'aria localmente discendente. Questo termine costituisce la forzante del campo termico e, tramite la spinta archimedeana, immette energia nel flusso.

Riscaldamento per condensazione Il termine $R_s s$ rappresenta il riscaldamento dovuto alla liberazione di calore conseguente alla condensazione di vapore sulle goccioline. Anche qui s non è più una quantità omogenea nel dominio spaziale, bensì un campo turbolento. Il coefficiente R_s può essere considerato in prima approssimazione costante nello spazio e nel tempo (considerando dunque l'effetto come medio e omogeneamente distribuito), ma in realtà ha una leggera dipendenza dal profilo termico verticale medio² e soprattutto è proporzionale

² R_s dipende dalla temperatura tramite A_3 , variando del tre per cento per grado. Tale dipendenza può essere sentita dal sistema solo per grandi escursioni termiche, come quelle presenti tra base e vetta della nuvola per effetto della stratificazione atmosferica (per maggiori dettagli si veda l'appendice A).

alla somma dei raggi delle gocce presenti in un intorno del punto considerato. Esprimendo in termini euleriani quest'ultima dipendenza, R_s è un campo

$$R_s(\mathbf{x}, t) \propto n(\mathbf{x}, t)\langle R \rangle(t)$$

In tal modo l'evoluzione lagrangiana delle goccioline viene ad influenzare la dinamica euleriana del campo termico (e quindi anche del flusso) per effetto della condensazione. Se però la concentrazione di gocce n è bassa ($n \lesssim 10^7 \text{ m}^{-3}$), questo contributo può essere poco importante.

3.1.3 Campo di soprassaturazione

Consideriamo il trasporto di vapore all'interno della nuvola osservando l'evoluzione del campo scalare di soprassaturazione $s(\mathbf{x}, t)$. Se il termine di riscaldamento nella (3.4) è trascurabile, tale trasporto risulta passivo; altrimenti si configura anch'esso come attivo. Considerando la versione turbolenta della (1.25b) classica, otteniamo

$$\partial_t s + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} s = A_1 w - \frac{1}{\tau_s}(\mathbf{X}_i, R_i)s + D'_v \partial^2 s \quad (3.5)$$

in cui τ_s è da intendersi $\tau_s(\mathbf{x}, \mathbf{X}_i(t), R_i(t))$.

Sorgente di soprassaturazione Il termine $A_1 w$ costituisce la sorgente di soprassaturazione determinata dal moto verticale. Come abbiamo già spiegato nel paragrafo 1.2.1, siccome salendo di quota s'incorre in una diminuzione di temperatura ($-\Gamma_a w$), la tensione di vapor saturo e_s (strettamente crescente in T) contestualmente diminuisce. Poiché e è più debolmente dipendente dalla temperatura, salendo di quota il rapporto e/e_s cresce e con esso s . Qui, però, $w(\mathbf{x}, t)$ è soluzione delle equazioni di Navier–Stokes e non una corrente ascensionale costante.

Assorbimento Il termine $-s/\tau_s$, che chiameremo *assorbimento*, determina il decadimento di soprassaturazione dovuto alla condensazione. Essa, infatti, contribuisce alla sottrazione di molecole di vapore a favore dell'accrescimento delle gocce. Il tempo di assorbimento della soprassaturazione τ_s dipende, istante per istante, dalla distribuzione dei raggi delle gocce (come diffusamente discusso in [34]) e in particolare è inversamente proporzionale alla somma locale dei raggi delle goccioline. Il suo inverso, analogamente al tasso di riscaldamento a cui è proporzionale ($R_s \tau_s = L_e \rho_a A_2 / c_{p_a}$), può essere visto come un campo euleriano

$$\frac{1}{\tau_s}(\mathbf{x}, t) \propto n(\mathbf{x}, t)\langle R \rangle(t)$$

che risulta nullo in assenza di gocce. Il parametro τ_s è quindi globalmente inversamente proporzionale al raggio medio che, nella fase di condensazione, varia molto lentamente ([22] indica da 5 a 15 μm in circa dieci minuti). I valori tipici di τ_s variano nell'intervallo $1 \div 10$ s nelle nuvole calde sviluppate e raggiungono $30 \div 60$ s nelle zone con una bassa densità di gocce (come osservato in [18]).

3.1.4 Posizioni delle gocce

Consideriamo ora il trasporto delle goccioline disperse all'interno della nuvola. Nel caso in cui la densità delle gocce sia prossima alla densità del fluido nel quale sono immerse, le traiettorie delle stesse sono approssimabili a quelle delle particelle di fluido. La traiettoria dell'iesima gocciolina è fornita allora dalla

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}_i = \mathbf{V}_i + \sqrt{2D_v}\boldsymbol{\eta}_i \quad (3.6)$$

in cui $\mathbf{V}_i = \mathbf{v}(\mathbf{X}_i(t), t)$ è la velocità del flusso nel punto in cui si trova la particella e $\boldsymbol{\eta}_i(t)$ è l'iesimo *rumore bianco*. Esso viene introdotto per descrivere le traiettorie lagrangiane in presenza di processi diffusivi (si vedano [15, 33]): l'insieme degli N rumori bianchi costituisce un processo stocastico vettoriale gaussiano a media nulla e deltacorrelato

$$\langle \boldsymbol{\eta}_i(t) \rangle = 0 \quad \langle \eta_{ia}(t)\eta_{jb}(t') \rangle = \delta_{ij}\delta_{ab}\delta(t-t')$$

La validità dell'approssimazione formulata dipende dal valore del *numero di Stokes* associato alle particelle: $St = \tau_g/\tau_f$, dove τ_g e τ_f sono assimilabili ai tempi di risposta rispettivamente della gocciolina e del flusso. In [33] è presentata una stima da cui si ricava che, per una gocciolina di raggio $R_i \approx 10 \mu\text{m}$ e densità $\rho_g \approx 1 \text{ kg dm}^{-3}$, in atmosfera il numero di Stokes vale circa $St \approx 0.02$. Nella fase di condensazione è quindi pienamente giustificata l'approssimazione delle goccioline come particelle fluide: infatti esse risultano ancora troppo piccole per risentire efficacemente dell'inerzia. Tale effetto (e quindi la coalescenza) inizia a diventare significativo per le gocce di raggio $R_i \approx 25 \mu\text{m}$, per le quali si ha invece $St \approx 0.14$.

3.1.5 Raggi delle gocce

L'evoluzione del raggio di ogni gocciolina è qui descritta in approssimazione quasistatica dall'equazione classica (1.25c)

$$R_i \frac{d}{dt}R_i = A_3 S_i \quad (3.7)$$

in cui $S_i = s(\mathbf{X}_i(t), t)$ è il campo di vapore nel punto in cui si trova la particella. Di conseguenza il valore della soprassaturazione che compare a secondo membro non è più dato in funzione del tempo, come nel modello classico, ma si ottiene dalla soluzione dell'equazione di trasporto (3.5) calcolata sulle traiettorie delle goccioline (3.6).

L'approssimazione quasistatica è pienamente giustificata anche considerando il trasporto turbolento nella nuvola. Infatti, come discusso dettagliatamente in [39], il tempo massimo impiegato dalle quantità termodinamiche locali per raggiungere l'equilibrio risulta comunque molto minore del tempo minimo che caratterizza le fluttuazioni turbolente in condizioni atmosferiche tipiche. Tali condizioni non sono verificate nel caso in cui si sia interessati al comportamento delle gocce in fase di coalescenza ($R_i > 25 \mu\text{m}$) e con un tasso di dissipazione di energia cinetica media specifica $\bar{\varepsilon}_v$ superiore a $0.02 \text{ m}^2\text{s}^{-3}$.

L'equazione di evoluzione del raggio può essere riscritta come

$$\frac{d}{dt}R_i^2 = 2A_3(T)S_i \quad (3.8)$$

La (3.8) riguarda l'evoluzione del quadrato del raggio di ogni singola particella. Per ottenere il valor medio e la varianza della distribuzione degli $R_i^2(t)$ al variare del tempo occorre mediare su tutte le possibili traiettorie lagrangiane $\mathbf{X}_i(t)$. Come vedremo nel paragrafo 3.2.3, tale operazione suggerisce che, se una correlazione fra le traiettorie lagrangiane e l'intensità dello scalare esiste, allora essa risulta cruciale nella determinazione del valor medio $\langle R^2 \rangle$ e della varianza $\sigma^2(R^2)$.

3.1.6 Equazioni del modello

Riassumendo, il modello convettivo turbolento per la condensazione qui proposto include cinque equazioni — tre per la parte euleriana e due per quella lagrangiana — tra di loro accoppiate:

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \partial \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_a} \partial p + (1 - \beta(T - T_m)) \mathbf{g} + \nu_a \partial^2 \mathbf{v} \quad (3.9a)$$

$$\partial_t T + \mathbf{v} \cdot \partial T = -\Gamma_a w + R_s(T, \mathbf{X}_i, R_i) s + \kappa'_a \partial^2 T \quad (3.9b)$$

$$\partial_t s + \mathbf{v} \cdot \partial s = A_1 w - \frac{1}{\tau_s} (\mathbf{X}_i, R_i) s + D'_v \partial^2 s \quad (3.9c)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}_i = \mathbf{V}_i + \sqrt{2D_v} \boldsymbol{\eta}_i \quad (3.9d)$$

$$\frac{d}{dt} R_i^2 = 2A_3(T)S_i \quad (3.9e)$$

dove si sono trascurate le deboli dipendenze termiche presenti in ciascuna quantità termodinamica ($\beta, \nu_a \dots$), poiché comportano variazioni inferiori all'ordine del percento per grado, come discusso in appendice A.

Se si considera un flusso *piano*³ e il riscaldamento per condensazione può essere trascurato, la dinamica turbolenta del campo di velocità e della temperatura risulta allora descritta dalla teoria di Bolgiano–Obukhov presentata al paragrafo 2.4.2.

Il sistema di equazioni descritto richiede una trattazione di tipo numerico, di cui ci occuperemo nei capitoli 4 e 5. Per lo svolgimento analitico dei conti, infatti, è necessario assumere ipotesi semplificative che risultano non verificate nei flussi reali. Uno studio utile alla comprensione teorica del problema nel limite di piccoli tempi di correlazione è presentato in [33].

3.2 Modello adottato

Una volta individuato il sistema di equazioni che regolano la dinamica del modello, prima di poter procedere colle simulazioni numeriche per lo studio degli effetti lagrangiani sulla condensazione, occorre comprendere a fondo quali regimi possano essere raggiunti dal sistema (3.9). Sarà così possibile una scelta oculata dei parametri del modello in modo da ottenere un flusso in convezione turbolenta, come esplicitato dall'oggetto di questo lavoro.

3.2.1 Codice pseudospettrale

A tal fine è necessario addentrarsi brevemente nel funzionamento del codice d'integrazione delle equazioni, onde comprenderne filosofia, possibilità e limiti. Per approfondimenti e dettagli in appendice B si può trovare una presentazione esauriente degli strumenti e dei metodi d'integrazione utilizzati dal codice nelle simulazioni.

La risoluzione numerica delle equazioni che compongono il sistema necessita evidentemente di una limitazione del dominio di definizione spaziale e temporale. Si considera quindi l'evoluzione dei campi euleriani e delle variabili lagrangiane in un dominio spaziale bidimensionale quadrato S di lato L nell'intervallo temporale di durata T .

³Per flusso piano s'intende un flusso la cui struttura, scelto in modo opportuno il sistema di riferimento, dipenda solo da due coordinate cartesiane, per esempio x e z . La terza componente del campo di velocità \mathbf{v} , in tali ipotesi, soddisfa un'equazione di avvezione-diffusione senza termine di accoppiamento col flusso nel piano xz . Ne segue che, senza perdere generalità, si può assumere che il campo di velocità possieda solo due componenti $\mathbf{v} = (u(x, z, t), 0, w(x, z, t))$.

Discretizzazione spaziale e trasformate di Fourier efficienti

La descrizione analitica di un campo definito su S prevede la conoscenza del suo valore in ogni punto $x \in S$. La conoscenza numerica del campo è invece necessariamente limitata a un numero finito di punti. Suddividiamo quindi il lato L in N intervalli di lunghezza $\delta x = L/N$ (il *passo griglia*), che definiscono una griglia di $N \times N$ punti $x_{ij} = (i\delta x, j\delta x)$. Il valore di N corrisponde alla *risoluzione* della simulazione.

La *discretizzazione* in spazio fisico si riflette in spazio di Fourier nell'analogia suddivisione del dominio \hat{S} in un reticolo di $N \times N$ punti distanziati di $\delta k = 2\pi/L$. La formulazione delle equazioni del modello in spazio di Fourier rende banali le operazioni di derivazione, che diventano semplici prodotti. Contemporaneamente, però, complica il calcolo di quelli che in spazio fisico sono semplici prodotti e in spazio di Fourier diventano convoluzioni. Il metodo *pseudospettrale* sfrutta la formulazione delle equazioni in spazio di Fourier per il calcolo delle derivate e passa in spazio fisico per il calcolo dei prodotti. Tale passaggio avviene per mezzo della *fast Fourier transform (FFT)* discreta, un algoritmo che consente il calcolo della trasformata di Fourier in un numero di operazioni vantaggioso, con conseguente diminuzione del tempo impiegato dalla simulazione.

Discretizzazione temporale e integrazione

Inoltre l'evoluzione delle variabili di interesse non può essere descritta numericamente su un intervallo temporale continuo: è necessario discretizzare anche il periodo T in *passi temporali* δt e utilizzare metodi di integrazione discreta delle equazioni evolutive.

Le equazioni di evoluzione dei campi euleriani sono integrate in due fasi successive. Nella prima si integrano esattamente i termini dissipativi, nella seconda si calcolano i termini avvevativi e iniettivi sfruttando il metodo pseudospettrale e applicando lo schema di integrazione temporale di Runge–Kutta. Differenti i casi in cui si impieghi una forzante casuale (per la velocità o la temperatura) e in cui il tempo di assorbimento della soprassaturazione sia valutato come un campo locale: è allora necessaria una terza fase d'integrazione, detta di *forzamento*, ove si integra la forzante schematizzata da un processo stocastico gaussiano deltacorrelato nel tempo.

Le equazioni di evoluzione delle quantità lagrangiane sono invece integrate con il metodo di Eulero (§ B.2.1).

Più complessa è la situazione che si presenta quando l'evoluzione lagrangiana diviene retroattiva sul campo euleriano s attraverso il coefficiente $1/\tau_s(x, z, t)$, proporzionale alla somma dei raggi delle gocce. Raggi e traiettorie sono integrate al prim'ordine con Eulero, mentre i campi al secondo con Runge–Kutta. Occorre

prestare attenzione a non rovinare la precisione del second'ordine integrandovi insieme un termine al primo. Per risolvere questo problema si è deciso di calcolare $R_i(t)$ e $(X_i, Z_i)(t)$ (e quindi $1/\tau_s(x, z, t)$) sì al prim'ordine con Eulero, ma ogni $\delta t/2$, coll'inconveniente — invero non significativo a questa risoluzione spaziale — di un raddoppio della durata delle simulazioni.

Parametri d'integrazione

Abbiamo già manifestato come l'intento di questo lavoro sia quello di valutare l'effetto della turbolenza di grande scala sulla microfisica delle nuvole. Pertanto il mio dominio d'integrazione ha dimensioni corrispondenti a quelle dell'intero nucleo della nuvola ($L = 0.5$ km). Le esigenze di calcolo pongono però un limite nella possibilità di arrivare a descrivere le scale microscopiche. Avendo, infatti, una risoluzione disponibile di $N = 128$ nodi per direzione spaziale, il passo griglia risultante sarà dell'ordine del metro ($\delta x \simeq 3.9$ m), sei decadi sopra i raggi tipici delle gocce. Le strutture spaziali dei campi di queste ultime scale, dette *scale sottogriglia*, non sono risolte dal codice e per esse ho ritenuto valido il modello classico (in particolare le gocce hanno una velocità e sentono una soprassaturazione interpolate da quelle calcolate dal codice sui quattro nodi più vicini, pesate secondo la distanza).

Sempre per esigenze di calcolo non è stato possibile inserire un numero di gocce compatibile con quello osservato in atmosfera. Ho quindi scelto di seguire un numero limitato di goccioline, in modo però da avere una popolazione ben distribuita sull'intero dominio e che possa quindi conoscere tutti i valori dei campi. Ho quindi immesso ventimila gocce, per un numero per cella di poco superiore a uno.

Tutti questi parametri sono compatibili con quelli adottati in [6, 33].

Velocità media nulla

Il metodo pseudospettrale richiede che il campo di velocità sia a media nulla. Se così non fosse, infatti, l'energia del sistema divergerebbe in breve tempo. Se si media l'equazione per la velocità questo concetto diviene più chiaro: partendo da un campo a media nulla, allo stato stazionario la media è ancora nulla; viceversa, se si parte con media diversa da zero, ad ogni passo la derivata temporale del campo medio non potrà che crescere, in quanto il contributo dissipativo, proporzionale a k^2 in spazio di Fourier, risulta identicamente nullo sul modo zero.

L'ambito della presente indagine è, invero, la formazione dei cumuli in atmosfera, che avviene in presenza di correnti ascensionali, cioè di flussi con velocità media positiva e verticale. Dall'utilizzo di un flusso a velocità media nulla, come in questo lavoro, potrebbe quindi scaturire una sottostima del campo di sopras-

saturatione, che cresce colla quota. D'altra parte qui stiamo studiando l'apporto alla condensazione di molti effetti importanti, isolandoli per meglio rilevarli, e tale apporto non viene alterato da questa eventuale sottostima.

3.2.2 Equazioni euleriane integrate

A questo punto occorre addentrarsi nelle equazioni realmente integrate dal codice pseudospettrale che ho implementato e successivamente utilizzato per le simulazioni numeriche. È bene subito precisare che tali equazioni non sono la mera trasposizione nelle unità del codice delle (3.9), poiché per il regolare funzionamento del programma di calcolo sono indispensabili alcuni accorgimenti, dovuti principalmente al fatto che i campi siano definiti sui nodi di una griglia piana e che quindi dispongano di una banda di Fourier limitata.

D'altra parte va precisato che qui non si mira a predizioni quantitative su nuvole reali, ma semmai a una disamina di diversi fenomeni ed effetti dei processi di condensazione; il codice impiegato permette, come si vedrà, quest'analisi, soprattutto in quanto l'interesse è concentrato sulla turbolenza pienamente sviluppata, ovvero all'interno del dominio inerziale. Ulteriori interessanti aspetti da includere in uno sviluppo futuro di questo lavoro di tesi verranno via via segnalati.

Unità di misura

Una conseguenza immediata di queste correzioni è l'impossibilità di una conversione uniforme delle grandezze in gioco dalle unità del sistema internazionale a quelle del codice.

Sarebbe per esempio corretto trasporre le unità facendo riferimento a parametri tipici del sistema: il rapporto tra scala integrale L nelle simulazioni e nella realtà definirebbe l'unità di lunghezza, come il simile rapporto per i tempi caratteristici $\tau_L = L/\sqrt{2E_v}$ (*eddy turn-over time*) ricavati dalle velocità tipiche fornirebbe l'unità temporale nel codice; per la temperatura infine si potrebbero riportare gli scarti verticali ΔT tra base e tetto della nuvola. In tale schema si avrebbero le unità fondamentali del codice (la massa non compare nelle equazioni del modello)

$$u_l^c = \frac{L^c}{L} \text{ m} \quad u_t^c = \frac{\tau_L^c}{\tau_L} \text{ s} \quad u_T^c = \frac{\Delta_{L^c} T^c}{\Delta_L T} \text{ K}$$

dove l'apice indica il valore assunto dalla variabile nel codice.

Tuttavia, questa procedura, pur garantendo una conversione fisicamente sensata, non permette di trasporre coerentemente tutte le grandezze in gioco. Infatti le esigenze di stabilità del codice, soprattutto, fissano alcuni coefficienti diversamente. Si prendano le diffusività (di dimensioni $[l]^2[t]^{-1}$): il fatto che il dominio

di Fourier non sia infinito costringe a scegliere dei valori che diano la possibilità di descrivere comunque bene le scale dissipative entro la risoluzione disponibile. Tali valori dipenderanno anche dal regime e dal campo e non sono quindi fissati dalla conoscenza dei vari L^c , $L \dots$

Invero questo limite risulta conveniente all'indagine, in quanto permette di considerare i coefficienti come parametri liberi in funzione dei quali studiare il comportamento del flusso, al fine anche di assestare il sistema nel regime desiderato.

Dovendo comunque esprimere i valori che intervengono nelle simulazioni con numeri che assumano un significato fisico più utile rispetto alle unità di campionamento, le grandezze nel proseguio saranno sempre espresse in termini dell'altezza del dominio L , del tempo impiegato mediamente a percorrerlo τ_L e del gradiente termico presente in verticale su tale distanza Γ_L (più precisamente, utilizzeremo il tasso Γ che introdurremo a pagina 75: rappresenta, come spiegato a pagina 87, l'incremento di fluttuazione termica tra base e vetta del dominio).

Iperviscosità

La limitatezza della griglia (nel nostro caso costituita da 128×128 nodi), quindi, consente una bassa risoluzione, che nello spazio di Fourier viene in parte spesa dai modi dissipativi e dalla banda di passaggio tra modi puramente avvevativi e puramente dissipativi. Diviene, quindi, importante migliorare la risoluzione del dominio inerziale, per esempio sostituendo i termini dissipativi con quelli di *iperviscosità*, nei quali il laplaciano compare elevato alla p , cosicché il passaggio divenga più netto e RI o RB siano più estesi. Nel caso della velocità, per esempio, interverrà il termine $(-1)^{p_v-1} \nu_{p_v} \partial^{2p_v} \mathbf{v}$, la cui trasformata di Fourier vale $-\nu_{p_v} k^{2p_v} \hat{\mathbf{v}}$.

Lo scotto da pagare è un accentuamento dell'*effetto collo di bottiglia*, causato dalla maggiore rapidità del trasporto energetico nel dominio inerziale rispetto al dominio viscoso; si verifica, perciò, un piccolo accumulo di energia intorno al modo k_η relativo alla scala viscosa. A bassa risoluzione questo problema potrebbe risultare nascosto e alzare celatamente lo spettro inerziale.

Inoltre si è già osservato come la turbolenza bidimensionale sia caratterizzata da una cascata energetica inversa, ovvero dalla piccola alla grande scala. Ciò comporta la necessità di introdurre nell'equazione per la velocità un termine di dissipazione a grande scala dalla forma $(-1)^{q-1} \alpha_q \partial^{2q} \mathbf{v}$, con $q \leq 0$ e intero (nello spazio di Fourier il nuovo termine di attrito agisce solo a numeri d'onda molto piccoli), allo scopo di evitare che l'energia del sistema diverga. Questo intervento si scarica automaticamente nell'equazione per la vorticità semplicemente sostituendo ω a \mathbf{v} .

In particolare in questo lavoro ho optato per il cosiddetto termine di attri-

to costante di Ekman f_L in cui $q = 0$ (ovvero $f_L = -\alpha_0\omega$), mentre per le iperviscosità ho scelto i valori $p_v = p_\omega = 8$ e $p_T = p_s = 2$.

Campo di vorticità

Nel paragrafo 3.1.6 abbiamo accennato al fatto che, quando in tre dimensioni la simmetria del sistema prevede una dipendenza del flusso da due sole direzioni spaziali, senza perdere generalità si può descrivere la dinamica mediante il campo di vorticità, considerando nulla la terza componente della velocità; ciò equivale a fogliettare lo spazio e a studiare il flusso su un piano rappresentativo di tutti gli altri. È precisamente quel che ho effettuato in questo lavoro di tesi. Le esigenze di calcolo, infatti, mi hanno imposto di analizzare il sistema in un dominio piano. Data la struttura verticale della nuvola cumuliforme ho considerato il piano verticale xz . Ragionando come nel paragrafo 2.3.3, ovvero prendendo il rotore dell'equazione per la velocità (3.9a) e tenendo conto che $\partial \times (1 - \beta(T - T_m))\mathbf{g} = -\partial \times \beta T\mathbf{g} = \beta\mathbf{g} \times \partial T$, l'equazione per il campo di vorticità risulta

$$\partial_t \omega + \mathbf{v} \cdot \partial \omega = \beta \mathbf{g} \partial T - \nu_a \partial^2 \omega \quad (3.10)$$

Campo di fluttuazione termica

Esaminiamo ora il campo di temperatura. Abbiamo già osservato come la stratificazione atmosferica generi un gradiente termico verticale medio, per cui l'ambiente risulta più freddo linearmente al crescere della quota. È possibile allora separare la temperatura T in una componente di profilo medio $T_g(x, z, t) = T_g(\zeta) = T_g(z_0) - \Gamma_g \cdot (z_0 + \zeta)$ (dove $\Gamma_g = -\partial_z T_g$ è il gradiente macroscopico) e in un campo di fluttuazione T' a media nulla ($\langle T'(x, z, t) \rangle = 0$):

$$T(x, z, t) = T_g(z) + T'(x, z, t)$$

Sostituendo in (3.9b), tenuto conto dell'indipendenza dal tempo e della linearità nello spazio (cioè della nullità del laplaciano) del profilo medio e sviluppato e portato a secondo membro il relativo termine avvertivo⁴, si ottiene

$$\partial_t T' + \mathbf{v} \cdot \partial T' = (\Gamma_g - \Gamma_a)w + R_s s + \varkappa'_a \partial^2 T'$$

⁴ Dalla semplice sostituzione di T con $T_g + T'$ deriva

$$\partial_t T' + \mathbf{v} \cdot \partial (T_g + T') = \Gamma w + R_s s + \varkappa'_a \partial^2 T'$$

Ma l'inerzia del profilo medio può essere semplificata ($\mathbf{v} \cdot \partial T_g = -\mathbf{v} \cdot \partial (\Gamma_g \zeta) = -\Gamma_g w$) e aggregata a secondo membro col raffreddamento adiabatico in un nuovo termine assimilabile di fatto a una forzante a grande scala per il campo di fluttuazione termica T' .

Equazioni nel codice

In definitiva, tralasciando per ora l'evoluzione delle traiettorie e dei raggi delle goccioline e concentrandoci sulla dinamica euleriana, dalle (3.9) e da quanto sopra esposto si ricava il sistema di equazioni integrato effettivamente dal codice:

$$\partial_t \omega + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} \omega = -\alpha_0 \omega - \beta g \partial_x T' - \nu_8 \partial^{16} \omega \quad (3.11a)$$

$$\partial_t T' + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} T' = \Gamma w + R_s s - \nu_2 \partial^4 T' \quad (3.11b)$$

$$\partial_t s + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\partial} s = A_1 w - \frac{1}{\tau_s} s - D_2 \partial^4 s \quad (3.11c)$$

dove i pedici dei coefficienti di dissipazione indicano il grado di iperdiffusività (ovvero la potenza del laplaciano); le (3.11) devono essere accoppiate alle

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\partial} \times \psi \hat{\mathbf{y}} \quad \omega = -\partial^2 \psi \quad (3.11d)$$

che chiudono il sistema⁵. Si noti che il campo di temperatura totale è stato sostituito dal campo di fluttuazione termica. Infatti anche la spinta archimedeica dipende solo dalla fluttuazione, in quanto il gradiente orizzontale del profilo verticale risulta ovunque nullo.

3.2.3 Equazioni lagrangiane e correlazione

Consideriamo ora la parte lagrangiana delle equazione del modello, ovvero quella che descrive l'evoluzione delle gocce tramite le loro traiettorie e i loro raggi quadri. I campi di soprassaturazione e velocità che intervengono hanno tempi di correlazione finiti e dipendenza spaziale non banale. In tali condizioni è preclusa la risoluzione analitica mediante la chiusura dell'equazione di Fokker-Planck⁶ per la distribuzione di probabilità, ma rimane possibile ricavare elementi importanti per l'analisi numerica successiva.

Il problema risulta identificato lagrangianamente dal sistema di equazioni⁷

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{X}(t), t) + \sqrt{2D_v} \boldsymbol{\eta}(t) \quad (3.12a)$$

$$\frac{d}{dt} R^2(t) = 2A_3(\bar{s} + s'(\mathbf{X}(t), t)) \quad (3.12b)$$

⁵In letteratura solitamente è attestata una spinta di archimede $+\beta g \partial_x T'$, ma considerando un dominio xy e non xz come qui. È quest'ultima scelta ad arrecare il segno negativo qui presente. Tuttavia quel che importa è l'identica equazione vettoriale.

⁶Si vedano [32] per lo studio di tali equazioni e [33] per una loro applicazione al caso della condensazione.

⁷Omettiamo gli indici delle gocce, perché vogliamo studiare il problema euleriano associato mediante la distribuzione di probabilità.

dove s' è la fluttuazione attorno alla soprassaturazione media temporale \bar{s} conosciuta dalla goccia lunga la propria traiettoria.

Crescita del raggio

Siamo interessati a conoscere il valor medio e la varianza della quantità euleriana⁸ r^2 , la cui evoluzione è determinata lagrangianamente dal sistema di equazioni (3.12). A tal fine integriamo l'equazione di evoluzione per R lungo una singola traiettoria lagrangiana

$$R^2(t) = R^2(0) + 2A_3\bar{s}t + 2A_3 \int_0^t s'(\mathbf{X}(t'), t') dt' \quad (3.13)$$

e sfruttiamo la distribuzione $P(\mathbf{x}, r^2, t)$ per mediare la soluzione ottenuta su tutte le possibili traiettorie lagrangiane definite dalla (3.12a)

$$\langle R^2 \rangle(t) = \langle R^2 \rangle(0) + 2A_3\bar{s}t + 2A_3 \int_0^t \int s'(\mathbf{x}, t') \left(\int_0^\infty P(\mathbf{x}, r^2, t) dr^2 \right) d\mathbf{x} dt' \quad (3.14)$$

Se, come intendiamo verificare, esiste una correlazione fra la presenza di particelle e la distribuzione spaziale dello scalare $s(\mathbf{x}, t)$, la densità di probabilità $P(\mathbf{x}, t) = \int_0^\infty P(\mathbf{x}, r^2, t) dr^2$ non è omogenea. Ne risulta la possibilità (verificata dalle simulazioni numeriche presentate nei capitoli 4 e 5) che la *media lagrangiana della soprassaturazione*

$$\langle s' \rangle_{lag} = \int s'(\mathbf{x}, t') \left(\int_0^\infty P(\mathbf{x}, r^2, t) dr^2 \right) d\mathbf{x} \quad (3.15)$$

sia non nulla nonostante la proprietà euleriana $\langle s \rangle_{eul} := \bar{s}$, in cui la media è intesa su tutti i punti dello spazio.

La presenza di correlazione è comprensibile qualitativamente grazie all'esistenza del processo di evaporazione: una gocciolina che sperimenti per un tempo prolungato una fluttuazione negativa può evaporare completamente, contribuendo alla sottrazione di goccioline dalle zone sottosature. In questo modo si verifica un meccanismo di selezione delle fluttuazioni positive, che differenzia in maniera netta il valor medio lagrangiano da quello euleriano. Come vedremo tale differenza si riflette sia sulla media di r^2 sia sulla sua varianza $\sigma = \langle r^4 \rangle - \langle r^2 \rangle^2$ che determina il fenomeno di ampliamento dello spettro.

Consideriamo un ambiente caratterizzato da un valor medio euleriano di soprassaturazione nullo ($\bar{s} = 0$). In un siffatto ambiente il modello classico prevede

⁸Denotiamo colle lettere minuscole le quantità euleriane corrispondenti alle lagrangiane caratterizzate dalla maiuscola, come del resto abbiamo fatto sinora.

l'arresto della condensazione e un valor medio $\langle r^2 \rangle$ costante. Se esiste un fenomeno di correlazione del tipo descritto qualitativamente dall'equazione (3.14), otteniamo che il valor medio lagrangiano produce comunque una crescita efficace di $\langle r^2 \rangle$ nel tempo.

Ampliamento dello spettro

In analogia a quanto descritto per il valor medio della variabile r^2 , analizziamo ora la sua varianza. Dalla (3.12b) otteniamo l'equazione per l'evoluzione di $\langle R^4 \rangle$

$$\frac{d}{dt} \langle R^4 \rangle(t) = 4A_3 \bar{s} \langle R^2 \rangle(t) + 4A_3 \langle s'(\mathbf{x}, t) R^2(t) \rangle \quad (3.16)$$

in cui nuovamente la media a secondo membro è sulle traiettorie delle goccioline e può essere scritta come

$$\langle s' R^2 \rangle = \int s'(\mathbf{x}, t) r^2 P(\mathbf{x}, r^2, t) d\mathbf{x} dr^2$$

quantità che risulta strettamente dipendente dalla correlazione presente fra il campo s' e la distribuzione spaziale delle goccioline.

Il meccanismo di selezione delle fluttuazioni, descritto qualitativamente sopra, suggerisce la presenza di correlazione. La formalizzazione di tale fenomeno è affidata alle equazioni (3.15) e (3.16), che non possono essere risolte analiticamente se non nell'ipotesi di deltacorrelazione temporale. Giacché tale ipotesi vanifica gli effetti di correlazione spaziale, si rende indispensabile l'analisi numerica del sistema completo, esposta nei capitoli 4 e 5.

3.2.4 Regimi raggiungibili

Retroazioni euleriane e lagrangiane

Come si può notare da una rapida scorsa delle (3.11), il flusso è descritto da un sistema di tre equazioni tra di loro accoppiate. Visto così il modello non è di facile decrittazione: quale regime può prender piede da una simile intercorrelazione? Infatti non riconosciamo a prima vista nelle (3.11) la possibilità di sviluppo di un regime canonico, di quelli analizzati nel paragrafo 2.4; gli scalari trasportati dal campo di velocità sono entrambi attivi e perdipiù in maniera concatenata: s agisce su T' , T' su ω (che è ovviamente a sua volta attivo sugli scalari).

Inoltre la temperatura non risponde interamente alle caratteristiche del campo ϑ del regime di Bolgiano: nella sua equazione, infatti, interviene anche il termine retroattivo del vapore $R_s s$, che non può essere considerato alla stregua di una

forzante di grande scala, vista la natura del campo di soprassaturazione. Il termine di riscaldamento per condensazione, tra l'altro, è di difficile interpretazione, in quanto contiene ulteriori dipendenze: il coefficiente non è, infatti, costante, ma dipende dal profilo termico verticale tramite A_3 e dalla somma dei raggi delle gocce circostanti il punto \mathbf{x} tramite A_4 ; è quindi $R_s(\mathbf{x}, t) = R_s(T_g(z), \sum R_i(t)(\mathbf{x}))$ in generale anche funzione di variabili lagrangiane.

Simile è il caso della (3.11c), ove, se τ_s può essere considerato costante al variare della temperatura (§ A.2), non si può trascurare la sua dipendenza dalla somma dei raggi delle gocce: $\tau_s(\mathbf{x}, t) = \tau_s(\sum R_i(t)(\mathbf{x}))$. Peraltro lo scalare s è attivo in maniera inedita rispetto a quanto visto nelle teorie classiche.

Vi è quindi un'ulteriore importante retroazione nascosta nelle (3.11), quella, appunto, dall'evoluzione lagrangiana presente in R_s e τ_s e quindi nella temperatura e nella soprassaturazione.

In una prima fase, pertanto, è conveniente cercare di isolare e osservare singolarmente le diverse dipendenze per discernerne il contributo. A tale scopo alcuni termini verranno considerati trascurabili rispetto ad altri e tralasciati.

Regimi analizzati

Poiché l'intento principale di questa tesi è studiare le dinamiche lagrangiane in una nuvola soggetta a convezione turbolenta, vogliamo ottenere un regime che simuli questa condizione, per quanto sul piano. Un regime rispondente a tali requisiti è quello di Bolgiano, già ampiamente illustrato.

