

Università degli Studi di Genova
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali
Tesi di Laurea in Fisica

Anno accademico 2007-2008



**Dinamica di particelle massive
in flussi cellulari**

Relatore: Prof. A. Mazzino

Correlatore: Prof. A. Levi

Candidato: Manuela Todini

Indice

| | |
|--|-----------|
| Introduzione | 3 |
| 1 Equazione del moto di una piccola particella sferica in un flusso non uniforme | 8 |
| 1.1 Premesse | 8 |
| 1.2 Particelle inerziali | 11 |
| 1.3 Equazione del moto di una piccola particella sferica in un flusso non uniforme | 12 |
| 2 Particelle inerziali in flussi cellulari | 27 |
| 2.1 Flusso cellulare stazionario | 28 |
| 2.2 Flussi cellulari dipendenti dal tempo | 31 |
| 2.3 Analogia tra flussi bidimensionali incompressibili e sistemi hamiltoniani | 33 |
| 2.4 Dinamica di particelle con inerzia trascurabile in un flusso cellulare stazionario | 34 |
| 2.5 Effetti dell'inerzia sulla dinamica di particelle in un flusso cellulare stazionario | 36 |
| 2.5.1 Particelle pesanti | 36 |
| 2.5.2 Limite delle bolle | 37 |
| 2.5.3 Intervallo di transizione | 37 |
| 2.5.4 Concentrazione preferenziale | 40 |
| 2.6 Dinamica di particelle inerziali in un flusso cellulare dipendente dal tempo | 41 |
| 3 Ricerca di attrattori per particelle sospese in un flusso cellulare | 44 |
| 3.1 Sistemi dissipativi e attrattori | 44 |
| 3.2 Ricerca dei punti fissi in un flusso cellulare stazionario | 46 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.2.1 | Punti fissi sulle pareti verticali | 47 |
| 3.2.2 | Punti fissi interni | 49 |
| 3.3 | Analisi di stabilità lineare dei punti fissi | 51 |
| 3.4 | Significato dinamico dei punti fissi in un flusso cellulare oscillante | 52 |
| 4 | Simulazioni nel caso di particelle molto pesanti ($\beta = 0$) | 55 |
| 4.1 | Flusso cellulare stazionario | 56 |
| 4.1.1 | Effetti della diffusione | 56 |
| 4.2 | Flusso cellulare oscillante | 59 |
| 4.2.1 | Dipendenza dalla frequenza ω | 63 |
| 4.2.2 | Ampiezza delle oscillazioni | 65 |
| 4.2.3 | Aspect ratio | 65 |
| 4.2.4 | Froude | 65 |
| 4.2.5 | Osservazioni finali | 66 |
| 5 | Particelle leggere ($\beta = 1.5$) | 70 |
| 5.1 | Osservazioni preliminari | 70 |
| 5.2 | Dipendenza della velocità media w da B | 72 |
| 5.3 | Dipendenza da β | 74 |
| 5.4 | Diffusione | 80 |
| | Conclusioni | 82 |
| A | Modello semplificato per l'equazione di una particella rigida sferica in un flusso non uniforme | 86 |
| B | Sistemi hamiltoniani | 88 |
| C | Analisi di stabilità lineare dei punti fissi di una particella in un flusso cellulare stazionario | 90 |
| D | Il programma | 94 |

Introduzione

Scopo di questa tesi è lo studio della dinamica di particelle in sospensione in un fluido in movimento. In molte situazioni d'interesse applicativo e tecnologico tali particelle non possono essere studiate assimilandole a dei semplici traccianti. Ciò è dovuto al fatto che le loro dimensioni non sono trascurabili e/o la loro densità di massa è sensibilmente differente da quella del fluido in cui si trovano. In tal caso non è più trascurabile l'inerzia della particella, intesa come tendenza a conservare il proprio stato di moto, cioè a mantenere costante la propria velocità, opponendo quindi una resistenza alla forza che il fluido esercita sulla particella. Chiameremo quindi questo tipo di particelle inerziali. In quanto tali, esse sono caratterizzate da un tempo di risposta alle variazioni del flusso, detto tempo di Stokes, che è strettamente legato alle dimensioni della particella e al rapporto tra la densità della particella e quella del fluido. Il tempo di Stokes è quindi un parametro che misura l'inerzia della particella: più è grande il tempo di Stokes (rispetto alla scala temporale caratteristica del flusso), più la particella si muoverà in modo indipendente dal flusso. Nel corso della tesi userò il numero di Stokes che esprime tale tempo in forma adimensionale.

La comprensione della dinamica di particelle inerziali in un fluido in movimento è fondamentale in diversi campi della scienza, come la fisica teorica e sperimentale, la geofisica, l'astrofisica, la biologia e la chimica. Vediamone alcuni esempi. Una caratteristica delle particelle inerziali è la loro tendenza a distribuirsi spazialmente nel fluido in modo disomogeneo, anche se la loro distribuzione iniziale fosse uniforme. Succede che particelle più leggere del fluido tendono ad accumularsi in zone del flusso in cui domina la vorticità; al contrario particelle aventi densità maggiore di quella del fluido si concentrano laddove la velocità di deformazione del fluido è dominante rispetto alla vorticità. Questo fenomeno di concentrazione preferenziale viene sfruttato per separare in un fluido particelle aventi tempi di Stokes differenti, ad esempio particelle con la stessa densità ma dimensioni differenti, oppure con le stesse dimensioni ma densità diverse. Anche se le particelle inerziali non si comportano esattamente come dei traccianti, esse possono rivelarsi utili per

visualizzare determinate regioni del fluido: ad esempio si possono iniettare bolle in un fluido per individuare le regioni ad alta vorticità.

Un esempio di particelle inerziali è costituito dall'aerosol atmosferico, ovvero da particelle solide o liquide di diametro inferiore al micron in sospensione nell'aria. Tali particelle giocano un ruolo importante nella formazione delle precipitazioni [9], nel bilancio energetico terrestre, in processi chimici che possono aver luogo nell'atmosfera e nell'impatto che queste particelle possono avere sull'ambiente e sulla salute dell'uomo (ad esempio, particelle generate da processi industriali o dallo smaltimento dei rifiuti).

In biologia, microorganismi con una limitata capacità motoria, se non addirittura assente, possono essere studiati come particelle inerziali. Ad esempio si studia la distribuzione del fitoplankton nel mare, e in particolare si cerca di capire come il flusso dell'acqua possa favorire la permanenza del fitoplankton negli strati superficiali del mare [26].

Anche le gocce di pioggia sono delle particelle inerziali. Esse si formano attraverso tre fasi successive [30]: la nucleazione, la condensazione e la coalescenza. Durante la nucleazione le molecole di vapore acqueo contenute nell'aria si aggregano sotto forma di goccioline il cui raggio è dell'ordine di 0.1 micron. Si parla di nucleazione omogenea quando le molecole di vapore acqueo urtano casualmente le une contro le altre e danno luogo alla formazione delle gocce d'acqua. Nella nucleazione eterogenea, invece, il vapore si deposita e si condensa sulla superficie di una particella solida estranea, solitamente chiamata *nucleo di condensazione* o CCN (*Cloud Condensation Nucleus*), e man mano ricopre l'intero nucleo. Il nucleo di condensazione fa da catalizzatore, nel senso che la nucleazione eterogenea può avvenire per livelli di soprassaturazione del vapore acqueo nell'aria inferiori a quelli richiesti perché possa avvenire la nucleazione omogenea. Nella fase di condensazione il raggio delle gocce d'acqua cresce a causa del moto diffusivo delle molecole di vapore nell'aria che, urtando contro le goccioline, possono accumularsi e condensarsi sulla loro superficie. In questa fase il raggio delle gocce varia dal micron alle decine di micron. Finché la goccia è piccola, le particelle d'acqua possono essere considerate isolate perché la frequenza dei loro urti è ancora trascurabile. Quando il raggio supera i 20 micron circa, diventa importante il meccanismo di coalescenza, nel quale le gocce d'acqua, urtando tra loro, si accrescono ulteriormente. In questa fase l'inerzia delle gocce gioca un ruolo importante. La probabilità che avvenga l'urto tra due gocce dipende in particolare dalla velocità relativa tra le gocce e dalla distribuzione spaziale relativa a gocce di dimensione diversa. Gocce più grandi, avendo una maggiore velocità di caduta, urtano contro gocce più piccole che, in quanto tali, si muovono più lentamente. Inoltre, abbiamo detto che l'effetto combinato del movimento dell'aria e dell'inerzia delle gocce genera un fenomeno di con-

centrazione preferenziale che condiziona quindi la probabilità degli urti tra gocce. Nel capitolo 4 torneremo sull'esempio della goccia d'acqua nell'aria.

In questo lavoro mi occuperò di particelle inerziali immerse in un flusso bidimensionale e spazialmente periodico, per conoscere il quale sarà quindi sufficiente descriverlo in una porzione limitata di spazio, una cella elementare. Chiameremo perciò un flusso del genere cellulare. Il flusso cellulare da me scelto sarà simile a quello utilizzato da Stommel [29] per descrivere moti convettivi indotti da un gradiente termico (celle cosiddette alla Rayleigh-Bénard) o dal vento (celle di Langmuir). A differenza del caso trattato da Stommel, in cui il flusso era considerato stazionario, considererò un flusso cellulare che oscilla lungo l'orizzontale (flusso che mima meccanismi di instabilità 'laterale' delle celle di Rayleigh-Bénard [7, 27]) o lungo la verticale.

Una domanda a cui cercherò di rispondere è: possono particelle molto più dense del fluido restare stabilmente sospese, se non addirittura muoversi in direzione opposta alla gravità in un flusso cellulare oscillante? Sperimentalmente ciò è stato osservato nel caso di un flusso oscillante verticalmente, sebbene non fosse di tipo cellulare [31, 11] e le particelle considerate avessero al più una densità circa 8 volte più grande di quella del fluido, mentre io considererò il caso limite in cui la densità delle particelle sia molto maggiore di quella del fluido (si pensi ad esempio ad una goccia d'acqua nell'aria, 1000 volte più densa dell'aria). Da un punto di vista teorico, questo problema era stato affrontato da Stommel [29], il quale, trascurando però l'inerzia delle particelle, aveva mostrato che ciò era possibile, ma in un flusso cellulare stazionario. Successivamente anche Maxey [21] si era posto la stessa domanda e, introducendo anche gli effetti dell'inerzia della particella, aveva mostrato, attraverso un'analisi di stabilità lineare dei punti di equilibrio delle particelle, che soltanto particelle più leggere del fluido potevano restare sospese in un flusso del genere, a condizione che la loro velocità nuda¹ fosse sufficientemente piccola.

L'altro obiettivo del mio lavoro di tesi consiste nell'individuare le condizioni in cui particelle più leggere del fluido possono rimanere stabilmente in oscillazione intorno a dei punti fissi in un flusso cellulare oscillante verticalmente e fornire un'espressione matematica che mi permetta, una volta fissati i parametri che descrivono il flusso e la particella, di verificare la possibilità che ciò accada e di dare una formulazione matematica delle curve chiuse percorse dalle particelle in tale situazione di equilibrio.

Nel primo capitolo vengono descritti i passaggi principali attraverso i quali Maxey e Riley [19] ricavarono l'equazione del moto di una piccola particella sferica di raggio a in un flusso generico non uniforme $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Ciò sarà utile

¹Per velocità nuda intenderò la velocità che la particella avrebbe in un fluido fermo.

per capire le ipotesi in cui lavorerò e quali sono le forze coinvolte. Supporrò che:

- il fluido sia incompressibile;
- la concentrazione delle particelle nel fluido sia molto bassa, e non modifichi quindi la viscosità μ del fluido;
- la particella sia molto più piccola della scala di lunghezza L caratteristica del flusso (la dimensione di una cella, nel caso di flusso cellulare);
- la velocità della particella rispetto al fluido sia piccola;
- il gradiente di velocità del flusso sia piccolo lungo una lunghezza dell'ordine del raggio della particella.

La particella, relativamente allo studio della sua dinamica, sarà considerata puntiforme, per cui non m'interesserà la sua struttura interna, ma mi limiterò a studiarne la dinamica da un punto di vista traslazionale. Le sue dimensioni saranno invece importanti per determinare la perturbazione che la particella, muovendosi nel fluido, esercita sul flusso assegnato. Vedrò quindi quali sono le forze in gioco e cercherò di illustrarne il significato. Nel corso del mio lavoro utilizzerò una forma più semplice dell'equazione di Maxey e Riley, in cui trascurerò in prima approssimazione alcuni termini. Fatta questa scelta, le forze che interverranno nella mia trattazione saranno: il peso della particella, la spinta di Archimede, l'attrito di Stokes e l'effetto cosiddetto di massa aggiunta.

Nel secondo capitolo descriverò il tipo di flusso in cui studierò la dinamica delle particelle inerziali. Si tratta di un flusso cellulare già utilizzato in precedenza per descrivere moti di tipo convettivo, come ad esempio le celle di Rayleigh-Bénard [29] o le celle di Langmuir [16] (moti convettivi indotti nei laghi o negli oceani per effetto del vento). A prescindere dal tipo particolare di moto convettivo che il flusso da me scelto può descrivere, si tratta di una situazione che mi permette di studiare gli effetti che un fluido in movimento può avere sulla velocità di caduta/risalita delle particelle. Esistono lavori precedenti in cui viene studiato il moto di particelle in flussi di questo tipo stazionari [29, 20, 21, 17] o oscillanti orizzontalmente [2, 7]. Martins Afonso, in un suo recente lavoro che sarà per me un punto di riferimento, inizia a considerare un flusso che oscilla verticalmente [18].

Nel terzo capitolo mostrerò, partendo dall'equazione del moto della particella ricavata nel primo capitolo, che tale particella costituisce un sistema dissipativo: significa che esistono degli attrattori, cioè delle regioni nello spazio degli stati della particella, su cui la particella va a posarsi dopo un certo

intervallo di tempo. In questo capitolo fornirò una descrizione matematica di una classe di attrattori (cicli limite²) la cui esistenza sarà riscontrata nel corso delle mie simulazioni, descritte nel capitolo 5, relative a particelle in un flusso cellulare oscillante verticalmente.

Nel capitolo 4 viene descritto il programma che ho messo a punto per simulare il movimento delle particelle inerziali in un flusso cellulare oscillante. Segue l'analisi delle simulazioni da me effettuate nel caso di particelle molto più pesanti del fluido. Indagherò gli effetti sulla velocità di sedimentazione delle particelle facendo variare diversi parametri: l'effetto della diffusione, la frequenza delle oscillazioni, l'ampiezza delle oscillazioni, la geometria delle celle, l'effetto della gravità.

Nel capitolo 5 sono illustrati i risultati delle simulazioni fatte considerando inizialmente particelle più leggere del fluido. Partirò dall'analisi di una situazione particolare in cui tutte le particelle oscillano stabilmente intorno a delle posizioni fisse. In tal caso la velocità terminale media delle particelle risulta essere nulla. Cercherò di individuare le condizioni in cui tale velocità da nulla diventa positiva. Per far questo, fisserò una frequenza di oscillazione sufficientemente bassa e farò variare: l'ampiezza delle oscillazioni, la densità relativa tra particelle e fluido, l'effetto della diffusione.