Per operare in questo regime occorre che la retroazione della soprassaturazione sulla temperatura sia tanto piccola rispetto agli altri termini in gioco nella (3.11b) da potersi considerare spenta ($R_s \simeq 0$). Così s diviene uno scalare passivo, T' attivo nel senso di Bolgiano e forzato da un gradiente termico macroscopico. È questo il regime principale utilizzato nelle simulazioni. Alcune simulazioni, tuttavia, hanno preso in esame in via esplorativa anche la situazione a R_s diverso da zero ma costante (*convezione umida*, § 4.4)⁹.

Il variare del coefficiente di accoppiamento termico colla velocità ha permesso, poi, di confrontare gli effetti euleriani e lagrangiani tra i regimi di Kolmogorov–Obukhov–Corrsin ($\beta g = 0$, § 4.1), già oggetto d'indagine in [6, 33], e di Bolgiano–Obukhov ($\beta g > 0$, con accoppiamento più o meno intenso), fulcro, invece, di questo lavoro.

All'interno di quest'ultimo regime ho considerato valori differenti per i parametri Γ e τ_s . Nel primo caso ho lavorato soprattutto con un sistema forzato da un profilo termico verticale ($\Gamma > 0$, *Bolgiano instabile*, § 4.2), come richiesto

⁹Tra parentesi inchiamo i nomi con cui ci riferiremo brevemente nel testo ai vari regimi e il paragrafo in cui sono trattati.

dal modello, ma per confronto anche con uno da una forzante aleatoria isotropa ($\Gamma = 0$, *Bolghiano forzato*, § 4.3); ho altresì tentato di ottenere una configurazione di atmosfera stabile ($\Gamma < 0$, *Bolghiano stabile*), senza però trovare elementi per un'analisi dettagliata.

Nel secondo caso ho scelto valori di τ_s da infiniti a quasi nulli, osservando come il campo s passasse da una struttura identica alla temperatura a una sovrapponibile a quella della velocità (pag. 101). Inoltre — ed è questo il passo più importante di questa tesi — ho confrontato il caso a τ_s costante (*condensazione turbolenta non retroattiva*, cap. 4) col caso più realistico in cui invece dipenda localmente dai raggi delle goccioline (*condensazione turbolenta localmente retroattiva*, cap. 5).

Siccome in quest'ultimo caso diviene significativa la dinamica lagrangiana sull'euleriana, il terzo passo — considerare un sistema in cui le gocce rinascano continuamente — ha avuto effetti rilevanti per l'evoluzione del campo di vapore; qui ho analizzato le due possibilità in cui le nuove goccioline abbiano una distribuzione spaziale omogenea oppure dipendente dal valore di soprassaturazione presente (evoluzione con *rinascita incondizionata* e *condizionata* delle gocce, § 5.2).

Capitolo 4

Condensazione turbolenta non retroattiva

Questo capitolo, insieme al successivo, costituisce il nucleo della ricerca svolta. Tramite simulazioni al computer ho ottenuto alcune tipologie di regime turbolento bidimensionale, verificandone la consistenza colle previsioni teoriche presentate nel paragrafo 2.4. Ho quindi studiato, soprattutto mediante un'analisi di tipo lagrangiano, l'evoluzione del sistema costituito dal flusso e dalle gocce ivi immerse al variare del regime e per valori differenti dei parametri del modello. Questo modo di procedere mi ha permesso di effettuare confronti tra i risultati ottenuti sotto diverse condizioni del flusso (alcuni dei quali riportati in lavori precedenti) e di valutare la differente intensità degli effetti lagrangiani riscontrati.

La logica seguita è quella di un affinamento progressivo nell'analisi del problema dell'accrescimento per condensazione delle goccioline dei cumuli turbolenti, cercando da un lato di isolare i singoli contributi per comprenderne gli effetti, dall'altro di introdurre nelle simulazioni condizioni più rispondenti alla dinamica reale. Poiché la nuvola è sottoposta a convezione turbolenta e per esigenze di calcolo il dominio d'integrazione è bidimensionale, ho appunto lavorato principalmente nel regime di Bolgiano, con temperatura forzata da un profilo verticale medio di grande scala (§ 4.2); ho però studiato come riferimenti di confronto anche i comportamenti del sistema nei regimi di KOC51 (§ 4.1) e di Bolgiano a forzante stocastica e isotropa (§ 4.3).

Ho eseguito tre rilevanti passi successivi nell'analisi lagrangiana. I primi due hanno interessato il tempo caratteristico di assorbimento della soprassaturazione τ_s , inizialmente riguardato come una costante del sistema (cap. 4) e in una seconda fase considerato più correttamente come un campo localmente dipendente dal numero e dalla dimensione delle gocce circostanti (cap. 5). Infine ho considerato la rinascita delle gocce, tenendo perciò in conto del fenomeno presente in atmosfera del continuo risucchio nelle nuvole di nuclei di condensazione esterni

e quindi di nuove goccioline (§ 5.2).

Retroazione efficace della condensazione

Dopo l'esposizione della teoria turbolenta e del modello di condensazione e le premesse necessarie a comprendere funzionamento e logica del codice impiegato, siamo finalmente pronti per presentare le simulazioni vere e proprie. Come appena detto, sono tre le tappe di perfezionamento dell'analisi; qui siamo alla prima: in questa fase dinamiche euleriana e lagrangiana sono distinte, la seconda non potendo influenzare la prima. Più esplicitamente ciò significa che il flusso non è condizionato dalla presenza e dall'evoluzione delle gocce, se non globalmente attraverso quantità costanti e prefissate dalla loro distribuzione iniziale. Pertanto il sistema si assesterà in un certo regime indipendentemente da quel che accade via via alle particelle.

Ma dal punto di vista numerico, cosa significa trascurare l'influsso delle gocce sull'evoluzione dei campi? A pagina 78 abbiamo già mostrato come nelle equazioni del modello (3.9) siano due i coefficienti definiti su proprietà locali delle gocce: il tasso di riscaldamento per condensazione R_s e il tempo di assorbimento della soprassaturazione τ_s . Ebbene, a questo primo livello i due parametri lagrangiani saranno presi costanti; consideriamo per il momento trascurabile la loro dipendenza funzionale dalla somma dei raggi.

Quanto è corretto agire così? Semplicemente, come ribadito in precedenza, vogliamo isolare i singoli contributi ai processi di condensazione. L'intento è quello di raccordarci cogli studi simili presenti in letteratura e soprattutto ai [6, 33]. Si vuole quindi rendere il modello progressivamente più aderente alla situazione reale partendo con continuità da quella base. In questa prima fase l'attenzione è ancora rivolta a come la condensazione senta la presenza della turbolenza nel fluido e a come questa presenza possa accendere una correlazione col campo di soprassaturazione e provocare contestualmente un allargamento dello spettro dei raggi delle gocce.

Convezione turbolenta e condensazione

Se in [6, 33], però, la novità sostanziale era l'inclusione della turbolenza sull'intero nucleo della nuvola anziché sul singolo volume fluido, qui è considerare tale turbolenza convettiva — come del resto è in atmosfera.

Il primo affinamento è, allora, l'introduzione nel modello del campo di temperatura. Ciò, oltre a mettere in gioco una variabile determinante nei processi atmosferici, che sono perlopiù termodinamici, permette anche di studiare il comportamento delle gocce in regimi diversi al variare di alcuni parametri.

In particolare, al crescere del valore del coefficiente di Boussinesq βg diverrà viepiù efficace l'azione termica sul flusso.

Quanto le correlazioni tra evoluzione particellare e moto del fluido dipendono dal tipo di moto? Quanto l'allargamento dello spettro? Sono questi fenomeni sovrastimati o al contrario sottostimati in un regime non convettivo?

Per poter rispondere a questi quesiti partiremo da un sistema in cui il flusso non subisca retroazioni da altre variabili, tenendo però già in conto sia la temperatura sia la soprassaturazione. Poi vedremo come le fluttuazioni di densità causate dalla temperatura inducano l'accensione di un meccanismo convettivo ed entreremo nel dettaglio dell'analisi lagrangiana in questo stato.

È utile notare che in questa tappa i tre campi integrati sono tutti a media nulla; per la forma delle equazioni, se tutti i coefficienti sono costanti, tale media si preserva nel tempo. Su velocità e fluttuazione termica abbiamo già discusso nel paragrafo 3.2.1. Per la soprassaturazione osserviamo che integrare un simile campo è assai utile, in quanto mette in luce se l'accrescimento per condensazione sia dovuto o meno a correlazioni tra traiettorie e campi. Infatti, se la soprassaturazione media è nulla, un eventuale aumento medio del raggio delle gocce dev'essere imputato alla presenza di correlazioni ((3.9e))

4.1 Regime di Kolmogorov

4.1.1 Approssimazioni

Quando le fluttuazioni termiche sono troppo deboli per poter contribuire significativamente all'evoluzione del flusso — ovvero quando il termine convettivo non riesce a bilanciare quello avvevativo ($\beta g \partial_x T' \ll \mathbf{v} \cdot \partial \omega$) — la condensazione avviene in un ambiente turbolento in cui la velocità e la temperatura sono caratterizzate da variazioni relativamente graduali e a piccola scala. Questa situazione può essere approssimata nel modello di condensazione ponendo $\beta g = 0$. Sappiamo che non si tratta della condizione naturale in cui si formano gocce, ma è un primo approccio interessante per valutare l'effetto della turbolenza globale sul comportamento dell'intero nucleo adiabatico della nuvola.

Le equazioni (3.11) si riducono allora a quelle di un sistema in cui lo scalare passivo T' è avvevato da una velocità dal comportamento alla Kolmogorov. Lo scalare s , passivo per \mathbf{v} , può invece essere attivo o quasipassivo su T' a seconda che il riscaldamento per condensazione sia o meno rilevante. Se la concentrazione o i raggi delle gocce sono sufficientemente piccoli o ancora le fluttuazioni di vapore non sono così forti da attivare $R_{s,s}$, questo termine può essere trascurato. Più avanti analizzeremo meglio questo aspetto, che ora lasciamo in disparte, poiché in questa fase non è la presenza o meno di questo elemento

a determinare modifiche nel regime, non potendo la temperatura interagire col flusso. Tra l'altro, siccome — come spiegheremo — per piccoli valori del tempo di assorbimento la soprassaturazione ha una struttura ancorata a quella della velocità e dalla KOC51 sappiamo che ha pure la stessa legge di scala, anche $R_s s$ fluttuerà come il campo cinetico verticale, svolgendo in queste precise condizioni un ruolo analogo a Γw . In pratica, anche considerare il riscaldamento dovuto alla condensazione non sembra mutare troppo le proprietà termiche.

In definitiva ci aspettiamo che i campi scalino secondo la KOC51 (§ 2.4.1), laddove al generico scalare ϑ si sostituiscono i due campi scalari in oggetto. È bene precisare che affinché ciò sia vero occorre forzare stocasticamente la velocità, altrimenti il sistema decadrebbe non avendo sorgenti energetiche.

In [6, 33] è stata affrontata approfonditamente questa dinamica e pertanto non ci soffermeremo molto su questo regime e soprattutto sul dettaglio dei risultati che lì possono essere ritrovati.

La novità ora presente è l'introduzione della temperatura come ulteriore variabile del sistema. Potrebbe sembrare inutile e anzi ridondante in questa fase, ma ciò si rivela assai vantaggioso per diverse ragioni: intanto consente di ottenere un flusso base stazionario da cui accendere gradatamente la convezione; inoltre saremo in grado di confrontare anche in maniera quantitativa regimi differenti, avendo un riferimento preciso con grandezze ottenute nello stesso modello, ovvero a partire dalle stesse equazioni in cui alcuni coefficienti verranno ora spenti ora incrementati.

Pertanto per il regime di Kolmogorov segnaleremo solo quelle caratteristiche che saranno utili a questo confronto.

4.1.2 Analisi euleriana

Nell'integrazione numerica ho esplorato entrambe le possibilità, di riscaldamento per condensazione spento e attivo. Come ci si aspettava (si veda per i dettagli pagina 89), avendo scelto un tempo di assorbimento molto piccolo rispetto ai tempi del flusso ($\tau_s \simeq 0.41 \times 10^{-1} \pi^{-1} \tau_L$), la soprassaturazione ha una struttura che ricalca quella cinetica verticale e ciò permette alla temperatura di conservare un regime alla KOC51 anche nel caso di R_s positivo (nel quale, però, si nota un'organizzazione più a grande scala).

L'energia cinetica allo stato stazionario ha debolissime fluttuazioni: su una simulazione lunga addirittura venti τ_L ho riscontrato oscillazioni mai superiori al cinque permille¹! I campi scalari invece hanno energie specifiche in prima approssimazione sinusoidali con incrementi molto alti, dal cento per cento della

¹Non riporteremo i valori medi delle energie cinetiche, poiché per definizione di *turn-over time* valgono comunque 0.5 in unità $L^2 \tau_L^{-2}$

temperatura al più contenuto trenta per cento per la soprassaturazione. Da notare che queste fluttuazioni avvengono in maniera simmetrica rispetto al valore centrale. La temperatura nel caso a R_s positivo si comporta similmente, seppure con qualche picco superiore più marcato.

La forma assunta dal campo di soprassaturazione riproduce la struttura non intermittente del campo di velocità bidimensionale: molto sfumata, con fluttuazioni granulari e isotrope perlopiù a piccola scala. La temperatura, data l'assenza di un termine di raffreddamento, è dotata di alcune strutture più di grande scala con alcuni fronti a maggiore escursione (fig. 4.1).

Le funzioni di struttura del second'ordine scalano in ottimo accordo colle previsioni di Kolmogorov, ovvero secondo $r^{2/3}$, in un ampio intervallo di scale. Ciò accade pure per la S_T^2 , a condensazione interagente: l'unica differenza è che in questo caso la dissipazione termica è maggiore.

4.1.3 Analisi lagrangiana

Lo studio della dinamica particellare sospinta da questo regime non presenta ovviamente novità rispetto a quanto evidenziato in [6, 33]. Come ben visibile in figura 4.1 le gocce evaporano rapidamente nelle zone sottosature, mentre in quelle soprassature si nutrono del vapore e crescono: il meccanismo di selezione è evidente; altresì chiaro è come nelle zone in cui il campo è più intenso si ammassino più gocce o si ingigantiscano quelle presenti.

Mentre la media euleriana del campo, come atteso, rimane nulla, quella lagrangiana, dopo una fase iniziale in cui le gocce ancora non risentono del campo, cresce sino a un picco. Dopodiché le gocce susperstiti sono abbastanza grandi da poter navigare nella nuvola senza evaporare e pian piano, entro un τ_L , si decorrelano dal campo. La distribuzione di probabilità lagrangiana della soprassaturazione è traslata in avanti rispetto a quella euleriana; la forma rimane però simile nei due casi e costante nel tempo, con andamento di tipo approssimativamente gaussiano.

Si fa presente che per continuità col lavoro di Celani, Falkovich, Mazzino e Seminara, ho utilizzato il più possibile i valori impiegati nelle loro simulazioni per i vari coefficienti che intervengono nelle equazioni 3.9. In particolare le gocce sono state inserite nel dominio spaziale in maniera casuale e con un raggio quadro compreso tra 16 e 17 micrometri quadrati; è poi identica la risoluzione (128 nodi per lato), come pure la decisione di prendere un dominio corrispondente a quello dell'intera nuvola, privilegiando quindi la buona integrazione alle scale superiori a quelle del canonico volume fluido, all'interno del quale verrà ritenuta valida la teoria classica (illustrata, per esempio, in [31]).

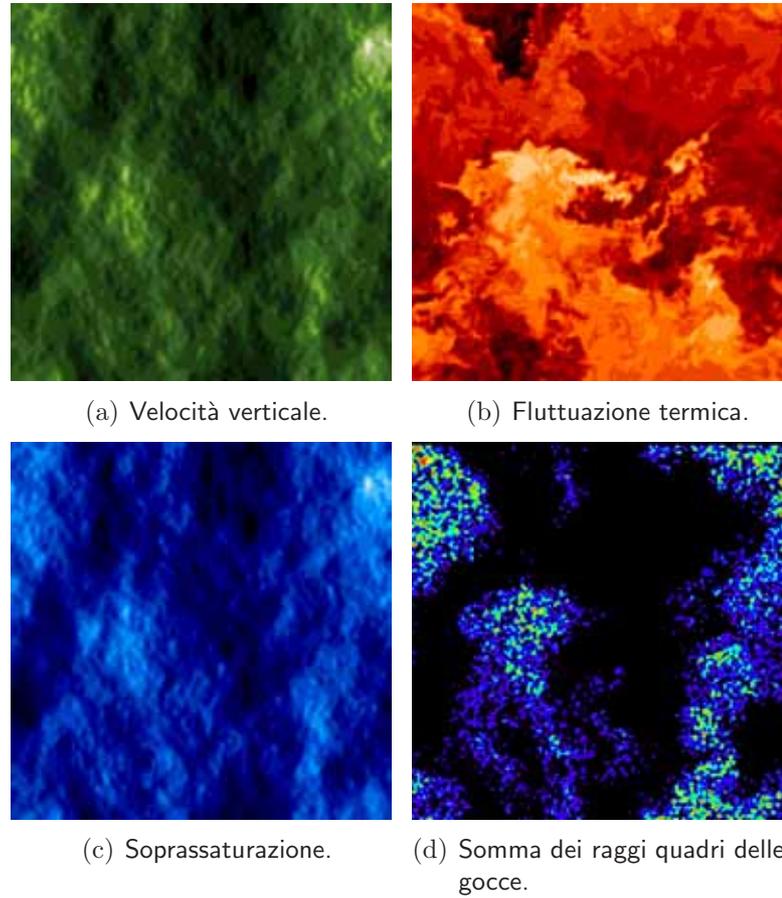


Figura 4.1: I campi euleriani nel regime di KOC51 ($\beta g = 0$; $\Gamma = +1$ Γ , $R_s = 0$; $A_1 = 0.5\pi L^{-1}$, $\tau_s \simeq 0.41 \times 10^{-1}\pi^{-1} \tau_L$) confrontati con distribuzione e dimensione delle gocce all'istante $t_{max} = 0.2 \tau_L$ in cui è massima la $\langle s \rangle_{lag}$ (simulazione lunga τ_L).

4.2 Regime di Bolgiano instabile

Siccome la convezione è un fenomeno presente durante la formazione delle nubi, dobbiamo finalmente tenerne conto: a tal fine il coefficiente di Boussinesq βg non può più essere tenuto nullo e va settato a un valore positivo tale da renderne efficace l'effetto sul flusso.

4.2.1 Scelta dei parametri

A questo punto, viste le equazioni, vorrei ottenere un regime di Bolgiano, descritto diffusamente nel paragrafo 2.4.2. In realtà restano tre questioni aperte per comprendere il comportamento dei campi.

Tasso di raffreddamento adiabatico e gradiente verticale

A pagina 75, separando il campo termico in uno di profilo medio più la fluttuazione turbolenta, abbiamo ottenuto a secondo membro un termine nella velocità verticale che non è più solo responsabile del raffreddamento adiabatico dell'aria ascendente, ma consta pure del gradiente dato dalla stratificazione atmosferica. Dal momento che il nuovo coefficiente $\Gamma = \Gamma_g - \Gamma_a$ è definito da una differenza di numeri entrambi positivi, ci si domanda chi prevalga. La questione è rilevante in quanto decide del segno del nuovo tasso verticale e quindi della dinamica del campo fluttuazione.

Si potrebbe obiettare: l'aria che sale in un processo adiabatico deve divenire più fredda; come potrebbe allora il tasso Γ essere positivo? Il punto è che l'equazione in cui compare Γ non è più quella per la temperatura totale, bensì solo per la sua fluttuazione a media nulla. Prendiamo ad esempio il caso isotermico, in cui il campo abbia un profilo medio verticale. Le equazioni lagrangiane per campo totale e fluttuazione sono, trascurando gli altri effetti, $\frac{d}{dt}T = 0$ e $\frac{d}{dt}T' = \Gamma_g w$. Ciò significa che una particella in ascesa non muta la propria temperatura; il fatto che $\frac{d}{dt}T'$ sia positivo indica solo che più va in alto, maggiore è la fluttuazione in cui s'imbatte, poiché minore è il profilo medio incontrato.

Torniamo alla nostra nuvola: qui, sotto il profilo lagrangiano, si hanno le evoluzioni $\frac{d}{dt}T = -\Gamma_a w$ e $\frac{d}{dt}T' = \Gamma w$. Il volume d'aria che sale, perciò, indifferente al segno di Γ , si espande adiabaticamente e si raffredda. Se però il gradiente negativo superasse in valor assoluto il tasso di raffreddamento adiabatico, incontrerebbe — come nel caso isotermico — una fluttuazione vieppiù calda colla quota. Viceversa, anche la fluttuazione trovata sarebbe via via più fredda all'aumentare di quota, sebbene a un tasso inferiore a quello con cui il volume si raffredda.

Pertanto il segno di Γ non distrugge la trasformazione adiabatica, ma è importante per la dinamica del campo turbolento di fluttuazione e quindi, attraverso la forza di Archimede, anche per quella del flusso. Infatti questo segno determina la stabilità del sistema.

La decisione più naturale di primo acchito è quella di prendere Γ negativa. Infatti il profilo medio in atmosfera modello vale appena due terzi del tasso di raffreddamento adiabatico. Perdipiù nel nucleo adiabatico della nuvola si può immaginare che l'aria sia tanto mescolata da ridurre ulteriormente la stratifica-

zione. Il ragionamento è: l'aria calda sale e si raffredda, la fredda scende e si riscalda e così via. Caldo e freddo s'intendono nel senso della fluttuazione T' , ovviamente. Tuttavia le simulazioni condotte in questa situazione indicano univocamente un comportamento ben diverso: i campi divengono sempre più lisci e laminari piuttosto che turbolenti.

Come mai non vediamo il regime di Bolgiano? Perché questa non è convezione! Tutto il fluido si mescola in maniera stabile. Occorre invece un meccanismo che mantenga l'instabilità del sistema; occorre che Γ sia positivo, che il gradiente prevalga sull'effetto adiabatico. In tal modo l'aria in ascesa si riscalda ($T' > 0$), quella in caduta si raffredda ($T' < 0$). Data la periodicità del nostro dominio d'integrazione questo moto si riproduce nei domini soprastanti e sottostanti: il flusso è allora caratterizzato da colonne calde che salgono inframezzate da colonne fredde che scendono, come ben visibile in tutte le immagini del campo di velocità di questo paragrafo. Questo continuo giustapporsi di colonne molto fredde e molto calde genera instabilità, accende la convezione. Infatti la spinta archimedeica si nutre di forti sbalzi termici orizzontali ($\beta g \partial_x T'$ nell'equazione per la vorticità): all'interfaccia destra di una colonna ascendente si creano rapidi vortici orari, alla sinistra antiorari.

Se questa scelta potrebbe sembrare arbitraria e magari anche opposta alla realtà atmosferica, occorre però osservare che il fenomeno della formazione delle nuvole avviene in un ambiente fortemente instabile e convettivo. Le simulazioni numeriche indicano che in due dimensioni queste caratteristiche sono rispettate solo se Γ è positivo ed è quindi questa scelta quella corretta per simulare al computer la condensazione in un cumulo.

Tuttavia ho effettuato ricerche anche a Γ negativo, nel tentativo di trovare un regime di Bolgiano stabile. Infatti la teoria di Bolgiano–Obukhov non dipende dal segno del tasso verticale e quindi nulla osta a che possa esistere un simile regime. Alcune simulazioni hanno portato a flussi curiosi, ma non incoraggianti in tal senso.

Tasso di riscaldamento per condensazione

Occorre inoltre decidere quanto considerare influente il termine di riscaldamento presente nella (3.11b). Esso testimonia della liberazione di calore provocata dalla condensazione: se infatti l'ambiente è soprassaturo, è favorita la condensazione, che è una trasformazione esotermica; nell'ambiente sottosaturo, al contrario, l'acqua tende a tornare vapore, assorbendo energia dal sistema e quindi raffreddandolo. È un fenomeno che svolge un ruolo analogo al termine di assorbimento della soprassaturazione.

Il coefficiente R_s dipende dalla somma dei raggi delle gocce o , equivalentemente, dalla loro concentrazione media. Confrontando il termine di gradien-

te con quello di condensazione, nella realtà si ha per una concentrazione alta ($n \sim 10^8 \text{ m}^{-3}$) prevalenza del secondo; se, però, la concentrazione è abbastanza bassa ($n \sim 10^7 \text{ m}^{-3}$), è il primo ad essere maggiore. Nelle simulazioni numeriche attuali non è possibile introdurre un numero di gocce pari a quello di una nuvola ($N \approx 10^{18}$); ci troviamo, quindi, necessariamente nelle condizioni di bassa densità di gocce. Inoltre nella fase di condensazione le gocce si trovano a una distanza relativa e con un raggio tali da risultare non interagenti, come invece accade nella successiva fase di condensazione. Queste osservazioni consentono in un primo approccio di trascurare il termine di condensazione assumendo $R_s = 0$.

Abbiamo inoltre già rilevato come la presenza di questa retroazione col vapore renda del tutto incontrollabile la dinamica del sistema: non sappiamo quale regime possa ingenerarsi e tantomeno se sia ancora convettivo. Volendo studiare il sistema in un regime classico di convezione turbolenta bidimensionale, come quello di Bolgiano, risulta assai utile poter considerare R_s nullo.

È questa l'approssimazione adottata in tutto il presente lavoro, in ciascuno dei tre passi effettuati.

Ho comunque realizzato alcune indagini per comprendere che regime possa instaurarsi a R_s costante e positivo.

Tempo di assorbimento della soprassaturazione

L'ultimo parametro da considerare con doverosa attenzione è τ_s . Già molto si è detto sul ruolo che può svolgere nel momento in cui divenga un campo funzione della densità locale di gocce e dei loro raggi. Soprattutto, si è caratterizzato questo primo passo nella ricerca proprio come quello in cui il tempo di assorbimento della soprassaturazione è costante. Costante, attenzione, nel senso di invariabile nel tempo e nello spazio. Ciò non toglie che possa essere variato da simulazione a simulazione, per meglio studiare come il suo valore possa mutare la dinamica del campo s e quindi l'accrescimento del raggio delle goccioline.

Il valore di τ_s , infatti, determina l'ordine di grandezza delle fluttuazioni medie di soprassaturazione. Da argomenti di bilancio nella (3.11a) tra termine di accrescimento verticale e di assorbimento della soprassaturazione, quando questa è omogenea e stazionaria vale la relazione

$$s \sim A_1 \tau_s \delta_L w \quad (4.1)$$

Siccome s non è attivo, il regime non subirà influenze dalle variazioni del parametro τ_s e pertanto l'incremento di velocità rimane sempre dello stesso ordine (è, insomma, fissato τ_L): il campo, quindi, si assesta su valori proporzionali al tempo di assorbimento. Conseguentemente, osservando l'energia scalare, si dovrebbe riscontrare una dipendenza quadratica ($E_s \sim A_1^2 \tau_s^2 E_w$).

Accade davvero ciò? E che significato ha un τ_s più o meno grande? Se riprendiamo la definizione del tempo di assorbimento possiamo meglio capire questo aspetto. A meno di coefficienti termodinamici non strettamente legati ai fenomeni puramente turbolenti (e si è già spiegato come la dipendenza nella temperatura di questi coefficienti si venga di fatto ad annullare reciprocamente), se lo si prende come costante del sistema, esso vale $\tau_s \propto 1/nR_0$, dove R_0 indica il raggio medio di partenza. Quindi effettuare analisi numerica a piccoli o grandi τ_s vuol dire simulare situazioni in cui si buttano più o meno gocce, con raggio più o meno grande. Dal momento che le mie simulazioni sono realizzate a parità di numero e raggio medio iniziale delle goccioline, ciò equivale ad avere una nuvola in cui le gocce possono essere considerate oppure no abbastanza numerose o grandi da sottrarre una più o meno significativa quantità di vapore al sistema.

4.2.2 Analisi euleriana

Ruolo del coefficiente di Boussinesq

Abbiamo ora tutti gli elementi per portare il sistema in un regime di Bolgiano allo stato stazionario. Poniamo quindi $R_s = 0$ e per il momento $\tau_s \rightarrow \infty$, in quanto vogliamo concentrarci inizialmente sulla dinamica euleriana dei campi velocità e temperatura (questa posizione significa, infatti, supporre assenza di gocce).

Accendiamo infine il coefficiente di Boussinesq, ponendolo diverso da zero e aumentandolo sino a ottenere il regime desiderato. Per βg dell'ordine dell'unità (nelle unità di campionamento del codice², nelle quali il Γ impiegato vale 0.25) iniziano a crearsi meccanismi convettivi, mentre all'ordine della decina si sviluppa in maniera limpida l'atteso regime di Bolgiano. In particolare ho svolto simulazioni con coefficiente pari a 10 e 25; in tutte le simulazioni successive si è utilizzato quest'ultimo valore, poiché la struttura del flusso è risultata la più aderente alla teoria descritta nel paragrafo 2.4.2. La ragione è semplice: ho settato diffusività e coefficiente di Boussinesq a valori maggiori in modo da spostare la scala di Bolgiano oltre la scala viscosa e allungare il dominio di Bolgiano in accordo alle (2.24),(2.25),(2.26) e (2.27). In tal modo non si presenta il dominio inerziale né le possibili sue influenze.

Al crescere di βg si nota un contestuale più che lineare³ aumento dell'energia

²Si utilizzano qui queste unità per meglio comprendere come e dove si raggiunga il regime. Infatti il tempo caratteristico del sistema diminuisce all'aumentare di βg , in quanto cresce l'energia: βg diversi hanno unità diverse. Comunque nelle unità interne al sistema si ha rispettivamente $(\beta g)_{10} \simeq 6.17 \Gamma^{-1} \tau_{L10}^{-2}$ e $(\beta g)_{25} \simeq 3.05 \Gamma^{-1} \tau_{L25}^{-2}$.

³Più precisamente osservo una crescita in $(\beta g)^{1.5}$ circa. Dalla (2.23) si desumerebbe, invece,

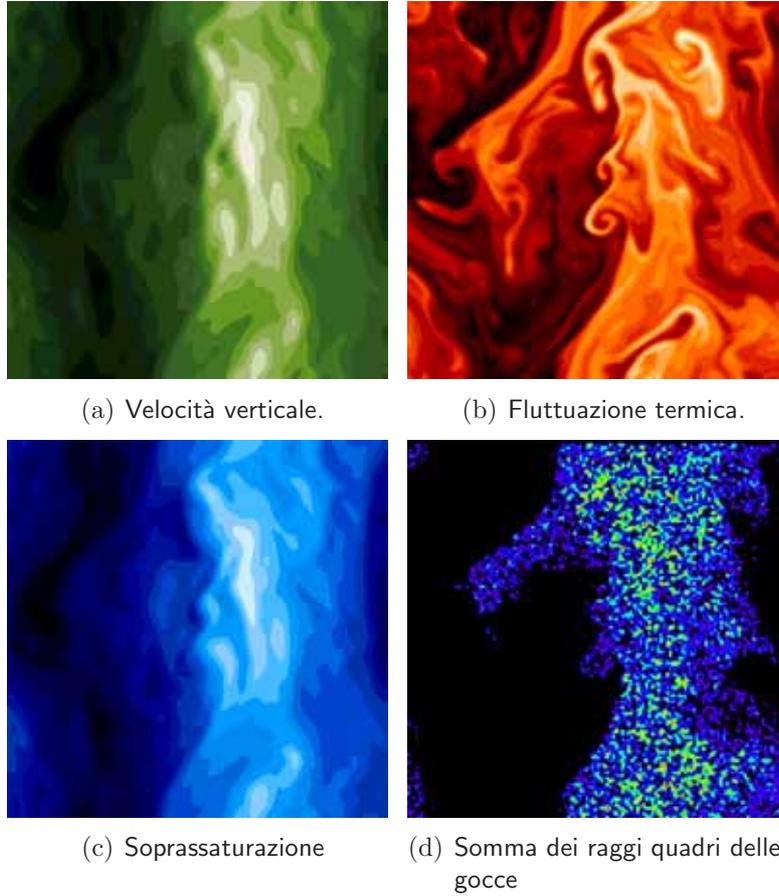


Figura 4.2: I campi euleriani nel regime di Bolgiano instabile ($\beta g \simeq 3.05 \Gamma^{-1} \tau_L^{-2}$; $\Gamma = +1 \Gamma$, $R_s = 0$; $A_1 = 0.5\pi L^{-1}$, $\tau_s = 0.45 \times 10^{-1} \pi^{-1} \tau_L$) confrontati con distribuzione e dimensione delle gocce all'istante $t_{max} \simeq 1.32 \tau_L$. Questa simulazione, lunga circa $1.43 \tau_L$, è la S_{i5} della serie di analisi lagrangiana in funzione dell'energia descritta da pagina 102. Nell'istante raffigurato l'energia cinetica sta raggiungendo un picco del quattrocento per cento del valor medio: la formazione di un pennacchio termico di grande scala è quasi completa.

del sistema. L'energia cinetica ha — è questo un punto decisivo — un andamento ben diverso dal caso passivo: le sue oscillazioni sono cospicue e irregolari. Il sistema è in uno stato stazionario, giacché simulazioni numerose e molto lunghe

un aumento dell'energia proporzionale a $(\beta g)^{2/5}$, ma occorre tenere conto che, visto che la temperatura è trasportata dalla velocità, anche ε_{TV} è funzione del coefficiente di Boussinesq e cresce con esso.

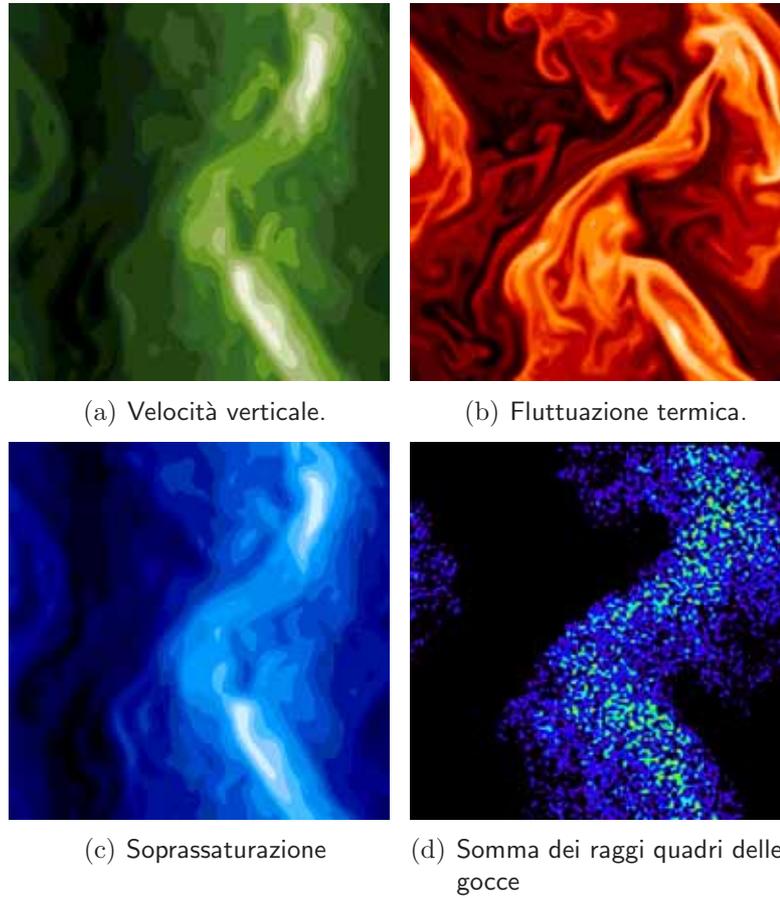


Figura 4.3: I campi euleriani nel regime di Bolgiano instabile (stessi parametri di figura 4.2) confrontati con distribuzione e dimensione delle gocce all'istante $t_{max} \simeq 0.19 \tau_L$. Questa simulazione, la S_{j6} della serie in funzione dell'energia, descrive la fase successiva a quella presente in figura 4.2: l'energia cinetica sta tornando verso il valor medio e il pennacchio di grande scala si sta iniziando a disfarsi.

(oltre la decina di *turn-over time*) indicano la ripetitività intorno agli stessi valori dell'andamento energetico. Quel che si vede in tutte le simulazioni è un'energia che oscilla asimmetricamente intorno a un valore stabile ma non mediano. Le oscillazioni sono di tutti gli ordini, da quelle piccole, relativamente simmetriche, a quelle grandi (dell'ordine del cento per cento), regolari nella frequenza, ma più ampie se rivolte verso l'alto. Infine, con frequenza irregolare le oscillazioni rivolte verso l'alto (cioè più energetiche) assumono ogni tanto dimensioni abnormi: il picco può raggiungere valori maggiori di oltre dieci volte rispetto a quello intorno a

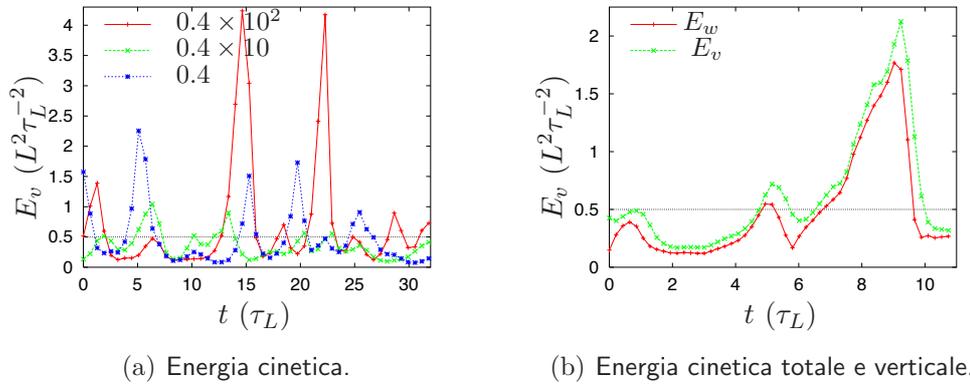


Figura 4.4: Energia cinetica in alcune simulazioni allo stato stazionario nel regime di Bolgiano; la linea orizzontale rappresenta l'energia media. La figura (a) si riferisce a tre simulazioni della serie descritta a pagina 96; la legenda indica i valori di τ_s in unit  $\pi^{-1} \tau_L$. La simulazione in figura (b)   la S_{i0} descritta a pagina 102 ($\tau_s = 0.45 \times 10^{-1} \pi^{-1} \tau_L$).

cui avviene l'oscillazione. Oscillazioni di questo tipo, data la dimensione, possono durare anche qualche τ_L . In figura 4.4(a) sono visibili alcuni di questi andamenti temporali.

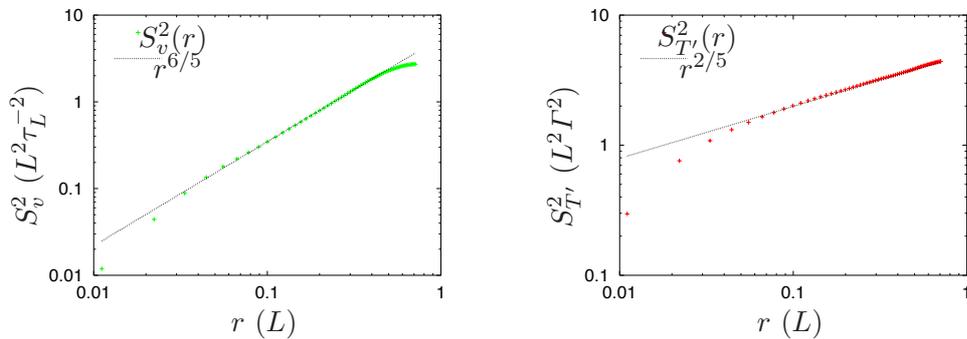
Quale fenomeno   responsabile di un simile comportamento, cos  distante dalle strette fluttuazioni di tipo sinusoidale osservate nei regimi passivi?   solo la convezione a scatenare questa instabilit  dello stato stazionario? Come vedremo nel caso a $\Gamma = 0$ e forzante casuale, in parte la responsabilit    della convezione. Infatti mentre le oscillazioni nel regime passivo sono inferiori al percento, nel caso attivo forzato sono del venti percento. D'altra parte che la retroazione termica crei forti fluttuazioni cinetiche era prevedibile: a pagina 84 abbiamo visto che gli scalari passivi hanno oscillazioni dell'ordine della decina di punti percentuali;   naturale che queste variazioni si scarichino sul flusso nel momento in cui lo scalare diviene attivo.

Tuttavia il sistema in convezione forzata presenta oscillazioni regolari e di ordine inferiore a quelle a tasso verticale positivo. La differenza deve, dunque, risiedere in questo fatto. Lo si pu  vedere bene in figura 4.4(b): l'energia associata alla velocit  verticale non   la met  dell'energia totale come in un sistema isotropo, ma si trova tra i due terzi e tre quarti;   quindi doppia o tripla dell'energia cinetica orizzontale.

Ma perch  la prevalente dinamica verticale genera dei picchi energetici tanto alti? Se si osservano nelle figure 4.2 e 4.3 le istantanee dei campi, specialmente del campo termico, si svela subito il motivo: come esposto nella teoria di Bol-

giano (pag. 58), la temperatura è caratterizzata da strutture ben organizzate sul cui sottile fronte sono presenti escursioni massimali. Siccome qui la forzante termica inietta energia in verticale, i pennacchi in questa direzione sono privilegiati e possono assumere dimensioni macroscopiche. In maniera irregolare si formano anche pennacchi grandi quanto il dominio: mentre si gonfiano accrescono smodatamente l'energia del sistema, la quale non torna a scendere sinché la struttura non viene incrinata, rotta e il pennacchio inizia a sgonfiarsi. Tali pennacchi possono essere sia molto caldi sia molto freddi: i primi si alimentano salendo, i secondi scendendo.

Questa dinamica è palese anche nelle energie scalari, che, diversamente dal caso passivo, seguono fedelmente le oscillazioni cinetiche, sia nella ritmo sia nell'intensità: le tre energie, opportunamente rinormalizzate al valor medio, sono sovrapponibili. Ciò significa che, per esempio, quando si formano, queste strutture raggiungono contestualmente valori estremi di velocità, temperatura e soprassaturazione.



(a) Funzione di struttura della velocità.

(b) Funzione di struttura della temperatura.

Figura 4.5: Funzioni di struttura dei campi euleriani (per la S_s^2 si vedano le didascalie in figura 4.6). Si può notare ottimo accordo colla legge (2.23). Non sono riportate le analoghe funzioni per i flussi di energia: nello stesso dominio di validità di Bolgiano per le S^2 si ha $\Pi_v \sim r^{4/5}$ e $\Pi_{T'} \simeq \text{cost}$.

Le funzioni di struttura e gli spettri dei flussi energetici scalano perfettamente secondo la legge di Bolgiano–Obukhov in un intervallo di scale piuttosto ampio (circa metà della banda disponibile), come osservabile in figura 4.5.

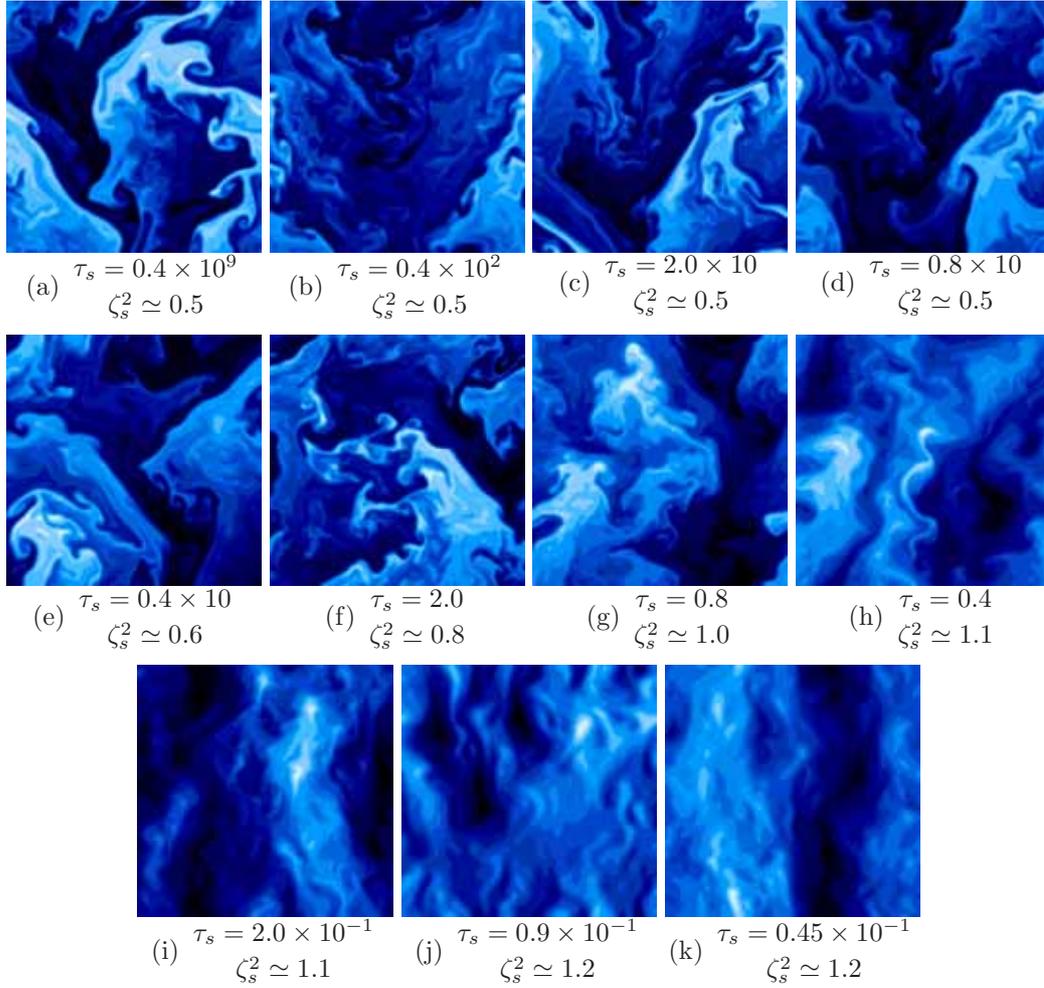


Figura 4.6: Campo di soprassaturazione al variare di τ_s (espresso in unità $\pi^{-1} \tau_l$) da pressoché infinito a molto piccolo. In didascalia è indicato l'esponente di scala della funzione di struttura $S_s^2 \sim r^{\zeta_s^2}$.

Ruolo del tempo di assorbimento

Una volta portato il flusso in uno stato stazionario e instabile alla Bolgiano–Obukhov, prima ancora d’immettere direttamente le gocce per seguirne l’evoluzione, occorre tenere conto della loro azione assorbente sul campo euleriano di soprassaturazione. Questo campo raggiungerà, infatti, stati stazionari differenti a seconda di quanto sia importante tale effetto, come si evince dalla (4.1), e la dinamica particellare va seguita in tali stati.

Siccome il parametro τ_s — come più volte ribadito — riveste un ruolo cardinale nell’analisi oggetto di questa tesi e negli sviluppi successivi, mi sono dedicato a un largo ventaglio di simulazioni caratterizzate da diversi tempi di assorbimento, partendo da un valore pressoché infinito a uno quasi nullo. Più precisamente ho condotto analisi numeriche a $\tau_s = 0.4 \times 10^9 \pi^{-1} \tau_L$ e poi via via a scendere su tre decenni al ritmo di tre per decade ($\tau_s = 0.4, 0.8, 2.0 \times 10^{-1} \div 10 \pi^{-1} \tau_L$).

Quali dinamiche ci aspettiamo per il campo di soprassaturazione? Quando il tempo è quasi infinito, che di fatto significa avere un termine di assorbimento nullo, ci attendiamo un campo identico a quello di temperatura. Infatti, poiché R_s e $1/\tau_s$ sono entrambi nulli, le due equazioni per gli scalari sono del tutto simili, a meno dei rispettivi coefficienti. Nel momento in cui riportiamo a valori più moderati il tempo di assorbimento, dovremmo osservare che da certi valori in poi il campo si discosta dalla temperatura e inizia a strutturarsi come la velocità. Inoltre, una volta scattato questo meccanismo, per quanto spiegato or ora, ci aspettiamo di veder decrescere il valore delle fluttuazioni linearmente con τ_s .

È precisamente quel che si osserva, come si può facilmente evincere dalle immagini in figura 4.6 (e dalle relative didascalie). È interessante notare come, mentre il flusso segue perfettamente le leggi di scala di Bolgiano (2.23) all’interno di un ben individuato intervallo di scale, gli esponenti per gli spettri della soprassaturazione variano con τ_s passando da una legge a potenza di tipo termico a una di tipo cinetico; sinché il passaggio tra i due tipi di struttura non è completo, si nota un campo dalle caratteristiche miste, come testimoniato da un esponente intermedio per la correlazione. In questa fase, correttamente, l’energia dello scalare passivo decresce col quadrato di τ_s : abbassando il tempo di assorbimento di una decade, anche s si porta una decade sotto. Questo è in effetti logico, poiché sale viepiù l’effetto assorbente, che, per l’appunto, erode vapore.

4.2.3 Analisi lagrangiana

Ho dunque ottenuto dei flussi convettivi instabili e stazionari. Possiamo, allora, finalmente calarci nell’oggetto della presente indagine: occorre inserire le gocce nel fluido e seguirne l’evoluzione. L’effetto delle gocce sui campi è in questa prima tappa costante nello spazio e nel tempo: lo stato stazionario per s è

ottenuto mantenendo costante il parametro τ_s . Ciò corrisponde a considerare la retroazione delle gocce in maniera efficace, cioè come se la popolazione di gocce fosse distribuita omogeneamente nello spazio.

Chiaramente al variare di alcuni parametri l'evoluzione lagrangiana delle particelle d'acqua può essere differente. Per esempio, a diversi tempi di assorbimento corrispondono stati stazionari differenti per il campo di vapore che guida la crescita dei raggi.

Aspetti comuni rilevati e differenze coi risultati in letteratura

Prima di entrare nel dettaglio di come questi parametri possano mutare i fenomeni di condensazione, è utile presentare una breve rassegna dei risultati comuni a tutte queste simulazioni, segnalando le differenze col regime di Kolmogorov.

Effetti turbolenti sulla condensazione La prima importante constatazione che deriva dall'osservazione di tutte le uscite delle svariate simulazioni è che tutti gli effetti descritti in [6, 33] persistono in questa nuova situazione. Questo risultato potrebbe apparire naturale, alla luce del modello presentato; è, invece, già di per sé rimarchevole e centrale. È quindi corretta e determinante l'inclusione della turbolenza globale effettuata in [6, 33] e ripresa qui. Ovviamente ciò non significa che sia questa inclusione l'unica responsabile dei fenomeni legati all'argomento dello spettro. Altri rilevanti effetti sono stati messi in luce in diversi studi, come già abbiamo discusso nel capitolo 1.

Resta da valutare con quali forma e intensità si manifestino ora questi effetti.

Correlazione tra traiettorie e campi euleriani Già da un primo esame delle istantanee dei campi — in particolare della soprassaturazione — raffrontate alle immagini della somma dei raggi quadri nei vari punti del dominio, che testimonia sia delle aree in cui si abbia maggiore concentrazione di gocce sia della loro dimensione, si può notare come normalmente si creino due aree ben distinte, l'una del tutto priva di particelle liquide, l'altra in cui, invece, si addensano. Quel che balza all'occhio (per esempio dalle figure 4.2) in opposizione al caso passivo è il fatto che le aree occupate o meno dalle gocce non siano tante, piccole e sfumate tra loro, quanto piuttosto macroscopiche e ben separate.

Ciò è dovuto alla struttura dei campi nella convezione, sia che s segua una dinamica termica sia una cinetica. Infatti abbiamo già detto come le fluttuazioni energetiche siano assai marcate e come il flusso sia caratterizzato da forti escursioni sui fronti dei pennacchi; abbiamo altresì rilevato come l'instabilità sia generata dallo scontro tra le due colonne calda ascendente e fredda discendente. Quel che accade è che le gocce che capitano inizialmente nella colonna fredda

sottosatura evaporano tutte velocemente, mentre le altre possono alquanto nutrirsi nella zona calda soprassatura. La struttura del flusso, quindi, separa subito la popolazione e ne seleziona una parte. La divisione netta nasce dalla natura dei sottili fronti. Questo però non significa che la correlazione sia più accentuata nei flussi convettivi, ma che si manifesti in modo spazialmente diverso.

Crescita dei raggi A garanzia che la correlazione tra traiettorie delle particelle e ambiente soprassaturo esista si può anche esaminare come evolve il raggio medio nel tempo. Giacché il campo di soprassaturazione è a media nulla, ci si aspetterebbe, in base alla (3.9e) che tale valore rimanga grossomodo assestato sul valore iniziale. Invece il raggio medio continua a crescere, proprio per il fenomeno appena descritto. L'andamento temporale di questa crescita devia non di rado dalla linearità, con momenti di accelerazione e di frenata legati perlopiù alle fluttuazioni dell'energia del sistema. È questa una delle caratteristiche che distingue il comportamento delle gocce in presenza di convezione turbolenta.

Numero di gocce evaporate Un'altra differenza notata rispetto al caso passivo è nella quantità di particelle che muoiono; la descrizione precedente potrebbe indurre a pensare che evaporino più gocce nella convezione. Invece avviene il contrario: alla fine di un tempo caratteristico τ_L evaporano tra il cinquanta e l'ottanta per cento di gocce in meno rispetto alla turbolenza che segue il regime di Kolmogorov.

Probabilmente ciò accade per quanto detto nel paragrafo 4.2.2: siccome i campi tendono a organizzarsi in due grandi zone caratterizzate da valori estremi e di segno opposto, le gocce inserite nel dominio a s negativo muoiono subito, mentre le altre riescono a condensare immediatamente così tanto vapore da riuscire a esplorare la nuvola senza più evaporare.

Media lagrangiana della soprassaturazione Un'altra peculiarità della condensazione nel flusso di Bolgiano è la forma dell'andamento della media lagrangiana della soprassaturazione. Diversamente da quanto avviene nel flusso in KOC51, qui non si distingue un andamento temporale regolare.

In comune entrambi i flussi hanno i primi istanti di evoluzione, quando tutte le gocce, aldilà di dove si trovino, sono ancora vive: infatti i loro raggi quadri sono distribuiti inizialmente in maniera omogenea tra 16 e 17 micrometri quadrati. Pertanto anche le particelle esposte a un ambiente molto sottosaturo impiegano un breve lasso di tempo per rispondere alle condizioni circostanti evaporando. Si può stimare quanto vale questo tempo necessario ad attivare la correlazione? Dalla legge di evoluzione dei raggi ($\frac{d}{dt}R^2 = 2A_3s$), supponendo s costante nei primi istanti, si ottiene l'approssimazione $R^2 - R_0^2 \simeq 2A_3st$. Le gocce inizieranno

ad evaporare quando, dopo un tempo Δt , il loro raggio si annulla essendo sottoposto a una soprassaturazione negativa media valutabile dell'ordine dall'energia scalare. La stima della durata del pianoro iniziale (*tempo di attivazione*) è allora

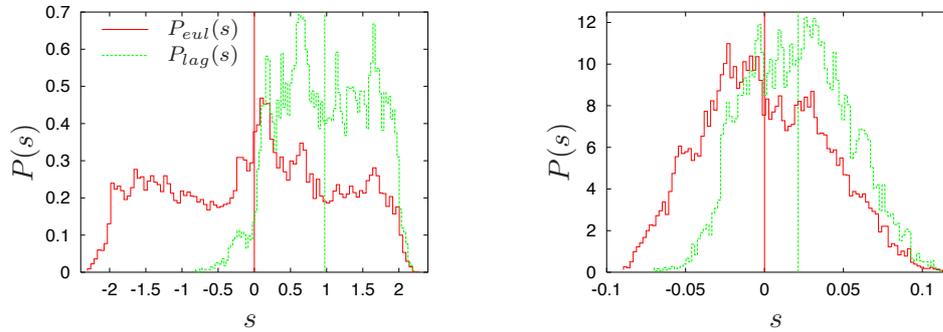
$$\Delta t \approx \frac{R^2}{2A_3 s} \quad (4.2)$$

Nell'ordine di grandezza questo piccolo valore è osservato regolarmente in tutte le simulazioni eseguite nel presente lavoro di tesi, come accadeva nel caso passivo.

Viceversa, dopo questo pianoro l'evoluzione di $\langle s \rangle_{lag}$ si differenzia. Gli andamenti però non sono riassumibili in un comportamento generale: può capitare che si raggiunga subito un picco e che poi avvenga pian piano la decorrelazione, come pure può accadere che il picco arrivi solo verso la fine di un τ_L ; sono osservati anche i casi di crescita continua per più di un τ_L o di più picchi di seguito, che indicano come si possa improvvisamente riaccendere la correlazione. Il confronto colle altre grandezze induce a concludere che questa irregolarità corrisponda quasi fedelmente a quella energetica. Quando le gocce superstiti son tanto grandi da poter attraversare anche le zone sottosature iniziano il processo decorrelante; ma se nel frattempo si forma un pennacchio di grande scala, anche E_s raggiunge valori estremi e pure queste gocce rischiano di evaporare del tutto, mentre quelle rimaste nelle zone positive possono crescere ancora. Per questo la comparsa di pennacchi termici può ritardare o momentaneamente spengere il fenomeno della decorrelazione, che alla lunga comunque porta $\langle s \rangle_{lag}$ a valori prossimi allo zero.

Distribuzioni euleriana e lagrangiana di soprassaturazione Anche nel confronto tra le distribuzioni di probabilità euleriana e lagrangiana della soprassaturazione si notano affinità e differenze tra dinamica scalare passiva e attiva. In comune — ed è il fattore di maggiore importanza in questa comparazione — si osserva ad ogni istante lo spostamento verso valori maggiori da parte della distribuzione lagrangiana, chiaro effetto della correlazione più volte richiamata.

Quel che cambia è, intanto, la forma delle distribuzioni: sia l'euleriana sia la lagrangiana in generale non sono più di tipo gaussiano (fig. 4.7). Si notano ora distribuzioni strette ora più larghe, spesso dalle lunghe code; il picco della distribuzione si trova talora intorno allo zero, come nel caso non convettivo, ma di frequente si riscontrano due picchi abbastanza simmetrici, uno positivo, l'altro negativo; infine sono attestate pure distribuzioni di forma irregolare tendenti al rettangolare. Il fatto interessante è che è possibile osservare queste diverse forme per entrambe le distribuzioni e durante l'evoluzione, potendo osservare un passaggio da una simile a una gaussiana a una sparpagliata e viceversa. Lo spostamento in avanti della distribuzione lagrangiana non avviene necessariamente con una traslazione rigida, ma anzi più frequentemente mediante un taglio del



(a) Distribuzioni di soprassaturazione a $\tau_s = 2.0\pi^{-1} \tau_L$ all'istante $t_{max} \simeq 1.27 \tau_L$.

(b) Distribuzioni di soprassaturazione a $\tau_s = 2.0 \times 10^{-1}\pi^{-1} \tau_L$ all'istante $t_{max} \simeq 0.32 \tau_L$.

Figura 4.7: Distribuzioni euleriana e lagrangiana di soprassaturazione tratte dalla serie in funzione di τ_s . Le linee verticali indicano il valor medio euleriano e lagrangiano nei rispettivi tratti. Altre simulazioni, confermando sempre l'effetto di correlazione, mostrano forme delle $P(s)$ anche molto diverse.

settore a valori negativi e/o un picco positivo più marcato. Infatti è da rilevare che la probabilità euleriana spesso è asimmetrica, per esempio piccata su valori positivi, ma più larga su quelli negativi (la media rimane ovviamente nulla).

Questa estrema variabilità — come si vedrà a pagina 102 — è ancora da attribuirsi alla dinamica instabile propria del regime di Bolgiano. Per esempio, se la distribuzione presenta un picco centrato sullo zero, si è in una fase di deboli oscillazioni energetiche; l'incorrere, invece, nei due picchi simmetrici è indice della presenza di due pennacchi macroscopici giustapposti, l'uno molto caldo e l'altro molto freddo, mentre la distribuzione più rettangolare è da attribuirsi alla fase di dissolvimento di tali strutture, quando valori molto alti dei campi si fronteggiano e iniziano a mescolarsi.

Ampliamento dello spettro dei raggi Non resta che analizzare il fenomeno centrale da cui siamo partiti nello studio di questo problema, ovvero l'allargamento dello spettro dei raggi delle gocce nel tempo. Osserviamo qui brevemente che questo effetto è visibile, ben distinto, peraltro talvolta contestualmente a una distribuzione bimodale.

Una tecnica più accurata per stabilire con quale rapidità avvenga l'allargamento è quella di seguire nel tempo l'andamento della varianza della distribuzione o della deviazione standard $\sigma = \sqrt{V(R^2)} = \sqrt{\langle R^4 \rangle - \langle R^2 \rangle^2}$. Nel capitolo 1 abbiamo descritto come nel modello classico per la condensazione la deviazione sia

costante nel tempo (e quindi lo spettro normalizzato col raggio medio si restringe), contrariamente alle osservazioni. Nelle simulazioni condotte la deviazione cresce nel tempo e lo fa a un ritmo più veloce dei modelli stocastici temporali (in cui la deviazione è proporzionale alla radice del tempo). Inoltre anche la quantità normalizzata $\sigma/\langle R^2 \rangle$ aumenta durante l'evoluzione in una forma analoga al caso passivo: una crescita rapidissima nei primi istanti da zero a un mezzo, per poi assestarsi su tale valore (che corrisponde a $\langle R^2 \rangle^2 = \frac{4}{5} \langle R^4 \rangle$). Ciò implica che non è soltanto lo spettro ad ampliarsi, ma, soprattutto, pure la distribuzione normalizzata al raggio medio.

Quindi ignorare la convezione turbolenta significa trascurare un fenomeno determinante nella preparazione della popolazione di particelle liquide tipica al momento dell'innescamento della coalescenza. Infatti tale fenomeno si attiva in presenza di gocce di dimensioni diverse; quelle grandi iniziano a risentire dell'inerzia, urtando e conglobando quelle più piccole. Nei paragrafi dedicati alla retroazione lagrangiana dovuta alla presenza delle gocce, discuteremo più nel dettaglio questo aspetto.

Ruolo del tempo di assorbimento

Se questi or ora descritti sono i caratteri generali della dinamica lagrangiana nel regime convettivo instabile privo di retroazione delle gocce sui campi, come variano, però, più nel dettaglio gli effetti al mutare di alcuni parametri? Parallelamente all'analisi euleriana discussa a pagina 96, è stata altresì studiata l'evoluzione particellare ai diversi tempi di assorbimento lì seguiti. Indugeremo solo su alcune salienti proprietà.

La caratteristica più evidente in questo contesto è daltronde quella che maggiormente mi attendevo alla luce di quanto esposto nella relativa analisi euleriana. Dal momento che l'ampiezza delle fluttuazioni del campo di soprassaturazione è proporzionale al tempo di assorbimento, è evidente dalla (4.1) che al diminuire di τ_s le fluttuazioni dello scalare decrescono, esponendo così le gocce ad ambienti vieppiù prossimi alla semplice saturazione. Il comportamento delle grandezze lagrangiane nei vari casi è comunque analogo, a meno del fattore di proporzionalità τ_s . Le differenze più sensibili nei loro andamenti si riscontrano tra le simulazioni in cui la soprassaturazione è ancorata alla velocità ($\tau_s \leq 0.4\pi^{-1} \tau_L$) e quelle in cui non lo è ancora interamente.

In questo secondo caso, infatti, il tempo di attivazione — che ricordiamo essere inversamente proporzionale alla fluttuazione tipica di s , ovvero a τ_s — è talmente breve, che la correlazione risulta pressoché istantanea. Similmente la crescita di $\sigma/\langle R^2 \rangle$ ha luogo nei primissimi istanti dell'evoluzione. Per lo stesso motivo poco meno della metà delle gocce evapora in un periodo inferiore ai $0.1 \tau_L$; in seguito la scomparsa delle gocce è molto più lenta. Ciò è anche dovuto al fatto

che il campo di vapore ha valori molto alti, creando una separazione molto netta tra la popolazione di gocce: quelle che si trovano alla partenza in zone sottosature evaporano immediatamente, mentre le altre riescono a divenire tanto grandi da sopravvivere molto a lungo.

Quando invece lo scalare passivo ha una struttura di tipo cinetico il tempo di attivazione è più lungo. In particolare si può osservare come la deviazione normalizzata in un periodo dell'ordine del tempo di attivazione salga da zero a un mezzo, livello da cui poi si discosta poco. Il ritmo di evaporazione delle particelle liquide è ora più blando, ma anche più regolare: le gocce impiegano più tempo a correlarsi col campo, del quale sentono valori meno estremi (in confronto alle simulazioni a grandi τ_s). Alla fine di un *turn-over time* muoiono meno gocce, ma si nota una differenza sempre minore al variare del tempo.

Per quel che riguarda la crescita dei raggi, è chiaro che essendo proporzionale a s essa sia anche proporzionale a τ_s . È questo, infatti, che si verifica nell'analisi numerica. Si possono distinguere tre gruppi di simulazioni, in base al raggio medio raggiunto dopo metà evoluzione ($0.5 \tau_L$): a grandi tempi di assorbimento ($\tau_s > 10\pi^{-1} \tau_L$) i raggi si assestano intorno al valore $\sqrt{\langle R^2 \rangle} \simeq 55 \mu\text{m}$; a tempi di assorbimento intermedi ($0.5\pi^{-1} \tau_L < \tau_s < 10\pi^{-1} \tau_L$) raggiungono valori oscillanti intorno ai $\sqrt{\langle R^2 \rangle} \approx 39 \mu\text{m}$; infine per piccoli tempi di assorbimento ($\tau_s < 0.5\pi^{-1} \tau_L$) intorno al valore assai minore di $\sqrt{\langle R^2 \rangle} \approx 8 \mu\text{m}$. Dopodiché i raggi quadri continuano a crescere a un tasso mediamente lineare e uguale a quello della prima fase.

Gli altri effetti lagrangiani non sembrano dipendere in maniera determinante da τ_s : le distribuzioni di probabilità e gli spettri dei raggi hanno, infatti, sì in generale code più lunghe a maggiori τ_s , compatibilmente col fatto che esperiscono valori maggiori di soprassaturazione, ma la forma di tali distribuzioni risulta influenzata da altri fattori, come per esempio l'energia del sistema.

Ruolo dell'energia cinetica

Come si è ampiamente discusso a pagina 90, una peculiarità rilevante del regime convettivo risiede nelle forti variazioni energetiche nel tempo associate al crearsi di pennacchi termici. L'indagine lagrangiana, allora, non può evitare di studiare come l'evoluzione delle gocce risenta di questi sbalzi energetici. L'allargamento dello spettro è più rapido a energie maggiori? La correlazione tra traiettorie e flusso in tal caso persiste e aumenta a causa della maggiore energia disponibile o invece diminuisce e magari scompare perché le gocce crescono tanto rapidamente da permettersi di navigare in tutta la nuvola senza più evaporare? Ancora, ci si chiede come varino questi comportamenti a parità di energia media, ma in fasi differenti, quali per esempio il momento in cui il pennacchio si forma o si dissolve.

Il metodo seguito in questo studio è stato quello di lanciare una lunga simulazione, corrispondente a circa undici τ_L ; ho così potuto osservare su un periodo sufficientemente lungo il comportamento dell'energia cinetica. In seguito ho lanciato nuove simulazioni più brevi, dell'ordine di tre mezzi τ_L , per coprire i tratti considerati più interessanti ai fini dell'analisi. È importante notare che tali simulazioni utilizzano come numero casuale di partenza per i propri calcoli lo stesso utilizzato dalla simulazione madre a quell'istante. Ciò significa che la dinamica del flusso è totalmente identica a quella dipanata nella prima simulazione, dal momento che l'evoluzione lagrangiana non è retroattiva sui campi. Nelle simulazioni più brevi stralciate dalla prima lunga, però, le gocce vengono inserite all'inizio di ciascuna simulazione e quindi a istanti diversi rispetto a quella madre (dove erano inserite una volta per tutte all'inizio); inoltre ho scelto uscite più fitte. Il risultato è una serie di differenti e più dettagliate evoluzioni lagrangiane.

In questa circostanza ho tenuto un tempo di assorbimento fisso che garantisca il bilancio tra $A_1 w$ e s/τ_s , ovvero una soprassaturazione agganciata al campo di velocità verticale e quindi con legge di scala identica a quella della funzione di struttura cinetica ($S_s^2 \sim r^{6/5}$). Tale tempo, $\tau_s = 0.45 \times 10^{-1} \pi^{-1} \tau_L$, risulta compatibile con quello di altri lavori presenti in letteratura ed è stato pertanto utilizzato anche nei passi successivi come valore iniziale del campo locale $(1/\tau_s)(x, z, 0) = (1/\tau_s)_0 \simeq 2.22\pi \tau_L^{-1}$.

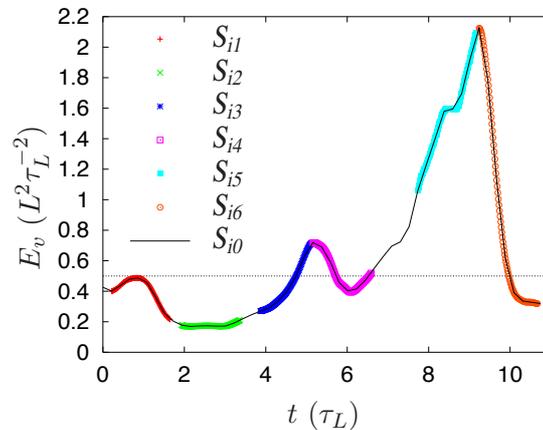
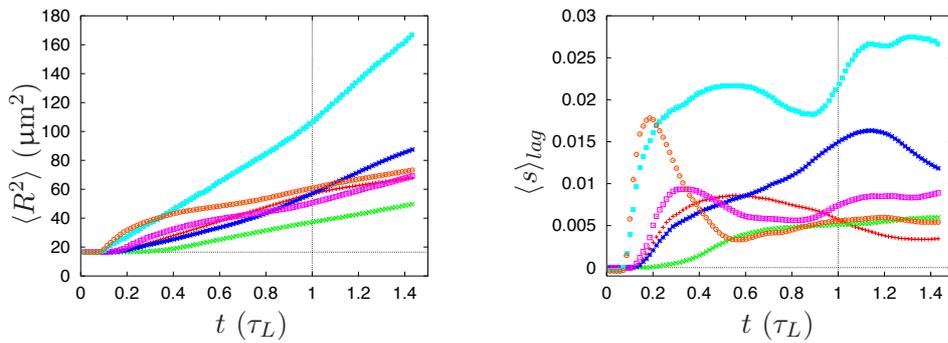


Figura 4.8: Andamento dell'energia cinetica specifica della simulazione madre (S_{i0}). I parametri del regime sono i medesimi elencati in figura 4.2.

Energie cinetica e scalari Come si può osservare in figura 4.8 la simulazione madre (S_{i0}) ha un andamento dell'energia cinetica specifica utile all'indagine, presentando tutte le situazioni tipiche: due deboli oscillazioni abbastanza

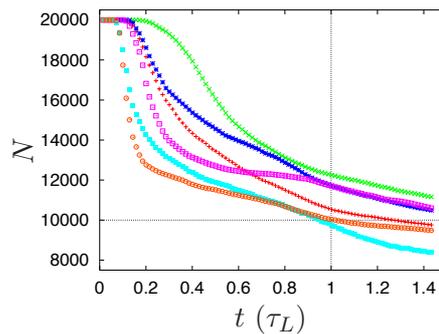
simmetriche, seguite da una ben più marcata ed energetica e infine da un picco abnorme rispetto all'energia media. Ho quindi seguito ulteriori sei simulazioni: la prima (S_{i1}) lungo la debole oscillazione iniziale, la seconda (S_{i2}) ad energia pressoché costante e le altre a valori di E_v o solo crescenti (S_{i3} , S_{i5}) o solo decrescenti (S_{i4} , S_{i6}) e con due diverse intensità, moderata o estrema (legata alla formazione di un grande pennacchio termico).