Nelle situazioni da me trattate riuscirò ad ottenere in alcuni casi una significativa riduzione della velocità di caduta di particelle pesanti rispetto al caso di fluido fermo.

²Un ciclo limite è una curva chiusa, nello spazio degli stati della particella, a cui in alcuni casi la traiettoria della particella può tendere asintoticamente.

Capitolo 1

Equazione del moto di una piccola particella sferica in un flusso non uniforme

In questo capitolo mi soffermerò sulle ipotesi e i passaggi principali che portarono Maxey e Riley [19] alla formulazione dell'equazione del moto di una piccola particella sferica in un flusso assegnato e sotto l'effetto della gravità. Seguirà una riflessione sul significato dei termini contenuti nell'equazione.

1.1 Premesse

Partirò dal richiamare alcuni elementi di fluidodinamica che saranno utili nel seguito della trattazione. Testi principali di riferimento sono [12] e [15].

Punti di vista euleriano e lagrangiano. La descrizione matematica dello stato di un fluido in movimento può essere fatta attraverso campi (scalari, vettoriali, tensoriali) che forniscano in ogni istante la distribuzione spaziale di grandezze fisiche come la velocità del fluido $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ e le variabili termodinamiche relative al fluido, come la pressione $p(\mathbf{x}, t)$ e la densità del fluido $\rho(\mathbf{x}, t)$. Questo modo di descrivere un fluido viene detto punto di vista euleriano. Un altro tipo di approccio, detto lagrangiano, consiste nel descrivere la dinamica delle singole particelle fluide e l'evoluzione delle grandezze fisiche utili a descriverne lo stato lungo le traiettorie.

Derivata lagrangiana. Sia $g(\mathbf{x}, t)$ un campo che descrive la grandezza fisica g relativa al fluido. Userò la notazione

$$\frac{Dg}{Dt}(\mathbf{x}, t)$$

per indicare la derivata lagrangiana di g , ovvero la derivata temporale di g calcolata lungo la traiettoria di una particella fluida che si trovi nella posizione \mathbf{x} all'istante t :

$$\frac{Dg}{Dt}(\mathbf{x}, t) \equiv \left[\frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla g \right](\mathbf{x}, t) \quad (1.1)$$

Conservazione della massa. Da un punto di vista euleriano, l'equazione che esprime la conservazione della massa (in assenza di sorgenti) in un punto del fluido è:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \quad (1.2)$$

dove $\rho(\mathbf{x}, t)$ è la densità di massa del fluido e $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ è il campo di velocità del fluido. Il termine a destra dell'equazione (1.2) rappresenta la massa di fluido che entra o esce da un volume infinitesimo nell'unità di tempo.

L'equazione (1.2) può essere scritta anche nel seguente modo:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1.3)$$

ed esprime un punto di vista lagrangiano: a sinistra è indicata la variazione relativa di densità di una particella fluida per unità di tempo, a destra è la variazione relativa di volume della particella stessa nell'unità di tempo.

Fluido incompressibile. Dirò che un fluido è incompressibile qualora la densità ρ sia costante ($\partial_t \rho = 0$) e uniforme ($\nabla \rho = 0$). Se un fluido è incompressibile allora ogni particella fluida mantiene la propria densità costante durante il suo moto:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0$$

Quindi, per la conservazione della massa espressa in (1.3) si ha che:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.4)$$

Equazione di Navier-Stokes L'equazione del moto di una particella fluida per unità di volume può essere scritta come:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \quad (1.5)$$

dove σ è detto tensore degli sforzi: ha infatti le dimensioni di uno sforzo (forza per unità di superficie) e contiene appunto le informazioni sulle forze di superficie \mathbf{F}_S esercitate dal fluido sulla superficie S che delimita la particella fluida:

$$\mathbf{F}_S = \int_S d\mathbf{s} \cdot \sigma$$

Il tensore σ ha anche le dimensioni di una quantità di moto per unità di tempo e di superficie, e osservando l'equazione (2.1) σ_{ik} può essere vista come la componente i -esima della densità di corrente di quantità di moto $\rho \mathbf{u}$ nella direzione k -esima.

Il tensore σ_{ik} può essere scomposto come:

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \sigma'_{ik} \quad (1.6)$$

dove σ'_{ik} è detto tensore degli sforzi viscosi. La viscosità di un fluido è dovuta alla presenza di attriti interni che si verificano quando parti diverse del fluido si muovono con velocità differenti. Ciò determina dissipazione di energia sotto forma di calore e un trasferimento di quantità di moto da punti in cui la velocità è maggiore a punti dove è minore. La viscosità non si manifesta quindi se il campo di velocità è uniforme o, più in generale, se il fluido effettua un moto di roto-traslazione rigida. Supporremo in prima approssimazione che σ' dipenda solo linearmente dalle componenti del tensore $\nabla \mathbf{u}$ (ipotesi di fluido newtoniano), in tal caso si dimostra che il tensore degli sforzi viscosi può essere scritto come:

$$\sigma'_{ik} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + \zeta \delta_{ik} \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1.7)$$

dove μ e ζ sono detti coefficienti di viscosità. Sono entrambi positivi, e in generale dipendono dalla pressione e dalla temperatura. Noi li considereremo in prima approssimazione costanti. Nell'ipotesi di fluido incompressibile si verifica la condizione (1.4) e il tensore σ' si semplifica e diventa:

$$\sigma'_{ik} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (1.8)$$

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (1.9)$$

L'equazione (2.1) diventa allora:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (1.10)$$

ovvero

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{g} - \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (1.11)$$

che è nota come equazione di Navier-Stokes. Il coefficiente $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ viene detto viscosità cinematica. Per rendere adimensionale l'equazione (1.11), scegliamo come unità di misura : la densità del fluido ρ , una velocità U e una lunghezza L caratteristiche. Si ottiene:

$$\frac{D\mathbf{u}'}{Dt'} = \mathbf{g}' - \nabla p' + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}' \quad (1.12)$$

dove

$$Re \equiv \frac{UL}{\nu}$$

è detto numero di Reynolds.

1.2 Particelle inerziali

Il mio obiettivo sarà studiare la dinamica di particelle sospese in un fluido in movimento sotto l'effetto della gravità, in un flusso assegnato. In alcuni casi terrò conto anche dell'effetto della diffusione. Solitamente le particelle in sospensione in un fluido vengono dette *inerziali* [13, 18] quando hanno dimensioni non trascurabili o la loro densità è sensibilmente differente da quella del fluido (ad esempio delle gocce in un gas, delle bolle in un liquido o delle particelle solide in un fluido). Così come accade per un fluido, anche una sospensione di particelle in un fluido può essere studiata tanto attraverso un approccio di tipo euleriano quanto mediante uno di tipo lagrangiano. Io seguirò un punto di vista lagrangiano, nel quale osserverò la dinamica delle singole particelle e attraverso l'analisi di N^2 particelle ricaverò informazioni di tipo statistico, come la velocità media o la posizione media. Per capire quali sono le forze in gioco e allo stesso tempo per mostrare qual è il mio punto di partenza, vedrò come Maxey e Riley [19] ricavarono l'equazione del moto di una piccola particella sferica in un flusso non uniforme¹. Considererò delle particelle passive², nel senso che non modificano la fase fluida in cui

¹Esistono lavori che analizzano il caso più generale di particelle non sferiche [22]

²Vedremo che le particelle non saranno considerate passive, però, per quanto riguarda la perturbazione che la loro presenza determina nel flusso.

sono sospese. Può accadere, ad esempio, che una sospensione in un fluido ne modifichi la viscosità (si vedano ad esempio [12, 13]). Si ricordi a tal proposito la formula di Einstein (1906) che esprime la viscosità μ_{eff} assunta dal fluido in funzione di un parametro adimensionale, ϕ , che è pari al rapporto tra il volume occupato dalle particelle in sospensione nel fluido e il volume del fluido:

$$\mu_{eff} = \mu \left(1 + \frac{5}{2} \phi \right)$$

1.3 Equazione del moto di una piccola particella sferica in un flusso non uniforme

Mostrerò ora i passaggi principali per determinare l'equazione del moto di una piccola particella sferica rigida immersa in un flusso non uniforme, come indicato da Maxey e Riley in [19].

Consideriamo una particella di raggio a , con posizione $\mathbf{X}(t)$ e velocità $\mathbf{V}(t)$. L'equazione del moto per questa particella discende dalla seconda legge di Newton:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{V}(t) \\ m_p \dot{\mathbf{V}} = m_p \mathbf{g} + \oint_S \sigma_{ij} n_j dS \end{cases} \quad (1.13)$$

dove \mathbf{g} è l'accelerazione gravitazionale, m_p è la massa della particella, S è la superficie esterna della particella e σ_{ij} è il tensore degli sforzi del fluido. In [19] si precisa l'ipotesi che la particella sia isolata, quindi vengono escluse interazioni con altre particelle o con bordi.

Supponiamo che il fluido sia viscoso, incompressibile e che il flusso soddisfi l'equazione di Navier-Stokes (1.11). Sia $\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t)$ il flusso imperturbato, cioè come sarebbe in assenza della particella. Le equazioni che descrivono $\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t)$ sono quindi:

$$\begin{cases} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{u}^{(0)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(0)} \right) = \rho_f \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}^{(0)} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{(0)} = 0 \end{cases}$$

Una precisazione sulle derivate temporali. In [19] si chiarisce il significato di alcune derivate temporali che compariranno nei passaggi successivi:

d/dt indicherà la derivata temporale calcolata seguendo il movimento della particella:

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{X}(t), t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla f \right) \Big|_{(\mathbf{X}(t), t)}$$

D/Dt indicherà la derivata temporale calcolata seguendo il moto di una particella fluida:

$$\frac{D}{Dt}f(\mathbf{X}(t), t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f \right) \Big|_{(\mathbf{X}(t), t)}$$

Scomposizione del problema. La presenza della particella e il suo movimento attraverso il fluido modificheranno il flusso localmente determinando un nuovo campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \quad (1.14)$$

La dinamica del campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ è retta dalle equazioni di Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho_f \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

Per quanto riguarda le condizioni al contorno:

1. Imponiamo la condizione di non scivolamento del fluido sulla superficie della particella (ipotesi di fluido viscoso):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(t) + \boldsymbol{\Omega}(t) \times [\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)] \text{ se } \|\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)\| = a$$

dove $\boldsymbol{\Omega}(t)$ è la velocità angolare della sferetta.

2. Richiediamo che a grande distanza dalla particella la perturbazione $\mathbf{u}^{(1)}$ svanisca:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t) \text{ se } \|\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)\| \rightarrow \infty$$

Ci mettiamo ora nel sistema di riferimento del centro di massa della particella. Le nuove variabili in tale sistema sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{x} - \mathbf{X}(t) \\ t &= t \end{aligned}$$

Nel nuovo riferimento il campo che descrive la velocità del fluido sarà:

$$\mathbf{w}(\mathbf{z}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}+\mathbf{X}(t)} - \mathbf{V}(t)$$

L'equazione di Navier-Stokes e l'ipotesi di fluido incompressibile per \mathbf{u} si traducono in:

$$\begin{cases} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{w} \right) = -\rho_f \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \rho_f \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{w} \\ \nabla_{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{w} = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

dove $\nabla_{\mathbf{z}} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3} \right)$.

Le condizioni al contorno sono:

$$\begin{cases} \mathbf{w}(\mathbf{z}, t) = \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{z} \text{ se } \|\mathbf{z}\| = a \\ \mathbf{w}(\mathbf{z}, t) = \mathbf{w}^{(0)}(\mathbf{z}, t) \text{ se } \|\mathbf{z}\| \rightarrow \infty \end{cases}$$

Come in (1.14), il campo \mathbf{w} viene decomposto nella somma di un flusso imperturbato $\mathbf{w}^{(0)}$ e di una perturbazione $\mathbf{w}^{(1)}$:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(0)} + \mathbf{w}^{(1)}$$

dove:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{(0)}(\mathbf{z}, t) &= \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}+\mathbf{X}(t)} - \mathbf{V}(t) \\ \mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{z}, t) &= \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}+\mathbf{X}(t)} \end{aligned}$$

Le equazioni che descrivono il flusso imperturbato $\mathbf{u}^{(0)}$ diventano:

$$\begin{cases} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{w}^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{w}^{(0)} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{w}^{(0)} \right) = -\rho_f \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \rho_f \mathbf{g} - \nabla_{\mathbf{z}} p^{(0)} + \mu \Delta \mathbf{w}^{(0)} \\ \nabla_{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{w}^{(0)} = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Da (1.15) e (1.16) si ottengono le equazioni relative alla perturbazione $\mathbf{w}^{(1)}$:

$$\begin{cases} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{w}^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{w}^{(0)} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{w}^{(1)} + \mathbf{w}^{(1)} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{w}^{(0)} + \mathbf{w}^{(1)} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{w}^{(1)} \right) = \\ = -\nabla_{\mathbf{z}} p^{(1)} + \mu \Delta \mathbf{w}^{(1)} \\ \nabla_{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{w}^{(1)} = 0 \end{cases}$$

con condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{z}, t) = \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{z} \text{ se } \|\mathbf{z}\| = a \\ \mathbf{w}^{(1)}(\mathbf{z}, t) = 0 \text{ se } \|\mathbf{z}\| \rightarrow \infty \end{cases}$$

Ora si scompone la risultante \mathbf{F} delle forze esercitate dal fluido sulla particella in un contributo $\mathbf{F}^{(0)}$ dovuto al flusso imperturbato e un contributo $\mathbf{F}^{(1)}$ dovuto alla perturbazione:

$$\mathbf{F} = \oint_S \sigma_{ij} n_j dS = \mathbf{F}^{(0)} + \mathbf{F}^{(1)}$$

dove

$$F_i^{(\alpha)} = \oint_S \left[-p^{(\alpha)} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial w_i^{(\alpha)}}{\partial z_j} + \frac{\partial w_j^{(\alpha)}}{\partial z_i} \right) \right] n_j dS, \quad \alpha = 0, 1.$$

In [19] vengono calcolati separatamente i due contributi. Ripercorriamo ora alcuni dei passaggi attraverso i quali è stata ricavata la risultante $\mathbf{F}^{(0)}$ delle forze esercitate dal flusso imperturbato sulla particella.