È importante rilevare come l'andamento energetico dei due scalari segua fedelmente quello della velocità, tanto da risultare quasi sovapponibile. Questo implica che le simulazioni a energie maggiori (S_{i5} e S_{i6}) sono caratterizzate anche da maggiori fluttuazioni di soprassaturazione, con tutto quel che ne consegue sul piano dell'evoluzione lagrangiana, come ora andremo a verificare. In particolare a fronte di un valore assoluto di s in media intorno al percento, nelle ultime due simulazioni esso raggiunge anche il tre percento.



(a) Media dei raggi quadri.

(b) Media lagrangiana della soprassaturazione.



(c) Numero di gocce vive.

Figura 4.9: Variabili lagrangiane nelle sei simulazioni a confronto. Per i punti vale la legenda in figura 4.8.

Crescita dei raggi Come osservabile in figura 4.9(a), la crescita del raggio quadro medio dipende chiaramente dall'energia del sistema e anche da come questa vari nel tempo. Entro mezzo τ_L , infatti, tale crescita è ordinata in base all'energia iniziale di ogni singola simulazione; nel proseguio delle evoluzioni, però, è la crescita o la decrescita di E_v a determinare l'accelerare o il decelerare del processo. Per cui, per esempio, S_{i6} — che descrive il momento del disfacimento del grande pennacchio — conosce una crescita rapidissima iniziale, ma alla fine si attesta su valori del raggio simili a quelli delle prime simulazioni. Si distinguono nettamente due simulazioni opposte: la S_{i2} , a energia bassa e costante, e la S_{i5} , a energia in ascesa vertiginosa. In questi casi la crescita è rispettivamente lenta e rapidissima. Da notare che mentre entro il mezzo τ_L i valori dei raggi non sono troppo separati, quando si arriva ad uno e mezzo si trovano valori ben distinti.

Numero di gocce evaporate La medesima dinamica è riscontrabile per le gocce che via via raggiungono il raggio nullo: la simulazione meno energetica è quella in cui alla fine sopravvivono più gocce, mentre in quella durante la formazione del pennacchio muore un terzo di gocce in più. Da notare, ancora, l'incrocio tra gli andamenti nelle fasi di formazione e di dissolvimento della struttura di grande scala: in S_{i6} l'evaporazione è subito la più marcata, ma a circa metà evoluzione ($0.72 \tau_L$), quando le rispettive energie cinetiche si equivalgono, è la S_{i5} , a E_v crescente, che inizia ad essere quella con meno gocce sopravvissute: alla fine ne saranno evaporate un terzo in più rispetto a S_{i2} (fig. 4.9(c)).

Media lagrangiana della soprassaturazione L'analisi più interessante riguarda la forma temporale della soprassaturazione media sperimentata dalle particelle, rappresentata in figura 4.9(b). Intanto notiamo come sia ben distinguibile il pianoro iniziale a $\langle s \rangle_{lag}$ nullo, testimonianza del fatto che quando τ_s è più piccolo è necessario un tempo maggiore per attivare la correlazione. In accordo colla stima fornita a pagina 98, notiamo altresì come il tempo di correlazione sia dimezzato per S_{i5} e S_{i6} : le gocce iniziano a risentire del campo tanto più rapidamente quanto più energetico è il flusso.

Balza inoltre subito agli occhi come in questo caso non sia il valore dell'energia a svolgere un ruolo centrale, bensì il suo andamento temporale. Vediamo, infatti, che laddove l'energia sia decrescente (S_{i4} , S_{i6}) il sistema riesce a raggiungere un picco di correlazione entro un tempo caratteristico; tale picco, tra l'altro, arriva prima quando il decremento di E_v è più rapido: ciò significa che le gocce trovano subito molta energia, sufficiente non solo a correlarsi, ma pure a raggiungere raggi tali da poter poi attraversare ogni zona della nuvola liberamente. In caso di bassa E_v costante (S_{i2}), invece, la soprassaturazione lagrangiana sale blanda e regolare senza essere in grado di raggiungere un massimo nei tempi di

evoluzione: probabilmente in tale caso le gocce richiedono un tempo molto lungo per riuscire ad ottenere una dimensione tale da garantirsi la sopravvivenza anche in zone sottosature. Infine quando E_v aumenta si nota un'andamento irregolare, caratterizzato anche da più picchi. Quel che accade è che se anche le gocce riuscono a iniziare il processo di decorrelazione, il campo euleriano nel frattempo, però, fluttua in un intervallo sempre più ampio, tanto da essere capace di far evaporare quelle particelle che si erano avventurate nelle zone sottosature; in tal modo la decorrelazione s'interrompe, ritardando il picco o innescandone uno nuovo. Nelle figure 4.2 e 4.3 sono riprodotte le istantanee dei campi euleriani in S_{i5} e S_{i6} confrontate con collocazione e dimensione delle gocce nel momento di massima correlazione $t_{max} = t(\max\langle s \rangle_{lag})$.

Non ci soffermeremo, invece, sulle distribuzioni di probabilità euleriana e lagrangiana del campo di vapore, in quanto il loro aspetto non sembra dipendere in modo determinante dall'energia del flusso, quanto piuttosto dalla struttura del campo. Vale quindi ancora l'analisi di pagina 99; in particolare è ricorrente una distribuzione caratterizzata da due picchi — e talora anche tre — disposti simmetricamente rispetto all'origine.

Ampliamento dello spettro dei raggi Gli spettri dei raggi, al contrario, hanno forme particolari a seconda dell'energia del sistema. Una comune peculiarità di queste distribuzioni, la *multimodalità*, svolge un ruolo importante rispetto all'oggetto di questa tesi: come già esposto nel capitolo 1, non solo in natura è osservato un allargamento spettrale contrastante colla teoria classica, ma sono pure tipiche distribuzioni bimodali, ovvero caratterizzate da due picchi, il primo a raggi paragonabili a quello di attivazione, il secondo a valori maggiori. È proprio questa popolazione diversificata a scatenare il processo coalescente quando il secondo picco raggiunge un valore critico. La multimodalità pare dipendere da come vari E_v , e quindi E_s (fig. 4.10): quando, infatti, l'energia cinetica è debole o decrescente la distribuzione è perlopiù disposta intorno al valor medio, mentre nel caso crescente si notano più massimi e la distribuzione appare approssimativamente bimodale, col primo picco sul raggio di partenza. Ciò è probabilmente causato dal fatto che il campo a energia calante, conoscendo fluttuazioni viepiù piccole, conduce le gocce in un'evoluzione pressoché comune, mentre nel caso opposto s , aumentando la propria escursione, separa le particelle: quelle nel nucleo dei pennacchi soprassaturi si accrescono rapidamente, mentre quelle sui fronti mantengono mediamente un raggio vicino a quello iniziale.

L'energia, poi, determina la lunghezza delle code destre degli spettri: si può infatti vedere come l'estensione dello spettro cresca con E_v , come evidente tenendo conto che maggiore è l'energia, maggiori sono le possibili oscillazioni dello scalare.

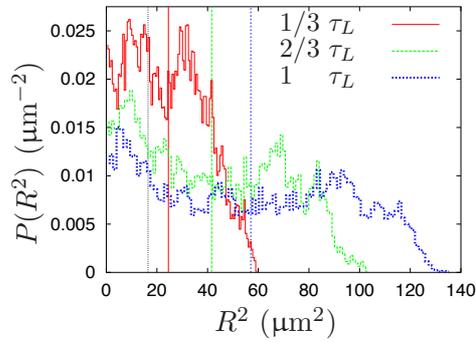
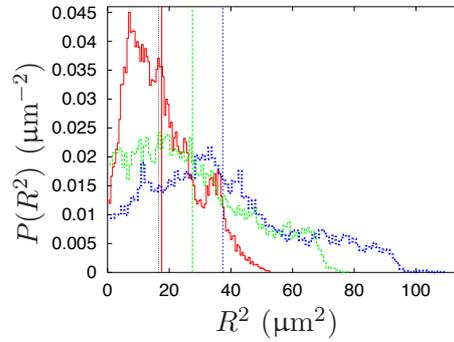
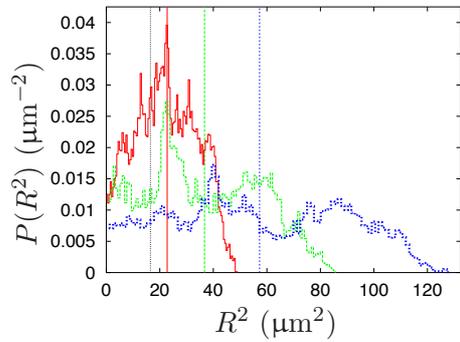
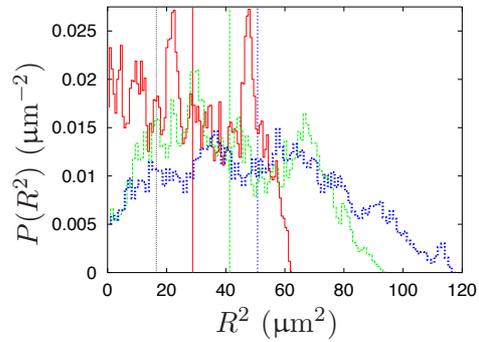
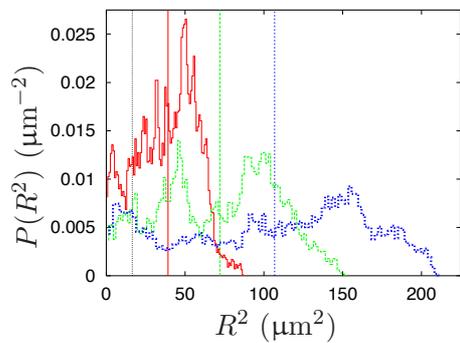
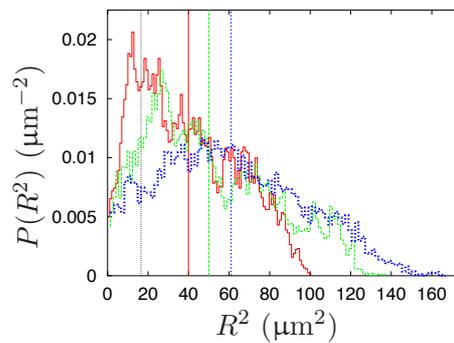
(a) Spettri dei raggi quadrati in S_{11} .(b) Spettri dei raggi quadrati in S_{12} .(c) Spettri dei raggi quadrati in S_{13} .(d) Spettri dei raggi quadrati in S_{14} .(e) Spettri dei raggi quadrati in S_{15} .(f) Spettri dei raggi quadrati in S_{16} .

Figura 4.10: Ampliamento dello spettro dei raggi nelle sei simulazioni. I tratti indicano i tre istanti riportati in legenda in figura (a); le linee verticali, inoltre, segnalano il raggio quadro medio iniziale (puntinato grigio) e ai tre istanti indicati dal relativo tratto.

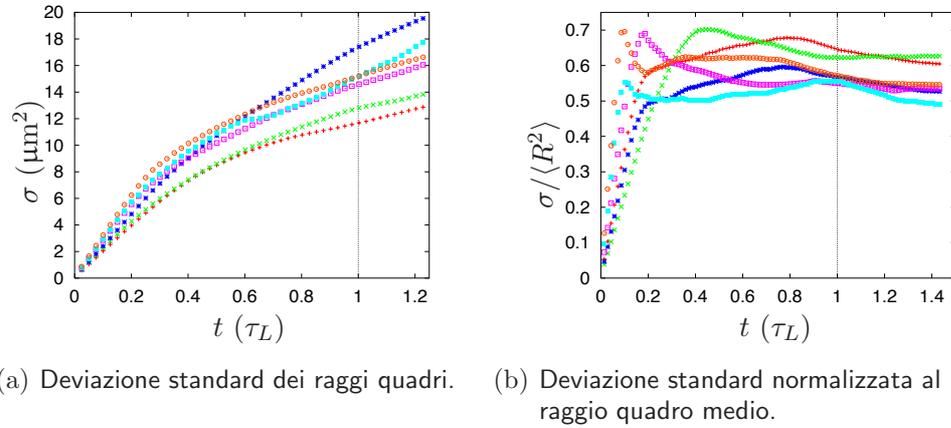


Figura 4.11: Deviazioni standard dello spettro dei raggi quadri. I punti indicano le sei simulazioni, come da legenda in figura 4.8.

L'allargamento vero e proprio è meglio valutabile mediante la varianza della distribuzione dei raggi quadri (fig. 4.11(a)) e la varianza normalizzata (fig. 4.11(b)). Nel primo caso ben cogliamo due elementi: σ cresce; prima — nella fase di attivazione della correlazione — rapidamente, poi quasi linearmente per E_v crescente o costante e secondo la radice temporale per E_v decrescente. A fine evoluzione, pertanto, la crescita si rivela nel complesso più che stocastica temporale, come già segnalato. Tuttavia è quest'ultimo andamento a instaurarsi quando il sistema perde energia, evidenziando un momento in cui il trasporto diffusivo diventa importante.

La varianza normalizzata mostra che gli spettri si allargano molto anche relativamente al raggio quadro medio. Tale allargamento relativo risulta più marcato a energie minori. Questo effetto implica che la distribuzione si amplia più rapidamente di quanto non si accrescano mediamente le gocce e che i raggi più alti presenti a maggiori energie rallentano leggermente tale processo.

4.3 Regime di Bolgiano forzato

È dunque completa la prima tappa dell'analisi della condensazione in un flusso in convezione turbolenta: ho sinora tenuto conto della retroazione delle gocce sui campi sotto due principali approssimazioni, quelle per cui tale effetto sia efficace ($\tau_s(x, z, t) = (\tau_s)_0$) e non influenzi la dinamica del flusso ($R_s(x, y, t) = 0$).

Prima però di passare allo studio successivo, voglio mettere alla prova i risultati ottenuti nel paragrafo 4.2, in particolare per quanto riguarda la dipendenza

di certi aspetti lagrangiani dall'energia del sistema e dalla sua estrema variabilità. Abbiamo infatti visto come il regime di Bolgiano instabile sia anisotropo e come le sue caratteristiche marcate oscillazioni energetiche siano principalmente dovute alla velocità verticale, presente nel termine di gradiente per la temperatura. Del resto l'ambiente di questo studio ha una struttura verticale. Quanto è determinante questa struttura? Quanto gli effetti rilevati sono dovuti all'instabilità verticale e quanto invece alla convezione in sé?

Come inizialmente si era preso a confronto un sistema turbolento che trasportava due scalari passivi, risulta ora utile considerarne uno con temperatura sì attiva, ma per la quale l'iniezione energetica non sia dovuta a un profilo medio macroscopico, quanto a una forzante stocastica e isotropa. Si può anche pensare a un siffatto regime come a una situazione in cui raffreddamento adiabatico e gradiente macroscopico si equivalgono ($\Gamma_a \simeq \Gamma_g$). Poniamo dunque $\Gamma = 0$ sostituendo nell'equazione per T' il termine Γw colla forzante $f_{T'}$ attiva alla grande scala.

Rispetto ai ragionamenti esposti nel paragrafo 2.4.2 nulla cambia e pertanto il nuovo regime si dovrebbe ancora configurare come Bolgiano–Obukhov, colla differenza che ora l'energia è iniettata lungo le due direzioni in maniera in media equivalente.

Che cosa muta nella dinamica dei campi e che cosa nell'evoluzione delle gocce in questo regime che chiamerò di Bolgiano forzato?

4.3.1 Analisi euleriana

Senza soffermarci su quegli elementi comuni alla dinamica euleriana del regime di Bolgiano instabile e al campo di soprassaturazione nei regimi individuati in precedenza (come per esempio la dipendenza di s dal tempo di assorbimento), concentriamo subito l'attenzione sull'aspetto fondamentale di questo contesto: l'isotropia della forzante termica. Osservando le istantanee dei campi, per esempio in figura 4.12, sono lampanti due caratteristiche. Innanzitutto il confronto colla figura 4.1 rende evidente che permangono le fisionomie salienti di un regime turbolento convettivo. Si esamini, infatti, l'immagine relativa alla fluttuazione termica: s'incontrano nuovamente pennacchi, fronti, strutture ben mescolate contrapposte bruscamente.

D'altra parte, affrontando lo studio in modo più quantitativo, ovvero mediante il calcolo delle funzioni di struttura dei campi su lunghi periodi, si ha conferma di queste impressioni: il regime trovato è in effetti in buon accordo colle leggi di scala di Bolgiano (2.23).

Quali discrepanze sorgono, invece, coi campi studiati nel paragrafo 4.2? Quel che emerge a prima vista, specialmente per quel che riguarda il campo di temperatura, è un flusso la cui intelaiatura non è più decisamente verticale, ma semmai

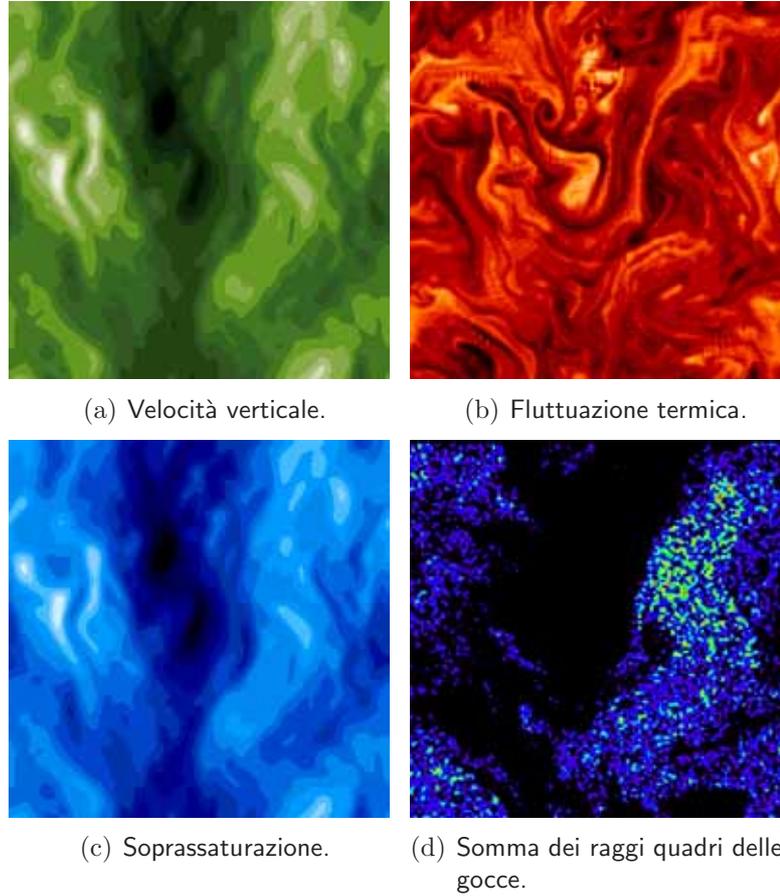


Figura 4.12: I campi euleriani nel regime di Bolgiano forzato ($\beta g \simeq 12.7 \Gamma^{-1} \tau_L^{-2}$; $\Gamma = 0$, $R_s = 0$; $A_1 = 0.5\pi L^{-1}$, $\tau_s = 0.22 \times 10^{-1} \pi^{-1} \tau_L$; l'unità Γ è quella del paragrafo 4.2) confrontati con distribuzione e dimensione delle gocce all'istante $t_{max} \simeq 0.81 \tau_L$. Questa simulazione, lunga circa $1.23 \tau_L$, è la S_{β} della serie di analisi lagrangiana in funzione dell'energia descritta nel paragrafo 4.3.2.

distribuita in maniera più omogenea nello spazio. Occorre comunque tener ben presente che il regime ora indagato non è in generale isotropo, in quanto la presenza del termine in \mathbf{g} nell'equazione per la velocità seleziona una direzione privilegiata. Tuttavia, traspare un fluido turbolento in cui la convezione si muove lungo più direttrici: si vedano, ad esempio, i pennacchi rivolti orizzontalmente.

La conseguenza di questa ossatura la si ritrova nell'andamento energetico. La forzante termica ora produce fluttuazioni casuali, mediamente uniformi, che tramite la retroazione sulla vorticità si scaricano sul flusso stesso. E_w contribuisce

ora all'energia totale in maniera paritaria a E_u , senza provocare quegli sbalzi abnormi legati all'ascesa a grande scala di pennacchi, che qui sono invece presenti a scale più piccole. È per questo che E_v mostra oscillazioni ben più attenuate e abbastanza regolari. In figura 4.13 si osservano escursioni massime del trenta per cento, con un'ondulazione frequente circa $1 \tau_L^{-1}$. Una moderazione relativa, se si ricorda che nel caso di temperatura passiva le oscillazioni erano dell'ordine del permille! Dunque Bolgiano si caratterizza in generale come un regime a grandi fluttuazioni di energia e la spiegazione è riposta, come più volte suggerito, nella presenza di pennacchi e fronti.

Altra importante differenza rispetto al caso instabile è nell'andamento delle energie scalari: mentre là erano sovrapponibili a quello dell'energia cinetica, qui si notano degli sviluppi indipendenti e pure di ampiezza differente: da un lato $E_{T'}$ presenta picchi in corrispondenza di quelli di E_v con una simile ampiezza massima di oscillazione (intorno al venti per cento), ma anche un procedere meno liscio, più nervoso; dall'altro E_s ha un andamento svincolato dai precedenti, non propriamente ondulatorio e che corre entro il cinquanta per cento del valor medio. Ciò ha un risvolto importante per l'analisi oggetto di questo lavoro, poiché indica che i valori di soprassaturazione esperiti dalle gocce non sono strettamente collegati all'energia cinetica del flusso, sebbene la dinamica del vapore sia invece asservita a quella cinetica per effetto del piccolo tempo di assorbimento impiegato ($\tau_s = 0.22 \times 10^{-1} \pi^{-1} \tau_L$).

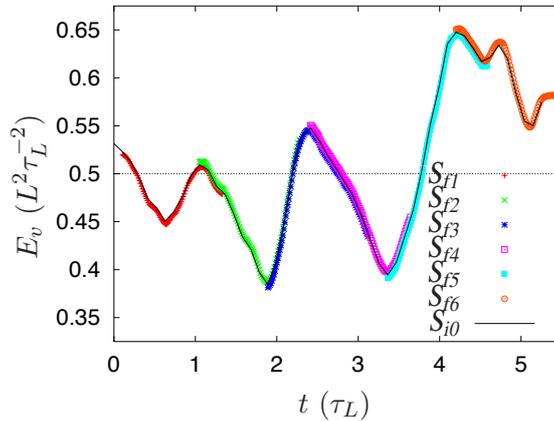


Figura 4.13: Andamento dell'energia cinetica specifica della simulazione madre (S_{f0}). I tratti delle S_{fi} sono sfalsati rispetto alla S_{f0} per evidenziare i periodi di evoluzione sovrapposti. I parametri del regime sono i medesimi elencati in figura 4.12.

4.3.2 Analisi lagrangiana

È legittimo allora chiedersi quanto sia ancor vero delle analisi condotte in funzione dell'energia per il regime di Bolgiano a T positivo. A tal fine ho svolto un'analogia indagine, studiando sei sottosimulazioni a partire da una simulazione madre S_{f0} lunga quasi sei τ_L (circa la metà del caso instabile, ma qui il *turn-over time* vale circa il doppio). La durata delle sottosimulazioni è stata riparametrata sul nuovo τ_L in modo da potersi confrontare in maniera ottimale colle S_{ij} . Anche qui si sono scelti tratti che coprissero i momenti salienti dell'evoluzione in S_{f0} , sebbene la maggiore regolarità delle oscillazioni abbia permesso di osservare soprattutto le due situazioni a energia crescente e decrescente.

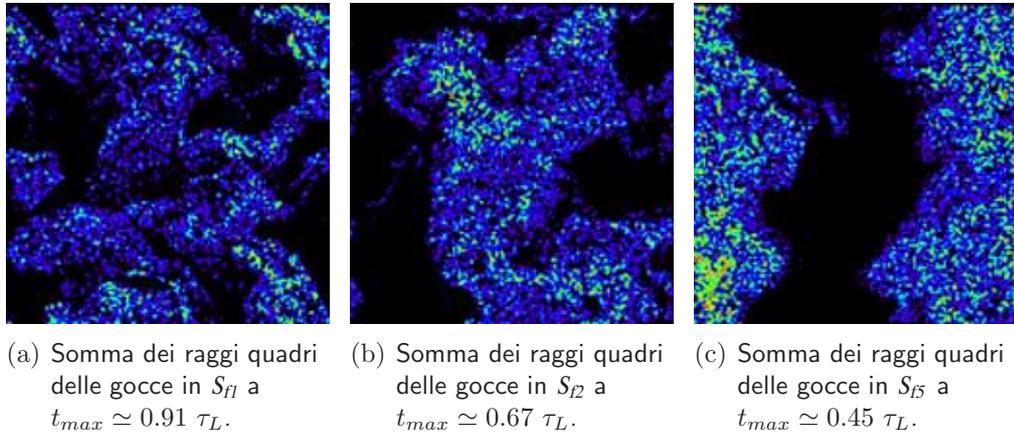
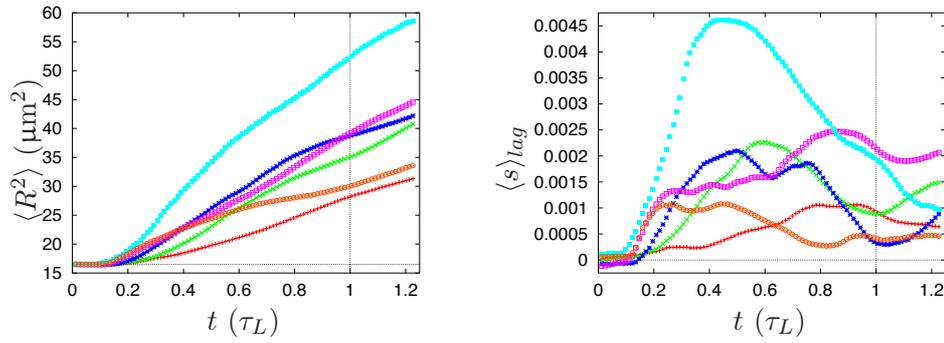


Figura 4.14: Disposizione e dimensione delle gocce in tre diverse simulazioni al massimo di correlazione: in (a) e (b) l'energia è di poco inferiore a quella media, in (c) sta crescendo verso il picco. Si prenda a confronto anche l'immagine 4.12(d), dove E_v è in fase calante.

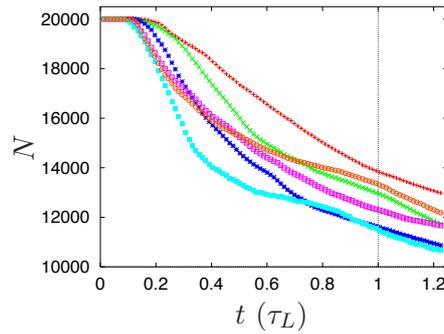
Correlazione tra traiettorie e campi euleriani Una prima conseguenza della struttura dei campi è riscontrabile osservando il posizionamento delle gocce nel dominio: rispetto al regime con gradiente verticale, qui si nota che le particelle non evaporate si addensano generalmente in più zone o in zone in cui esistono isole sottosature. Infatti, come appena rilevato, i campi hanno ora strutture a più scale. D'altra parte non muta l'effetto di forte correlazione che possiamo ritenere a questo punto tipico di Bolgiano: la dinamica convettiva, coi suoi fronti a cavallo dei quali gli sbalzi termici sono rilevanti, fa sì che territori sottosaturi e soprassaturi rimangano nettamente separati, confinando di fatto le gocce in questi ultimi, almeno sinché non cominciano a decorrelarsi.

Le simulazioni a energia minore mostrano un effetto di minore correlazione: nel momento in cui la correlazione è massima, infatti, la separazione tra zone popolate di gocce e spopolate appare meno netta (fig. 4.14).



(a) Media dei raggi quadri.

(b) Media lagrangiana della soprassaturazione.



(c) Numero di gocce vive.

Figura 4.15: Variabili lagrangiane nelle sei simulazioni a confronto. Per i punti vale la legenda in figura 4.13.

Crescita dei raggi Osserviamo ora in figura 4.15(a) la crescita del raggio medio delle gocce. Subito ravvisiamo una crescita piuttosto lenta se paragonata a quella del regime instabile. Ciò non deve però trarre in inganno, in quanto il sistema ha ora nelle unità del codice un'energia quattro volte inferiore; il che implica anche fluttuazioni dello scalare passivo più strette. Ma questo dipende da quanta energia viene iniettata tramite la forzante. Inoltre qui τ_s vale la metà.

Sono, invece, due gli elementi più interessanti: la crescita dipende dall'andamento dell'energia (abbastanza lineare per E_v crescente, ancora lineare ma meno pendente quando E_v cala) piuttosto che dal suo valore. Per esempio si segua

la S_{f6} : è la simulazione più energetica, ma le gocce vi crescono più lentamente che nelle altre. Ciò può dipendere dal fatto che — come si è visto — E_s ha una dinamica autonoma da E_v .

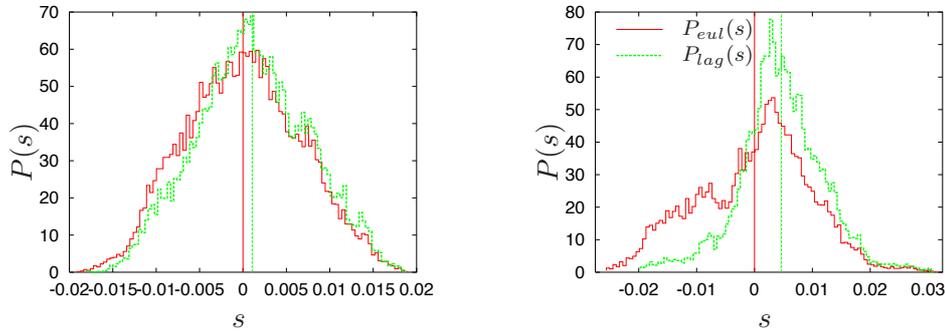
Le due simulazioni per cui tutti gli effetti lagrangiani risultano massimi (S_{f5}) o minimi (S_{f1}) rispetto alle altre quattro mostrano però un'altra caratteristica: quando l'energia è debolmente oscillante tali effetti sono attenuati, quando al contrario conosce una forte escursione essi sono più marcati.

Numero di gocce evaporate Ragionamenti del tutto simili derivano dall'esame della figura 4.15(c). Qui, inoltre, rileviamo come le piccole ondulazioni comportino un'evaporazione più regolare, mentre quando lo sbalzo energetico è forte si nota una morte di particelle molto rapida all'inizio e più lenta nel finale. Tale evoluzione è da attribuirsi al fatto che nella prima fase avviene una netta separazione nella popolazione di gocce e che quelle residue poi abbiano un raggio tanto grande da evaporare in minor numero.

Media lagrangiana della soprassaturazione Veniamo al campo di vapore sperimentato dalle gocce (fig. 4.15(b)). La differenza più evidente dal regime a gradiente verticale risiede nella forma assunta da $\langle s \rangle_{lag}$: siamo anche qui in una situazione intermedia tra caso passivo e convettivo instabile. Infatti si nota come i punti di massima correlazione siano tutti raggiunti entro un τ_L (come accadeva con $\beta g = 0$), ma anche come una volta arrivati al picco il processo di decorrelazione non sia monotono (come per $\Gamma \neq 0$). Siamo quindi indotti a pensare che sia la convezione in sé a poter riaccendere la correlazione tra traiettorie e ambienti soprassaturati e che tale fenomeno sia tanto più presente quanto più la struttura verticale sia rilevante. La causa è probabilmente l'ossatura dei campi convettivi: una goccia anche molto accresciuta valicando un fronte termico può velocemente incappare in una regione di flusso tanto sottosatura da farla evaporare.

Segnaliamo a latere che il pianoro iniziale è ancora compatibile colla stima (4.2) nella stessa misura trovata per le S_{ij} e che il valore di $\langle s \rangle_{lag}$ appare come indipendente da E_v .

Distribuzioni euleriana e lagrangiana di soprassaturazione Che, nonostante la struttura di tipo convettivo, i campi presentino oscillazioni regolari e moderate è pure verificabile dall'analisi della funzioni di probabilità della soprassaturazione. Mentre, infatti, l'integrazione numerica nella situazione instabile forniva un'estrema variabilità di forme — peraltro apparentemente non collegata ai valori energetici, se non per l'estensione — ci troviamo ora di fronte a una casistica simile al regime di Kolmogorov: il campo di vapore è distribuito a



(a) Distribuzioni euleriana e lagrangiana di soprassaturazione in S_{fI} all'istante $t_{max} \simeq 0.91 \tau_L$.
 (b) Distribuzioni euleriana e lagrangiana di soprassaturazione in S_{f5} all'istante $t_{max} \simeq 0.45 \tau_L$.

Figura 4.16: Le linee verticali indicano il valor medio euleriano e lagrangiano nei rispettivi tratti. Si sono scelte S_{fI} e S_{f5} in quanto sono le simulazioni con effetti meno e più marcati.

campana intorno al valor medio nullo e le funzioni tendono a ribattersi su stesse nel tempo. In figura 4.16 sono riportati i due casi limite a energia flebilmente oscillante (a) e in forte crescita (b): ebbene, anche in quest'ultima condizione la distribuzione, pur dalla sagoma più irregolare, non si discosta molto dal profilo a campana.

Limpido è, inoltre, l'effetto della correlazione: la distribuzione lagrangiana risulta infatti a ogni istante e in quasi ogni punto più a destra dell'euleriana.

Rispetto al caso passivo, tuttavia, rileviamo ancora, come per il regime di Bolgiano con profilo verticale, che la $P_{lag}(s)$ non è propriamente traslata rispetto alla $P_{eul}(s)$, ma, avendo una coda negativa più breve, è anche più alta: le due distribuzioni hanno spesso la sommità sullo stesso valore, ma quella lagrangiana è più piccata.

Ampliamento dello spettro dei raggi L'ultima importante analisi riguarda il tema centrale d'interesse, lo spettro dei raggi delle gocce. Come per gli aspetti ora esposti, pure qui ritroviamo una situazione intermedia tra i due casi passivo e attivo con profilo medio: se da un lato, infatti, le $P(R^2)$ hanno una forma in generale unimodale con picco circa sul valor medio, sono anche osservati, intorno ai massimi di E_v , spettri bimodali (fig. 4.17(c), $t = 1/3 \tau_L$), come più frequentemente accadeva a Γ positivo. Il regime in convezione turbolenta sembrerebbe, pertanto, introdurre la possibilità della bimodalità, tanto più spesso al salire dell'energia cinetica e al presentarsi di strutture verticali.