Contributo del flusso imperturbato. Le componenti di $\mathbf{F}^{(0)}$ possono essere calcolate se si conosce il tensore degli sforzi del flusso imperturbato:

$$F_i^{(0)} = \oint_S \sigma_{ij}^{(0)} n_j dS \quad (1.17)$$

dove S è la superficie che delimita la particella e (n_1, n_2, n_3) è il versore normale all'elemento di superficie dS . L'espressione (1.17) può essere trasformata in un integrale di volume esteso su tutto il volume V della particella:

$$\begin{aligned} F_i^{(0)} &= \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial z_j} dV = \\ &= \int_V \frac{\partial}{\partial z_j} \left[-p^{(0)} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial w_i^{(0)}}{\partial z_j} + \frac{\partial w_j^{(0)}}{\partial z_i} \right) \right] dV = \\ &= \int_V \left[-\frac{\partial p^{(0)}}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial^2 w_j^{(0)}}{\partial z_j \partial z_i} \right] dV \end{aligned} \quad (1.18)$$

A questo punto si utilizza l'ipotesi che la particella sia molto più piccola della scala caratteristica L su cui varia $\mathbf{u}^{(0)}$:

$$\frac{a}{L} \ll 1$$

Ne derivano due semplificazioni:

1. il gradiente di pressione $-\frac{\partial p^{(0)}}{\partial z_i}$ viene considerato uniforme all'interno della sfera, almeno in prima approssimazione;

2. $\mathbf{w}^{(0)}$ viene approssimato con uno sviluppo in serie di Taylor di ordine 2 intorno al centro della sfera.

Si ottiene quindi:

$$F_i^{(0)} \approx \frac{4}{3}\pi a^3 \left[-\frac{\partial p^{(0)}}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial^2 w_j^{(0)}}{\partial z_j \partial z_j} \right] (\mathbf{0}, t)$$

Ricordando che $\mathbf{w}^{(0)}$ soddisfa l'equazione di Navier-Stokes (1.16) possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} F_i^{(0)} &\approx \frac{4}{3}\pi a^3 \left[-\rho_f \mathbf{g} + \rho_f \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{w}^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{w}^{(0)} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{w}^{(0)} \right) \right] (\mathbf{0}, t) = \\ &= -m_f \mathbf{g} + m_f \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{w}^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{w}^{(0)} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{w}^{(0)} \right) (\mathbf{0}, t) \end{aligned} \quad (1.19)$$

dove m_f è la massa di fluido spostata dalla particella.

Se torniamo nel riferimento di partenza:

$$\begin{aligned} F_i^{(0)} &= -m_f \mathbf{g} + m_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{u}^{(0)} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{u}^{(0)} \right) (\mathbf{X}(t), t) = \\ &= -m_f \mathbf{g} + m_f \frac{D\mathbf{u}^{(0)}}{Dt} (\mathbf{X}(t), t) \end{aligned} \quad (1.20)$$

e l'equazione del moto della particella diventa:

$$m_p \frac{d\mathbf{V}}{dt} = (m_p - m_f) \mathbf{g} + m_f \frac{D\mathbf{u}^{(0)}}{Dt} (\mathbf{X}(t), t) + \mathbf{F}^{(1)}$$

Possiamo riconoscere in questa equazione la spinta di Archimede $-m_f \mathbf{g}$ e la forza $m_f \frac{D\mathbf{u}^{(0)}}{Dt} (\mathbf{X}(t), t)$ che il fluido eserciterebbe su una particella fluida di massa m_f (in tal caso la perturbazione è considerata assente).

Contributo della perturbazione. Abbiamo visto che la perturbazione $\mathbf{w}^{(1)}$ deve soddisfare le equazioni:

$$\begin{aligned} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{w}_i^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{w}^{(0)} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{w}_i^{(1)} + \mathbf{w}^{(1)} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{w}_i^{(0)} + \mathbf{w}^{(1)} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{w}_i^{(1)} \right) = \\ = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial z_i} + \mu \Delta \mathbf{w}_i^{(1)} \quad (i=1,2,3) \end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}_i^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{w}^{(0)} \cdot \nabla_z \mathbf{w}_i^{(1)} + \mathbf{w}^{(1)} \cdot \nabla_z \mathbf{w}_i^{(0)} + \mathbf{w}^{(1)} \cdot \nabla_z \mathbf{w}_i^{(1)} &= \\ &= \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial z_i} + \nu \Delta \mathbf{w}_i^{(1)} \quad (i=1,2,3) \end{aligned}$$

dove $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ è la viscosità cinematica. Come osserva De Lillo in [13], se vogliamo risolvere queste equazioni al primo ordine nella perturbazione, allora possiamo trascurare il termine non lineare $\mathbf{w}^{(1)} \cdot \nabla_z \mathbf{w}_i^{(1)}$. Nell'articolo di Maxey e Riley [19] vengono fatte opportune ipotesi affinché si possano trascurare i due termini avvertiti rimasti nell'equazione, ovvero:

1. $\mathbf{w}^{(0)} \cdot \nabla_z \mathbf{w}_i^{(1)}$
2. $\mathbf{w}^{(1)} \cdot \nabla_z \mathbf{w}_i^{(0)}$

Più precisamente, si ricercano le condizioni in cui questi due termini siano trascurabili rispetto all'effetto della viscosità $\nu \Delta \mathbf{w}_i^{(1)}$. Per far questo, De Lillo mostra in modo accurato gli ordini di grandezza dei vari termini. Le notazioni usate sono:

W_0, W_1, U_0 , valori tipici rispettivamente di $\mathbf{w}^{(0)}, \mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{u}^{(0)}$;

L , lunghezza caratteristica su cui varia in modo significativo $\mathbf{u}^{(0)}$;

a , raggio della particella, preso come lunghezza caratteristica di $\mathbf{w}^{(1)}$.

Ecco la stima dei termini da confrontare:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{(0)} \cdot \nabla_z \mathbf{w}_i^{(1)} &\sim \frac{W_0 W_1}{a} \\ \mathbf{w}^{(1)} \cdot \nabla_z \mathbf{w}_i^{(0)} &\sim \frac{W_1 U_0}{L} \\ \nu \Delta \mathbf{w}_i^{(1)} &\sim \nu \frac{W_1}{a^2} \end{aligned}$$

Affinché i due termini di trasporto siano trascurabili rispetto al termine viscoso deve essere:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{w}^{(0)} \cdot \nabla_z \mathbf{w}_i^{(1)}}{\mu \Delta \mathbf{w}_i^{(1)}} &\sim \frac{W_0 a}{\nu} \ll 1 \\ \frac{\mathbf{w}^{(1)} \cdot \nabla_z \mathbf{w}_i^{(0)}}{\mu \Delta \mathbf{w}_i^{(1)}} &\sim \frac{[(U_0/L)a]a}{\nu} \ll 1 \end{aligned}$$

Possiamo definire due numeri di Reynolds ³ e imporre che entrambi siano piccoli:

1. $Re_1 \equiv \frac{W_0 a}{\nu} \ll 1 \Rightarrow W_0 \ll \frac{\nu}{a}$ (velocità relativa della particella rispetto al fluido piccola)
2. $Re_2 \equiv \frac{[(U_0/L)a]a}{\nu} \ll 1 \Rightarrow \frac{U_0}{L} a \ll \frac{\nu}{a}$ (gradiente di velocità del flusso imperturbato piccolo su un lunghezza dell'ordine di a)

Sotto queste ipotesi, l'equazione vettoriale che descrive $\mathbf{w}^{(1)}$ si semplifica e diventa:

$$\frac{\partial \mathbf{w}^{(1)}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_f} \nabla_z p^{(1)} + \nu \Delta \mathbf{w}^{(1)} \quad (1.21)$$

È questa l'equazione usata per calcolare la forza $\mathbf{F}^{(1)}$ esercitata dal fluido sulla particella per effetto della perturbazione. Il risultato ottenuto nel lavoro di Maxey e Riley [19] è:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(1)} = & -\frac{1}{2} m_f \frac{d}{dt} \left\{ \mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) - \frac{1}{10} a^2 \Delta \mathbf{u}|_{\mathbf{X}(t)} \right\} + \\ & - 6\pi a \mu \left\{ \mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) - \frac{1}{6} a^2 \Delta \mathbf{u}|_{\mathbf{X}(t)} \right\} + \\ & - 6\pi a \mu^2 \int_0^t d\tau \left\{ \frac{d/d\tau \left[\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) - \frac{1}{6} a^2 \Delta \mathbf{u}|_{\mathbf{X}(t)} \right]}{[\pi \nu (t - \tau)]^{1/2}} \right\} \end{aligned} \quad (1.22)$$

$\mathbf{F}^{(1)}$ è quindi la somma di tre termini: il primo viene detto effetto di massa aggiunta, il secondo è l'attrito di Stokes e il terzo è il cosiddetto integrale di Basset. Segue una riflessione sul significato di queste forze:

Massa aggiunta. Stokes spiega in [28] come Bessel ⁴ avesse introdotto il concetto di massa aggiunta. Le osservazioni sperimentali sul pendolo venivano solitamente fatte in presenza dell'aria. Bisognava quindi applicare una piccola correzione ai risultati ottenuti per ricondurli a ciò che si sarebbe osservato se il pendolo fosse stato sospeso nel vuoto. L'effetto più evidente dell'aria era una riduzione della forza che mette in moto il pendolo, e il conseguente aumento del periodo di oscillazione. Questo effetto veniva giustificato

³In generale un numero di Reynolds esprime il rapporto tra forze inerziali e forze viscosse, offrendo un criterio per valutare quale dei due effetti sia più importante.

⁴Friedrich Wilhelm Bessel, astronomo, matematico e geodeta tedesco (1784-1846)

con la spinta di Archimede. Fu Bessel, nel 1828, a far notare che non bastava tener conto della spinta di Archimede, ma bisognava considerare anche l'inerzia del fluido stesso. Egli descrisse quest'effetto come un aumento del momento di inerzia del pendolo ⁵. In particolare, nel caso di pendolo semplice, egli aggiunse alla massa del pendolo un contributo pari ad un fattore k moltiplicato per la massa di fluido spostata dal pendolo.

In [12] viene illustrato il significato dell'effetto di massa aggiunta in un fluido ideale ⁶ e incompressibile. Si studia il moto di un corpo generico in un fluido fermo all'infinito (significa che il fluido, in assenza del corpo, sarebbe fermo). Inevitabilmente il fluido è costretto a spostarsi al passaggio del corpo. È intuitivo pensare che se il corpo accelera o decelera l'energia cinetica del fluido aumenterà o diminuirà. D'altra parte, se il corpo è in moto rettilineo uniforme, l'energia cinetica del fluido non cambierà. Un corpo la cui velocità \mathbf{V} vari nel tempo esercita sul fluido una forza da cui deriva una variazione della quantità di moto del fluido. Le componenti della quantità di moto totale del fluido possono essere espresse come (vedi [12]):

$$P_i = m_{ik} V_k$$

dove m_{ik} è un tensore simmetrico costante che dipende dalla forma del corpo e della sua velocità \mathbf{V} . m_{ik} viene detto tensore di massa aggiunta. Nel caso di una sfera, $m_{ik} = \frac{1}{2} m_f \delta_{ik}$, dove m_f è la massa di fluido spostata dalla sfera. La forza esercitata dal corpo sul fluido sarà quindi:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

che in forma scalare diventa:

$$F_i = \frac{dP_i}{dt} = m_{ik} \frac{dV_k}{dt}$$

da cui si vede che la forza esercitata dal corpo sul fluido è assente se il corpo si muove rispetto al fluido di moto rettilineo e uniforme. Il fluido eserciterà quindi sul corpo una forza uguale e opposta, che è l'effetto di massa aggiunta. In un fluido fermo l'equazione del moto per una particella sferica diventa:

$$m_p \frac{d\mathbf{V}}{dt} = (m_p - m_f) \mathbf{g} - \frac{1}{2} m_f \frac{d\mathbf{V}}{dt}$$

⁵La frequenza di oscillazione di un pendolo fisico nel caso di piccole oscillazioni è $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$, dove m è la massa del pendolo, d è la distanza fra l'asse e il baricentro, e I è il momento d'inerzia rispetto all'asse (vedi [23])

⁶In [12] si definisce ideale un fluido nel quale siano trascurabili processi di dissipazione di energia dovuti ad attrito interno (viscosità) e scambi di calore tra parti differenti del fluido.

che può essere riscritta come:

$$(m_p + \frac{1}{2}m_f)\frac{d\mathbf{V}}{dt} = (m_p - m_f)\mathbf{g}$$

In questa seconda formulazione l'effetto di massa aggiunta è visto, appunto, come un'incremento di massa della particella, esattamente come aveva fatto Bessel. Come si vede da questo esempio, ma anche dall'equazione di Maxey, il termine di massa aggiunta è presente a prescindere dalla viscosità del fluido.

Contributi dovuti alla viscosità del fluido:

- **Attrito di Stokes.** Si può notare che, nel caso particolare di flusso stazionario e di velocità della particella relativa al fluido costante, la forza esercitata dal fluido sulla sfera a causa della viscosità si riduce a questo termine. Se il flusso imperturbato fosse anche uniforme, si otterrebbe esattamente la legge di Stokes che descrive la resistenza esercitata da un fluido su una sfera che si muova lentamente con velocità costante rispetto al fluido.
- **Integrale di Basset.** È dovuto alla non stazionarietà del flusso e della velocità della particella relativa al fluido. Infatti, come viene osservato in [19], è un termine che diventa importante nel moto di una particella che cada sotto l'effetto della gravità attraverso un fluido fermo, partendo da una situazione iniziale di riposo, e per una particella sospesa in un fluido che oscilli uniformemente ad alta frequenza. Nel seguito trascureremo per semplicità questo termine.

Correzioni di Faxen. L'effetto di massa aggiunta, l'attrito di Stokes e l'integrale di Basset contengono una correzione proporzionale a $\Delta \mathbf{u}|_{\mathbf{x}(t)}$. Queste correzioni, conosciute come termini di Faxen, servono a tener conto dell'ipotesi di flusso non uniforme.

L'equazione definitiva che Maxey e Riley [19] ottengono per la particella

(d'ora in poi intenderò con \mathbf{u} il flusso imperturbato $\mathbf{u}^{(0)}$) è quindi:

$$\begin{aligned}
m_p \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= (m_p - m_f)\mathbf{g} + m_f \left. \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right|_{\mathbf{X}(t)} \\
&\quad - \frac{1}{2} m_f \frac{d}{dt} \left\{ \mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) - \frac{1}{10} a^2 \Delta \mathbf{u}|_{\mathbf{X}(t)} \right\} \\
&\quad - 6\pi a \mu \left\{ \mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) - \frac{1}{6} a^2 \Delta \mathbf{u}|_{\mathbf{X}(t)} \right\} \\
&\quad - 6\pi a \mu^2 \int_0^t d\tau \left\{ \frac{d/d\tau \left[\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) - \frac{1}{6} a^2 \Delta \mathbf{u}|_{\mathbf{X}(t)} \right]}{[\pi\nu(t-\tau)]^{1/2}} \right\}
\end{aligned} \tag{1.23}$$

ottenuta sotto le ipotesi di:

- fluido incompressibile;
- particella puntiforme: $a \ll L$;
- $\frac{W_0 a}{\nu} \ll 1$;
- $\frac{[(U_0/L)a]a}{\nu} \ll 1$;
- particella isolata.