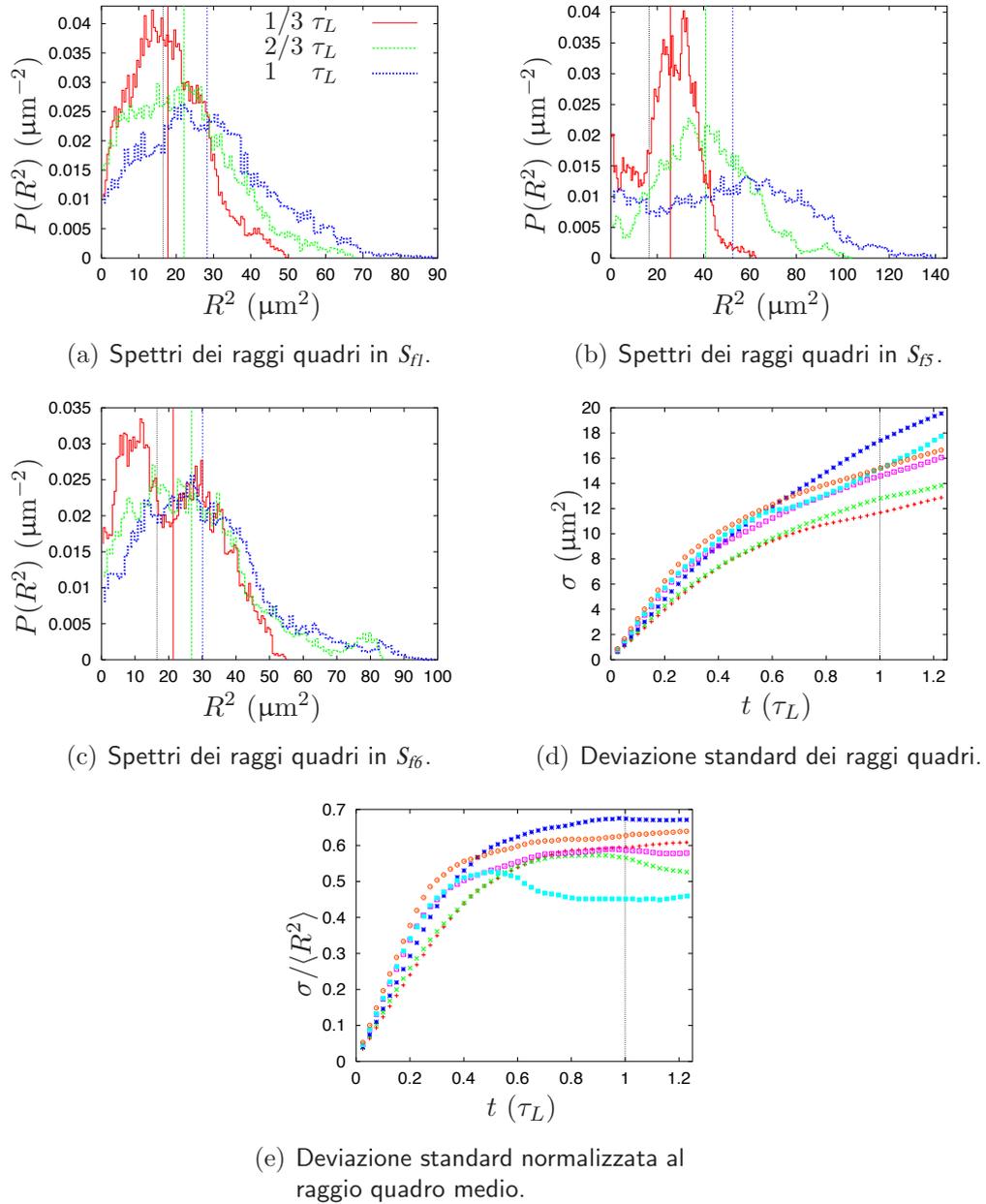


Figura 4.17: Ampliamento dello spettro dei raggi nelle sei simulazioni. Sono riportate solo le distribuzioni più significative (S_{f1} , S_{f5} e S_{f6}): le altre si comportano similmente a (a). Per gli spettri (a)–(c) i tratti indicano i tre istanti riportati in legenda in figura (a); le linee verticali, inoltre, segnalano il raggio quadro medio iniziale (puntinato grigio) e ai tre istanti indicati dal relativo tratto. Per le deviazioni (d) e (e) i punti indicano le sei simulazioni, come da legenda in figura 4.13.

Infine studiamo l'allargamento dello spettro. A livello quantitativo riscontriamo valori in linea col regime di Bolgiano instabile. Per quel che riguarda la varianza la crescita è lineare nella prima fase evolutiva, per poi divenire perlopiù diffusiva (ovvero proporzionale a \sqrt{t}); nel complesso, quindi, l'allargamento è più forte che nella teoria stocastica temporale ([33]). Anche l'osservazione della varianza normalizzata palesa come l'ampliamento avvenga in buona parte entro il primo mezzo τ_L . Rispetto all'energia vale quanto già riportato a pagina 106.

4.4 Regime di convezione umida

Prima di compiere il passo successivo di affinamento nell'analisi numerica, si è ritenuto interessante esplorare due regimi inediti per completare il quadro a tempo di assorbimento costante. In particolare si sono investigati i casi a gradiente verticale negativo, corrispondente a una situazione di atmosfera stabile e stratificata, e soprattutto a tasso di riscaldamento costante e positivo, che costituisce una direzione importante di approfondimento in quanto più fedele alle equazioni del modello. L'analisi di queste simulazioni è per ora parziale e limitata ai campi euleriani.

Per quel che concerne il regime di Bolgiano stabile ho condotto lunghe simulazioni in tre differenti condizioni, ovvero senza forzanti esterne, con forzante di piccola scala per la vorticità e con forzante di grande scala per la temperatura. Nel primo caso i campi divengono lisci e scompare la turbolenza, mentre nel secondo il sistema sembra attestarsi su un regime inedito non convettivo⁴. Solo nell'ultimo caso ho ottenuto risultati incoraggianti: nei campi appare una stratificazione orizzontale in linea colla stabilità e le leggi di scala si avvicinano a quelle di Bolgiano. Tuttavia l'analisi risulta insufficiente per poter affermare che il sistema si trovi in un regime di Bolgiano stabile: occorrerebbe un supplemento d'indagine, esplorando i sistemi a βg molto alti.

Cosa accade quando, invece, si provi ad accendere anche il riscaldamento dovuto alla condensazione nell'equazione per T' ?

Come già accennato in precedenza è questa una situazione poco affrontata e non è facile comprendere a priori quale regime si possa instaurare. Utilizzare le metodologie delle teorie classiche della turbolenza non è di grandissimo aiuto, in quanto non sono disponibili riferimenti fenomenologici sulle quali costruire. Ad esempio, il flusso termico sarà ancora costante e le leggi di scala alla Bolgiano valgono ancora? E in che limite di R_s ? Si sviluppa o meno un altro regime distinto?

⁴Sino a una certa scala critica, dipendente da βg , il campo di velocità scala alla Kolmogorov, oltre in maniera diffusiva.

Perciò ho provato alcune simulazioni esplorative, in cui ho tenuto tutti i parametri identici al caso Bolgiano instabile e $\tau_s = 2.0\pi^{-1} \tau_L$. I risultati ottenuti sono interessanti, per quanto assai parziali. I dati si riferiscono solo alla dinamica euleriana, in quanto eravamo interessati inizialmente a capire solo se e quando s'instaurasse un nuovo regime. L'indagine lagrangiana sulle gocce merita uno studio ben più approfondito.

Ebbene, le simulazioni indicano che un nuovo regime differente da quello di Bolgiano sembra profilarsi a valori superiori a un tasso critico⁵ $R_{sc} = 2 \Gamma L \tau_L^{-1}$: gli esponenti di scala sono inferiori a quelli di Bolgiano. Mentre infatti per $R_s = 0.05 \Gamma L \tau_L^{-1}$ e $R_s = 0.5 \Gamma L \tau_L^{-1}$ il flusso continua a comportarsi come in precedenza a R_{sc} la forma delle funzioni di struttura cambia decisamente: l'esponente per la velocità è unitario, quello per la temperatura si abbassa a 0.3. Una situazione simile è ricomparsa a $R_s = 3.33 \Gamma L \tau_L^{-1}$ e $R_s = 5.33 \Gamma L \tau_L^{-1}$. Inoltre, per tassi superiori a quello presunto critico, lo stato stazionario ha un'energia che cresce col tasso stesso (un po' come accadeva con τ_s : al suo aumentare cresceva proporzionalmente la soprassaturazione).

Il termine di Boussinesq sembra ancora garantire una dinamica convettiva e perciò ho provvisoriamente denominato questo presunto regime come *convettivo umido*, nel senso che la convezione termica risente della presenza di un processo di condensazione del vapore, che muta le dinamiche del flusso scaldandolo; tale effetto viene qui considerato efficace, ovvero come un effetto medio globale anziché dovuto all'evoluzione locale delle gocce.

Il campo termico (e più a grande scala anche la soprassaturazione), infatti, è caratterizzato da pennacchi a tutte le scale, rivolti però ora in maniera isotropa lungo le direttrici di una grande struttura di modo uno. Le leggi di scala sembrano essere

$$\begin{cases} (\delta_r v)^2 \lesssim r^{1.0} \\ (\delta_r T')^2 \sim r^{0.3} \\ (\delta_r s)^2 \lesssim r^{0.7} \end{cases}$$

Questo per $\tau_s = 2.0\pi^{-1} \tau_L$ (con τ_L nel senso del Bolgiano instabile), che a R_s nullo significava una legge $(\delta_r s)^2 \sim r^{0.7}$, ovvero il caso mediano tra campo di soprassaturazione analogo alla temperatura e alla velocità.

È infatti importante precisare che la dinamica che s'instaura dipende ora fortemente dalla struttura del campo di soprassaturazione e quindi dal valore del tempo di assorbimento.

La prima impressione è, dunque, quella di un abbassamento degli esponenti di scala che si ripercuote poi su s stesso. Resta però da capire quanto ciò rimanga vero a τ_s differenti. Il campo è tutto da esplorare.

⁵Dal momento che sono stati raggiunti stati stazionari, indichiamo le grandezze in termini del tempo caratteristico del flusso a quel tasso di riscaldamento.

Capitolo 5

Condensazione turbolenta localmente retroattiva

Siamo infine pronti per compiere il secondo passo di questa ricerca sulla condensazione in un regime convettivo turbolento. È questa una tappa di fondamentale affinamento del modello, poiché per la prima volta si permette alle gocce d'interagire col flusso, da cui nello studio sinora condotto erano nullaltro che trasportate. In effetti, però, è noto in microfisica delle nuvole che la presenza di particelle liquide influenza in modo non trascurabile il campo di vapore. Del resto è evidente quel che accade a livello microscopico: nelle zone soprassature della nuvola si formano e si accrescono le goccioline, mentre in quelle sottosature esse sono sottoposte ad evaporazione e riducono la propria massa; ma nel momento in cui una goccia aumenta o diminuisce la propria dimensione, sottrae o restituisce vapore all'ambiente circostante. Dunque ogni singola goccia contribuisce alle variazioni locali del campo euleriano di soprassaturazione. Questo processo è registrato dal termine di assorbimento $-s/\tau_s$ nell'equazione per s .

5.1 Evoluzione senza rinascita delle gocce

Lo studio affrontato sinora non trascurava questo aspetto, infatti l'assorbimento è stato regolarmente integrato considerandolo come un effetto efficace globale. Il tempo di assorbimento era scelto, quindi, costante nello spazio e nel tempo e proporzionale al numero di gocce e al raggio medio iniziali (ovvero alla somma dei raggi iniziali).

Era un'approssimazione legittima, in quanto il primo interesse era quello di valutare come la turbolenza di scala macroscopica modificasse i processi di condensazione. Ora però si tratta di capire se tale approssimazione abbia provocato una sovrastima o una sottostima degli effetti riscontrati. Vogliamo, cioè, inda-

gare una situazione più aderente alla realtà fisica considerando $1/\tau_s(\mathbf{x}, t)$ come un campo locale dipendente dalla dimensione delle gocce presenti in un intorno del punto \mathbf{x} all'istante t . Il passo compiuto in tal modo è, quindi, duplice: si è ristretto il dominio su cui è calcolato $1/\tau_s$ passando dalla minima risoluzione (l'intera nuvola) a una molto più fitta (il nostro passo griglia); similmente, inoltre, si è passati da una valutazione fissata all'istante iniziale a una variabile nel tempo (secondo il nostro passo temporale).

Ma se la risoluzione temporale è tanto piccola da permettere di descrivere in maniera ottimale la dinamica ($\delta t \simeq 7 \times 10^{-5} \tau_L$), non dobbiamo dimenticare che quella spaziale s'inquadra in un approccio ancora macroscopico: siamo, infatti, nell'ordine di qualche metro. Tuttavia, data la bassa densità di gocce presenti nelle mie simulazioni, è questo un affinamento già sufficiente alla prima analisi e in linea col proposito di trattare classicamente le dinamiche sottoscala.

5.1.1 Analisi qualitativa

Quali saranno le conseguenze sia sui campi sia sulle gocce di questo perfezionamento del modello? Trascurabili o determinanti? Vedremo un maggiore o un minore allargamento dello spettro dei raggi, una correlazione più efficiente, meno spinta o addirittura rimossa? È questo un punto delicato per mettere alla prova quanto scoperto sinora. E se i limpidi effetti lagrangiani sinora rilevati non fossero altro che spuri? Cerchiamo di comprendere meglio questo aspetto e di delineare che cosa possa ora accadere.

Tasso di riscaldamento per condensazione

Per quel che riguarda la dinamica euleriana occorre subito precisare che non ho indagato a questo secondo livello i regimi a tasso di riscaldamento attivo. Ricordiamo infatti che nell'equazione per T' è presente un termine di riscaldamento analogo a quello di assorbimento per s . Questo termine determina due problematiche: dipende anch'esso dalla somma dei raggi delle gocce, dando luogo a una seconda retroazione lagrangiana, nonché dal profilo termico medio; è proporzionale alla soprassaturazione, proponendo una seconda retroazione euleriana. La situazione diviene quindi confusa, dal momento che, se si tenesse un R_s non nullo, le gocce sarebbero attive su s e T' , s su T' , T' su v e v su T' e s . . . In un simile contesto diventa arduo discernere chi sia responsabile di un certo effetto, se dapprima non si focalizza l'attenzione sugli aspetti principali, perfezionando in seguito via via l'approccio.

Del resto i regimi convettivi a tasso di riscaldamento positivo intravisti in precedenza meritano un approfondimento con coefficienti in s costanti. Pertanto nel seguito R_s sarà sempre nullo, secondo l'approssimazione esposta a pagina 88.

Campo euleriano di soprassaturazione

Le dinamiche euleriane risultano allora modificate solo per il campo di soprassaturazione. Qui è abbastanza semplice capire cosa possa variare con un $1/\tau_s$ locale. Giacché esso è proporzionale alla somma dei raggi delle gocce

$$\left(\frac{1}{\tau_s}\right)(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi\rho_w A_2 A_3}{V_{\{\mathbf{x} \pm \frac{1}{2}\delta\mathbf{x}\}}} \sum_{\mathbf{X}_i \in \{\mathbf{x} \pm \frac{1}{2}\delta\mathbf{x}\}} R_i(t) = \alpha \sum_{\mathbf{X}_i \in \{\mathbf{x} \pm \frac{1}{2}\delta\mathbf{x}\}} R_i(t) \quad (5.1)$$

è chiaro che, laddove esistano domini che ne siano privi, tale campo risulta nullo; tali domini sono solitamente sottosaturi. Viceversa più goccioline si addensano e s'ingrandiscono, come nelle zone soprassature, maggiore è l'intensità del campo. Abbiamo già studiato una situazione analoga a pagina 96: a τ_s tendente a infinito il campo s si comportava come T' , mentre a τ_s molto piccoli come w . La differenza è che ora ciò sembra poter accadere in contemporanea: nelle zone sottosature ci aspettiamo un campo di soprassaturazione strutturato come la temperatura, in quelle soprassature come la velocità.

Un'altro aspetto diventa ora centrale rispetto al caso lagrangianamente non retroattivo: s non ha più a priori media costante e nulla nel tempo. Si medi infatti l'equazione (3.9c): tenendo conto che il termine avvertivo ha media globale nulla e che altresì la velocità verticale è a media nulla, si ottiene

$$\partial_t \langle s \rangle = -\left\langle \frac{s}{\tau_s} \right\rangle + D_v \partial^2 \langle s \rangle$$

Ora, se τ_s fosse spazialmente costante, com'era in precedenza, potrebbe essere estratto dalla media: partendo da un campo a media nulla, tale media rimarrebbe sempre nulla nel tempo. Ma ora $1/\tau_s$ è a sua volta un campo e tale operazione non è possibile. Ciò, invero, non ci sconvolge, ma c'induce semmai in alcune riflessioni. Che segno ha l'assorbimento medio $\langle s/\tau_s \rangle$? Intuitivamente possiamo immaginarlo positivo: infatti, in base ai ragionamenti appena esposti, nei punti a s negativa prevediamo assenza di gocce e quindi $1/\tau_s$ nullo, in quelli a s positiva $1/\tau_s$ positivo. Quindi, osservando l'equazione per il valor medio di s , questo pare dover calare nel tempo. Ma tale argomento resta valido lungo tutta l'evoluzione o, invece, quando le goccioline si decorrelano dal campo, il segno di $\langle s/\tau_s \rangle$ s'inverte? Vedremo dalle simulazioni cosa accade. Un'altra conseguenza di un campo medio decrescente è che viene alterato l'equilibrio tra zone soprassature e sottosature a vantaggio di queste ultime.

Coefficiente di assorbimento

Questo squilibrio, oltre agli effetti sull'evoluzione delle gocce, potrebbe implicare che le gocce evaporino con maggiore facilità e, quindi, $1/\tau_s$ mediamente

cali provocando un andamento di s vieppiù simile a quello di T' . Ma è vera quest'ultima supposizione? $\langle 1/\tau_s \rangle$ è destinato a calare nel tempo o invece accade il contrario? Non bisogna, infatti, dimenticare che esso dipende linearmente dalla somma dei raggi e dunque in caso di raggio medio crescente potrebbe aumentare durante l'evoluzione, nonostante la diminuzione numerica di gocce. Come si vede, a priori è difficile dipanare il comportamento dei campi in gioco.

Cerchiamo, intanto, di definire operativamente il valore di questo campo¹. Avendo, infatti, una griglia discreta come dominio di definizione dei campi, ma potendo le goccioline evolvere in maniera continua anche all'interno dei quadrati $\delta x \times \delta x$, come viene calcolato il tempo di assorbimento? Sarebbe grossolano ritenere che le gocce influenzino solo i campi del nodo più vicino e quindi supponiamo che esse influenzino i quattro nodi circostanti con un peso $P_i(\mathbf{x})$ proporzionale all'area compresa tra particella e nodo opposto e con somma unitaria sui quattro nodi ad essa circostanti (per i fissata).

Siccome in (5.1) il coefficiente α è selezionato dalle condizioni iniziali del sistema e non dipende dalla dinamica lagrangiana, possiamo esprimerlo in funzione di un

$$\left(\frac{1}{\tau_s}\right)_0 = \left\langle \left(\frac{1}{\tau_s}\right)(x, z, 0) \right\rangle$$

corrispondente all' $1/\tau_s$ efficace utilizzato a pagina 102, in modo da poter confrontare le nuove simulazioni coi risultati lì ottenuti. Nel nostro dominio quadrato il campo assume allora la forma

$$\left(\frac{1}{\tau_s}\right)(x, z, t) = \frac{N_x^2}{NR_0} \left(\frac{1}{\tau_s}\right)_0 \sum_{i=1}^{N(x,z,t)} (P_i R_i)(x, z, t)$$

dove R_0 è il raggio medio iniziale e $N(x, z, t)$ indica il numero di gocce presenti nel dominio $(x \pm \delta x, z \pm \delta x)$.

Evoluzione delle gocce

Cerchiamo ora di comprendere cosa possa capitare all'evoluzione delle particelle in questo flusso convettivo in cui il vapore e le goccioline s'influenzano reciprocamente.

Un plausibile scenario è il seguente: per quanto visto nel paragrafo 4.2 — ovvero per la struttura dei campi in convezione turbolenta — le gocce che inizialmente capitano in territori sottosaturi evaporano rapidamente, mentre le altre si accrescono voracemente; ne consegue che $1/\tau_s$ diventa nullo nel primo caso

¹Tratteremo nel seguito l'inverso del tempo di assorbimento, poiché tale campo può ora assumere valori nulli, corrispondenti a tempi infiniti. Per analogia alle evoluzioni seguite nel capitolo 4 forniremo, tuttavia, anche il valor medio per τ_s .

e grande e positivo nel secondo; ciò provoca una diminuzione del valor medio della soprassaturazione, che ora ha zone con valori assoluti alti (quelle di tipo termico) e altre con valori piccoli (quelle di tipo cinetico); le gocce che provino ad avventurarsi nelle prime zone, molto sottosature, potrebbero evaporare del tutto nonostante abbiano un grande raggio. Insomma, sembra di poter immaginare che l'effetto di un τ_s locale sia quello di diminuire la crescita del raggio e l'ampliamento dello spettro, contestualmente però rallentando il processo di decorrelazione.

D'altra parte anche intuitivamente è il ruolo svolto dall'assorbimento per condensazione: se le gocce in media s'ingrandiscono, lo fanno a spese del vapore disponibile; se il vapore diminuisce, le gocce ne avranno meno a disposizione per proseguire l'aumento del proprio raggio. Per cui si dovrebbe riscontrare un attenuamento degli effetti lagrangiani.

Nel caso che ciononostante i fenomeni osservati persistano si avrebbe un'importante conferma di quanto sia decisiva la turbolenza di scala macroscopica per la formazione dei cumuli.

Tasso di crescita delle gocce

Nelle analisi numeriche precedenti non ho mai discusso i risultati in funzione del tasso di crescita delle gocce A_3 . Era una scelta motivata dal fatto che altri erano gli elementi di più spiccato interesse. Infatti non essendo presenti retroazioni lagrangiane sui campi euleriani la scelta di A_3 poteva essere operata in maniera arbitraria, dal momento che l'equazione per i raggi riscalda se moltiplicata per un fattore. Un A_3 maggiore o minore determina una crescita proporzionalmente maggiore o minore, ma non muta gli effetti studiati, poiché tale proporzionalità si scarica sia sulla condensazione sia sull'evaporazione. Difatti non ho messo a confronto nelle varie situazioni i valori dei raggi in sé, ma i diversi fenomeni relativamente al tempo integrale del sistema. Il fatto che l'equazione dei raggi riscalasse e che l'evoluzione fosse non retroattiva mi ha permesso di scegliere per la lunghezza nell'analisi lagrangiana un'unità differente a quella dell'analisi euleriana, vale a dire i micrometri anziché la scala integrale. In tal modo i raggi erano espressi in unità corrispondenti a quelle reali. La scelta di A_3 era compatibile col fatto che il mio studio è limitato alla fase di condensazione; i raggi non raggiungevano mai il raggio critico di coalescenza su brevi periodi.

Ma ora la situazione è profondamente mutata: siccome il valore dei raggi e la posizione delle particelle influenza la soprassaturazione, non è più vero che l'equazione per R^2 riscalda, poiché un valore maggiore o minore di A_3 questa volta determina valori diversi del campo $1/\tau_s$ a priori difficili da stabilire (grandi A_3 favoriscono una forte crescita come una forte evaporazione). Vale in questo caso il medesimo ragionamento effettuato per gli altri coefficienti del modello: non

potendo convertire per svariati motivi le grandezze reali nelle unità del codice, risulta molto più opportuno e interessante studiare il comportamento del sistema al variare di questi coefficienti. Quindi, anche se continuerò ad indicare A_3 in $\mu\text{m}^2\tau_L^{-1}$ per un migliore confronto colle simulazioni a τ_s costante, d'ora in avanti anche il tasso di crescita delle gocce sarà considerato alla stregua di un parametro in funzione del quale studiare il sistema.

Più esplicitamente, avendo già studiato cosa accade nell'evoluzione al variare dell'energia ed essendo interessato ora a capire cosa comporti una retroazione lagrangiana sul campo s , A_3 è proprio il parametro principale in funzione del quale ho condotto le analisi in questa seconda tappa della ricerca.

5.1.2 Analisi al variare del tasso di crescita

Dal momento che a priori non conosco quali siano i tassi di crescita che garantiscano evoluzioni compatibili con quelle osservate in natura e in particolare, per esempio, raggi finali inferiori a quello di attivazione della coalescenza, ho condotto simulazioni su un ventaglio molto largo di A_3 intorno al valore utilizzato nel paragrafo 4.2 ($1.75 \times 10^0 \div 10^5 \mu\text{m}^2\tau_L^{-1}$ con simulazioni intermedie con coefficiente 0.70 e 3.50 dall'ordine 10^3 in su).

Nella seguente presentazione dei risultati ottenuti mescolerò analisi euleriana e lagrangiana dei processi di condensazione, proprio perché ora non è più possibile una simile divisione. Sono inoltre inclusi nello studio due nuove interessanti variabili mediate sul dominio ad ogni istante, $\langle 1/\tau_s \rangle_{eul}$ e $\langle s/\tau_s \rangle_{eul}$, di cui abbiamo discusso in precedenza². La durata delle simulazioni è ora circa doppia di quella delle S_{ii} , onde poter meglio seguire il comportamento del sistema su tempi più lunghi.

Ometterò, però, la discussione sui campi di velocità e di fluttuazione termica, che non sono invece influenzati; più precisamente ho impiegato il flusso nello stato stazionario raggiunto nel paragrafo 4.2. Anche s è il campo ottenuto in codesto regime e quindi all'istante iniziale è a media nulla. I campi iniziali sono uguali in tutte le simulazioni ed è pure comune il numero aleatorio di partenza.

Campo euleriano di soprassaturazione

Siamo inizialmente interessati a verificare cosa accade in questa nuova situazione al campo euleriano di soprassaturazione, essendo questo il motore della condensazione delle gocce: occorre mettere alla prova le supposizioni qualitative esposte nel paragrafo 5.1.1.

²Dato l'alto numero di simulazioni — undici — ho preferito sdoppiare i vari grafici per un maggiore chiarezza. Invero la loro lettura potrebbe risultare difficoltosa, ma si è preferito comunque inserire tutte le simulazioni per meglio comprendere alcune peculiarità comuni.

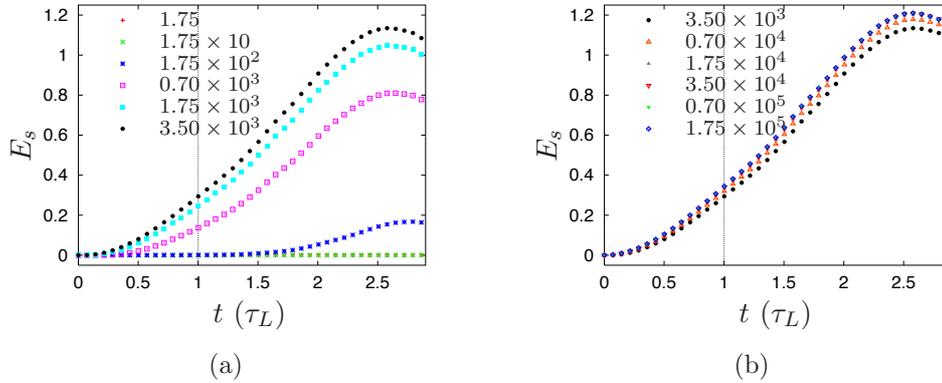


Figura 5.1: Energia scalare della soprassaturazione: per valori di A_3 piccoli in (a) e grandi in (b). La legenda esprime i valori approssimati del tasso di crescita nelle unità $\mu\text{m}^2\tau_L^{-1}$.

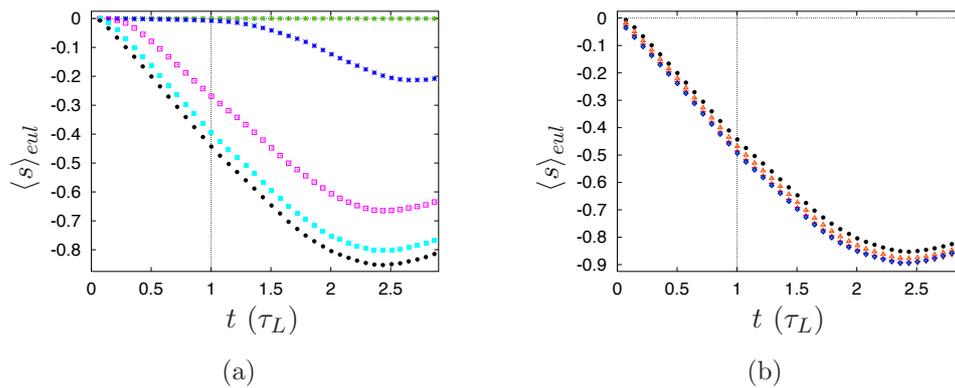


Figura 5.2: Media euleriana della soprassaturazione. In questa e nelle altre figure di questo paragrafo vale la legenda presente in figura 5.1.

I risultati, osservabili nelle figure 5.1 e 5.2 sono molto chiari. Innanzitutto occorre rilevare che l'energia scalare segue un andamento del tutto simile a quello dell'energia cinetica, come del resto accadeva nel caso a τ_s costante; il che non era scontato in questo nuovo scenario. Il punto nodale è ora, però, il ruolo svolto dal tasso di crescita: A_3 determina pesantemente la rapidità di crescita di E_s , tanto che per valori minimi questa risulta pressoché nulla se paragonata a quella dei valori maggiori. Si noti, per esempio, la curva ad $A_3 = 1.75 \times 10^3 \mu\text{m}^2\tau_L^{-1}$ (che prenderemo come riferimento, essendo questo il valore utilizzato nelle simulazioni precedenti): E_s raggiunge ora valori abnormi rispetto a quelli visti sino ad ora,

senza però divergere, com'era legittimo temere.

È altresì evidente, aldisopra di tale tasso di riferimento, un fenomeno di saturazione dell'energia al crescere di A_3 : per tassi di crescita molto alti l'energia scalare sembra diventare indipendente dal valore di A_3 . Discuterò più avanti, alla luce dello studio delle altre grandezze, cosa può causare un simile comportamento.

Il nuovo termine incluso nell'equazione per s determina l'accentuata variabilità dell'energia scalare. Tale caratteristica era già stata mostrata nel capitolo 4. La novità rispetto al caso precedente è costituita dal fatto che i picchi energetici sono dovuti a grandi fluttuazioni negative della soprassaturazione. In effetti avevamo anticipato questa possibilità. Il confronto tra i due grafici mette in luce come $\langle s \rangle_{eul}$ abbia un andamento speculare a quello di E_s , pure nel fenomeno di saturazione a grandi A_3 e nell'inversione di tendenza registrabile dopo ben due τ_L .

Che cosa significa in termini più fisici? Il sistema diventa quasi istanteaneamente sottosaturo, esclusi i casi con gocce a lentissima crescita (minimi A_3). L'ambiente perde, quindi, rapidamente gran parte del vapore disponibile. Appare allora evidente il rischio che scompaia ogni effetto lagrangiano nella crescita delle gocce. Anzi, addirittura, se il campo medio è tanto negativo, potrebbe accadere che le gocce diminuiscano il proprio raggio.

Per cercare di valutare quanto questi dubbi siano consistenti, è opportuno, prima di analizzare le altre grandezze, guardare come sia strutturato il campo di soprassaturazione. In figura 5.3 è mostrata una sequenza di fotogrammi del campo s affiancata dalla corrispondente sequenza per il campo $1/\tau_s$. Soffermiamoci sulla prima. La fisionomia del campo scalare è adesso completamente differente da quella più volte osservata nel paragrafo 4.2: dopo alcune istantanee il campo si assesta su due comportamenti opposti e contestuali: un'area a forma di sbuffi termici, molto sottosatura, strutturata come il campo T' ; un'area seconda più vasta area circostante soprassatura, in apparenza omogenea — per via del forte contrasto — ma in realtà ad un'analisi più accurata strutturata come w e costellata di punti a valori più intensi. Col tempo l'area di tipo termico si espande e la separazione diviene più sfumata. Ricordando quanto si era immaginato con argomenti qualitativi, era in effetti proprio una simile situazione che si era descritta.

Campo euleriano coefficiente di assorbimento

La ragione di una simile curiosa evoluzione la si ritrova dalla comparazione delle istantanee di s con quelle di $1/\tau_s$. Bene si vede, infatti, come le aree di tipo termico siano proprio corrispondenti a quelle in cui le goccioline siano assenti; viceversa, laddove la somma dei raggi delle goccioline sia positiva, si trovano le aree di tipo cinetico; perdipiù, la costellazione di picchi di s è sovrapponibile ai punti ove le particelle si addensano e/o assumono valori del raggio massimi.

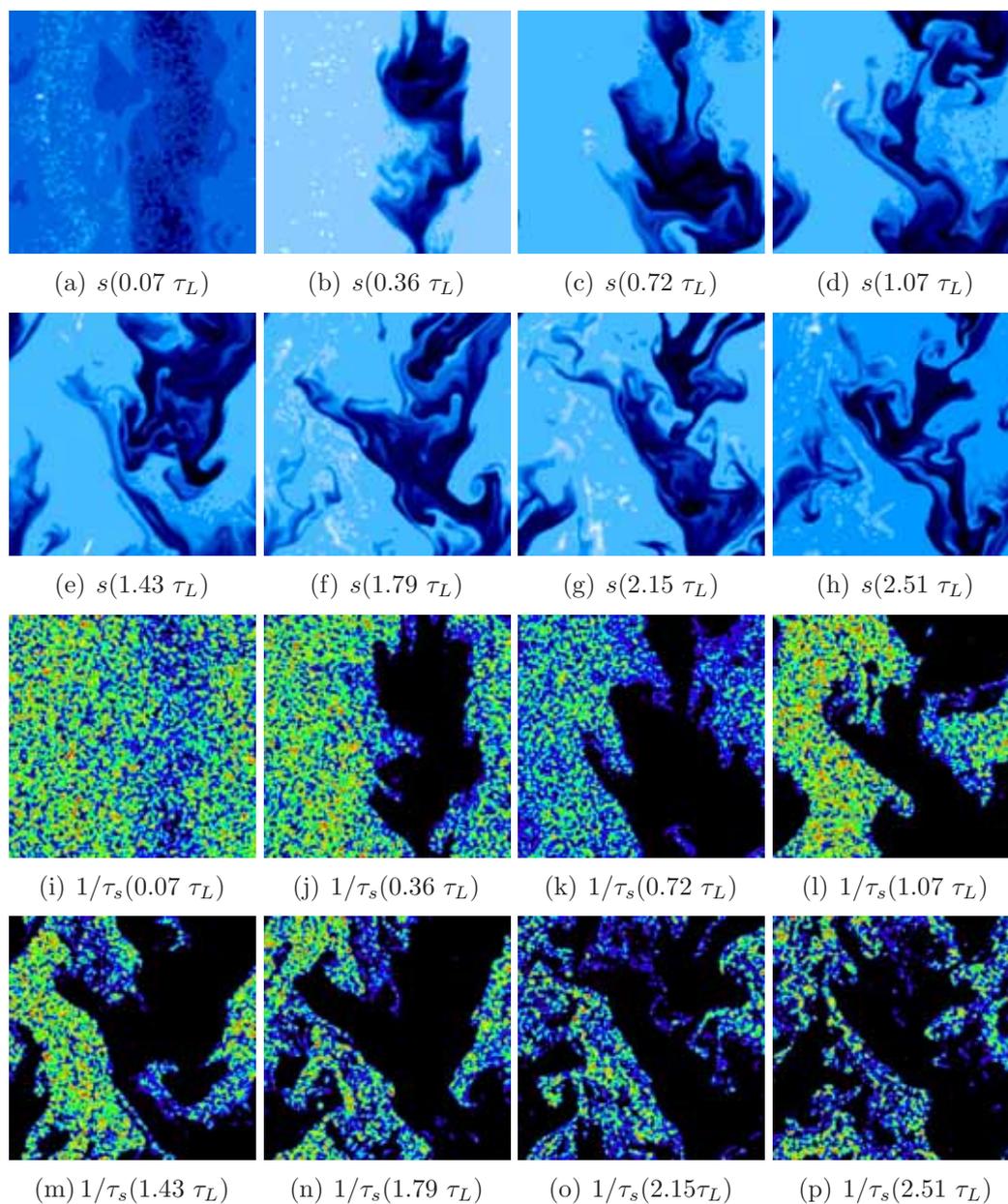


Figura 5.3: Sequenza dei campi di soprassaturazione e di coefficiente di assorbimento presa circa ogni $0.36 \tau_L$ con $A_3 = 1.75 \times 10^3 \mu\text{m}^2 \tau_L^{-1}$ e $(1/\tau_s)_0 = 2.22 \times 10\pi \tau_L^{-1}$.

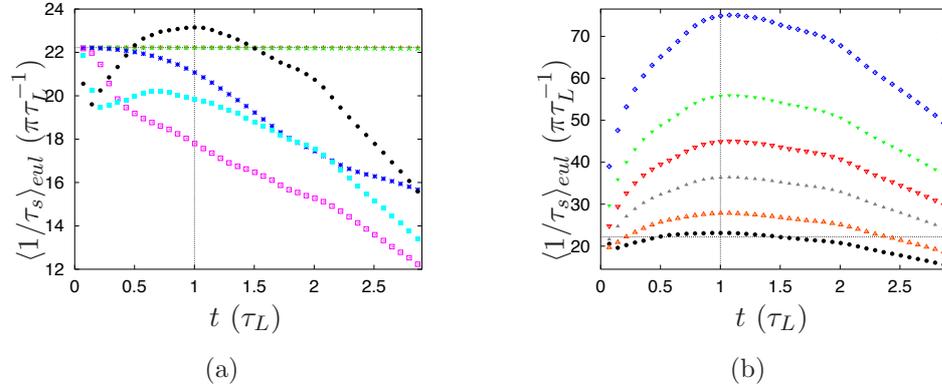


Figura 5.4: Media euleriana dell'inverso del tempo di assorbimento. La linea orizzontale indica $(1/\tau_s)_0 \simeq 2.22 \times 10\pi \tau_L^{-1}$ corrispondente al $\tau_s = 0.45 \times 10^{-1}\pi^{-1} \tau_L$ impiegato nelle simulazioni S_{ij} .

Questa è già un'importante rassicurazione nel senso di una presenza persistente di effetti di correlazione nonostante la globale sottosaturazione dell'ambiente.

L'effetto di un campo $1/\tau_s$ locale sembra dunque chiaro. Tale campo si annulla laddove lo scalare passivo sia in partenza sottosaturato e le gocce, quindi, evaporano: si è come nella situazione a τ_s costante e infinito (pag. 101); senza assorbimento s evolve similmente alla temperatura. Se, invece, ci si colloca in aree inizialmente soprassature, le gocce crescono, il campo è positivo e si ripete quanto accadeva per piccoli tempi di assorbimento: s è ancorato a w . Si tenga conto che $(1/\tau_s)_0$ è proprio l'inverso del τ_s costante impiegato in presenza.

Ma mediamente questo campo supera nel tempo il valore iniziale? Notiamo ora due diverse circostanze: a tassi di crescita minori o uguali a quello di riferimento (fig. 5.4(a)) $\langle 1/\tau_s \rangle_{eul}$ decresce da subito senza poi arrestarsi; a tassi di crescita maggiori (fig. 5.4(b)) cresce per un τ_L , per poi ridiscendere anche sotto il valore iniziale con forme tra loro simili e senza saturazioni. Nel primo caso la crescita delle gocce non compensa l'evaporazione, mentre nel secondo sembra tanto forte da superarla. Tuttavia i valori entro i quali ci si muove sono sempre compatibili coi τ_s costanti a cui S_s^2 scalava perfettamente come S_v^2 .

Media euleriana del termine di assorbimento

Abbiamo sinora visto che s ha media negativa sul dominio d'integrazione e $1/\tau_s$ al contrario positiva. Si potrebbe allora supporre che s/τ_s abbia media negativa, in quanto prodotto dei due campi precenti. La semplice osservazione della figura 5.5 dimostra che una tale supposizione è infondata: $\langle s/\tau_s \rangle_{eul}$ è positivo per

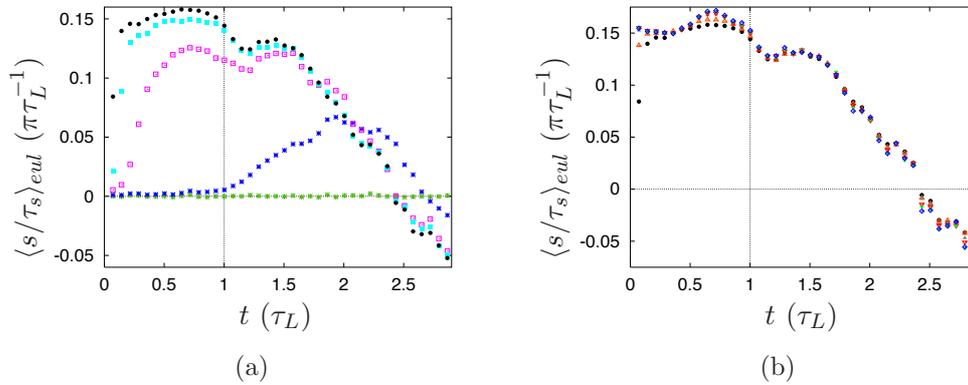


Figura 5.5: Media euleriana del termine di assorbimento.

un lungo periodo (sino a circa $2.5 \tau_L$). Del resto la sequenza mostrata dai due campi palesa che s ha valori negativi proprio dove $1/\tau_s$ si annulla. È proprio quello che avevamo immaginato nel paragrafo 5.1.1 e dimostra come la correlazione tra traiettorie e campo non si azzeri affatto in questa nuova situazione.

Questo processo è il responsabile del forte calo di soprassaturazione registrato; è in fin dei conti il ruolo svolto dall'assorbimento: in presenza di forte correlazione le gocce, piccole alla partenza, evaporano se in zone sottosature, mentre tutte le altre si nutrono voraci di vapore e accrescono vieppiù la propria dimensione per un lungo tempo. Il bilancio globale vede quindi prevalere questo secondo processo e il vapore viene globalmente assorbito dalle particelle liquide, senza essere compensato da nuovo vapore.

Notiamo a latere ancora due aspetti. $\langle s/\tau_s \rangle_{eul}$ diviene negativo quasi allo stesso istante in tutte le simulazioni; quando le gocce raggiungono un raggio sufficiente, infatti, iniziano a distribuirsi in maniera più omogenea nella nuvola, ma incontrando un campo mediamente sottosaturo. Infine rileviamo ancora la saturazione a grandi A_3 .

Media lagrangiana della soprassaturazione

Molto simile a quello or ora visto è l'andamento della soprassaturazione media sperimentata dalle goccioline (fig. 5.6). A parte le simulazioni ad A_3 molto piccoli, a cui non si attiva alcun processo di correlazione, dall'ordine di $10^3 \mu\text{m}^2\tau_L^{-1}$ la media lagrangiana risulta positiva sino a ben due τ_L e tanto maggiore quanto minore A_3 . Inoltre per alti A_3 l'attivazione del processo è quasi istantanea, mentre per valori dell'ordine del tasso di riferimento occorre un breve periodo affinché ciò avvenga. In quest'ultimo caso, la condensazione-evaporazione richiede tempi

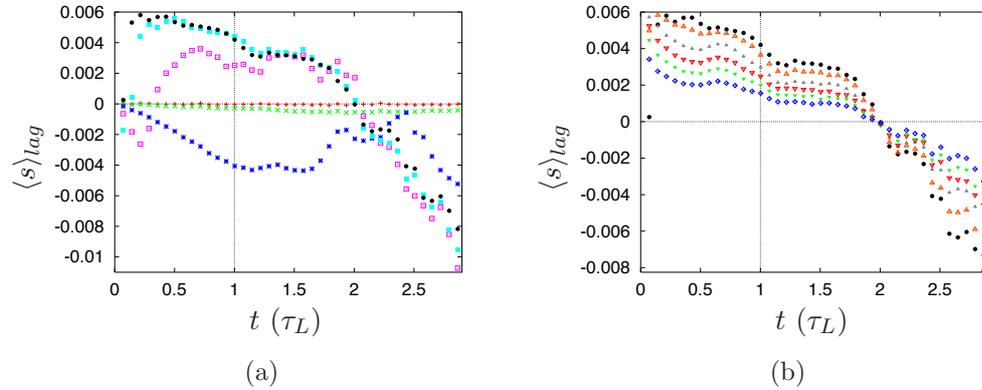


Figura 5.6: Media lagrangiana della soprassaturazione.

più lunghi. Questo da una parte introduce un tempo iniziale di risposta durante il quale non si osserva correlazione. D'altra parte, per motivi da approfondire, a bassi A_3 si accentua l'effetto di correlazione (le curve corrispondenti a valori bassi di A_3 in figura 5.6 presentano un picco più accentuato). Notiamo che la correlazione cessa allo stesso istante in tutte le simulazioni.

Possiamo inoltre provare ora a spiegare che cosa provochi la saturazione del termine $\langle s/\tau_s \rangle$ in figura 5.5 a grandi A_3 . Da un lato $\langle s \rangle_{lag}$, positivo, è minore per A_3 maggiori per quanto appena rilevato; dall'altro $\langle 1/\tau_s \rangle_{eul}$ è maggiore per A_3 maggiori. Dal momento che il campo $1/\tau_s$ è nullo laddove non ci siano gocce, calcolare $\langle s/\tau_s \rangle_{eul}$ corrisponde approssimativamente a fare il prodotto dei due valori medi. I due diversi effetti si equivalgono e quest'ultima media risulta pressoché indipendente dal tasso di crescita. Poiché l'assorbimento influenza in maniera decisiva il campo euleriano di soprassaturazione, tale indipendenza si ripercuote anche su s , E_s e anche³ N .

Crescita dei raggi

Resta però da chiarire se, stante la correlazione, si abbia una contestuale crescita dei raggi medi. Ciò non è di per sé scontato, proprio perché ci si trova in un sistema in media fortemente sottosaturato. Tuttavia la presenza di un $\langle s \rangle_{lag}$ positivo è già un buon indizio in tal senso. Ebbene, osservando la figura 5.7, si trova un importante risultato: non solo i raggi crescono a $\langle s \rangle_{eul}$ nullo, come accadeva a τ_s costante, ma addirittura quando questo valor medio è molto negativo! Tale crescita è approssimativamente lineare e tanto più rapida al crescere di A_3 .

³Non presento per brevità i dati sul numero di gocce vive. L'andamento è simile a quelli già visti sinora e presenta saturazione ad alti A_3 .

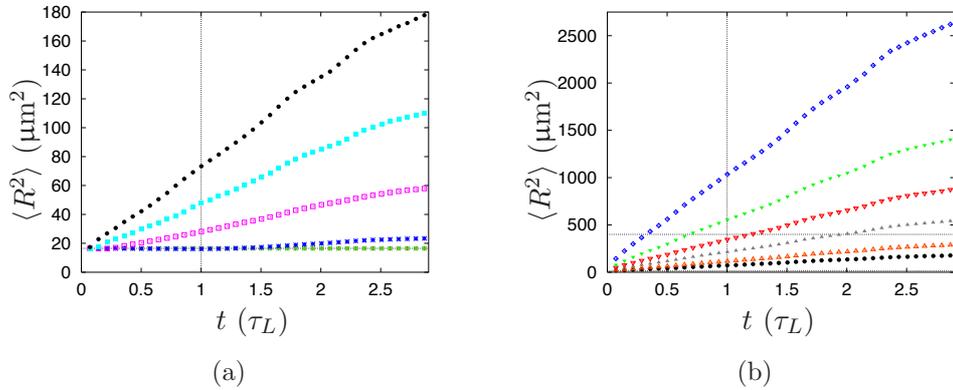


Figura 5.7: Media dei raggi quadri. La linea orizzontale bassa indica il raggio quadro medio iniziale, quella alta il raggio quadro di attivazione della coalescenza (corrispondente a un raggio di circa $20 \mu\text{m}$). Le due simulazioni a massimi A_3 hanno quindi un tasso di crescita troppo rapido rispetto all'interesse di questa tesi: prima di un τ_L hanno già valicato il limite di attivazione della coalescenza, mentre in atmosfera sono attestati tempi più lunghi.

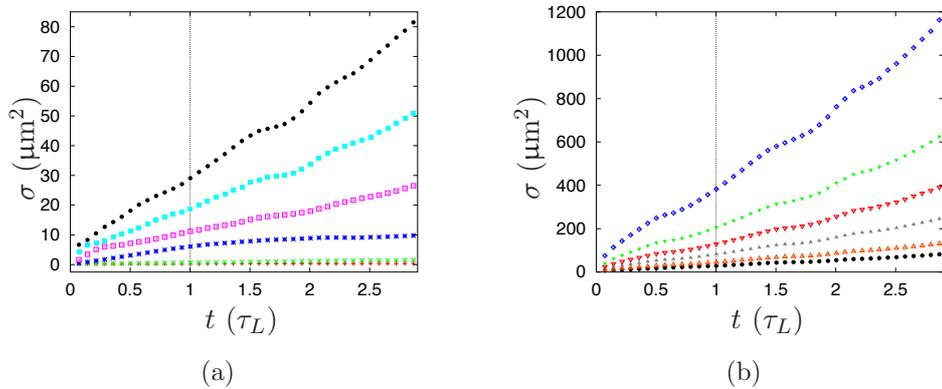


Figura 5.8: Deviazione standard dei raggi quadri.

Ampliamento dello spettro dei raggi

Senza soffermarci sulla forma degli spettri dei raggi delle particelle, come di quelli delle distribuzioni di probabilità di s , andiamo a verificare direttamente tramite l'evoluzione delle varianze se nel nuovo scenario permanga l'ampliamento degli spettri. Infatti per un verso abbiamo visto che la correlazione permane, per un altro che l'ambiente diventa brutalmente sottosaturato. Può quest'ultima circostanza rallentare la crescita delle σ ? Le figure 5.8 e 5.9 mostrano come

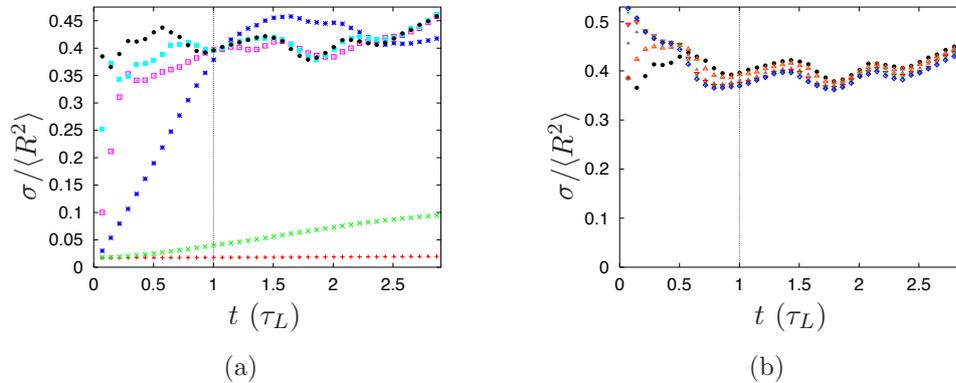


Figura 5.9: Deviazione standard normalizzata al raggio quadro medio.

ciò avvenga ma in misura assai ridotta. Intanto le varianze, oltre a crescere, in maniera proporzionale alla crescita dei rispettivi raggi quadri, lo fanno anche in maniera lineare e quindi — ancora una volta — più velocemente che nella teoria stocastica temporale.

Il fatto che tale ampliamento degli spettri sia rallentato lo constatiamo dalla $\sigma/\langle R^2 \rangle$: mentre nel caso non locale questa deviazione normalizzata superava di solito il valore di 0.50, ora ne rimane sotto. Ciononostante anche $\sigma/\langle R^2 \rangle$ cresce nel tempo: gran parte della crescita avviene nel periodo iniziale di attivazione della correlazione; in seguito sembra oscillare intorno a un valore costante, ancora con un fenomeno di saturazione a grandi A_3 . Si noti che, siccome il tempo di attivazione diventa vieppiù breve al salire di A_3 , la deviazione normalizzata cresce in questo caso rapidissimamente nei primissimi istanti.

5.1.3 Analisi comparative ulteriori

Nel corso dello studio ho effettuato anche alcune simulazioni per mettere alla prova i risultati da me ottenuti sinora. Non presenterò nel dettaglio queste indagini, in quanto non hanno portato a esiti straordinariamente differenti. Mi limiterò ad esporre brevemente i risultati qualitativi. Il confronto è stato compiuto utilizzando come paragone la stessa simulazione di riferimento ad $A_3 = 1.75 \times 10^3 \mu\text{m}^2 \tau_L^{-1}$ descritta nel paragrafo 5.1.2; tale valore, peraltro, è il medesimo presente anche nelle simulazioni senza retroazione lagrangiana. Il flusso che trasporta lo scalare passivo, inoltre, è il medesimo per tutte le simulazioni; le condizioni iniziali sono infatti identiche.

Confronto a tempi di assorbimento costante e variabile

In prima istanza occorre confrontare l'evoluzione con e senza retroazione della condensazione sulla soprassaturazione. A tal fine ho eseguito due raffronti, il primo al consueto A_3 di riferimento ($1.75 \times 10^3 \mu\text{m}^2 \tau_L^{-1}$), il secondo a un tasso maggiore ($3.50 \times 10^4 \mu\text{m}^2 \tau_L^{-1}$), che corrisponde al valore approssimativo reale in una nuvola alta mezzo chilometro e che alla luce delle precedenti simulazioni è risultato il più rispondente alla situazione reale (fig. 5.7(b)).

In quale situazione gli effetti lagrangiani sono più marcati? Sarebbe legittimo aspettarsi che il considerare un τ_s variabile localmente attenui gli effetti di correlazione e ampliamento dei raggi, giacché si è rilevato come in codesto scenario le gocce assorbano gran parte del vapore disponibile. Del resto anche qualitativamente ciò sembra plausibile: le gocce liberano vapore evaporando nelle zone sottosature, ma ne assorbono molto di più in quelle soprassature, visto che il raggio medio cresce per effetto della correlazione.

I risultati osservati in entrambi i casi sono molto chiari e tra loro concordi. Tutti gli effetti osservati inerenti la condensazione sono più marcati quando il tempo di assorbimento è costante, come atteso. Raggi medi, varianze e soprassaturazione media lagrangiana sono maggiori rispetto a quando τ_s è variabile; solitamente poco più che doppi. In quest'ultimo caso, inoltre, evaporano del tutto più particelle. Tuttavia l'andamento di queste grandezze ha una forma analoga in entrambi i casi: come immaginato, l'introduzione di questo effetto locale si configura come un attenuamento, ma non uno spengimento delle dinamiche esplorate.

Interessante è l'analisi delle distribuzioni di probabilità, poiché qui le differenze sono più sensibili. In particolare le $P(s)$ risultano ora dalla forma molto più regolare e a campana rispetto a quelle osservate nel paragrafo 4.3. Mentre le simulazioni a τ_s costante vedono svilupparsi distribuzioni tipicamente a tre picchi quasi della stessa altezza, quelle a τ_s locale, sottostante lo stesso flusso, hanno un unico elevatissimo e strettissimo picco intorno allo zero e lunghissime code. La media euleriana negativa si palesa con un'estensione maggiore della coda sinistra.

Di grande importanza è infine la constatazione che nel nuovo scenario è rimossa la bimodalità degli spettri dei raggi. Infatti, mentre negli stessi istanti la dinamica non retroattiva registra spettri chiaramente bimodali, quella retroattiva ne presenta solamente di unimodali; di nuovo dalla forma piuttosto regolare e centrata sul valor medio. La bimodalità riscontrata nel capitolo 4 è allora un fenomeno spurio? O invece è ora che stiamo trascurando alcuni aspetti?

Ricerca di una sorgente di vapore

A ben guardare, in effetti, l'introduzione della retroazione lagrangiana costituisce sì un passo verso una più fedele aderenza al modello e quindi anche alla realtà fisica; peraltro le analisi hanno permesso di rilevare come i fenomeni di condensazione presenti in natura sono ben descritti dal punto di vista qualitativo. Eppure nel contempo si è concessa la licenza a $\langle s \rangle_{eul}$ di non essere più legata a un valore costante e nullo. Ciò rende, certo, il sistema ancor più realistico. Ma — come si è visto — produce l'effetto di far assorbire gran parte del vapore. L'ambiente risultante è notevolmente sottosaturo. È questo che contrasta colla situazione, descritta nel capitolo 1, tipica del nucleo di un cumulo, ove s fluttua su valori dell'ordine del per cento e solitamente positivi.

Sarebbe lecito obiettare che su tempi molto lunghi il campo di soprassaturazione potrebbe raggiungere uno stato stazionario in cui vapore assorbito e rilasciato si equivalgono. Discuteremo nel paragrafo 5.2.1 questa eventualità. Ma già ora possiamo affermare che nello scenario attuale ciò non è possibile. Le gocce immesse inizialmente nell'aria continueranno inesorabilmente ad evaporare sinché anche la crescita del raggio si arresterà e pian piano tutte le particelle saranno scomparse.

Quindi quel che manca al sistema è un motore di soprassaturazione, una fonte di vapore in grado di ridurre l'eccessivo assorbimento. Nel proseguio cercherò proprio questa sorgente che risulta effettivamente presente in atmosfera. Invero, vedremo che sono molteplici gli aspetti trascurati che contribuiscono ad andare nella direzione corretta. Li presenteremo dal meno efficace ai più importanti.

Media della soprassaturazione iniziale positiva Siccome il campo scalare passivo da cui partiva ogni simulazione era sempre a media nulla, un primo tentativo potrebbe essere quello di usare campi di partenza a media positiva. Del resto ho già fatto notare come questa sia la situazione presente nel nucleo della nuvola dove le gocce si accrescono. E se un campo iniziale soprassaturo provocasse effetti lagrangiani differenti favorendo l'equilibrio coll'assorbimento? Per testare questa eventualità ho realizzato due simulazioni a campo di partenza iniziale uniforme e pari all'un per cento e al dieci per cento rispettivamente. Ebbene, l'analisi non rileva alcuna differenza nell'evoluzione rispetto al caso a media iniziale nulla. In particolare le quantità $\langle s_0 \rangle_{eul} - \langle s_{0.01} \rangle_{eul}$ e $\langle s_0 \rangle_{eul} - \langle s_{0.1} \rangle_{eul}$ si conservano nel tempo; vale a dire, le medie euleriane risultano traslate verso l'alto del valore iniziale su tutta l'evoluzione. Poiché i valori raggiunti dal campo sono ben maggiori, il contributo di una media positiva iniziale risulta trascurabile, anche nel caso in cui tale media sia addirittura del dieci per cento. D'altra parte non è una quantità maggiore di vapore all'avvio a rappresentare una fonte duratura per la fase di condensazione.

Numero di particelle iniziali maggiore Un'altra possibilità è quella di immettere nel sistema più particelle. Infatti, se le goccioline sono in numero ridotto, esse hanno a disposizione molto vapore: di fatto non hanno quindi una limitazione di disponibilità e, stante la correlazione, cercheranno di assorbirne quanto di più per la propria crescita. Quando però il numero di goccioline è maggiore, il dividendo di vapore per ciascuna è minore e la loro crescita ne risulterebbe rallentata. Potrebbe così capitare più facilmente che le gocce che si vengano a trovare nelle zone sottosature evaporino completamente. Di conseguenza ci sarebbe un maggiore rilascio di vapore. Occorre verificare se questo schema sia ben posto e se questo rilascio riesca a compensare l'assorbimento.

Si fa presente che l'inserimento di un numero maggiore di goccioline non contrasta col proposito di soffermarsi sulla fase di condensazione. Infatti la quantità sinora impiegata ($N = 20000$) comporta una presenza media di poco più di una goccia per cella nel dominio a 128×128 nodi. Se — come ho fatto — raddoppiamo ($N = 40000$) o quadruplichiamo ($N = 80000$) questo numero, avremo al massimo cinque gocce per cella. Ma le nostre celle sono macroscopiche: in una nuvola alta mezzo chilometro il passo griglia vale circa quattro metri e dunque non sussiste alcun rischio di interazione tra le gocce.

Occorre prestare attenzione al tempo di assorbimento, che registra il numero di gocce presenti: per confrontare le simulazioni si dovrà adoperare un $(1/\tau_s)_0$ doppio o quadruplo rispetto al caso a ventimila particelle.

Il confronto tra queste tre situazioni dà un esito in parte positivo: sia E_s sia $\langle s \rangle_{eul}$, infatti, subiscono una netta attenuazione, tanto maggiore quante più particelle vengono introdotte (di circa il dieci per cento con quarantamila gocce e del quaranta con ottantamila); tale attenuazione è riscontrabile pure in tutte le medie euleriane considerate nel paragrafo 5.1.2. Tuttavia gli andamenti temporali risultano completamente analoghi e semplicemente riscaldati. Infatti i valori raggiunti da $\langle s \rangle_{eul}$ rimangono fortemente negativi e non si delinea alcuna situazione di possibile stazionarietà. Sono altresì ridotti gli effetti lagrangiani, tanto che la correlazione nel caso a ottantamila gocce riesce ad attivarsi dopo un lungo periodo e per un breve tempo.

Sebbene, quindi, l'apporto di un numero maggiore di particelle riduca l'assorbimento del vapore, non si nota alcuna differenza qualitativa. Sono dunque altri i fenomeni capaci di ristabilire un quadro in cui l'assorbimento venga compensato dall'immissione di nuovo vapore.

5.2 Evoluzione con rinascita delle gocce

Il metodo seguito in tutte le simulazioni condotte sinora per poter studiare i meccanismi della condensazione turbolenta consisteva nell'immissione all'istante

iniziale di ventimila goccioline in un flusso in regime di convezione turbolenta allo stato stazionario. Aldilà del numero di gocce in sé, determinato anche da esigenze di calcolo, vogliamo ora focalizzare l'attenzione sul fatto che la popolazione di particelle sia scelta alla partenza in accordo con un raggio iniziale. Corrisponde questo modo d'agire a uno scenario fisico? In un primo approccio certamente sì. Infatti ciò equivale a pensare che la fase di nucleazione prepari nel nucleo del cumulo una popolazione di particelle liquide distribuita in modo omogeneo in tale dominio e con un raggio medio di $R_{0_{con}} \simeq 4 \mu\text{m}$, pari a quello tipico per l'innescò della successiva fase di condensazione, cui noi siamo interessati. Il presente studio segue l'evoluzione delle gocce in questa seconda fase sinché quelle superstiti non raggiungano il raggio $R_{0_{coa}} \simeq 20 \mu\text{m}$, a cui diviene prevalente il meccanismo della coalescenza.

Tuttavia, nell'intento di rendere il modello di condensazione turbolenta via via più aderente alla realtà fisica, cercando passo passo di comprendere contributi ed effetti dei numerosi aspetti presenti, occorre ora procedere in un ulteriore affinamento. Poiché nella realtà la separazione tra i diversi stadi di sviluppo della popolazione di gocce non è così netta, occorre ora tenere anche conto del fatto che, mentre un certo numero di gocce ha raggiunto un raggio tale da rendere prevalente l'accrescimento per condensazione, altre gocce si stanno ancora formando attorno ai nuclei di condensazione. Inoltre merita pure considerazione il fenomeno di *entrainment*, mediante il quale la nuvola risucchia continuamente corpuscoli dall'esterno. È ragionevole pensare che una quota di questi vada ad arricchire la parte centrale della nuvola di nuovi nuclei di condensazione. In questo scenario è allora più accurato considerare la fase di nucleazione non del tutto conclusa durante l'evoluzione che vogliamo seguire: è come se ci fosse una sorgente di gocce attiva non solo all'istante iniziale, ma per un periodo di tempo ulteriore, sebbene non illimitato.

In questo terzo passo di avvicinamento alla realtà fisica, quindi, registreremo questo processo immaginando che in media ogni gocciolina evaporata del tutto sia rimpiazzata da una nuova con raggio vicino a $R_{0_{con}}$. Chiameremo questo processo *rinascita*, proprio per dare l'idea del continuo subentrare di nuove piccole gocce nel sistema. Ciò, peraltro, rappresenta anche una risposta alla ricerca di una fonte di vapore, in quanto ora si è in presenza di un afflusso di acqua in forma liquida anche durante l'evoluzione.

Sempre nella logica di cercare di discernere il ruolo di ogni contributo, ho analizzato distintamente due situazioni: in una prima fase, nell'intento di comprendere che cosa implichi il semplice apporto continuo di particelle, le nuove gocce sono state immesse in maniera casuale all'interno del dominio, come del resto accade per quelle introdotte alla partenza (*rinascita incondizionata*); successivamente, riflettendo sul fatto che le goccioline si formano nelle aree soprassature e che quindi è più probabile che escano dalla fase di nucleazione in tali aree,

esse sono state introdotte solo nelle zone con soprassaturazione superiore all'un percento (*rinascita condizionata*). È quest'ultimo lo scenario più generale e più aderente alla realtà in cui ho studiato la condensazione turbolenta e rappresenta quindi la tappa principale di approdo del mio lavoro di tesi.

5.2.1 Rinascita incondizionata

È ora necessario valutare quali effetti scaturiscano dalla presenza di un numero mediamente costante di particelle nell'evoluzione complessiva. In prima analisi, quindi, non poniamo condizioni sul luogo ove possa comparire una nuova goccia. Che cosa ci aspettiamo che accada? Le nuove gocce, essendo distribuite via via casualmente sul dominio spaziale, nei primi istanti avranno una probabilità uguale di capitare in zone sottosature — rischiando di evaporare tanto prima quanto più grande è il tasso di crescita — e soprassature — proseguendo al contrario il proprio ingrandimento. In quest'ultimo caso le nuove goccioline alimentano la propria crescita sottraendo vapore alle altre gocce e rallentandone quindi l'ingrandimento. Nel primo caso, invece, si libera nuovo vapore che potrebbe da un lato contrastare codesto rallentamento, dall'altro attenuare la discesa del campo scalare su valori viepiù negativi. Nel tempo, però, se tale azione non arresta il calo di s , il campo diventa sempre più sottosaturo e quindi è molto più probabile che le nuove gocce evaporino subito. La rinascita, perciò, si potrebbe configurare come una sorta d'immissione di vapore.

Ruolo della rinascita incondizionata

Per poter operare un migliore confronto colle simulazioni precedentemente esposte, inoltre, ho realizzato anche in questa diversa situazione un'analisi al variare del tasso di crescita. Si è, però, ridotto il ventaglio degli A_3 sfoltendolo di quei casi che sono risultati irrealistici alla luce delle simulazioni condotte nel paragrafo 5.1.2, perché o troppo lente o troppo rapide rispetto a quanto osservato in natura. Sono state considerate qui come nel paragrafo 5.2.2 le due decadi centrali ($A_3 = 0.70, 1.75, 3.50 \times 10^3 \div 10^4 \mu\text{m}^2 \tau_L^{-1}$).

I risultati ottenuti, invero, non presentano peculiarità sorprendenti rispetto all'evoluzione priva di rinascita, rassicurandoci nel fatto che le approssimazioni sinora effettuate erano ben poste. Si osserva, comunque, un generale attenuamento degli effetti riscontrati nel paragrafo 5.1.2. In particolare risulta rallentata la crescita dei raggi, che appare meno che lineare; addirittura su tempi lunghi ($t > 2 \tau_L$) si nota una leggera decrescita del raggio medio. La spiegazione risiede nel fatto che ora c'è sempre una frazione di gocce con raggio intorno a quello iniziale, che, oltre a sottrarre vapore a quelle più grandi, tiene alto il numero di gocce piccole rispetto a quando non v'era rinascita.

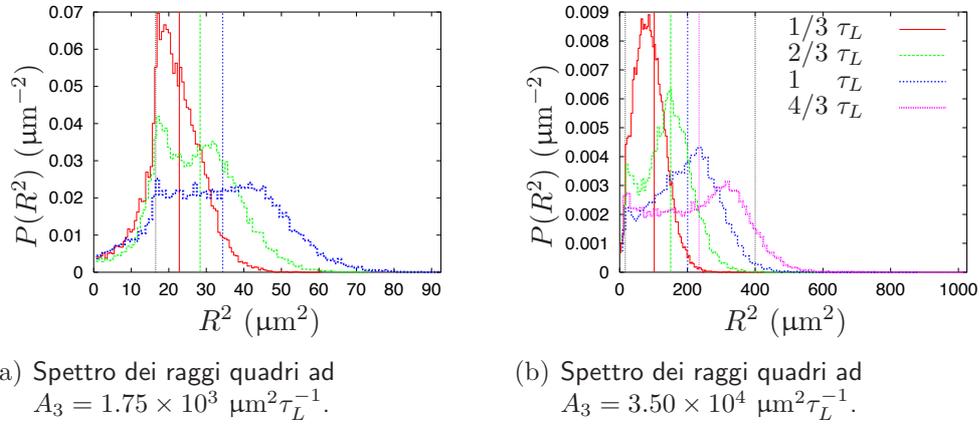


Figura 5.10: Ampliamento e bimodalità degli spettri dei raggi quadri ogni $\tau_L/3$ per due tassi di crescita significativi.

Questo fenomeno si manifesta anche in altri due modi. Se, infatti, la deviazione standard cresce meno (ma pur sempre pressoché linearmente), la minor crescita del raggio medio fa sì che la deviazione normalizzata salga in maniera monotona, mentre sinora avevamo osservato che dopo un certo periodo tale salita si arrestava. Dunque l'ampliamento dello spettro risulta più forte.

Inoltre, dopo poco meno di un τ_L , osserviamo nuovamente lo sviluppo di spettri dei raggi bimodali (fig. 5.10), determinati dai due picchi corrispondenti alle gocce appena nucleate e a quelle che sin dall'inizio si accrescono.

Anche l'effetto di correlazione tra traiettorie e campo di soprassaturazione è ora leggermente più debole. Tutti gli andamenti temporali sono, comunque, completamente analoghi a quelli visti in assenza di rinascita delle gocce.

Ricerca di uno stato stazionario

Lo studio degli effetti lagrangiani della condensazione assume un significato fisico se effettuato su tempi non troppo lunghi rispetto a quello caratteristico, in quanto successivamente entrano in gioco altri fenomeni. Le analisi presentate in questo lavoro, infatti, non si spingono mai oltre i tre τ_L per quel che riguarda l'evoluzione delle gocce.

I campi in cui sono immerse le gocce sono campi in regime turbolento e stazionario. Ma nel momento in cui diventa rilevante la retroazione delle gocce su s tramite il termine d'assorbimento, la soprassaturazione può essere tanto destabilizzata da non risultare più allo stato stazionario. Mi sono dunque chiesto

se sia possibile ottenere nello scenario lagrangianamente retroattivo anche un campo s stazionario in cui immergere le particelle.

Ho perciò realizzato alcune simulazioni molto lunghe (di $28.6 \tau_L$), sia senza rinascita delle goccioline sia con rinascita incondizionata. Il primo caso rappresenta solo un controllo, in quanto non essendovi nuova immissione di gocce, quelle residue saranno alla lunga sempre meno, sino ad annullarsi del tutto (dopo $11.5 \tau_L$ sono rimaste duecento gocce, ovvero cento volte meno di quelle iniziali!); in tal caso l'assorbimento via via tende ad annullarsi e s a comportarsi come T' . Immettendo però nuove gocce ciò non accade.

Colla rinascita, in effetti, ho osservato un andamento regolare per le varie grandezze, che comunque conferma l'analisi condotta in questo paragrafo. Infatti gli andamenti seguono quello dell'energia cinetica: hanno picchi e ventri corrispondenti a quelli di E_v , con simili intensità relative. Ciò, per esempio, si ripercuote su $\langle s \rangle_{eul}$, che si comporta in maniera speculare ad E_v , rimanendo sempre negativa. Interessante è l'andamento dell'assorbimento medio e della soprassaturazione media lagrangiana: sia $\langle s/\tau_s \rangle_{eul}$ sia $\langle s \rangle_{lag}$ oscillano intorno allo zero in maniera approssimativamente periodica (con periodo di circa tre τ_L) e con una forma simile a quella vista nelle simulazioni brevi.

Lo stato di s appare dunque come stazionario, poiché da un lato E_s oscilla come l'energia del sistema, dall'altro le variabili mostrano proprietà periodiche analoghe a quelle delle simulazioni brevi. Ciò assicura che i campi impiegati fossero tutti allo stato stazionario e la correttezza dell'analisi, nonché, nuovamente, la dipendenza dall'energia del processo di condensazione in un flusso convettivo turbolento.