Seguendo le scelte fatte da Maxey [21] nel seguito useremo una forma semplificata dell'equazione (1.23), in cui trascureremo le correzioni di Faxen e il termine di memoria. Se analizziamo l'ordine di grandezza dei termini di Faxen si ottiene:

$$a^2 \Delta \mathbf{u}|_{\mathbf{X}(t)} \sim a^2 W_0 / L^2$$

che, nell'ipotesi di particella puntiforme, risulta trascurabile rispetto a

$$[\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)] \sim W_0$$

L'equazione semplificata che useremo è:

$$\begin{aligned}
m_p \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= (m_p - m_f)\mathbf{g} - 6\pi a \mu [\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)] \\
&\quad + m_f \left. \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right|_{(\mathbf{X}(t), t)} - \frac{1}{2} m_f \frac{d}{dt} [\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)]
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Alcune precisazioni. Auton e al. in [1] forniscono un'espressione generale per il termine di massa aggiunta nel caso di flusso non viscoso, non stazionario e non uniforme:

$$\frac{1}{2}m_f \left(\frac{D\mathbf{u}}{dt} - \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)$$

che differisce dall'espressione di Maxey e Riley:

$$\frac{1}{2}m_f \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right)$$

Maxey giustifica ciò spiegando che le due derivate $\frac{D\mathbf{u}}{dt}$ e $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ differiscono per un termine, $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$, che è trascurabile nelle ipotesi di piccoli numeri di Reynolds. Infatti:

$$\frac{1}{2}m_f \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{2}{3}\pi a^3 \rho_f \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \sim a^3 \rho_f U_0 \frac{W_0}{L}$$

che, nelle ipotesi fatte, è trascurabile rispetto all'attrito di Stokes:

$$-6\pi a \mu [\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)] \sim 10a\rho_f \nu W_0$$

Infatti:

$$\frac{a^3 \rho_f U_0 \frac{W_0}{L}}{10a\rho_f \nu W_0} = \frac{1}{10} \frac{U_0 a^2}{L\nu} \ll 1$$

Per questo motivo De Lillo [13] utilizza una forma ancora più semplice dell'equazione (1.24), in cui sostituisce $\frac{D\mathbf{u}}{dt}$ con $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$. Ulteriori dettagli sono mostrati nell'appendice A. Vedremo inoltre che Babiano, studiando il caso di particelle neutre ($\beta = 1$), ricorre alla formulazione del termine di massa aggiunta fornita da Auton.

Seguono i passaggi che porteranno alla forma definitiva da noi utilizzata:

$$\begin{aligned} \left(m_p + \frac{1}{2}m_f \right) \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= (m_p - m_f)\mathbf{g} - 6\pi a \mu [\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)] \\ &\quad + m_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \Big|_{(\mathbf{X}(t), t)} + \frac{1}{2}m_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \Big|_{(\mathbf{X}(t), t)} \\ \left(m_p + \frac{1}{2}m_f \right) \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= (m_p - m_f)\mathbf{g} - 6\pi a \mu [\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)] \\ &\quad + \frac{3}{2}m_f \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{X}(t), t) + m_f \left[\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) + \frac{1}{2}\mathbf{V}(t) \right] \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) \end{aligned} \tag{1.25}$$

Definiamo ora (si veda [18]):

$$\beta \equiv \frac{\frac{3}{2}m_f}{m_p + \frac{1}{2}m_f} = \frac{3m_f}{2m_p + m_f} = \frac{3\rho_f}{2\rho_p + \rho_f}$$

$$\tau \equiv \frac{m_p + \frac{1}{2}m_f}{6\pi a\mu} = \frac{a^2}{3\nu\beta}$$

β è un numero adimensionale, che assume valori compresi tra 0 (quando $\rho_p \gg \rho_f$: particelle molto piú dense del fluido, come delle gocce in un gas) e 3 (quando $\rho_f \gg \rho_p$: particelle molto piú leggere del fluido, come nel caso delle bolle nei liquidi). Quando le particelle hanno la stessa densità del fluido $\beta = 1$.

Il parametro τ ha le dimensioni di un tempo e viene detto tempo di Stokes. Fornisce informazioni sul tempo di risposta della particella alle variazioni del flusso \mathbf{u} , ed è per questo un parametro che misura l'inerzia della particella, comprensiva dell'effetto di massa aggiunta, intesa come tendenza della particella a conservare il proprio stato di moto. Si può notare che il tempo di Stokes è legato alle dimensioni della particella (raggio a) e alla densità di massa relativa tra particella e fluido, di cui il parametro β contiene l'informazione. Proviamo a calcolare il tempo di Stokes per gocce d'acqua ($\rho_p = 10^3 \text{kg/m}^3$) di diversa dimensione nell'aria ($\rho_f = 1 \text{kg/m}^3$, $\nu = 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$). In questo caso la quantità β è pari a 10^{-3} . Calcoliamo i tempi di Stokes corrispondenti a diversi valori del raggio a della goccia:

- se $a=0.1 \mu\text{m}$, $\tau = \frac{(0.1 \cdot 10^{-6})^2}{3 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-3}} \text{s} \sim 10^{-7} \text{s}$;
- se $a=20 \mu\text{m}$, $\tau = \frac{(20 \cdot 10^{-6})^2}{3 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-3}} \text{s} \sim 10^{-2} \text{s}$;
- se $a=1 \text{mm}$, $\tau = \frac{(10^{-3})^2}{3 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-3}} \text{s} \sim 10 \text{s}$.

Dopo questa breve riflessione sulle quantità β e τ , riprendo in considerazione l'equazione (1.25) e la riscrivo in termini dei parametri appena introdotti:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = (1 - \beta)\mathbf{g} - \frac{[\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)]}{\tau} + \beta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{X}(t), t) + \frac{2}{3}\beta \left[\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) + \frac{1}{2}\mathbf{V}(t) \right] \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) \quad (1.26)$$

Diffusione. Come anticipato, in alcuni casi terrò conto dell'effetto della diffusione molecolare. Così come viene fatto in un recente lavoro di Martins Afonso [18], aggiungerò all'equazione (5.1) un termine che tenga conto di questo effetto:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} = & (1 - \beta)\mathbf{g} - \frac{[\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)]}{\tau} \\ & + \beta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{X}(t), t) + \frac{2}{3}\beta \left[\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) + \frac{1}{2}\mathbf{V}(t) \right] \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) + \frac{\sqrt{2k}}{\tau} \boldsymbol{\eta}(t) \end{aligned}$$

Dove k è il coefficiente di diffusione molecolare e $\boldsymbol{\eta}(t)$ rappresenta un processo stocastico stazionario distribuito gaussianamente tale che $\langle \boldsymbol{\eta}(t) \rangle = 0$ e $\langle \eta_\mu(t) \eta_\nu(0) \rangle = \delta_{\mu\nu} \delta(t)$.

Forma adimensionale dell'equazione. Come già detto prima, siano U ed L rispettivamente una velocità caratteristica e una lunghezza caratteristica del campo di velocità imperturbato $\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)$. Scelgo U ed L come nuove unità di misura. Indicherò le grandezze espresse in queste nuove unità con degli asterischi:

$$\mathbf{X}^* = \frac{\mathbf{X}}{L}, \quad t^* = t \frac{U}{L}, \quad \mathbf{V}^* = \frac{\mathbf{V}}{U}, \quad \mathbf{g}^* = \mathbf{g} \frac{L}{U^2}$$

Riscrivo l'equazione esprimendo le grandezze coinvolte in termini di queste nuove unità:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}^*}{dt^*} = & (1 - \beta)\mathbf{g}^* - \frac{[\mathbf{V}^*(t^*) - \mathbf{u}^*(\mathbf{X}^*(t^*), t^*)]}{\tau^*} + \beta \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*}(\mathbf{X}^*(t^*), t^*) \\ & + \frac{2}{3}\beta \left[\mathbf{u}^*(\mathbf{X}^*(t^*), t^*) + \frac{1}{2}\mathbf{V}^*(t^*) \right] \cdot \nabla \mathbf{u}^*(\mathbf{X}^*(t^*), t^*) + \frac{\sqrt{2k^*}}{\tau^*} \boldsymbol{\eta}^*(t^*) \end{aligned}$$

Definisco i seguenti gruppi adimensionali (si veda [18]):

- il numero di Stokes, $St \equiv \tau^* = \frac{\tau}{L/U}$;
- il numero di Péclet, $Pe \equiv \frac{1}{k^*} = \frac{UL}{k}$;
- il numero di Froude, $Fr \equiv \frac{1}{\sqrt{g^*}} = \frac{1}{\sqrt{g/(U^2/L)}} \Rightarrow g^* = \frac{1}{Fr^2}$.

Si noti che alcuni utilizzano un numero, detto parametro d'inerzia, pari all'inverso del numero di Stokes (si veda ad esempio Maxey [21]). Possiamo scrivere il numero di Stokes in termini del numero di Reynolds Re_2 :

$$St = \frac{m_p + \frac{1}{2}m_f U}{6\pi a \mu} \frac{U}{L} = \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{\rho_p + \frac{1}{2}\rho_f U}{6\pi a \rho_f \nu} \frac{U}{L} = \frac{1}{3} \frac{U a^2}{L \nu} \frac{2\rho_p + \rho_f}{3\rho_f} = \frac{1}{3} \frac{Re_2}{\beta}$$

da cui si ricava che:

$$Re_2 = 3\beta St$$

e la condizione

$$Re_2 \ll 1$$

implica:

$$St \ll \frac{1}{3\beta} \quad (1.27)$$

che rappresenta una condizione necessaria affinché sia valido il modello di Maxey e Riley.

Riprendiamo per un momento l'esempio della goccia d'acqua nell'aria e calcoliamone il numero di Stokes. Per far questo suppongo che la lunghezza caratteristica del flusso sia $L = 10^2 m - 10^3 m$ e la velocità caratteristica sia $U = 1 m/s$. Ne consegue un tempo caratteristico dell'ordine di $10^2 s - 10^3 s$. Il numero di Stokes della goccia d'acqua per diversi valori del suo raggio è quindi:

- se $a=0.1 \mu m$, $St \sim 10^{-10} - 10^{-9}$;
- se $a=20 \mu m$, $St \sim 10^{-5} - 10^{-4}$;
- se $a=1 mm$, $St \sim 10^{-2} - 10^{-1}$.

In tutti e tre i casi la particella ha un tempo di Stokes inferiore al tempo caratteristico del flusso.

Torno infine all'equazione del moto della particella e la scrivo in forma adimensionale introducendo i parametri Stokes, Péclet e Froude:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}^*}{dt^*} = & \frac{(1-\beta)}{Fr^2} \hat{\mathbf{g}} - \frac{[\mathbf{V}^*(t^*) - \mathbf{u}^*(\mathbf{X}^*(t^*), t^*)]}{St} + \beta \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*}(\mathbf{X}^*(t^*), t^*) \\ & + \frac{2}{3}\beta \left[\mathbf{u}^*(\mathbf{X}^*(t^*), t^*) + \frac{1}{2}\mathbf{V}^*(t^*) \right] \cdot \nabla \mathbf{u}^*(\mathbf{X}^*(t^*), t^*) + \sqrt{\frac{2}{Pe St^2}} \boldsymbol{\eta}^*(t^*) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Quest'equazione mi sarà utile nei prossimi capitoli e le grandezze adimensionate saranno indicate omettendo gli asterischi.

Velocità nuda. Nel seguito di questo lavoro mi sarà utile conoscere la velocità teorica che avrebbe una particella in un fluido fermo. Per ricavarne l'espressione, vediamo come diventa l'equazione del moto della particella (1.28) nel caso in cui il fluido sia fermo ($\mathbf{u} = 0$) e l'effetto della diffusione sia trascurabile:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{(1-\beta)}{Fr^2} \hat{\mathbf{g}} - \frac{\mathbf{V}}{St} \quad (1.29)$$

Notiamo che in questa situazione le forze in gioco sono la forza di galleggiamento, cioè l'effetto combinato del peso e della spinta di Archimede, e l'attrito di Stokes. Per risolvere l'equazione (1.29) la scrivo nella forma:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{\mathbf{V}}{St} = \frac{(1-\beta)}{Fr^2} \hat{\mathbf{g}}$$

Moltiplico entrambi i membri dell'equazione per $e^{\frac{t}{St}}$:

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{\mathbf{V}}{St} \right) e^{\frac{t}{St}} = \frac{(1-\beta)}{Fr^2} e^{\frac{t}{St}} \hat{\mathbf{g}}$$

che equivale a

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{V} e^{\frac{t}{St}}) = \frac{(1-\beta)}{Fr^2} e^{\frac{t}{St}} \hat{\mathbf{g}}$$

Integrando rispetto al tempo si ottiene:

$$\mathbf{V} e^{\frac{t}{St}} = \frac{(1-\beta)St}{Fr^2} e^{\frac{t}{St}} \hat{\mathbf{g}} + \mathbf{c}$$

dove \mathbf{c} è un vettore costante che dipende dalle condizioni iniziali:

$$\mathbf{c} = \mathbf{V}(0) - \frac{(1-\beta)St}{Fr^2} \hat{\mathbf{g}}$$

Infine si ottiene:

$$\mathbf{V}(t) = \frac{(1-\beta)St}{Fr^2} \hat{\mathbf{g}} + \mathbf{c} e^{-\frac{t}{St}}$$

da cui si ricava che:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{V}(t) = \frac{(1-\beta)St}{Fr^2} \hat{\mathbf{g}}$$

Vediamo quindi che dopo una fase transitoria, della cui durata il numero di Stokes è misura, la particella raggiunge una velocità limite, che chiameremo velocità nuda \mathbf{w}^* :

$$\mathbf{w}^* \equiv \frac{(1-\beta)St}{Fr^2} \hat{\mathbf{g}} \quad (1.30)$$

che corrisponde ad una situazione di equilibrio tra forza gravitazionale, spinta di Archimede e attrito di Stokes. Infatti, ponendo $\frac{d\mathbf{V}}{dt} = 0$ nell'equazione (1.29), si ottiene esattamente $\mathbf{V} = \mathbf{w}^*$.

Capitolo 2

Particelle inerziali in flussi cellulari

Lo scopo di questo capitolo è descrivere il tipo di flusso in cui analizzerò la dinamica di particelle inerziali e fornire una rassegna di alcuni degli studi e delle osservazioni che sono già stati fatti in situazioni simili a quelle da me trattate.

Prima di tutto, considereremo un flusso $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ bidimensionale e incompressibile. Sotto queste ipotesi è possibile definire una funzione $\psi(\mathbf{x}, t)$, detta *funzione corrente*, tale che:

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

Allora, il moto di una particella fluida o di un tracciante ¹ è determinato dall'equazione differenziale:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

Possiamo notare che questa equazione descrive l'evoluzione di un sistema dinamico hamiltoniano², nel quale la funzione corrente ψ gioca il ruolo della funzione hamiltoniana [2, 10, 14] e lo spazio delle fasi coincide con lo spazio reale di coordinate (x,y). Dedicherò un paragrafo a parte per soffermarmi brevemente su questa analogia.

¹Per tracciante s'intende una particella abbastanza piccola da non perturbare il campo di velocità del fluido, ma anche grande a sufficienza da non essere soggetta ad un moto browniano [10].