Inoltre la sottosaturazione globale appare come una proprietà del sistema analizzato. Ricercando, dunque, una sorgente di vapore che riequilibri questa condizione, occorre non solo considerare l'afflusso di nuove goccioline nelle aree soprassature, una maggiore densità di particelle e un campo iniziale mediamente soprassaturo, ma soprattutto che la formazione della nuvola avviene su correnti mediamente ascensionali; se $\langle \mathbf{v} \rangle = \langle w \hat{z} \rangle$, infatti, si ha un motore per s , che sappiamo essere crescente nella quota.

5.2.2 Rinascita condizionata

Nei capitoli 4 e 5 ho dunque affrontato uno ad uno gran parte degli aspetti critici che entrano in gioco nello studio oggetto di questo lavoro di tesi, ovvero nei processi di condensazione nel nucleo di un cumulo in convezione turbolenta. Ho quindi dapprima valutato gli effetti della convezione turbolenta in un ambiente instabile e di alcune sue caratteristiche importanti, come per esempio le forti escursioni energetiche e la struttura verticale a pennacchi termici. In una seconda fase dello studio ho analizzato il ruolo della retroazione locale sul vapore dovuta

alla condensazione delle gocce. Infine ho esaminato l'apporto del continuo afflusso di goccioline appena nucleate. Sono quindi ora in grado di comprendere il ruolo svolto da ciascuno di questi fenomeni.

Possiamo allora studiare il sistema nel suo complesso, considerando tutti insieme questi fattori, come ci eravamo prefissi inizialmente. È questo, perciò, il modello più completo e più aderente alla realtà fisica analizzato. Ricordiamone dunque le caratteristiche principali. Il vapore è immerso in un flusso soggetto a moti convettivi turbolenti, innescati dall'instabilità dovuta alle temperature via via più fredde incontrate dall'aria calda ascendente (e viceversa). Il vapore, inoltre, alimenta il processo di condensazione delle goccioline che via via nascono nelle aree soprassature della nuvola e, quindi, è a sua volta influenzato dall'evoluzione delle gocce, che lo assorbono nella propria crescita.

In termini più tecnici stiamo considerando un sistema in regime stazionario di Bolgiano–Obukhov in cui avviene un processo di condensazione, retroattivo sul campo di soprassaturazione e con rinascita delle goccioline nelle zone soprassature.

In particolare ho realizzato simulazioni a valori diversi del tasso di crescita ($A_3 = 0.70, 1.75, 3.50 \times 10^3 \div 10^4 \mu\text{m}^2\tau_L^{-1}$) e con rinascita condizionata a valori del campo scalare passivo superiori all'un per cento ($s(X_i, Z_i) \geq 0.01$).

Ruolo della rinascita condizionata

I risultati mettono in luce come la rinascita delle gocce condizionata ai valori positivi del campo s produca alcuni effetti qualitativamente e quantitativamente differenti dagli scenari intravisti sino ad adesso.

In particolare si può notare come l'evoluzione risulti meno dipendente dal tasso di crescita. Gli andamenti non sono più analoghi e riscalabili proporzionalmente ad A_3 , poiché dopo circa $1.5 \tau_L$ si presentano situazioni diverse: per esempio, per $A_3 = 3.50 \times 10^4 \mu\text{m}^2\tau_L^{-1}$ le gocce rimangono correlate per tutta l'evoluzione (fig. 5.11(e)) nonostante il campo continui a diventare sempre più sottosaturo (fig. 5.11(b)), mentre per $A_3 = 1.75 \times 10^4 \mu\text{m}^2\tau_L^{-1}$ la correlazione si arresta a metà evoluzione proprio quando $\langle s \rangle_{eul}$ inizia a riavvicinarsi allo zero.

Contributo delle nuove goccioline Inoltre l'assorbimento medio di vapore $\langle s/\tau_s \rangle_{eul}$ ha segno positivo definito sinché c'è correlazione (fig. 5.11(d)). Dopodiché i comportamenti possono essere differenti e il segno non è più definito, mentre in precedenza una volta avvenuta la decorrelazione il segno era sempre negativo. Infatti ora le nuove gocce arrivano direttamente nelle aree soprassature e possono quindi bilanciare il fatto che le altre gocce son tanto grandi da poter navigare liberamente nel dominio e quindi occupare perlopiù zone sottosature (il campo è in media negativo).

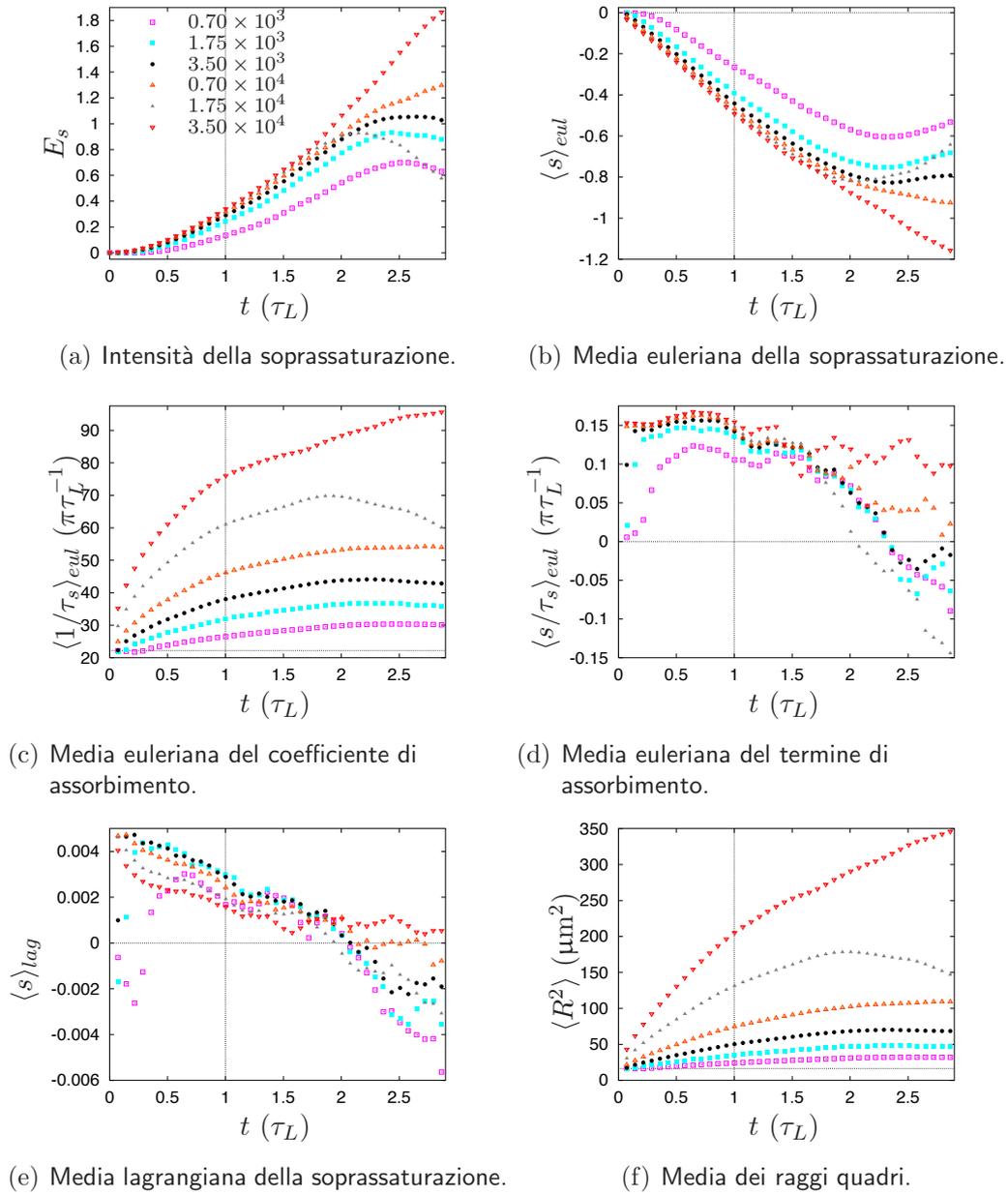
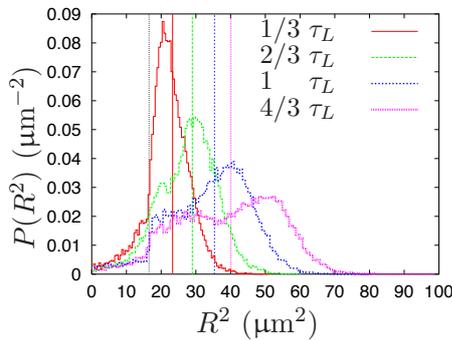


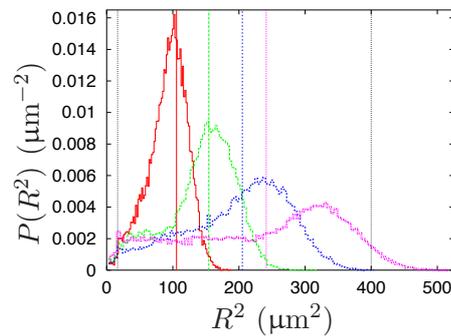
Figura 5.11: Effetti della condensazione sui campi euleriani e sulle quantità lagrangiane al variare del tasso di crescita. I punti corrispondenti ai vari A_3 sono indicati nella legenda della figura (a) nelle unità $\mu\text{m}^2\tau_L^{-1}$ e sono i medesimi impiegati per gli stessi A_3 nel paragrafo 5.1.2.

Tale fenomeno si ripercuote sulla decorrelazione finale, che risulta nettamente attenuata (fig. 5.11(e)). Ad ogni istante c'è una frazione di particelle piccole nelle aree soprassature che contrasta e può arrivare ad equilibrare il processo di decorrelazione subito dalle particelle molto grandi, che possano muoversi in tutta la nuvola senza evaporare. Tale effetto è più marcato ad alti A_3 .

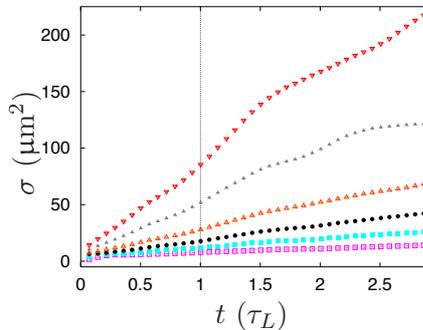
La correlazione, che dura per circa $2 \tau_L$ come abbiamo visto per tutte le simulazioni con retroazione lagrangiana, è ora, però, più debole del trenta per cento.



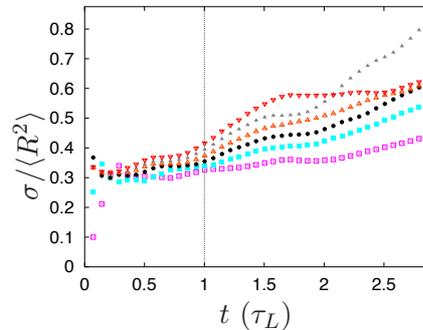
(a) Spettro dei raggi quadri a $A_3 = 1.75 \times 10^3 \mu\text{m}^2 \tau_L^{-1}$.



(b) Spettro dei raggi quadri a $A_3 = 3.50 \times 10^4 \mu\text{m}^2 \tau_L^{-1}$.



(c) Deviazione standard dei raggi quadri.



(d) Deviazione standard normalizzata al raggio quadro medio.

Figura 5.12: Ampliamento dello spettro dei raggi e bimodalità. Negli spettri le linee verticali rappresentano rispettivamente il raggio medio iniziale, i raggi medi ai vari istanti considerati e il raggio d'innesco della coalescenza.

Crescita dei raggi e ampliamento degli spettri Le differenze più marcate si ritrovano nell'analisi degli spettri dei raggi (fig. 5.12). Infatti la distribuzione ora è meno estesa verso i raggi grandi e più larga su quelli piccoli.

Infatti, via via che entrano nel sistema, le gocce piccole sottraggono vapore dalla disponibilità di quelle più grandi, rallentandone la crescita.

Tale effetto è rilevabile pure dall'osservazione dell'andamento del raggio quadro medio, che in questa situazione cresce meno della metà che in assenza di rinascita. Tale crescita, inizialmente lineare, rallenta e infine si arresta (tranne che per il valore massimo di A_3).

Ciò non significa che cessi anche l'allargamento dello spettro, poiché accade proprio il contrario. Infatti queste simulazioni sono quelle in cui abbiamo osservato l'ampliamento più rapido. Si prenda l'andamento della deviazione standard normalizzata al raggio quadro medio (fig. 5.12(d)); mentre sinora avevamo registrato un assestamento intorno a valori costanti dopo il periodo di forte ampliamento iniziale, nello scenario completo che stiamo discutendo l'ampliamento relativo continua nel tempo.

Infine sono osservati spettri bimodali. Mentre in un primo momento la distribuzione si dispone intorno al valor medio in crescita, man mano che affluiscono nuove goccioline si registra un innalzamento dello spettro intorno al raggio iniziale; buona parte delle gocce continua però ad aumentare di dimensione. Così, dopo poco più di un τ_L , si viene a delineare una distribuzione caratterizzata da due picchi disposti a destra e a sinistra del valor medio.

Sono questi risultati importanti per una connessione coll'atmosfera reale. Si prenda la simulazione ad $A_3 = 3.50 \times 10^4 \mu\text{m}^2 \tau_L^{-1}$, che è il valore corrispondente a quello reale per un dominio alto mezzo chilometro e con fluttuazioni medie di velocità di circa 1 m s^{-1} . Ebbene, la crescita registrata in questo caso appare più in linea con quella reale rispetto a quando non si considerava la rinascita delle gocce. Là, infatti, i raggi superavano troppo in fretta i $20 \mu\text{m}$, che rappresentano l'approssimativa soglia d'innescio della coalescenza. Qui, invece, ciò accade in qualche τ_L , come effettivamente avviene nei cumuli, dove il tempo necessario a raggiungere la coalescenza è dell'ordine della mezzora, mentre il tempo caratteristico del flusso dei dieci minuti. Del resto, nonostante l'ambiente mediamente molto sottosaturato, i valori di s esperiti dalle gocce sono in linea con quelli tipici di una nuvola.

Quadro complessivo dei risultati

Una volta compreso il contributo dovuto all'immissione nel sistema di nuove goccioline appena nucleate, cerchiamo di riordinare in un quadro organico i risultati ottenuti dalle simulazioni complete di tutti i fattori analizzati.

Il sistema si trova in un regime stazionario di convezione turbolenta. La struttura di questo tipo di flusso si è rivelata determinante nell'intensità con cui si verificano gli effetti della condensazione. In particolare la presenza di pennacchi

termici, dotati di sottili fronti in cui l'escursione dei campi è molto forte, rende molto netto il processo di correlazione, come verificabile dall'osservazione delle istantanee dei campi (fig. 5.3). Infatti le gocce che si ritrovino all'interno delle strutture sottosature tendono ad evaporare rapidamente, mentre le altre rapidamente si accrescono. Le gocce scompaiono laddove il campo scalare assuma valori molto negativi, mentre dove esse si addensano il vapore tende a scomparire.

Nonostante l'ambiente risulti quindi complessivamente sottosaturo, le gocce continuano ad accrescersi, dimostrando quanto decisivo sia il meccanismo di correlazione. Infatti la soprassaturazione incontrata dalle gocce risulta ugualmente sempre positiva per un lungo periodo ($\langle s(t) \rangle_{lag} > 0 \quad t \lesssim 2 \tau_L$). L'arrivo di nuove gocce durante l'evoluzione rallenta considerevolmente tale crescita, ma non l'arresta; inoltre determina un allargamento dello spettro dei raggi molto accentuato ($\sigma(R^2) \lesssim R^2$), più rapido non solo dei modelli classico e temporale stocastico, ma anche della crescita del raggio stesso ($\sigma(R^2)/\langle R^2 \rangle$ monotona crescente).

La popolazione delle gocce, dapprima omogenea, nel tempo si separa in due tipologie prevalenti: le gocce dal raggio molto grande e le goccioline dal raggio ancora pari a quello iniziale ($P(R^2)$ bimodale). Questa separazione è la responsabile dell'innesco della coalescenza, nel caso in cui le gocce del primo gruppo raggiungano il raggio tipico d'innesco di tale fenomeno ($20 \mu\text{m}$), iniziando a risentire dell'inerzia, e che la densità delle gocce divenga alta.

Tutti questi fenomeni sono accentuati a maggiori A_3 e nei momenti in cui il sistema stia raggiungendo un picco di energia cinetica.

Conclusioni

I processi di condensazione che avvengono in una nuvola rappresentano la fase centrale e cruciale per la sua formazione e il suo successivo sviluppo. Da come si accresce la popolazione delle goccioline in questo stadio evolutivo della nube, infatti, dipende la maggiore o la minore efficacia dei processi successivi, quali soprattutto gli urti tra goccioline che hanno luogo durante la coalescenza. Alla luce delle osservazioni sperimentali il modello classico di condensazione si rivela inadatto all'interpretazione del fenomeno, in quanto prevede una distribuzione delle taglie delle gocce che trasla rigidamente nel tempo, quando, al contrario, nelle nuvole si riscontra un ampliamento dello spettro dei raggi nel tempo e una progressiva separazione delle goccioline in due popolazioni di differente taglia. Le ragioni del fallimento di questo come di altri modelli successivi risiedono o nella mancata inclusione della turbolenza o nell'utilizzo come oggetto d'indagine del volume fluido, che in un contesto turbolento è inadeguato a descrivere le dinamiche globali del flusso.

Basandomi sui buoni risultati ottenuti da altri lavori presenti in letteratura ([6, 33]) che considerano determinante la turbolenza dell'intera nuvola, ho sviluppato un modello di condensazione per il nucleo quasiadiabatico di una nuvola calda cumuliforme in regime di convezione turbolenta. Tale modello è caratterizzato da tre campi turbolenti euleriani — velocità, temperatura e soprassaturazione — e da $2N$ variabili lagrangiane — la traiettoria e il raggio quadro di ognuna delle N gocce del sistema — tutti tra loro reciprocamente accoppiati. In particolare il modello introduce la possibilità che l'evoluzione delle gocce influenzi in modo determinante le fluttuazioni dei campi scalari. Ciò è evidente soprattutto per il campo di soprassaturazione: laddove le goccioline si addensano e accrescono la propria dimensione, viene sottratto vapore all'ambiente.

Nelle simulazioni, svolte su un reticolo piano, ho dapprima considerato questo effetto come dovuto globalmente alla totalità delle gocce e distribuito omogeneamente ($1/\tau_s$ costante) e in un secondo tempo, più realisticamente e per la prima volta, come dovuto localmente alle singole gocce presenti nell'intorno dei nodi ($1/\tau_s$ campo locale). In quest'ultimo caso ho anche preso in considerazione l'afflusso di nuove goccioline appena nucleate durante l'evoluzione: è questa la

situazione più aderente alla realtà simulata.

L'interesse era incentrato su tre interrogativi focali.

I meccanismi di correlazione, evidenziati nel modello semplificato di [6, 33] e capaci di spiegare l'ampliamento dello spettro dei raggi, sussistono ancora in un flusso convettivo?

Il considerare un tempo di assorbimento locale qualitativamente va nella direzione di ridurre gli effetti di correlazione e dunque di allargamento dello spettro, in quanto sono le gocce in accrescimento che assorbono vapore, sottraendone quindi all'ambiente circostante e rallentando la propria crescita. Questo effetto, rilevante in una nuvola, può arrivare a distruggere i processi di correlazione, rivelandoli come spuri e dovuti a una erronea sottostima dell'importanza della retroazione lagrangiana?

Infine, la continua attivazione di nuove goccioline appena nucleate comporta, come atteso, un ampliamento spettrale più accentuato e riesce a controbilanciare l'attenuamento dovuto all'assorbimento di vapore?

Tutte le simulazioni effettuate mettono in luce una forte correlazione tra le traiettorie seguite dalle particelle e i valori positivi del campo di vapore. Ciò garantisce una continua crescita del raggio medio anche in un ambiente mediamente saturo (cap. 4) o addirittura molto sottosaturo (cap. 5). Inoltre la varianza dello spettro dei raggi quadri e, soprattutto, la varianza normalizzata al raggio quadro medio in ogni analisi risultano crescenti, a testimonianza di un continuo ampliamento dello spettro. Tale ampliamento risulta più rapido di quello previsto dai modelli proposti in letteratura, quali per esempio i modelli stocastici. È infine osservata la bimodalità degli spettri radiali, caratteristica rilevante per l'innesco della coalescenza.

Tutto questo significa che il meccanismo individuato di selezione delle particelle liquide, lungi dall'essere spurio, si delinea come un attore protagonista dei processi di condensazione ed è in grado di spiegare molti dei problemi rimasti aperti nello studio di questa fase.

Il regime di convezione turbolenta, dalla natura profondamente diversa rispetto a quello in assenza di spinta archimedeica, non solo non limita gli effetti lagrangiani, ma li rende più efficaci, soprattutto a causa della struttura energetica verticale che rende le fluttuazioni dei campi molto estese.

La retroazione lagrangiana sulla soprassaturazione svolge il ruolo atteso: gli effetti osservati risultano, infatti, attenuati; ma non spenti. Il meccanismo selettivo appare ancora netto, ma ora la decorrelazione avviene in tempi più rapidi. Inoltre si osserva crescita dei raggi nonostante l'ambiente divenga vieppiù sottosaturo, in linea con molte osservazioni sperimentali.

Le analisi con rinascita delle gocce dimostrano come tale fenomeno riequilibri l'effetto dell' $1/\tau_s$ locale. L'ampliamento dello spettro in quest'ultimo caso —

che, ricordiamo, include tutti gli sviluppi effettuati — appare come il più rapido osservato.

Da questo lavoro di tesi ho potuto trarre importanti conferme dei meccanismi di selezione individuati da modelli più semplificativi. Ho inoltre valutato per la prima volta l'effetto di altri fenomeni sinora generalmente trascurati o comunque non considerati nel loro insieme. Li ho, infatti, organizzati in un quadro organico all'interno del modello formulato, mediante l'inclusione del motore della condensazione (ovvero la convezione turbolenta in presenza di vapore acqueo), della retroazione sui campi da essa prodotta e della continua nucleazione di nuove goccioline.

Tuttavia rimangono aperte svariate strade di ulteriore sviluppo di questo lavoro.

- Occorre studiare la convezione umida, ovvero il regime in cui la temperatura risente del riscaldamento provocato dalla liberazione di calore nella condensazione. A tal fine non serve modificare il modello qui presentato, ma semplicemente rendere attivo il termine $R_s s$ nell'equazione termica di trasporto (3.9b). Si potrà seguire un procedimento analogo a quello di questa tesi, analizzando gli effetti lagrangiani determinati da un riscaldamento in un primo momento globale (R_s costante) e successivamente locale e dipendente dall'evoluzione delle goccioline (R_s campo locale). Potrà poi essere anche tenuta in conto la dipendenza di R_s e A_3 dal profilo termico verticale medio.
- Occorre aumentare la risoluzione delle simulazioni per descrivere le dinamiche euleriana e lagrangiana in maniera più dettagliata. Un primo passo può essere rappresentato dal passaggio a un dominio spaziale di 1024×1024 nodi, in seguito inserendovi un numero molto maggiore delle 20000 goccioline qui immesse.
- Occorre mettere alla prova il modello e i risultati ottenuti integrando le equazioni su un dominio tridimensionale. Le simulazioni potranno seguire un percorso analogo a quello condotto qui, valutando nell'ordine gli effetti della convezione turbolenta nello spazio, delle retroazioni lagrangiane e della continua nucleazione di nuove gocce.

Appendice A

Grandezze fisiche

Sebbene, come spiegato al paragrafo 3.2.2, non è possibile mettere in corrispondenza uno a uno tutti i valori reali delle grandezze fisiche con quelli utilizzati dal codice d'integrazione, riteniamo utile presentare in questa appendice riportare tutti i valori delle grandezze in gioco, unitamente alla loro dipendenza termica, e i parametri di riferimento della nube sotto esame, per avere un quadro riassuntivo delle caratteristiche fondamentali della nuvola cumuliforme studiata.

A.1 Variabilità termica

In questo paragrafo intendiamo raccogliere in uno schema unitario i valori e le dipendenze termiche di tutte le grandezze coinvolte nel modello di condensazione esposto al capitolo 3. Infatti, per un verso nel modello si è considerata la variabile temperatura, per un altro è noto che molte proprietà termodinamiche, spesso considerate approssimativamente costanti, ne sono sue funzioni. Diventa allora importante comprendere quanto sia legittimo assumere certe quantità ancora come costanti e quanto altre come variabili.

Le dipendenze calcolate sono comunque in generale molto basse, al massimo dell'ordine del percento. Questo assicura che per le fluttuazioni locali, che non raggiungono gradienti notevoli rispetto a quelli registrabili tra base e vetta della nuvola, le grandezze possano essere considerate davvero costanti.

Occorre capire per quali grandezze ciò possa rimanere vero anche rispetto al profilo verticale medio. Nelle tabelle A.1 e A.2 sono elencati i valori e le *variabilità per grado* (ovvero la variazione percentuale per unità di temperatura) delle grandezze.

È evidente come soltanto la variazione di e_s colla temperatura sia significativa. Peraltro considerare variazioni sotto al percento per grado è poco sensato, non solo in quanto di un ordine inferiore a quelle della tensione di vapor satu-

(a) Costanti.

x	$m(x)$	$o(x)$	$u(x)$	$e(x)$
ε	0,6220			
M_a	2.89644	10		
M_h	1.80160	10		
R_a	2.8704	10^2	$\text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$	
R_v	4.6150	10^2	$\text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$	
g	9.8		m s^{-2}	+0.5‰

(b) Parametri della nuvola.

x	$m(x)$	$o(x)$	$u(x)$	$e(x)$
T_m	2.75	10^2	K	+3.6‰
p_m	8	10^4	Pa	+20.1‰
z_m	2	10^3	m	
h	0.5	10^3	m	
R_m	1.0	10^{-5}	m	
n	3	10^7	m^{-3}	

Tabella A.1: Valori di costanti e parametri della nuvola. Il pedice m indica i valori medi di riferimento. Nelle colonne abbiamo riportato per ogni grandezza x il valore della variabile $m(x) \times o(x)$ nelle unità $u(x)$ alla quota z_m di metà nuvola, e quindi alla temperatura T_m ; si è riportata anche la variabilità per grado $e(x) = \frac{d}{dT} \log x|_{T_m}$. Per g il valore indicato è di solo riferimento e ipotizzato approssimativamente in base alla dipendenza di g e T dalla quota.

ro, ma pure per tutte le approssimazioni introdotte via via nella costruzione del modello. Ciò potrebbe però essere scorretto se i termini ove compare e_s fossero molto meno significativi rispetto a quelli nelle altre grandezze o se queste sommassero i loro effetti. Tuttavia un'analisi dettagliata di questi aspetti permette di escludere una simile ipotesi; pertanto nel modello tutte le grandezze — compresa T quando non compare sotto derivata — sono state fissate al loro valore alla temperatura di riferimento a metà nuvola T_m . Soltanto e_s rimane come variabile in T ; d'altra parte nel capitolo 1 abbiamo visto come sia proprio questa dipendenza ad innescare la condensazione nell'ascesa dell'aria umida.

Gli unici coefficienti del modello dipendenti da T sono, dunque, A_2 e A_3 e quindi R_s e τ_s . In quest'ultimo, però, l'effetto incrociato di A_2 e A_3 annulla tale dipendenza. Di fatto, perciò, le sole dipendenze dal profilo termico $T_g(z)$ presenti nelle equazioni (3.9) sono contenute in R_s nella (3.9b) e A_3 nella (3.9e). Sebbene queste dipendenze siano state trascurate nelle simulazioni numeriche,

(a) Grandezze termodinamiche.

x	$m(x)$	$o(x)$	$u(x)$	$e(x)$
c_{pa}	1.004	10^3	$\text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$	
β	3.636	10^{-3}	K^{-1}	-3.6‰
ρ_w	1.000	10^3	kg m^{-3}	-0.01‰
ρ_a	1.005		kg m^{-3}	-3.5‰
ν_a	1.346	10^{-5}	m^2s^{-1}	+6.0‰
k_a	2.395	10^{-2}	$\text{W m}^{-1}\text{K}^{-1}$	+2.9‰
α_a	2.374	10^{-5}	m^2s^{-1}	+6.1‰
D_v	2.708	10^{-5}	m^2s^{-1}	+5.8‰
L_e	2.496	10^6	J kg^{-1}	-1.0‰
e_s	6.979	10^2	Pa	+71.8‰

(b) Coefficienti del modello.

x	$m(x)$	$o(x)$	$u(x)$	$e(x)$
Γ_a	9.761	10^{-3}	K m^{-1}	< 10.0‰
A_1	5.740	10^{-4}	m^{-1}	< 10.0‰
A_2	3.589	10^2	m^3kg^{-1}	-36.5‰
A_3	7.251	10^{-11}	m^2s^{-1}	+34.8‰
A_4	3.753	10^6	m^{-2}	< 10.0‰
R_s	6.765	10^{-1}	K s^{-1}	+34.8‰
τ_s	1.019	10	s	+1.4‰

Tabella A.2: Valori di grandezze termodinamiche e coefficienti del modello di condensazione in una nuvola caratterizzata dalle proprietà indicate in tabella A.0(b).

potranno essere indagate in successive analisi.

A.2 Dipendenza termica esplicita

In questo paragrafo è presentata per ogni grandezza la dipendenza esplicita dalla temperatura, da cui si sono calcolate le stime di variabilità per grado esposte in precedenza.

Coefficiente di espansione termica Il coefficiente di espansione termica è definito come

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{dT} \rho = -\frac{d}{dT} \log \rho$$

In particolare, nel caso di un gas perfetto, qual è con fine precisione l'aria, dall'equazione di stato $p = \rho RT$ si ottiene semplicemente

$$\beta = \frac{1}{T}$$

Densità Mentre la densità dell'acqua risulta costante con una precisione molto alta (come anche calcolabile tramite uno sviluppo riportato in [31]), la densità dell'aria secca varia più sensibilmente. Per calcolare, però, il valore di ρ_a , una volta fissate la temperatura e la pressione a cui si è scelto di lavorare, basta utilizzare l'equazione di stato dei gas perfetti relativamente alla frazione secca dell'aria.

$$\rho_a = \frac{p_a}{R_a T}$$

Essendo, inoltre, $\rho - \rho_a \ll \rho_a$, in tutte le equazioni si è sostituita la densità totale ρ con ρ_a .

Viscosità cinematica I coefficienti di diffusività presenti nelle tre equazioni del modello sono tra le costanti in gioco quelle con variazioni maggiori nella temperatura. Differenze nei rispettivi valori si sono inoltre riscontrate nei vari testi analizzati. Tuttavia le tre diffusività mantengono un ordine comune di $10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, talché il loro rapporto può essere assunto come pressoché unitario.

Come già per la densità, anche per la viscosità cinematica si è impiegata quella dell'aria secca, trascurando perciò gli effetti del vapore e delle gocce, come pure per la diffusività termica. In mancanza di altre indicazioni, per la dipendenza termica si è optato per un'interpolazione dei dati di [23], tralasciando eventuali dipendenze dalla pressione.

$$\nu_a \simeq (1.33 + 0.00085(T - T_0)) \times 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$$

con $T_0 = 273.15 \text{ K}$

Conduttività termica Ricordiamo che si distingue tra conduttività e diffusività termica. Poiché

$$k = c_p \rho \varkappa$$

la variabilità di \varkappa dipende soprattutto da quella della densità. Una formula sperimentale al prim'ordine in T è presentata da [31] per k :

$$k_a = (2.3818 + 0.00712(T - T_0)) \times 10^{-2} \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$$

Prendendo in considerazione le correzioni dovute alla natura discreta delle gocce e alla loro curvatura, nelle formule in realtà è stata impiegata una conduttività

efficace $k' < k$ tendente a k al crescere del raggio (si veda [31] per l'espressione esplicita). Per esempio, sotto alcune condizioni lì esposte, tra uno e dieci micrometri k'_a può passare da 1.18 a 2.50×10^{-2} W/(m K). Tuttavia ancora [31] fa notare come dopo una ventina di secondi di evoluzione le previsioni ottenute con o senza l'effetto di curvatura siano trascurabili.

Diffusività di vapore In [31] è fornita pure la dipendenza della diffusività dalla temperatura e dalla pressione mediante una legge empirica. Se $T_0 = 0$ °C e $p_0 = 1$ atm, si ha

$$D_v = 2.11 \times 10^{-5} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1.94} \left(\frac{p_0}{p} \right) \text{ m}^2\text{s}^{-1}$$

In totale analogia col caso precedente, anche per D_v è stata indicata nelle equazioni una diffusività di vapore efficace. Peraltro in questo caso l'effetto non è più marcato. Sempre in [31], per certi valori dei parametri presenti nella formula esplicita, a partire da una $D_v = 3.0 \times 10^{-5}$ m²/s si trovano dei risultati efficaci che passano da addirittura 4.5×10^{-7} m²/s per un micrometro di raggio a 1.9×10^{-5} m²/s per dieci micrometri. A tempi lunghi l'effetto risulta trascurabile.

Calore latente di evaporazione Ancora in [31] è riportata una formula sperimentale per il calore latente di evaporazione dell'acqua pura:

$$L_e = 2.5008 \times 10^6 \left(\frac{T_0}{T} \right)^{0.167+3.67 \times 10^{-4}T} \text{ J kg}^{-1}$$

Gli effetti della curvatura della goccia in questo caso sono del tutto ininfluenti già sopra i sei nanometri.

Tensione di vapor saturo Come si è già osservato nel paragrafo A.1, la vera variabile nella temperatura del modello è proprio la tensione di vapor saturo, poiché è questa grandezza a determinare le maggiori variazioni termiche nelle equazioni. I valori di e_s sono dell'ordine della decina di ettopascal e crescono con T : per esempio, se in atmosfera tipo vale sei ettopascal, in un ambiente più caldo di venti gradi la tensione quasi quadruplica, raggiungendo i ventitré ettopascal.

Dall'equazione di Clausius–Clapeyron (1.6) si ricava

$$e_s(T) \simeq e_s(T_0) e^{\frac{L_e}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)}$$

[31], però adotta uno sviluppo al sest'ordine nella temperatura

$$e_{sat}(T) \simeq \sum_{i=0}^6 a_i (T - T_0)^i$$

con $a_0 = 6.10779961$ hPa. Va osservato che gli effetti di curvatura inficiano per meno dell'un per cento per raggi superiori ai dieci nanometri.

Tasso di raffreddamento adiabatico Considerando unitario il rapporto tra le temperature, come autorizzato dall'approssimazione esposta nel paragrafo A.1, il tasso verticale di raffreddamento adiabatico è normalmente espresso come

$$\Gamma_a = - \left(\frac{d}{dz} T \right)_a \simeq \frac{g}{c_{p_a}}$$

Tasso verticale di saturazione Il coefficiente di w nell'equazione per s (3.9c) è definito come

$$A_1 = \frac{g}{T} \left(\frac{L_e}{c_{p_a} R_v T} - \frac{1}{R_a} \right)$$

Coefficiente di assorbimento Il coefficiente di $\frac{d}{dt} r_v$ nell'equazione per s (1.9b) è definito come

$$A_2 = \frac{R_v T}{e_s(T)} + \frac{L_e^2}{c_{p_a} \rho_a R_v T^2}$$

Tasso di crescita per condensazione Il coefficiente di s nell'equazione per R^2 (3.9e) è definito come

$$A_3 = \frac{1}{\frac{\rho_h R_v T}{D'_v e_s(T)} + \frac{\rho_h L_e}{k'_a T} \left(\frac{L_e}{R_v T} - 1 \right)}$$

Coefficiente di retroazione lagrangiana Il coefficiente A_4 compare come uno dei fattori di s nelle equazioni per T (3.9b) e s (3.9c) e rappresenta l'accoppiamento lagrangiano tra evoluzione particellare e campi euleriani. È quindi un coefficiente locale, sebbene possa essere visto classicamente come medio globale. Dipende puntualmente dalla densità numerica di goccioline e dal raggio medio o equivalentemente dalla somma dei raggi delle gocce presenti in un intorno $I_x = \{\mathbf{x} \pm \delta\mathbf{x}/2\}$ del punto \mathbf{x} :

$$A_4(\mathbf{x}, t) = 4\pi \frac{\rho_h}{\rho_a} n(\mathbf{x}, t) \langle R \rangle_{I_x}(t) = 4\pi \frac{\rho_h}{M_{I_x}} \sum_i^{N_{I_x}} R_i(t)$$

Tasso di riscaldamento per condensazione Per comodità vengono definiti due coefficienti, di cui abbiamo discusso diffusamente a proposito di retroazione lagrangiana. Il primo è il coefficiente di s nell'equazione per T (3.9b)

$$R_s(\mathbf{x}, t) = \frac{L_e}{c_{pa}} A_3(T) A_4(\mathbf{x}, t)$$

Tempo di assorbimento della soprassaturazione Il secondo, τ_s , è l'inverso del coefficiente di s nell'equazione per s (3.9c). Definiamo quest'ultimo, poiché in assenza di gocce assume valori nulli corrispondenti a tempi infiniti

$$\frac{1}{\tau_s}(\mathbf{x}, t) = \rho_a A_2 A_3 A_4(\mathbf{x}, t)$$

A.3 Parametri

A questo punto restano da scegliere i parametri del modello, in modo da fissare tutte le grandezze assunte come costanti (in base a quanto osservato nel paragrafo A.1).

Spessore Qui occorre bilanciare due esigenze: da un lato avere una nuvola abbastanza alta da poter notare un differenziale termico tra base e tetto; d'altra parte bisogna porsi nel nucleo quasiadiabatico della nuvola, ovvero nella sua zona centrale in cui gli effetti di bordo sono trascurabili. I cumuli normalmente hanno altezze di qualche chilometro; possono arrivare alla decina, ma in condizioni temporalesche e quindi distanti dal caso in esame di nuvola embrionale, in cui le goccioline son ancora in formazione. Dal momento che il tasso di raffreddamento è saturo è di circa sei gradi al chilometro, si sceglie uno spessore della porzione di nuvola sotto analisi di mezzo chilometro, ovvero circa un ordine di grandezza in meno dell'altezza totale.

$$h = 0.5 \times 10^3 \text{ m}$$

Quota e temperatura La richiesta nel caso termico è di indagare una nuvola abbastanza calda da poter escludere fenomeni di brinamento. Quale possa essere una soglia di sicurezza in tal senso dipende anche dalla scelta dello spessore del nucleo del cumulo, ovvero del differenziale termico macroscopico tra base e tetto. È importante rilevare che non è necessario evitare che le zone più fredde della nuvola si avvicinino agli zero gradi. Infatti, per effetto del fenomeno della *sopraffusione*, è usuale trovare sottozero nubi di sola acqua liquida. Anzi, in [31] si rileva come sino a temperature superiori ai meno dieci gradi siano più probabili

nuvole di sole gocce piuttosto che miste di gocce e cristalli. La scelta del profilo termico macroscopico, calcolato a metà nuvola, dipende anche dalla quota a cui si collocherà il cumulo. Il nucleo d'analisi, spesso h , si trova a circa metà nube. Affinché la nuvola non sia troppo bassa, occorrerebbe quindi porsi a una quota mediana di circa tre chilometri, dove, però, in condizioni atmosferiche tipo la temperatura è già negativa di oltre quattro gradi. Per prudenza si sceglie, quindi

$$z_m = z_0 + \frac{1}{2}h = 2 \times 10^3 \text{ m}$$

con z_0 base della porzione d'analisi. Secondo [23] in condizioni tipo (ovvero con un tasso di raffreddamento nuvoloso Γ_n di circa sei gradi e mezzo al chilometro, come esposto in [31]) ciò significa collocarsi a circa due gradi, ovvero a

$$T_m = 2.75 \times 10^2 \text{ K}$$

Tenuto conto dei valori di Γ_n e h , ciò implica che al più le zone più fredde della nuvola dovrebbero sfiorare gli zero gradi.

Pressione Coerentemente colla scelta operata per la temperatura, ritenendo ancora che sussistano condizioni meteorologiche tipo, è pressoché automaticamente fissata la pressione, che quindi, seguendo sempre [23], porremo a

$$p_m = 8 \times 10^4 \text{ Pa}$$

Concentrazione La concentrazione di goccioline nel cumulo conosce in atmosfera una grande variabilità locale, con ordini di grandezza oscillanti tra le 10^7 e 10^8 gocce a metro cubo, come riportato in [31, 34]. Notevoli differenze intercorrono, per esempio, tra nuvole marittime e continentali. Le simulazioni in [39] impiegano un numero di 5×10^7 goccioline a metro cubo. Le integrazioni numeriche di questa tesi hanno ignorato l'apporto dell'umidità alla convezione: ciò corrisponde a considerare una nuvola continentale a bassa densità

$$n = 3 \times 10^7 \text{ m}^{-3}$$

Raggio Tutti i testi consultati concordano per un raggio

$$R_m = 1.0 \times 10^{-5} \text{ m}$$

In particolare [31] riporta diverse osservazioni in tal senso e [6, 33, 39] utilizzano questo dato nelle loro simulazioni. Questo valore è quello tipico medio durante la fase di condensazione, ma la distribuzione iniziale ha un raggio inferiore, quello ereditato dalla nucleazione. Nelle nostre simulazioni

$$R_0 = 0.4 \times 10^{-5} \text{ (m)}$$

Appendice B

Codice pseudospettrale

In questa appendice intendiamo fornire i dettagli dei metodi di integrazione sfruttati dal codice spettrale utilizzato. In particolare descriviamo la discretizzazione spaziale e temporale dei campi euleriani (velocità, temperatura e soprasaturazione) in due dimensioni e delle quantità lagrangiane (traiettorie e raggi delle particelle). Le equazioni di evoluzione dei campi sono integrate in due fasi successive. Nella prima fase si integrano esattamente i termini dissipativi. Nella seconda fase si calcola il termine avvevativo, insieme ai termini in w e, nel caso a τ_s costante, in s , sfruttando il metodo pseudospettrale; si applica quindi lo schema d'integrazione temporale di Runge–Kutta. Le equazioni di evoluzione delle quantità lagrangiane sono invece integrate col metodo di Eulero. Nel caso di τ_s variabile il termine s/τ_s viene integrato in una terza fase come una forzante al prim'ordine. Discuteremo, inoltre, i problemi di stabilità che possono sorgere e i metodi di *dealiasing* per risolverli.

B.1 Discretizzazione spaziale e trasformate di Fourier efficienti

Per descrivere la discretizzazione dei campi euleriani, consideriamo per semplicità un'unica componente $u(x)$ del campo di velocità.

Nel seguito consideriamo un dominio spaziale non limitato, che corrisponde all'adozione di condizioni al contorno periodiche (ovvero di un dominio toroidale), in quanto siamo interessati alla simulazione di turbolenza omogenea e isotropa. Non ci occupiamo quindi del comportamento dei campi vicino ai bordi del dominio spaziale. Tale assunzione riduce gli errori computazionali dovuti alla discretizzazione spaziale.

Analiticamente è possibile considerare la trasformata di Fourier $\hat{u}(k)$ della

funzione $u(x)$:

$$\mathcal{F}u(x) = \hat{u}(k) = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(x) dx \in \mathbb{C}$$

La trasformata di Fourier inversa di $\hat{u}(k)$ è definita da:

$$\mathcal{F}^{-1}\hat{u}(k) = u(x) = C' \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{u}(k) dk \in \mathbb{C}$$

in cui le costanti C e C' soddisfano la relazione $CC' = 1/(2\pi)$, conseguenza della condizione $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \text{id}$. Scegliamo, per esempio, $C = 1/(2\pi)$, $C' = 1$.

Numericamente è evidentemente necessario limitare il dominio di definizione del campo $u(x)$ e discretizzarlo in modo da ridurre la conoscenza del campo alla conoscenza del numero finito di valori assunti da u nei punti del reticolo costruito, reali o complessi a seconda della natura della funzione u . Il dominio spaziale sia, per esempio $(0, L)$, discretizzato in N intervalli di lunghezza $\Delta x = L/N$, che definiscono una griglia di N punti $x_j = j\Delta x$, con $j = 0, \dots, N-1$. Lo spazio di Fourier risulta in tal modo anch'esso discretizzato in una griglia di N punti $k_j = j(2\pi/L)$. La trasformata di Fourier nello spazio discreto è:

$$\hat{u}_k \equiv \hat{u}(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_j e^{-\frac{2\pi i}{N}jk} \in \mathbb{C} \quad (\text{B.1a})$$

$$u_j \equiv u(x_j) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{u}_k e^{\frac{2\pi i}{N}jk} \in \mathbb{C} \quad (\text{B.1b})$$

in cui le costanti C e C' sono state scelte arbitrariamente in accordo colla condizione di normalizzazione $CC' = 1/N$, diretta conseguenza della condizione $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \text{id}$. È opportuno ricordare la relazione nota come *disuguaglianza di Parseval*, che nel caso discreto assume la forma:

$$\sum_{j=0}^{N-1} |u_j|^2 = N \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{u}_k|^2 \quad (\text{B.2})$$

Poiché $u(x)$ rappresenta una velocità, dobbiamo evidentemente imporre che il risultato dell'operazione di antitrasformata discreta (B.1b) sia reale. Tale condizione corrisponde a un vincolo sulle componenti di Fourier \hat{u}_k :

$$\hat{u}_{-k} = \hat{u}_k^* \quad (\text{B.3})$$

Il vincolo (B.3) riduce a $\frac{N}{2} - 1$ il numero di componenti complesse indipendenti, coll'aggiunta delle due componenti reali:

$$\hat{u}_0 = \bar{u} \in \mathbb{R} \quad (\text{B.4a})$$

$$\hat{u}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n u_n \in \mathbb{R} \quad (\text{B.4b})$$

Nel problema unidimensionale si hanno quindi $2(N/2 - 1) + 2 = N$ componenti reali indipendenti. Il calcolo delle N componenti di Fourier u_k associate al campo u richiede l'utilizzo di N cicli di N passi per un totale di N^2 operazioni. Sono oggi disponibili numerose versioni ([30]) di un algoritmo chiamato *fast Fourier transform (FFT)*, che calcola le trasformate di Fourier in un numero di operazioni proporzionale a $N \log N$. Il risparmio di tempo che ne risulta è molto vantaggioso soprattutto ad alte risoluzioni.

B.2 Discretizzazione temporale

Esistono diversi metodi di integrazione temporale discreta che si differenziano per la precisione e per il tempo impiegato. Analizziamo nel dettaglio i due schemi di integrazione temporale che utilizziamo per la risoluzione numerica delle equazioni (3.9) che definiscono il modello turbolento di condensazione.

B.2.1 Metodo di Eulero

Consideriamo un'equazione differenziale del tipo:

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(x(t), t) \quad (\text{B.5})$$

L'analisi numerica dell'equazione differenziale (B.5) richiede evidentemente la limitazione del dominio temporale di interesse a un intervallo finito, che chiameremo $(0, T)$. Consideriamo la discretizzazione del dominio $(0, T)$ in N intervalli $\delta t = T/N$. Il valore della funzione agli istanti $i\delta t$ con $i = 0, \dots, N$ è determinato analiticamente dalla soluzione dell'equazione differenziale (B.5) unita a una condizione iniziale $x(0)$, ma si può ottenere attraverso l'approssimazione:

$$\begin{aligned} x(\delta t) &\approx x(0) + F(x(0), 0)\delta t \\ x(2\delta t) &\approx x(\delta t) + F(x(\delta t), \delta t)\delta t \\ &\dots \\ x(t + \delta t) &\approx x(t) + F(x(t), t)\delta t \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Come illustrato in figura B.1 lo schema di integrazione temporale (B.6) coincide coll'approssimazione della secante σ che unisce il punto $x(t)$ al punto $x(t + \delta t)$ colla tangente τ alla curva $x(t')$ nel punto $t' = t$. La retta secante tende alla retta tangente per $\delta t \rightarrow 0$ (assumendo che la funzione $x(t')$ sia regolare) e l'algoritmo diventa progressivamente più preciso al diminuire del valore di δt . Si

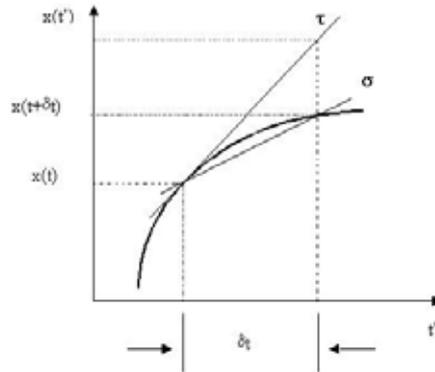


Figura B.1: Rappresentazione dell'approssimazione assunta nello schema di integrazione di Eulero (da [33]).

può dimostrare che l'errore che si commette sfruttando il metodo di integrazione descritto (che chiameremo integrazione *alla Eulero*) è proporzionale all'intervallo discreto δt ; è cioè un'approssimazione al prim'ordine. È sufficiente infatti considerare lo sviluppo in serie della funzione $x(t)$ a partire dal punto t e osservare che l'approssimazione che si adotta nello schema d'integrazione alla Eulero è il troncamento della serie al prim'ordine:

$$x(t + \delta t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left. \frac{d^p}{dt^p} x \right|_t \delta t^p = x(t) + \frac{d}{dt} x(t) \delta t + o(\delta t^2) \quad (\text{B.7})$$

B.2.2 Metodo di Runge–Kutta del secondo ordine

Consideriamo nuovamente il problema differenziale

$$\frac{d}{dt} x(t) = F(x(t), t) \quad (\text{B.8})$$

colla condizione iniziale $x(0)$. Esistono metodi di integrazione numerica più precisi dell'integrazione alla Eulero, che considerano più termini dello sviluppo in serie (B.7) della funzione incognita $x(t)$. Esponiamo in particolare il metodo di integrazione di Runge–Kutta di ordine due sfruttato dal codice per l'integrazione numerica delle equazioni dei campi euleriani. Consideriamo l'approssimazione

della funzione $x(t)$ del second'ordine:

$$\begin{aligned} x(t + \delta t) &= x(t) + \frac{d}{dt}x(t)\delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}x(t)\delta t^2 + o(\delta t^3) = \\ &\approx x(t) + \left(F(x(t)) + \frac{1}{2}\delta t((\partial_x F)F)_{x(t)} \right)\delta t \end{aligned} \tag{B.9}$$

in cui si è utilizzata l'espressione della derivata seconda $\frac{d^2}{dt^2}x = F\partial_x F$. Il metodo di Runge–Kutta di ordine due calcola il valore di tale derivata utilizzando un'ulteriore suddivisione dell'intervallo δt in due intervalli di dimensione $\delta t/2$. Osserviamo che da una prima integrazione alla Eulero della funzione $x(t)$ con passo $\delta t/2$ si ottiene:

$$\delta x = x\left(t + \frac{1}{2}\delta t\right) - x(t) \approx \frac{1}{2}F(x(t))\delta t \tag{B.10}$$

Conoscendo dalla (B.10) il valore, approssimato al prim'ordine, dell'incremento δx della funzione $x(t)$ dopo il primo passo, possiamo applicare nuovamente l'integrazione alla Eulero alla funzione $F(x(t))$:

$$F(x + \delta x) \approx F(x) + \left. \frac{d}{dt}F \right|_x \delta x = F(x(t)) + \frac{1}{2}\left. \partial_t F \right|_{x(t)} F(x(t))\delta t \tag{B.11}$$

La stima al prim'ordine della funzione F nel punto $x + \delta x$ corrisponde all'espressione che compare a secondo membro nell'equazione (B.9) e fornisce quindi lo schema di integrazione temporale completo

$$x(t + \delta t) = x(t) + F\left(x(t) + \frac{1}{2}F(x(t))\delta t\right)\delta t \tag{B.12}$$

B.3 Metodo pseudospettrale e discretizzazione temporale

Il *metodo pseudospettrale* sfrutta i vantaggi offerti dalla formulazione delle equazioni in spazio di Fourier per calcolare le derivate come semplici prodotti:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \frac{d}{dx} &= ik_x \\ \mathcal{F} \frac{d}{dz} &= ik_z \end{aligned}$$

in cui i è l'unità immaginaria. Dalla teoria della trasformata di Fourier è noto che l'operazione prodotto corrisponde in spazio di Fourier a una convoluzione, che è definita da un integrale:

$$\mathcal{F}(f(x) \cdot g(x))(k) = (\hat{f} * \hat{g})(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p)\hat{g}(k - p)dp$$

Tale operazione risulta numericamente dispendiosa e si preferisce quindi calcolare i prodotti in spazio fisico per poi ritornare in spazio di Fourier attraverso la FFT discreta introdotta al paragrafo B.1.

Il sistema di equazioni accoppiate (3.9) descritto nel capitolo 3 definisce il modello di condensazione turbolento che analizziamo qui numericamente. Riportiamo le equazioni di tale modello integrate in 2D dal codice pseudospettrale e analizziamo lo schema completo di integrazione applicato per ognuna di esse. Le prime tre sono integrate col metodo di Runge–Kutta di ordine due (§ B.2.2) sfruttando il metodo pseudospettrale per i termini non lineari e l'integrazione esatta dei termini dissipativi. Le ultime due sono integrate col metodo di Eulero (§ B.2.1).

B.3.1 Integrazione delle equazioni dei campi euleriani

Consideriamo l'equazione per la vorticità $\omega(\mathbf{x}, t)$, che, come discusso nel paragrafo 2.3.3, segue dalle equazioni di Navier–Stokes in due dimensioni per il campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t))$:

$$\partial_t \omega(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\partial} \omega(\mathbf{x}, t) = -\beta g \partial_x T'(\mathbf{x}, t) + \nu \partial^2 \omega(\mathbf{x}, t) \quad (\text{B.13})$$

Il campo di velocità si ottiene a partire dalla conoscenza della funzione di corrente ψ mediante le

$$u(\mathbf{x}, t) = -\partial_z \psi(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \hat{u}(\mathbf{k}, t) = -i \frac{k_z}{k^2} \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{B.14a})$$

$$w(\mathbf{x}, t) = \partial_x \psi(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \hat{w}(\mathbf{k}, t) = i \frac{k_x}{k^2} \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{B.14b})$$

in cui si è tenuto conto della relazione $\omega(\mathbf{x}, t) = -\partial^2 \psi(\mathbf{x}, t)$, che corrisponde in spazio di Fourier a $\hat{\omega}(\mathbf{k}, t) = k^2 \hat{\psi}(\mathbf{k}, t)$.

L'integrazione dell'equazione (B.13) si sviluppa in due fasi. Consideriamo innanzitutto l'integrazione del termine viscoso $\nu \partial^2 \omega$, in assenza dei termini non lineari e di Archimede, che verranno aggiunti in seguito calcolati col metodo pseudospettrale. Si omette la discussione sull'integrazione con forzante stocastica sia per il caso passivo sia per quello di Bolgiano forzato, poiché non centrali nelle simulazioni. Per i dettagli in tal senso si rimanda a [33].

Integrazione dei termini dissipativi

Consideriamo la formulazione dell'equazione (B.13) in spazio di Fourier

$$\partial_t \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) + \mathcal{F}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\partial} \omega(\mathbf{x}, t)) = -i \beta g k_x T'(\mathbf{k}, t) - \nu k^2 \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) \quad (\text{B.15})$$

In assenza dei termini avvevivo e archimedeo l'equazione (B.15) si risolve esattamente e la soluzione è:

$$\hat{\omega}_0(\mathbf{k}, t) = \omega_0 e^{-\nu k^2 t} \quad (\text{B.16})$$

Per tenere conto dell'integrazione esatta del termine diffusivo consideriamo una soluzione dell'equazione (B.15) del tipo:

$$\hat{\omega}(\mathbf{k}, t) = \tilde{\omega}(\mathbf{k}, t) e^{-\nu k^2 t} \Rightarrow \tilde{\omega}(\mathbf{k}, t) = \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) e^{+\nu k^2 t} \quad (\text{B.17})$$

Sostituendo la soluzione (B.17) nell'equazione di evoluzione (B.15) e trascurando per il momento la spinta, otteniamo

$$\partial_t \tilde{\omega}(\mathbf{k}, t) = -\mathcal{F}(\mathbf{v}(t) \cdot \partial \tilde{\omega}(\mathbf{x}, t)) \quad (\text{B.18})$$

In analogia con quanto descritto al paragrafo B.1 per funzioni di una sola variabile spaziale, discretizziamo spazialmente i campi, i quali in due dimensioni divengono matrici: indichiamo con $\hat{\omega}_{hj}(t)$ e $\omega_{ab}(t)$ i valori della vorticità rispettivamente nei punti (k_h, k_j) del reticolo in spazio di Fourier e (x_a, z_b) del reticolo in spazio fisico. Stessi pedici useremo per gli altri campi e per la trasformata; per cui \mathcal{F}_{hj} è il risultato dell'operazione di FFT calcolato nel punto (k_h, k_j) del reticolo in spazio di Fourier.

Non scriveremo le equazioni per la temperatura (3.9b) e la soprassaturazione (3.9c) nello spazio di Fourier. È del tutto evidente che l'integrazione dei rispettivi termini diffusivi è esatta e avviene in maniera identica a quella per la vorticità.

Applicazione del metodo di Runge–Kutta di ordine due

Discretizziamo temporalmente l'equazione (B.18) nei due passi indicati dal metodo di Runge–Kutta di ordine due (§ B.2.2). Sostituendo all'equazione (B.8) l'equazione di evoluzione della vorticità (B.18) e tenendo conto della relazione (B.18) otteniamo

Primo passo

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{hj}(t + \frac{1}{2}\delta t) &= \tilde{\omega}_{hj}(t) - \frac{1}{2} e^{\nu k^2 t} \mathcal{F}_{hj}(\mathbf{v}_{ab}(t) \cdot \partial \omega_{ab}(t)) \delta t \\ \Rightarrow \hat{\omega}_{hj}(t + \frac{1}{2}\delta t) &= e^{-\frac{1}{2}\nu(k_h^2 + k_j^2)\delta t} \left(\hat{\omega}_{hj}(t) - \frac{1}{2} \mathcal{F}_{hj}(\mathbf{v}_{ab}(t) \cdot \partial \omega_{ab}(t)) \delta t \right) \end{aligned} \quad (\text{B.19a})$$

Secondo passo

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{hj}(t + \delta t) &= \tilde{\omega}_{hj}(t) - e^{\nu k^2(t + \frac{1}{2}\delta t)} \mathcal{F}_{hj}(\mathbf{v}_{ab}(t + \frac{1}{2}\delta t) \cdot \boldsymbol{\partial}\omega_{ab}(t + \frac{1}{2}\delta t))\delta t \\ \Rightarrow \hat{\omega}_{hj}(t) &= e^{-\frac{1}{2}\nu(k_h^2 + k_j^2)\delta t} \left(e^{-\frac{1}{2}\nu(k_h^2 + k_j^2)\delta t} \hat{\omega}_{hj}(t) + \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{F}_{hj}(\mathbf{v}_{ab}(t + \frac{1}{2}\delta t) \cdot \boldsymbol{\partial}\omega_{ab}(t + \frac{1}{2}\delta t))\delta t \right)\end{aligned}\tag{B.19b}$$

Per il calcolo della velocità \mathbf{v} nelle (B.19) si utilizzano le versioni discrete delle equazioni (B.14) che forniscono le componenti della velocità $\hat{\mathbf{v}}_{hj}$ a partire dal valore della vorticità in spazio di Fourier. Si passa in spazio fisico calcolando la FFT inversa della velocità e delle derivate della vorticità $\boldsymbol{\partial}\hat{\omega}_{hj} = (ik_x\hat{\omega}_{hj}, ik_z\hat{\omega}_{hj})$ per calcolare il prodotto $(\mathbf{v}_{ab}(t) \cdot \boldsymbol{\partial}\omega_{ab}(t))$. Si ritorna infine in spazio di Fourier applicando la FFT al termine non lineare calcolato in spazio fisico in accordo col metodo pseudospettrale.

Resta dunque da integrare la spinta archimedeica, per la quale però serve conoscere la temperatura nei nodi del reticolo. In realtà abbiamo qui trattato l'applicazione del metodo di Runge–Kutta in maniera esemplificativa per la vorticità. Il codice, infatti, porta avanti insieme l'integrazione dei tre campi euleriani con tale metodo. I termini avvevivi di temperatura e soprassaturazione seguono la stessa procedura appena descritta; i termini in w , così come la forza di Archimede, vengono integrati insieme alla parte non lineare. Si prenda a titolo d'esempio il caso di $\Gamma w = \Gamma \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}}$: il codice tratta anziché il solo termine lineare il prodotto $\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\partial}T' - \Gamma \hat{\mathbf{z}})$.

Leggermente diverso è il caso dei termini in s . Sinché non si attiva la retroazione lagrangiana anch'essi possono essere integrati col metodo di Runge–Kutta insieme agli altri. Ma se invece tale retroazione è attiva occorre che l'integrazione avvenga al prim'ordine come

$$s(t + \frac{1}{2}\delta t) = s(t)e^{\frac{1}{2\tau_s}(t)\delta t}$$

usando per il calcolo di $1/\tau_s(t)$ i valori dei raggi forniti dall'integrazione alla Eulero. Bisogna prestare attenzione a che l'integrazione avvenga sì al prim'ordine, ma ogni $\delta t/2$, in modo da non generare un errore che renderebbe inutile l'integrazione al second'ordine degli altri termini. Tale procedura raddoppia i tempi di funzionamento del programma.

B.3.2 Integrazione delle equazioni delle variabili lagrangiane

Consideriamo le equazioni di evoluzione delle quantità lagrangiane posizione e raggio quadro delle N goccioline schematizzate come particelle fluide come discusso nel paragrafo 3.1.4:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}_i(t) = \mathbf{v}(\mathbf{X}_i(t), t) + \sqrt{2D_v}\boldsymbol{\eta}_i(t) \quad i = 1, N \quad (\text{B.20a})$$

$$\frac{d}{dt}R_i^2(t) = 2A_3(T)s(\mathbf{X}_i(t), t) \quad i = 1, N \quad (\text{B.20b})$$

Si ricorda che questa è l'equazione di condensazione per il raggio delle goccioline in approssimazione quasistatica (§ s.condensazione), valida anche nel nostro modello.

Il codice integra le equazioni lagrangiane (B.20) al prim'ordine (schema di integrazione alla Eulero, § B.2.1), a partire dalla conoscenza dei campi di velocità e soprassaturazione integrati precedentemente. Il rumore gaussiano $\boldsymbol{\eta}_i$ è integrato come una forzante stocastica: si può vedere che il risultato tale procedimento comporta un termine nella radice del tempo. Si ha, dunque

$$\mathbf{X}_i(t + \delta t) = \mathbf{X}_i(t) + \mathbf{v}_{ab}(\mathbf{X}_i(t), t)\delta t + \sqrt{2D_v}\delta t \quad i = 1, N \quad (\text{B.21a})$$

$$R_i^2(t + \delta t) = R_i^2(t) + 2A_3s_{ab}(\mathbf{X}_i(t), t)\delta t \quad i = 1, N. \quad (\text{B.21b})$$

Con $\mathbf{v}_{ab}(\mathbf{X}_i(t), t)$ e $s_{ab}(\mathbf{X}_i(t), t)$ indichiamo i valori dei campi \mathbf{v} ed s interpolati nel punto $\mathbf{X}_i(t)$, che in generale non appartiene necessariamente al reticolo. Tale interpolazione consiste nella media pesata dei valori assunti dai campi nei quattro nodi più vicini al punto $\mathbf{X}_i(t)$. Il passo d'integrazione è δt solo nel caso a τ_s costante. Nel caso di τ_s locale, invece, lo schema d'integrazione è identico, ma il passo vale $\delta t/2$ per poter fornire al campo di soprassaturazione un valore di $1/\tau_s$ ogni mezzo passo, permettendo l'integrazione alla Runge Kutta al second'ordine di s .

B.4 Stabilità

Nelle equazioni per i campi euleriani i termini avvevivi sono costituiti da prodotti. Tali operazioni possono generare modi al di fuori dei modi risolti¹ che vengono proiettati (*aliased*) in maniera casuale e quindi incontrollabile su modi risolti. Un esempio di proiezione naturale è il funzionamento dell'occhio umano

¹Si consideri per esempio il prodotto $\sin x \cos x = (1/2)\sin 2x$. Tale operazione coinvolge il prodotto di due funzioni caratterizzate da $k=1$ e produce un modo $k=2$.

quando osserva un disco che ruota: se il disco ruota con frequenza superiore a 24 Hz, l'occhio umano lo vede ruotare con frequenza minore.

A bassa risoluzione tipicamente l'energia associata ai modi proiettati è molto elevata e questo provoca problemi numerici a cui si attribuisce genericamente il nome di *instabilità*. Il problema della valutazione delle instabilità numeriche è molto complesso. Esistono criteri validi in determinate situazioni, fra cui citiamo il criterio di Courant. Nel codice adottiamo un criterio di stabilizzazione severo che corrisponde qualitativamente a scegliere un passo temporale δt minore del tempo minimo impiegato da una particella fluida per percorrere una distanza pari al passo griglia δx (alla velocità massima U , quindi):

$$\delta t \leq \frac{1}{U} \delta x$$

Bibliografia

- [1] J. T. Bartlett, P. R. Jonas *On the Dispersion of the Sizes of Droplets growing by Condensation in Turbulent Clouds* Quart. J. Roy. Meteor. Soc. **98**, 150-164 (1972)
- [2] G. K. Batchelor *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1970)
- [3] L. Biferale, I. Procaccia *Anisotropy in turbulent flows and in turbulent transport* Phys. Rep. **414** 2-3, 43-164 (2005)
- [4] R. Bolgiano *Turbulent spectra in a stably stratified atmosphere* J. Geophys. Res. **64** 12, 2226-2228 (1959)
- [5] A. Celani, M. Cencini, A. Mazzino, M. Vergassola *Active and passive fields face to face* New Journal of Physics **6**, 72 (2004)
- [6] A. Celani, G. Falkovich, A. Mazzino, A. Seminara *Droplet condensation in turbulent flows* Europhys. Lett. **70** 6, 775-781 (2005)
- [7] A. Celani, A. Lanotte, A. Mazzino, M. Vergassola *Fronts in passive scalar turbulence* Phys. Fluids **13** 6, 1768-1783 (2001)
- [8] A. Celani, T. Matsumoto, A. Mazzino, M. Vergassola *Scaling and universality in turbulent convection* Phys. Rev. Lett. **88** 5, 0545031-0545034 (2002)
- [9] A. Celani, A. Mazzino, M. Vergassola *Thermal plume turbulence* Phys. Fluids **13** 7, 2133-2135 (2001)
- [10] S. Corrsin *On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence* J. Appl. Phys. **22** 4, 469-473 (1949)
- [11] R.M. Dudley *Real analysis and Probability* Cambridge University Press, Cambridge (2002)

-
- [12] G. Falkovich, K. Gawedzki, M. Vergassola *Particles and Fields in Fluid Turbulence* Rev. Mod. Phys. **73**, 913-975 (2001)
- [13] M. Farge: *Wavelet Transforms and Their Applications to Turbulence* Ann. Rev. Fluid Mech. **24**, 395-407 (1992)
- [14] U. Frisch *Turbulence: the legacy of A. N. Kolmogorov* Cambridge University Press, Cambridge (1995)
- [15] U. Frisch, A. Mazzino, A. Noullez, M. Vergassola *Lagrangian method for multiple correlations in passive scalar advection* Phys. Fluids **11**, 2178-2186 (1999)
- [16] R. A. Houze *Cloud Dynamics* in International Geophysics Series, Academic Press (1994)
- [17] P. R. Jonas *Turbulence and Cloud microphysics* Atmos. Res. **40**, 283-306 (1996)
- [18] V. I. Khvorostyanov, J. A. Curry *Toward the Theory of Stochastic Condensation in Clouds. Part I: A General Kinetic Equation* J. Atmos. Sci. **56**, 3985-3996 (1999)
- [19] V. I. Khvorostyanov, J. A. Curry *Toward the Theory of Stochastic Condensation in Clouds. Part II: Analytical Solutions of the Gamma-Distribution Type* J. Atmos. Sci. **56**, 3997-4013 (1999)
- [20] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale* Edizioni Mir, Mosca (1980)
- [21] R. H. Kraichnan *Inertial range in two-dimensional turbulence* Phys. Fluids **10**, 1417-1423 (1967)
- [22] M. Kulmala, U. Rnnik, E. L. Zapadinsky, C. F. Clement *The Effect of Saturation Fluctuations on Droplet Growth* J. Aerosol Sci. **28**, 1395-1409 (1997)
- [23] P. K. Kundu, I. M. Cohen *Fluid Mechanics* Second Edition, Academic Press (2001)
- [24] L. D. Landau, E. M. Lifshitz *Fluid Mechanics* Pergamon Press, Oxford (1987)
- [25] I. J. Lee, H. R. Pruppacher *A Comparative Study of the Growth of Cloud Droplets by Condensation Using an air Parcel Model with and without Entrainment* Pure Appl. Geophys. **115**, 523-545(1977)

- [26] M. Lesieur *Turbulence in Fluids* Kluwer, Dordrecht (1990)
- [27] E. A. Novikov *Functionals and the Random-force Method in Turbulence Theory* Sov. Phys. JETP **47**, 1919-1926 (1965)
- [28] A. M. Obukhov *Structure of the temperature field in turbulent flows* Izv. Geogr. Geofiz. Ser. **13**, 58-59 (1949)
- [29] A. M. Obukhov *The influence of hydrostatic forces on the structure of the temperature field in turbulent flow* Dokl. Akad. Nauk SSSR, **125**, 1246-1248 (1959)
- [30] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery *Numerical Recipes in Fortran 90: the Art of Parallel Scientific Computing* Volume 2 of Fortran Numerical Recipes, Cambridge University Press (1996)
- [31] H. R. Pruppacher, J. D. Klett *Microphysics of Clouds and Precipitation* Kluwer Academic Publishers (1996)
- [32] H. Risken *The Fokker-Planck Equation, Methods of Solution and Applications* in Springer Series in Synergetics, H. Haken ed. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1989)
- [33] A. Seminara *Studio del ruolo della turbolenza nella microfisica delle nuvole* Tesi di Laurea in Fisica, Università di Genova (2004)
- [34] R. A. Shaw *Particle-Turbulence Interactions in Atmospheric Clouds* Ann. Rev. Fluid Mech. **35**, 183-227 (2003)
- [35] B. I. Shraiman, E. D. Siggia *Scalar Turbulence* Nature **405**, 639-646 (2000)
- [36] E. D. Siggia *High Rayleigh number convection* Ann. Rev. Fluid Mech. **26**, 137-168 (1994)
- [37] P. Tabeling *Two-dimensional Turbulence: a physicist approach* Physics Reports **362**, 1-62 (2002)
- [38] J. W. Telford *Clouds with Turbulence; the Role of Entrainment* Atmos. Res. **40**, 261-282 (1996)
- [39] P. A. Vaillancourt, M. K. Yau, W. W. Grabowski *Microscopic Approach to Cloud Droplet Growth by Condensation. Part I: Model Description and Results without Turbulence* J. Atmos. Sci. **58**, 1945-64 (2001)

-
- [40] P. A. Vaillancourt, M. K. Yau, P. Bartello, W. W. Grabowski *Microscopic Approach to Cloud Droplet Growth by Condensation. Part II: Turbulence, Clustering and Condensational Growth* J. Atmos. Sci. **59**, 3421-35 (2002)
- [41] L. Vozella *Studio della turbolenza generata da instabilità di tipo Rayleigh-Taylor* Tesi di Laurea in Fisica, Università di Genova (2004)