²Si veda l'appendice B.

Consideriamo ora un flusso (bidimensionale incompressibile) cellulare, cioè spazialmente periodico. Nei prossimi paragrafi fornirò una descrizione di tale flusso, e indicherò le ragioni che, già in lavori precedenti, ne hanno determinato la scelta. Partiamo dalla descrizione di un flusso cellulare stazionario, lo stesso che Stommel descrisse in un suo articolo del 1949 [29].

2.1 Flusso cellulare stazionario

Stommel [29] considerò un flusso bidimensionale avente la seguente forma:

$$\begin{cases} u_x = U \sin(kx) \cos(ky) \\ u_y = -U \cos(kx) \sin(ky) \end{cases} \quad (2.2)$$

È evidente che si tratta di un flusso periodico spazialmente, nel quale u_x e u_y hanno lo stesso periodo spaziale $\lambda = 2\pi/k$. Possiamo immaginare di suddividere il piano in celle quadrate di lato $l = \lambda/2$, in ognuna delle quali il fluido ruota intorno al centro. Sulle pareti delle celle si ha la massima velocità del fluido, mentre al centro e negli angoli si trovano i punti di stagnazione (in cui il fluido ha velocità nulla). Se in una cella il fluido scorre in verso antiorario, in quella adiacente il flusso è orario. In altre parole, in ogni celletta le linee di flusso sono uguali (linee chiuse concentriche), cambia l'orientamento (orario, antiorario). La figura 2.1 descrive il campo di velocità in due celle adiacenti ed è tratta da un lavoro di Maxey [21].

Stommel [29] utilizzò il campo di velocità (2.2) per descrivere flussi cellulari indotti dal vento nei laghi e negli oceani, o flussi cellulari indotti termicamente come le cellule convettive alla Rayleigh-Bénard. Nel primo caso si tratta delle cosiddette celle di Langmuir, dal nome di colui che le osservò e descrisse in [16]. Nel 1927 Irving Langmuir, durante una traversata in volo dell'Atlantico da New York verso l'Inghilterra, notò grandi quantità di alghe galleggianti, la maggior parte delle quali erano disposte lungo strisce, larghe 2-6 metri, parallele alla direzione del vento. La distanza tra queste linee era di 100-200 metri e la loro lunghezza spesso di 500 m. A queste strisce se ne alternavano altre più piccole nelle quali le alghe erano disposte quasi in linea retta. Langmuir, per illustrare questo fenomeno, spiegò che l'azione del vento determinava vortici elicoidali nell'acqua, alternativamente orari e antiorari, intorno ad assi orizzontali paralleli alla direzione del vento. Stommel, nel suo modello, trascurò il moto dell'acqua nella direzione del vento e si limitò a considerare una sezione trasversale delle celle di Langmuir.

Abbiamo detto che il modello di Stommel può rappresentare anche cellule convettive alla Rayleigh-Bénard. Si può trovare una descrizione di questo

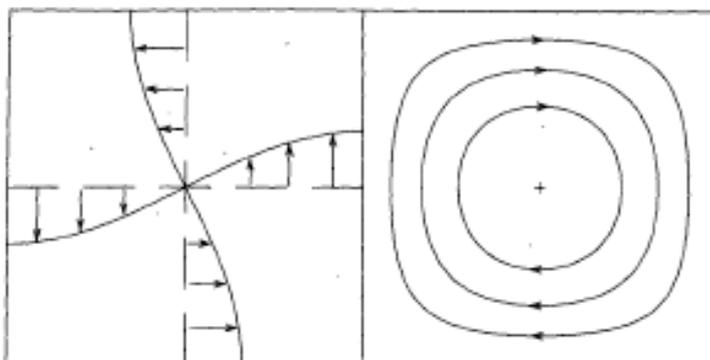


Figura 2.1: Figura tratta da [21] in cui si mostra il flusso in due celle adiacenti. In quella di sinistra si vede l'intensità e l'orientamento del flusso in determinati punti, in quella di destra sono rappresentate le linee di flusso.

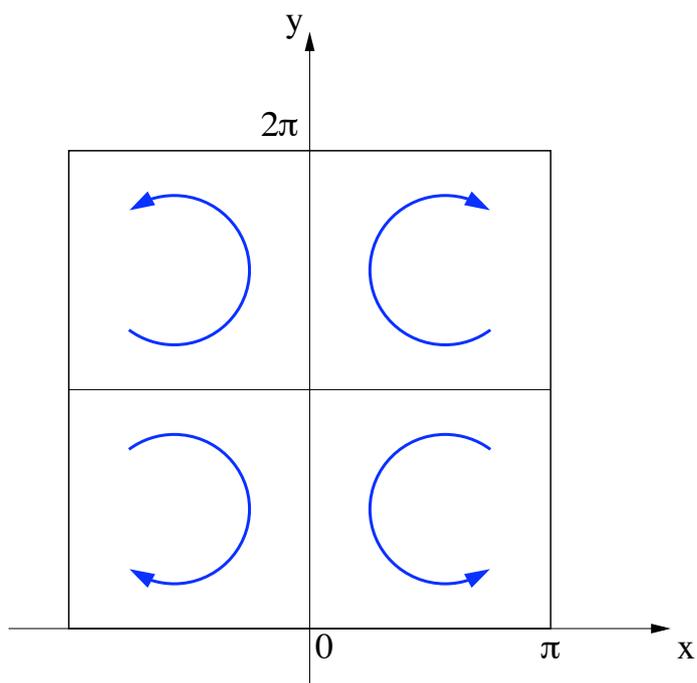


Figura 2.2: Orientamento del flusso cellulare scelto in quattro celle adiacenti.

fenomeno in [14]: si verifica quando uno strato di fluido è riscaldato dal basso in modo che il livello inferiore di questo strato sia mantenuto ad una temperatura più alta rispetto al livello superiore e che le due temperature siano mantenute fisse.³ Se la differenza di temperatura ΔT non è troppo elevata, il fluido rimane fermo. Il calore viene trasferito dal basso verso l'alto per conduzione termica. Se ΔT è sufficientemente elevata, la forza di galleggiamento diventa più forte di quella originata dalla viscosità del fluido e si sviluppano dei moti convettivi stazionari. In questo caso il calore viene trasferito dal basso verso l'alto per effetto di questi moti convettivi. Con un ulteriore aumento di ΔT i moti convettivi assumono un assetto non stazionario sino a divenire caotici.

Torniamo adesso al flusso (2.2) considerato da Stommel. Si può descrivere tale flusso in termini di l (lato della cella):

$$\begin{cases} u_x = U \sin\left(\frac{x}{l}\right) \cos\left(\frac{y}{l}\right) \\ u_y = -U \cos\left(\frac{x}{l}\right) \sin\left(\frac{y}{l}\right) \end{cases}$$

Si tratta di un campo di velocità a divergenza nulla, quindi adatto a descrivere il moto di un fluido incompressibile; si può allora definire una funzione corrente dalla quale ricavare il flusso:

$$\psi(x, y) \equiv Ul \sin\left(\frac{x}{l}\right) \sin\left(\frac{y}{l}\right)$$

Lungo ogni linea di flusso la funzione ψ è costante. Dato che il flusso è stazionario, le traiettorie delle particelle coincidono con le linee di flusso, ragion per cui tali traiettorie sono regolari.

Tratteremo anche una forma più generale di flusso cellulare, nel quale le cellette non sono necessariamente quadrate:

$$\begin{cases} u_x = U_x \sin(k_x x) \cos(k_y y) \\ u_y = -U_y \cos(k_x x) \sin(k_y y) \end{cases} \quad (2.3)$$

dove

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x}$$

$$k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y}$$

³Questo tipo di sistema fu studiato sperimentalmente da Bénard nel 1900, mentre Lord Rayleigh fornì una spiegazione teorica di alcuni aspetti del fenomeno nel 1916. Ecco perché questo tipo di sistema viene ora detto cella di Rayleigh-Bénard.

Chiameremo *aspect ratio* e indicheremo con L_{yx} il rapporto tra lato verticale $l_y = \lambda_y/2$ e lato orizzontale $l_x = \lambda_x/2$ della cella elementare:

$$L_{yx} \equiv \frac{l_y}{l_x} = \frac{k_x}{k_y}$$

Dato che lavoreremo nell'ipotesi di fluido incompressibile, il campo di velocità appena descritto dovrà avere divergenza nulla:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

che implica la seguente condizione:

$$\frac{U_x}{U_y} = \frac{k_y}{k_x} = \frac{1}{L_{yx}} \implies \begin{cases} U_x = \frac{U_y}{L_{yx}} \\ k_y = \frac{k_x}{L_{yx}} \end{cases}$$

Il sistema (2.3) può quindi essere riscritto come:

$$\begin{cases} u_x = \frac{U_y}{L_{yx}} \sin(k_x x) \cos\left(\frac{k_x}{L_{yx}} y\right) \\ u_y = -U_y \cos(k_x x) \sin\left(\frac{k_x}{L_{yx}} y\right) \end{cases} \quad (2.4)$$

2.2 Flussi cellulari dipendenti dal tempo

Considereremo inoltre flussi cellulari non stazionari, ma che oscillano verticalmente/orizzontalmente con ampiezza delle oscillazioni B e frequenza ω . In particolare, le oscillazioni orizzontali sono adatte a descrivere instabilità che possono verificarsi nelle celle convettive di Rayleigh-Bénard [27, 7]. Un flusso cellulare che oscilla verticalmente è descritto da:

$$\begin{cases} u_x = \frac{U_y}{L_{yx}} \sin(k_x x) \cos\left[\frac{k_x}{L_{yx}}(y + B \sin(\omega t))\right] \\ u_y = -U_y \cos(k_x x) \sin\left[\frac{k_x}{L_{yx}}(y + B \sin(\omega t))\right] \end{cases} \quad (2.5)$$

Il flusso (2.5) ha divergenza nulla e può essere ricavato dalla funzione corrente:

$$\psi(x, y) := \frac{U_y}{k_x} \sin(k_x x) \sin\left[\frac{k_x}{L_{yx}}(y + B \sin(\omega t))\right]$$

Similmente, la formula che descrive un flusso cellulare oscillante orizzontalmente è:

$$\begin{cases} u_x = \frac{U_y}{L_{yx}} \sin[k_x(x + B \sin(\omega t))] \cos\left(\frac{k_x}{L_{yx}} y\right) \\ u_y = -U_y \cos[k_x(x + B \sin(\omega t))] \sin\left(\frac{k_x}{L_{yx}} y\right) \end{cases} \quad (2.6)$$

Anche in questo caso il flusso ha divergenza nulla e ammette come funzione corrente:

$$\psi(x, y) \equiv \frac{U_y}{k_x} \sin[k_x(x + B \sin(\omega t))] \sin\left(\frac{k_x}{L_{yx}} y\right)$$

Ora rendiamo adimensionali le descrizioni (2.5) e (2.6) scegliendo a tal fine nuove unità di misura:

U_y come unità di misura delle velocità;

$$\frac{1}{k_x} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{l}{\pi} \text{ come unità di misura delle lunghezze.}$$

Queste due unità di misura saranno le stesse adottate per rendere adimensionale l'equazione del moto di una particella immersa in un fluido. Anche in questo caso indicherò con degli asterischi le grandezze espresse nelle nuove unità. Nel caso di oscillazioni verticali la descrizione del flusso (2.5) in forma adimensionale è:

$$\begin{cases} u_x^* = \frac{1}{L_{yx}} \sin(x^*) \cos\left[\frac{y^* + B^* \sin(\omega^* t^*)}{L_{yx}}\right] \\ u_y^* = -\cos(x^*) \sin\left[\frac{y^* + B^* \sin(\omega^* t^*)}{L_{yx}}\right] \end{cases} \quad (2.7)$$

che può essere ricavato dalla funzione corrente:

$$\psi^*(x^*, y^*) \equiv \sin(x^*) \sin\left(\frac{y^* + B^* \sin(\omega^* t^*)}{L_{yx}}\right)$$

Analogamente, il campo di velocità (2.6) oscillante orizzontalmente descritto in forma adimensionale è:

$$\begin{cases} u_x^* = \frac{1}{L_{yx}} \sin(x^* + B^* \sin(\omega^* t^*)) \cos\left(\frac{y^*}{L_{yx}}\right) \\ u_y^* = -\cos(x^* + B^* \sin(\omega^* t^*)) \sin\left(\frac{y^*}{L_{yx}}\right) \end{cases} \quad (2.8)$$

la cui funzione corrente adimensionale è:

$$\psi^*(x^*, y^*) \equiv \sin(x^* + B^* \sin(\omega^* t^*)) \sin\left(\frac{y^*}{L_{yx}}\right)$$

Nel seguito indicherò le grandezze adimensionate omettendo gli asterischi.

2.3 Analogia tra flussi bidimensionali incompressibili e sistemi hamiltoniani

Abbiamo visto che la dinamica di una particella fluida o di un tracciante in un flusso bidimensionale incompressibile è descritta dalle equazioni:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

da cui si vede che una particella fluida può essere vista come un sistema hamiltoniano ad un solo grado di libertà in cui la funzione corrente ψ gioca il ruolo della funzione hamiltoniana⁴. Se la funzione corrente non dipende dal tempo la singola particella fluida si muove lungo una curva su cui ψ è costante, così come lo stato dinamico di un sistema hamiltoniano autonomo ad un grado di libertà evolve nello spazio delle fasi lungo una curva per la quale la funzione hamiltoniana è costante (sistema hamiltoniano integrabile). Se la funzione ψ dipende dal tempo, ma può essere vista come somma di una funzione corrente stazionaria e di una perturbazione dipendente dal tempo sufficientemente piccola, allora possono sopravvivere regioni nello spazio in cui le particelle fluide hanno traiettorie regolari. Al di fuori di queste regioni, però, la dinamica delle particelle fluide è caotica, nonostante la descrizione euleriana del flusso sia regolare. Quando ciò si verifica si parla di *caos lagrangiano* (si veda [2, 4, 10]). In [10] viene spiegato cosa s'intende per *caos lagrangiano*. Denotando con $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ il campo di velocità del fluido, il moto di una particella fluida che inizialmente si trovi in \mathbf{x}_0 è governato dall'equazione differenziale (2.1). Se la soluzione di tale equazione dipende sensibilmente dalle condizioni iniziali, e traiettorie inizialmente vicine divergono esponenzialmente nel tempo, allora si parla di caos lagrangiano. L'apparente contraddizione tra la regolarità di un flusso descritto da un punto di vista euleriano e la dinamica caotica che le particelle fluide possono avere (approccio lagrangiano) non deve sorprendere. Infatti, se \mathbf{u} è non lineare in \mathbf{x} , l'equazione (2.1) rappresenta un sistema dinamico non lineare, per il quale in generale ci si può aspettare un comportamento caotico.

⁴Si veda l'appendice B sui sistemi hamiltoniani.

2.4 Dinamica di particelle con inerzia trascurabile in un flusso cellulare stazionario

Stommel in [29] analizza la dinamica di particelle prive di inerzia sospese in un flusso cellulare stazionario nel quale si trascura l'effetto della diffusione. In questo caso l'equazione del moto (1.28) diventa:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \frac{(1-\beta)}{Fr^2} \hat{\mathbf{g}} - \frac{[\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)]}{St} + \beta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{X}(t), t) \\ &+ \frac{2}{3} \beta \left[\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) + \frac{1}{2} \mathbf{V}(t) \right] \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) \end{aligned}$$

che in termini della velocità nuda $\mathbf{w}^* = \frac{(1-\beta)St}{Fr^2} \hat{\mathbf{g}}$ può essere scritta come

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \frac{[\mathbf{w}^* + \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) - \mathbf{V}(t)]}{St} + \beta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{X}(t), t) \\ &+ \frac{2}{3} \beta \left[\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) + \frac{1}{2} \mathbf{V}(t) \right] \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Abbiamo detto che Stommel studia il caso in cui l'inerzia della particella sia trascurabile, nel quale cioè il numero di St, parametro che quantifica tale inerzia, tende a 0. In queste condizioni l'equazione (2.9) si riduce a:

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{w}^* + \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) \quad (2.10)$$

La velocità di una particella è quindi completamente determinata dalla sua posizione istantanea $\mathbf{X}(t)$. Questo permette di definire un campo di velocità della particella

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{w}$$

dal quale si può quindi ricavare la velocità di una generica particella:

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{X}(t), t).$$

Dato che il flusso è per ipotesi incompressibile ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$), per definizione anche il campo \mathbf{v} risulta incompressibile: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Possiamo perciò definire una funzione corrente dalla quale si può ricavare il campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$:

$$\phi \equiv \psi - w^* x \quad (2.11)$$

dove ψ è la funzione corrente relativa al flusso \mathbf{u} . Analogamente a quanto accade alle particelle fluide in un flusso incompressibile, anche le traiettorie

delle particelle sospese nel fluido coincidono con le curve lungo le quali la funzione ϕ è costante.

Stommel osserva che in determinate condizioni le particelle possono restare sospese. Se $w^* = 0$ tutte le particelle rimangono sospese, più precisamente percorrono delle traiettorie chiuse intorno ai punti di equilibrio stabile relativi al flusso (si veda [20]). Se $0 < |w^*| < 1$ una frazione di particelle rimane sospesa. Al crescere di $|w^*|$ la percentuale di particelle sospese diminuisce, mentre aumenta la velocità di caduta media delle particelle. Stommel mostra anche come l'estensione della regione di intrappolamento si riduca al crescere di $|w^*|$. Per $|w^*| \geq 1$ (significa che la velocità nuda supera la velocità massima del fluido), tutte le particelle cadono. Gli stessi ragionamenti possono essere trasportati al caso di particelle più leggere del fluido.

Maxey e Corrsin [20] notano come, in assenza di inerzia, non ci sia un fenomeno di accumulo delle particelle in zone preferenziali. È interessante notare come Maxey e Corrsin ragionano su questo effetto. Sia $N(\mathbf{x}, t)$ il campo che descrive la densità di particelle (numero di particelle per unità di volume). Come per le particelle fluide, la formulazione locale della conservazione delle particelle in un volume qualsiasi dello spazio è espressa da:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}N) = 0$$

Supponiamo che la distribuzione iniziale delle particelle sia uniforme, $N = N_0$. La derivata temporale di N lungo la traiettoria di una particella è:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{\partial N}{\partial t} + \mathbf{V}(t) \cdot \nabla N = \\ &= \frac{\partial N}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{X}(t), t) \cdot \nabla N = \\ &= -N \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Si vede quindi che la densità di particelle N è costante lungo la traiettoria di ogni particella. Quindi, se N è inizialmente uniforme, resterà uniforme nell'intorno di ogni particella, per cui le particelle non tendono ad accumularsi.

Nei prossimi paragrafi vedremo alcune delle osservazioni che sono state fatte sulla dinamica di particelle sospese in un flusso cellulare quando l'inerzia non sia più trascurabile. Partiremo dal caso di flusso stazionario.

2.5 Effetti dell'inerzia sulla dinamica di particelle in un flusso cellulare stazionario

In [21] Maxey studia la dinamica di particelle inerziali in funzione di β . Perciò egli classifica le particelle in base al rapporto tra la loro densità e quella del fluido⁵, e così facendo distingue i seguenti casi:

intervallo delle particelle pesanti, nel quale $\rho_p \geq 2\rho_f$ ($0 \leq \beta \leq 0.6$);

limite delle bolle, in cui $\rho_f \gg \rho_p$, ovvero $\beta = 3$;

intervallo di transizione, nel quale $0.6 < \beta < 3$.

Maxey studia la dinamica delle particelle in queste tre differenti situazioni, restando inizialmente nell'ipotesi di una debole inerzia [21]. Vediamo adesso quali sono state le sue osservazioni e quelle di altri per ciascuno dei tre casi. Una precisazione: a differenza di Maxey, considererò l'asse verticale orientato verso l'alto.

2.5.1 Particelle pesanti

In questo intervallo Maxey [21] effettua simulazioni lagrangiane nelle quali fissa i seguenti parametri: la velocità nuda w^* , il parametro d'inerzia $A = 1/St$, la densità relativa tra particelle e fluido espressa tramite $R = \frac{2}{3}\beta$.

Maxey osserva che in presenza di inerzia le particelle pesanti non rimangono sospese fornendone una spiegazione qualitativa e una teorica per mezzo di un'analisi di stabilità lineare dei punti di equilibrio. Da un punto di vista qualitativo, se le particelle sono molto pesanti i termini che dominano nell'equazione del moto della particella sono la sua inerzia, la gravità e l'attrito di Stokes. Sono trascurabili l'effetto di massa aggiunta e l'accelerazione del fluido, forze che si oppongono all'inerzia della particella. Teoricamente Maxey mostra che i punti di equilibrio per le particelle pesanti sono instabili, e quindi le particelle non possono restare sospese.

Nelle simulazioni viene notata frequentemente⁶ la tendenza delle particelle pesanti ad accumularsi lungo curve isolate e spazialmente periodiche che possono essere identificate con la traiettoria di una singola particella. Ciò

⁵Maxey, per descrivere il rapporto tra la densità delle particelle e quella del fluido usa un parametro, R , che è proporzionale a β : $R = \frac{2}{3}\beta$

⁶Salvo eccezioni, come ad esempio una simulazione fatta fissando $|w^*| = 2$, $St = 0.5$, $\beta = 0.6$, nella quale Maxey non nota alcun fenomeno di accumulo delle particelle.

non accade in assenza d'inerzia, nel qual caso le traiettorie delle particelle non si sovrappongono. Per una trattazione teorica che spieghi l'esistenza di traiettorie periodiche che attraggono particelle molto pesanti ($\beta = 0$) in un flusso cellulare stazionario si veda [25]. Un paragrafo a parte sarà dedicato a questo fenomeno di concentrazione preferenziale.

Maxey analizza inoltre la dipendenza della velocità media di caduta w dalla velocità nuda w^* per diversi β , in particolare $\beta = 0, 0.6$. Se $|w^*|$ è piccolo, le particelle cadono più velocemente che in un fluido fermo. Man mano che $|w^*|$ si avvicina a 1, inizia una riduzione della velocità, che è significativa in un intorno di $|w^*| = 1$. Per $|w^*|$ molto più grande di 1 la velocità media di caduta tende alla velocità nuda. Queste osservazioni vengono fatte avendo fissato $St = 0.5$.

In un lavoro di Wang a al. [5] si osserva, per numeri di Stokes più grandi, l'insorgere di traiettorie caotiche di particelle pesanti ($0 \leq \beta \leq 0.6$) in un flusso cellulare stazionario in cui venga trascurato l'effetto della gravità. Viene individuata la condizione per la quale si verifica una dinamica caotica delle particelle:

$$\frac{2}{3}\beta St \geq 1 \quad (2.13)$$

Si osserva in particolare che, nel caso limite $\beta = 0$, il moto delle particelle è sempre periodico.

2.5.2 Limite delle bolle

Maxey in [21] osserva come particelle molto più leggere del fluido rimangono sospese in punti di equilibrio oppure si accumulino lungo curve che passano vicino al centro delle celle, laddove il fluido sale. La percentuale di particelle che rimangono sospese e la velocità di risalita media dipendono dalla velocità nuda di risalita fissata. Per $w^* < 0.4$ circa, tutte le particelle rimangono sospese. Poi, man mano che w^* aumenta, si riduce la frazione di particelle sospese e aumenta la velocità media di risalita. Queste osservazioni vengono fatte per $St = 0.1$. Da un punto di vista teorico, l'analisi di stabilità lineare mostra che esistono punti di equilibrio stabile all'interno delle celle.

2.5.3 Intervallo di transizione

In questo intervallo, nel quale $0.6 < \beta < 3$, Maxey ritiene opportuno usare dei parametri differenti. Egli fissa le caratteristiche del flusso (velocità massima U_0 , geometria), le proprietà del fluido (densità, viscosità) e le dimensioni della particella (raggio a). Ciò che viene fatto variare è la massa della particella

m_p . La velocità nuda w^* e il numero di Stokes vengono sostituiti da due nuovi parametri:

$$\tilde{Q} \equiv \frac{m_f g}{6\pi a \mu U_0}, \text{ è la velocità nuda di una bolla } (m_p = 0) \text{ di raggio } a;$$

$$\tilde{B} \equiv \frac{6\pi a \mu L}{(1/2)m_f U_0}, \text{ è l'inverso del numero di Stokes di una bolla di raggio } a.$$

La velocità nuda w^* e il numero di Stokes possono essere espressi in termini di \tilde{Q} e di \tilde{B} come:

$$w^* = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) \tilde{Q};$$

$$St = \frac{3}{\beta \tilde{B}}.$$

Maxey mostra i risultati di alcune simulazioni lagrangiane effettuate fissando $\tilde{B} = 10$, $\tilde{Q} = 1.25$ e facendo variare β . Per $\beta = 1.5$ ($St = 0.2$, $w^* = -0.625$) alcune particelle rimangono sospese in punti di equilibrio, mentre altre continuano a salire lungo curve isolate. Per $\beta = 1.05$ ($St \cong 0.29$, $w^* \cong -0.09$) tutte le particelle rimangono sospese. Per $\beta = 0.96$ ($St \cong 0.31$, $w^* \cong +0.08$) tutte le particelle cadono. In corrispondenza di $\beta = 1$ si osserva quindi una transizione:

- se $\beta > 1$ le particelle hanno un comportamento simile a quello delle bolle (continuano a salire accumulandosi lungo curve isolate che passano vicino al centro delle celle, oppure rimangono intrappolate in punti di equilibrio stabile).
- se $\beta < 1$ le particelle si comportano in modo simile a quelle pesanti (non avviene sospensione, infatti non esistono punti di equilibrio stabile, e le particelle si accumulano lungo curve ben definite che passano in prossimità delle pareti delle celle dove il flusso è discendente).

Babiano e al. in [2] analizzano il caso particolare di particelle neutre, ovvero per le quali sia $\beta = 1$ ($\rho_p = \rho_f$). È interessante notare che queste particelle non si comportano esattamente come dei traccianti. Babiano esamina sia il caso di flusso cellulare stazionario, sia quello di un flusso cellulare dipendente dal tempo. Come già accennato nel primo capitolo, Babiano parte da un'equazione del moto per la particella che differisce da quella di Maxey (1.28) per il termine di massa aggiunta. L'equazione che ne deriva per $\beta = 1$ è:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt}(\mathbf{X}(t), t) - \frac{[\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)]}{St} - \frac{1}{2} \left[\frac{d\mathbf{V}}{dt} - \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right] \quad (2.14)$$

Egli introduce il parametro:

$$Q(x, y) \equiv (s(x, y)^2 - \omega(x, y)^2)/4 \quad (2.15)$$

dove s è il modulo della velocità di deformazione del fluido nel punto (x, y) , mentre ω rappresenta la vorticità del fluido, cioè la velocità angolare delle particelle fluide nel punto (x, y) . Se $Q(x, y) > 0$ significa che in (x, y) domina la velocità di deformazione, altrimenti, se $Q(x, y) < 0$ domina la vorticità. Partendo dall'equazione (2.14) Babiano mostra che particelle neutre immerse nel fluido vengono respinte dalle regioni in cui

$$Q > \frac{4}{9}St^{-2}$$

comportandosi quindi in modo differente da un tracciante. D'altra parte, le particelle neutre vengono attratte dalle regioni ad alta vorticità in cui

$$Q < \frac{4}{9}St^{-2}$$

Se il flusso è cellulare stazionario le regioni ad alta vorticità corrispondono alla zona centrale di ogni cella, mentre le regioni in cui domina la velocità di deformazione corrispondono alle pareti e agli angoli delle celle. Nel caso stazionario si osserva come una particella neutra, dopo una fase transitoria in cui può spostarsi da una cella all'altra (perché attraversa regioni da cui è respinta), alla fine vada ad adagiarsi su una linea di flusso in una zona ad alta vorticità (i parametri fissati sono la massima velocità del fluido, il numero d'onda $k=1$ e il numero di Stokes $St=0.2$). Se il flusso oscilla orizzontalmente, le regioni in cui permane una dinamica regolare delle particelle fluide sono anche le regioni che attraggono le particelle neutre. Al di fuori di queste isole regolari il fluido ha una dinamica caotica (caos lagrangiano). Le regioni caotiche del fluido corrispondono alle zone che respingono le particelle neutre. Le particelle neutre, sebbene non si comportino esattamente come dei traccianti, possono fornire un utile sistema per individuare in quali regioni dello spazio delle fasi un generico sistema hamiltoniano caotico può presentare una dinamica regolare.

L'intervallo di transizione viene successivamente ripreso in esame da Marchioli, Fantoni e Soldati in [17]. Più precisamente, vengono considerate particelle più leggere del fluido ($\rho_p \leq \rho_f$), ma la cui inerzia, per effetto della massa aggiunta, sia maggiore rispetto a quella di una particella fluida ($\rho_p + \frac{1}{2}\rho_f \geq \rho_f$). Viene quindi osservato l'intervallo in cui $1/2 \leq \rho_p/\rho_f \leq 1$, ovvero $1 \leq \beta \leq 1.5$. Si mostrano i risultati di alcune simulazioni lagrangiane nelle quali vengono fissati i seguenti parametri: $\tilde{B} = 10\pi, \tilde{Q} = 1.25$. Per

$\beta = 1.5$ alcune particelle rimangono intrappolate, altre si muovono su traiettorie simili, ma distinte. Man mano che β si avvicina a 1 ($\beta = 1.053, 1.007$) le particelle che rimangono sospese si riducono fino a sparire e le loro traiettorie si schiacciano sulle pareti verticali, ma sembra che rimangano ancora distinte. L'assenza in questi casi di un fenomeno di concentrazione preferenziale, come già fatto notare in un'altra situazione da Maxey, potrebbe essere legata all'effetto di massa aggiunta, che per questi valori di β diventerebbe più importante. Viene fatta inoltre un'analisi della velocità di risalita media (media su un campione dell'ordine di 10^4 particelle) in funzione di ρ_p/ρ_f . Si osserva che:

- per $0.5 < \rho_p/\rho_f < 0.675$ ($1.277 \leq \beta \leq 1.5$) w diminuisce e tende a 0;
- per $0.675 < \rho_p/\rho_f < 0.975$ ($1.017 \leq \beta \leq 1.277$) w assume valori vicini allo 0;
- nello stretto intervallo $0.975 < \rho_p/\rho_f < 1$, quindi per particelle di poco più leggere del fluido ($1 \leq \beta \leq 1.277$), si osserva un picco in corrispondenza di $\rho_p/\rho_f = 0.995$ ($\beta = 1.003$), nel quale la velocità media di risalita è maggiore della velocità nuda.

2.5.4 Concentrazione preferenziale

Vediamo come Maxey [21] analizza il fenomeno di concentrazione preferenziale nel caso di debole inerzia.

L'equazione del moto della particella in un flusso cellulare stazionario viene approssimata per piccoli valori di St fino al primo ordine in St . Mettendo in evidenza la velocità della particella \mathbf{V} si ottiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(t) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{w} - St \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) + [\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{w}] \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) \right\} + \\
&+ \beta St \left[\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) + \frac{1}{3} \mathbf{w} \right] \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) = \\
&= \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{w} + St \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) + \\
&+ St \left[(\beta - 1) \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) + \left(\frac{1}{3} \beta - 1 \right) \mathbf{w} \right] \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Come già era accaduto nel caso di inerzia trascurabile, osserviamo che la velocità della particella è completamente determinata dalla sua posizione istantanea. Si può quindi definire un campo di velocità della particella $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$

tale che:

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{X}(t), t)$$

Dall'equazione (2.16) discende allora la seguente espressione che descrive $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \equiv & \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{w} + St \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \\ & + St \left[(\beta - 1)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \left(\frac{1}{3}\beta - 1 \right) \mathbf{w} \right] \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

Calcoliamo ora la divergenza di questo campo:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= St (\beta - 1) \nabla \cdot [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] (\mathbf{x}, t) + St \left(\frac{1}{3}\beta - 1 \right) \nabla \cdot [\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] = \\ &= St (\beta - 1) [\partial_i (u_j \partial_j u_i)] (\mathbf{x}, t) + St \left(\frac{1}{3}\beta - 1 \right) [\partial_i (w_j \partial_j u_i)] = \\ &= St (\beta - 1) [\partial_i u_j \partial_j u_i + u_j \partial_j (\nabla \cdot \mathbf{u})] (\mathbf{x}, t) + \\ &+ St \left(\frac{1}{3}\beta - 1 \right) [\partial_i w_j \partial_j u_i + w_j \partial_j (\nabla \cdot \mathbf{u})] = \\ &= St (\beta - 1) (\partial_i u_j \partial_j u_i) \end{aligned}$$

Per ottenere delle informazioni utili da $\nabla \cdot \mathbf{v}$ notiamo che:

$$(\partial_i u_j \partial_j u_i) = \frac{1}{4} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2 - \frac{1}{4} (\partial_i u_j - \partial_j u_i)^2 = Q$$

dove Q è il parametro descritto in (2.15) e utilizzato da Babiano. Otteniamo quindi:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = St (\beta - 1) Q$$

Particelle più pesanti del fluido ($\beta < 1$) tenderebbero quindi a concentrarsi in zone ad elevata velocità di deformazione o bassa vorticità ($Q > 0$). Particelle più leggere del fluido ($\beta > 1$) tenderebbero invece a concentrarsi in zone in cui domina la vorticità ($Q < 0$).

2.6 Dinamica di particelle inerziali in un flusso cellulare dipendente dal tempo

Abbiamo già visto come Babiano abbia studiato il caso $\beta = 1$ in un flusso cellulare, stazionario o dipendente dal tempo.

Martins Afonso [18] svolge uno studio sulla dinamica di particelle inerziali valido per un flusso generico, che può essere stazionario o variabile nel tempo. Egli parte da un punto di vista lagrangiano per arrivare ad uno studio analitico di tipo euleriano. Più precisamente, il punto di partenza è l'equazione del moto di una particella sferica rigida in un flusso assegnato, sotto l'effetto della gravità e della diffusione. Si tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine nell'incognita $\mathbf{X}(t)$. Introducendo un nuovo campo, la covelocità $\tilde{\mathbf{V}} \equiv \mathbf{V} - \beta \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)$, l'equazione del moto per la particella può essere trasformata in due equazioni differenziali del primo ordine. Viene inoltre introdotta la funzione $p(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{v}}, t)$ che rappresenta la probabilità di trovare una particella in un punto \mathbf{x} con covelocità $\tilde{\mathbf{v}}$ nell'istante t . La funzione p soddisfa un'equazione che è detta equazione di Fokker-Planck (per approfondimenti su questo argomento si veda [24]) e che si ottiene dalle equazioni del moto della particella. Partendo dall'equazione di Fokker-Planck e sviluppando la funzione p in serie di potenze del numero di Stokes (per i dettagli si veda [18]) Martins Afonso ricava una successione di equazioni differenziali da cui si possono ottenere utili informazioni sulla dinamica delle particelle inerziali, ad esempio sulla velocità media teorica w e sulla variazione di velocità $\Delta w = w - w^*$ rispetto al caso di fluido fermo. Egli ottiene un'espressione esatta di Δw al secondo ordine in St (nel suo lavoro l'asse verticale è orientato verso il basso):

$$\Delta w = [(1 - \beta)St/Fr]^2 \Delta W + O(St^3) \quad (2.17)$$

dove ΔW è una funzione che dipende da Peclet e dalle proprietà del flusso (es: ampiezza delle oscillazioni, frequenza, aspect ratio). Da (2.17) vengono ricavate le seguenti osservazioni:

- Se ci fermiamo al secondo ordine in St , Δw è proporzionale a Fr^{-2} , e cioè all'accelerazione di gravità g , esattamente come la velocità nuda w^* . Non è detto che ciò continui a valere per ordini superiori in Stokes.
- Δw è proporzionale a $(1 - \beta)^2$: significa che se il flusso determina un aumento nella velocità di caduta di particelle pesanti ($\beta < 1$), il medesimo flusso determinerà una riduzione nella velocità di risalita delle particelle leggere ($\beta > 1$).

Inoltre Martins Afonso effettua delle simulazioni lagrangiane nel caso di particelle molto pesanti ($\beta = 0$) immerse in un flusso cellulare con aspect ratio $L_{yx} = 1$ stazionario ($\omega = 0$) oppure oscillante verticalmente con frequenza $\omega = 0.6$ e ampiezza $B = 2$ (gli altri parametri fissati sono $Pe = 5$ e $Fr = 1$). Da queste simulazioni egli ricava la dipendenza di Δw dal numero di Stokes. Viene quindi riscontrato un accordo, per piccoli numeri di Stokes, con la

previsione teorica, fatta attraverso la risoluzione numerica delle equazioni differenziali ottenute nel caso specifico del flusso cellulare considerato.

Capitolo 3

Ricerca di attrattori per particelle sospese in un flusso cellulare

In questo capitolo ripercorrerò alcuni passaggi seguiti da Maxey [21] per trovare i punti di equilibrio stabile per una particella inerziale immersa in un flusso cellulare stazionario. Come già accennato nel capitolo precedente, l'obiettivo di Maxey era dare una spiegazione teorica del perché le particelle pesanti, a differenza di quelle leggere, non potessero restare sospese. Il suo lavoro sarà per me il punto di partenza per individuare il significato dinamico che i punti di equilibrio stabile, relativi al caso stazionario, assumono in un flusso cellulare oscillante con ampiezza B piccola. Ciò mi permetterà di spiegare quanto osservato in alcune delle simulazioni che verranno descritte nei prossimi capitoli. Per cominciare, partirò da una riflessione che mi aiuterà a comprendere l'esistenza di regioni, nello spazio degli stati della particella, su cui la particella, dopo un certo intervallo di tempo, va a cadere. Procederò in modo simile a quanto fatto in altri lavori (si vedano ad esempio [2, 3, 13]).

3.1 Sistemi dissipativi e attrattori

Per comodità riscriviamo le equazioni che descrivono l'evoluzione di una particella sferica rigida immersa in un flusso assegnato nel quale si tenga conto

dell'effetto della gravità e si trascuri la diffusione:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{V} \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \beta \frac{d\mathbf{u}}{dt}(\mathbf{X}(t), t) + \frac{[\mathbf{w}^* + \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) - \mathbf{V}(t)]}{St} + \\ + \frac{2}{3}\beta [\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) - \mathbf{V}(t)] \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) \end{cases} \quad (3.1)$$

Per scrivere queste due equazioni in un modo più semplice, introduciamo una nuova variabile, $\mathbf{A} \equiv \mathbf{V} - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)$ (velocità relativa della particella rispetto al fluido), e otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A} + \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) \\ \frac{d\mathbf{A}}{dt} = (\beta - 1) \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \frac{\mathbf{A}}{St} + \frac{2}{3}\beta \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) \end{cases} \quad (3.2)$$

Questo sistema di equazioni descrive l'evoluzione di un sistema dinamico non autonomo¹ in uno spazio degli stati di coordinate (x, y, A_x, A_y) . Un modo ancora più sintetico di descrivere questo sistema è:

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.3)$$

dove $\boldsymbol{\xi} = (x, y, A_x, A_y)$.

Si può mostrare in generale che la variazione temporale relativa di un piccolo volume \tilde{V} nello spazio degli stati è esprimibile come (si vedano [14],[15]):

$$\frac{1}{\tilde{V}} \frac{d\tilde{V}}{dt} = \frac{\partial F_i}{\partial \xi_i} \equiv \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{F} \quad (3.4)$$

Se questa quantità è negativa, significa che un volume \tilde{V} di condizioni iniziali evolverà in un volume più piccolo. In tal caso il sistema viene detto dissipativo. Ciò significa che, dopo una fase transitoria, traiettorie distinte che hanno origine in \tilde{V} andranno a posarsi su una stessa regione di dimensione inferiore a quella dello spazio degli stati. Questa regione può consistere in un punto, in una curva o in una superficie e viene detta attrattore. Un sistema dissipativo può avere uno o più attrattori². Torniamo adesso alla nostra

¹Significa che dipende dal tempo anche in modo esplicito.

²I concetti di sistema dissipativo e di attrattore sono illustrati, ad esempio, in [14].

particella e mostriamo che si tratta di un sistema dissipativo:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x} [A_x + u_x(x(t), y(t), t)] + \frac{\partial}{\partial y} [A_y + u_y(x(t), y(t), t)] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial A_x} \left[(\beta - 1) \frac{du_x}{dt}(x(t), y(t), t) - \frac{A_x}{St} + \frac{2}{3} \beta \mathbf{A} \cdot (\nabla u_x(x(t), y(t), t)) \right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial A_y} \left[(\beta - 1) \frac{du_y}{dt}(x(t), y(t), t) - \frac{A_y}{St} + \frac{2}{3} \beta \mathbf{A} \cdot (\nabla u_y(x(t), y(t), t)) \right] = \\
&= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{St} + \frac{2}{3} \beta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = \\
&= \left(1 + \frac{2}{3} \beta \right) \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} - \frac{2}{St}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Dato che stiamo lavorando nell'ipotesi di fluido incompressibile ($\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0$), l'espressione ottenuta per $\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{F}$ si semplifica ulteriormente e diventa:

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{F} = -\frac{2}{St} < 0$$

da cui si vede che la particella inerziale rappresenta un sistema dissipativo. Si può notare anche come il numero di Stokes sia misura del tempo impiegato dalla particella ad adagiarsi su un attrattore.

3.2 Ricerca dei punti fissi in un flusso cellulare stazionario

Consideriamo inizialmente un flusso cellulare stazionario, per cui le equazioni (3.1) che descrivono il moto di una particella inerziale si riducono a:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) = \mathbf{V}(t) \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt}(t) = \frac{2}{3} \beta \left[\mathbf{u}(\mathbf{X}(t)) + \frac{1}{2} \mathbf{V}(t) \right] \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}(t)) + \frac{[\mathbf{w}^* + \mathbf{u}(\mathbf{X}(t)) - \mathbf{V}(t)]}{St} \end{cases}$$

Imponendo su questo sistema le condizioni che devono essere verificate in un punto fisso:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) = \mathbf{0} \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt}(t) = \mathbf{0} \end{cases}$$

si ottiene l'equazione

$$\frac{2}{3}\beta St \mathbf{u}(\mathbf{X}(t)) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}(t)) + \mathbf{w}^* + \mathbf{u}(\mathbf{X}(t)) = \mathbf{0}$$

equivalente al sistema di equazioni scalari:

$$\begin{cases} \sin(x_0)[\cos(y_0) + M \cos(x_0)] = 0 \\ [\cos(x_0) - M \cos(y_0)] \sin(y_0) - w^* = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

dove $M \equiv (2/3)\beta St$. Nei prossimi paragrafi calcolerò le coordinate dei punti fissi distinguendo i punti collocati sulle pareti verticali da quelli interni alle celle.

3.2.1 Punti fissi sulle pareti verticali

Data la periodicità del flusso, mi limiterò a cercare la coordinata y_0 del punto fisso (x_0, y_0) tale che $x_0 = 0$ e $0 \leq y_0 \leq 2\pi$ (cioè in due celle adiacenti). In questo caso la prima equazione del sistema (3.6) risulta verificata ($\sin(x_0) = 0$) e la seconda equazione diventa:

$$[1 - M \cos(y_0)] \sin(y_0) - w^* = 0 \quad (3.7)$$

Nella figura 3.1 è rappresentata la risoluzione grafica di questa equazione nel caso in cui $\beta = 1.5$ e $St = 0.05$ al variare della velocità nuda w^* , ovvero di Froude. La soluzione è data dai valori di y tali che la funzione $g(y) = [1 - M \cos(y)] \sin(y) - w^*$ si annulli. Possiamo identificare la retta $f(y) = 0$ con la parete verticale identificata da $x = 0$ e $0 \leq y \leq 2\pi$. Se w^* è troppo elevata, non esistono punti di equilibrio sulle pareti verticali. Per w^* sufficientemente piccola i punti fissi si trovano sulla parete in cui il flusso è discendente. Man mano che w^* diminuisce e tende a zero, i punti di equilibrio si spostano verso zone in cui la velocità del flusso è via via minore, fino a coincidere con i punti di stagnazione agli angoli delle celle. Nell'altra figura 3.2 si vede cosa succede variando β e avendo fissato $Fr = 0.4$, $St = 0.05$. Se le particelle sono leggere ($\beta = 3$) i punti fissi si trovano, come è intuitivo, su una parete in cui il flusso è discendente. Se le particelle sono neutre ($\beta = 1$) i punti fissi coincidono con gli angoli delle celle (punti di stagnazione). Se le particelle sono pesanti ($\beta = 0$), allora i punti di equilibrio sono su una parete in cui il flusso è ascendente.

In particolare, se $M = 0$, significa che le particelle sono molto pesanti ($\beta = 0$) oppure la loro inerzia è trascurabile ($St = 0$). In tal caso :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \sin(y_0) = w^* \end{cases} \quad (3.8)$$

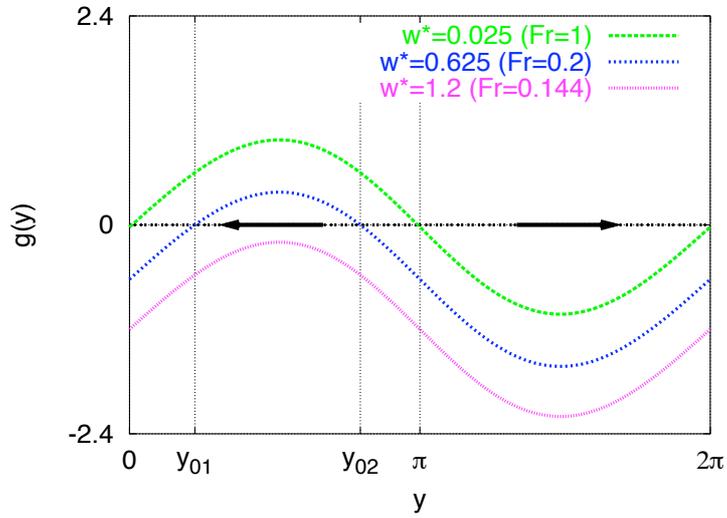


Figura 3.1: Coordinata y dei punti di equilibrio (y_{01} e y_{02} in riferimento al caso $Fr = 0.2$) su una parete verticale di due celle adiacenti al variare di Froude nel caso in cui $\beta = 1.5$, $St = 0.05$. Le frecce indicano il verso di percorrenza del flusso lungo la parete (identificata da $x = 0$).

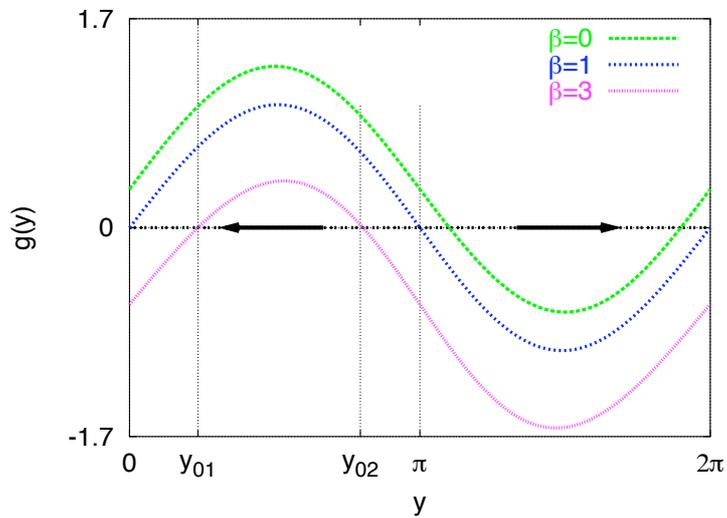


Figura 3.2: Coordinata y dei punti di equilibrio (y_{01} e y_{02} in riferimento al caso $\beta = 3$) su una parete verticale di due celle adiacenti al variare di β nel caso in cui $Fr = 0.4$, $St = 0.05$. Le frecce indicano il verso di percorrenza del flusso lungo la parete (identificata da $x = 0$).

da cui:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = \frac{\pi}{2} + \arcsin(w^*) \end{cases} \quad (3.9)$$

3.2.2 Punti fissi interni

Cerchiamo ora le altre soluzioni delle equazioni (3.6) all'interno delle celle. Partiamo quindi dal presupposto che sia $\sin(x_0) \neq 0$. Il sistema (3.6) si riduce a:

$$\begin{cases} \cos(y_0) + M \cos(x_0) = 0 \\ [\cos(x_0) - M \cos(y_0)] \sin(y_0) - w^* = 0 \end{cases}$$

Data la periodicità del flusso, in questo caso mi limiterò a cercare le soluzioni all'interno di una sola cella ($0 < x_0 < \pi$, $0 \leq y_0 \leq \pi$). Distinguiamo i casi $M = 0$ e $M \neq 0$:

- Se $M = 0$:

$$\begin{cases} \cos(y_0) = 0 \Rightarrow \sin(y_0) = 1 \\ \cos(x_0) - w^* = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} y_0 = \frac{\pi}{2} \\ x_0 = \arccos(w^*) \end{cases}$$

- Se $M \neq 0$:

$$\begin{cases} \cos(x_0) = -\frac{\cos(y_0)}{M} \\ -\left(\frac{1}{M} + M\right) \cos(y_0) \sin(y_0) - w^* = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} \cos(x_0) = \frac{w^*}{\sin(y_0)(1 + M^2)} \\ \sin(2y_0) = -\frac{2Mw^*}{1 + M^2} \end{cases} \quad (3.10)$$

Vedremo che solo le particelle leggere ammettono punti di equilibrio stabile. Partendo dalle equazioni (3.10) calcolerò i punti fissi in questo caso particolare. Ciò mi sarà utile nel seguito. Ricordiamoci che sto considerando l'asse verticale orientato verso l'alto, al contrario di quanto accade nell'articolo di Maxey [21])

Particelle più leggere del fluido: in questo caso $1 < \beta \leq 3$ e la velocità nuda w^* è positiva. Quindi, in base alla seconda equazione di (3.10), $\sin(2y_0) < 0$. Come già detto, cercheremo y_0 tale che $0 \leq y_0 \leq \pi$, perciò $0 \leq 2y_0 \leq 2\pi$. Mostriamo che la soluzione (x_0, y_0) da noi cercata è tale che $0 < x_0 < \pi/2$:

$$\begin{aligned} \sin(2y_0) < 0 &\Rightarrow \pi < 2y_0 < 2\pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} < y_0 < \pi \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin(y_0) > 0 \Rightarrow \cos(x_0) > 0 \Rightarrow 0 < x_0 < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Partendo dalla seconda equazione di (3.10) calcoliamo la coordinata y_0 :

$$2y_0 = \begin{cases} 2\pi + \arcsin\left(-\frac{2Mw}{1+M^2}\right) & \text{se } \frac{3}{2}\pi \leq 2y_0 < 2\pi \\ \pi - \arcsin\left(-\frac{2Mw}{1+M^2}\right) & \text{se } \pi < 2y_0 \leq \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

da cui deriva:

$$y_0 = \begin{cases} \pi + \frac{1}{2} \arcsin\left(-\frac{2Mw^*}{1+M^2}\right) & \text{se } \frac{3}{4}\pi \leq y_0 \leq \pi \\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin\left(-\frac{2Mw^*}{1+M^2}\right) & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq y_0 \leq \frac{3}{4}\pi \end{cases} \quad (3.11)$$

In corrispondenza di ogni valore ottenuto per y_0 si può ricavare x_0 utilizzando la prima equazione di (3.10):

$$x_0 = \arccos\left[\frac{w^*}{\sin(y_0)(1+M^2)}\right] \quad \left(0 < x_0 < \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.12)$$

Quindi in ogni cella esistono al più 2 punti di equilibrio. Sia (x_0, y_0) un punto fisso. Per ragioni di simmetria del flusso \mathbf{u} , ottengo in modo semplice gli altri punti fissi nella regione in cui $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 2\pi$:

1. (x_0, y_0)
2. $(2\pi - x_0, y_0)$
3. $(\pi + x_0, 2\pi - y_0)$
4. $(\pi - x_0, 2\pi - y_0)$

Dato che il flusso \mathbf{u} è spazialmente periodico, con periodo 2π lungo le direzioni x e y , partendo dai punti 1,2,3 e 4 si possono ricavare tutti gli altri punti di equilibrio. Nella figura 3.3 sono indicati i punti di equilibrio in quattro celle adiacenti nel caso $\beta = 3$, $St = 0.05$, $Fr = 1$:

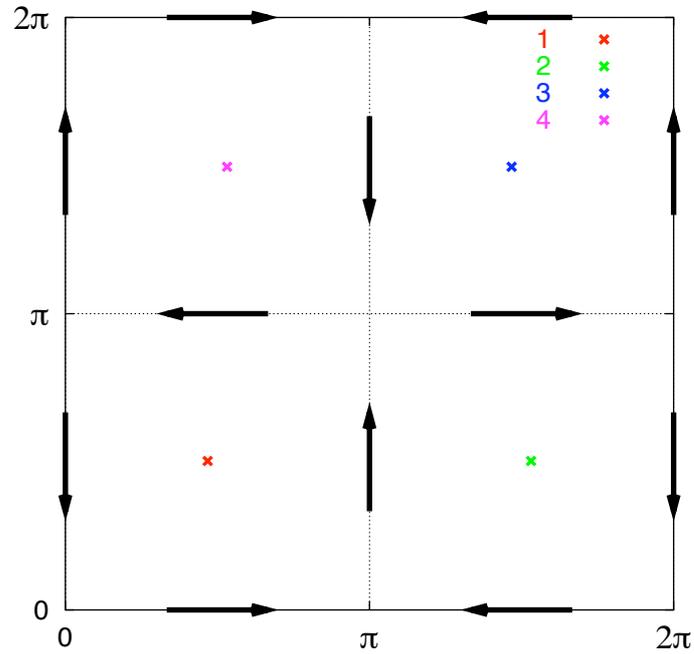


Figura 3.3: Punti fissi in quattro celle adiacenti nel caso $\beta = 3$, $St = 0.05$, $Fr = 1$. Le frecce indicano il verso del flusso sulle pareti che separano le celle. L'asse x è orizzontale, l'asse y è verticale.

1. $(x_0, y_0) \cong (1.47, 1.58)$
2. $(2\pi - x_0, y_0) \cong (4.81, 1.58)$
3. $(\pi + x_0, 2\pi - y_0) \cong (4.61, 4.70)$
4. $(\pi - x_0, 2\pi - y_0) \cong (1.67, 4.70)$

3.3 Analisi di stabilità lineare dei punti fissi

Nell'appendice C sono illustrati i passaggi per ricavare l'equazione con cui Maxey [21] verifica la stabilità lineare dei punti di equilibrio. L'equazione

che egli ottiene è:

$$\begin{aligned}
& St^2 \lambda^4 + 2St \lambda^3 + \left\{ \left[1 + \frac{1}{9} \beta^2 St^2 (D^2 - C^2) \right] - \frac{2}{3} \beta St^2 E \right\} \lambda^2 + \\
& + \left\{ \frac{2}{9} \beta^2 St^2 CF - \frac{2}{3} \beta St E + \frac{2}{3} \beta St (D^2 - C^2) \right\} \lambda + \\
& + \frac{4}{9} \beta^2 St^2 G + \frac{2}{3} \beta St CF + (D^2 - C^2) = 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

dove

$$\begin{aligned}
C &\equiv \cos(x_0) \cos(y_0) \\
D &\equiv \sin(x_0) \sin(y_0) \\
E &\equiv \cos(2y_0) + \cos(2x_0) \\
F &\equiv \cos(2y_0) - \cos(2x_0) \\
G &\equiv \cos(2x_0) \cos(2y_0)
\end{aligned}$$

Risolvendo numericamente l'equazione (3.13) Maxey mostra che i punti fissi sulle pareti verticali sono in generale instabili e che non esistono punti di equilibrio stabile nell'intervallo delle particelle pesanti ($0 \leq \beta \leq 0.6$). Nell'intervallo $0.6 < \beta \leq 3$, invece, i punti di equilibrio stabile (interni alle celle) esistono soltanto in un intervallo limitato di w^* : $w^* \leq w_c^*$, dove w_c^* dipende dai valori fissati di β e St (si veda [21]).

In alcune delle simulazioni che analizzeremo nel capitolo 5 vedremo che i punti di equilibrio stabile, relativi ad un flusso stazionario, assumono un significato dinamico: infatti, intorno a questi punti, per determinati valori dei parametri β , St , Fr , ω e B , possono generarsi traiettorie chiuse e periodiche. Nel prossimo paragrafo cercherò di fornire un criterio per verificare l'esistenza di queste traiettorie e determinarne la dipendenza temporale.

3.4 Significato dinamico dei punti fissi in un flusso cellulare oscillante

Consideriamo adesso un flusso cellulare che oscilli verticalmente, nel caso semplice in cui l'aspect ratio sia $L_{yx} = 1$:

$$\begin{cases} u_x = \sin(x) \cos[y + B \sin(\omega t)] \\ u_y = -\cos(x) \sin[y + B \sin(\omega t)] \end{cases} \tag{3.14}$$

Non mi risulta che tale caso sia stato sino ad ora considerato in letteratura. Le simulazioni effettuate per particelle leggere in un flusso che oscilli

verticalmente con un'ampiezza B non troppo elevata, mostrano in alcuni casi³ l'esistenza di traiettorie chiuse e periodiche attorno ai punti di equilibrio relativi al caso stazionario. L'analisi delle simulazioni suggerisce che la particella, dopo una fase transitoria, si adagia su una traiettoria che ha la stessa periodicità del flusso. Supponiamo quindi che tale traiettoria sia esprimibile come combinazione lineare di $\cos(\omega t)$ e $\sin(\omega t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + a_x B \cos(\omega t) + b_x B \sin(\omega t) \\ y(t) &= y_0 + a_y B \cos(\omega t) + b_y B \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

dove (x_0, y_0) è un punto di equilibrio nel caso di flusso stazionario. Notiamo che man mano che B diminuisce e tende a 0, la traiettoria descritta in (3.15) va a collapsare nel punto (x_0, y_0) . Inseriamo quindi le equazioni (3.14) che descrivono il flusso e l'ipotetica traiettoria asintotica (3.15) nell'equazione del moto della particella:

$$\begin{aligned} St \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} &= \beta St \frac{d\mathbf{u}}{dt}(\mathbf{X}(t), t) + \mathbf{w}^* + \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) - \mathbf{V}(t) + \\ &+ \frac{2}{3} \beta St [\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) - \mathbf{V}(t)] \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Nell'ipotesi che l'ampiezza delle oscillazioni B sia piccola, ogni termine di (3.16) non lineare in B può essere approssimato nell'intorno di $B = 0$ con il corrispondente sviluppo in serie di Taylor fino all'ordine 2. Così facendo ho ottenuto:

$$\left\{ \begin{aligned} f_1(a_x, b_x, a_y, b_y) B \cos(\omega t) + f_2(a_x, b_x, a_y, b_y) B \sin(\omega t) + \\ - \sin(x_0) \left[\cos(y_0) + \frac{2}{3} \beta St \cos(x_0) \right] = 0 \\ f_3(a_x, b_x, a_y, b_y) B \cos(\omega t) + f_4(a_x, b_x, a_y, b_y) B \sin(\omega t) + \\ + \sin(y_0) \left[\cos(x_0) - \frac{2}{3} \beta St \cos(y_0) \right] - w^* = 0 \end{aligned} \right. \quad (3.17)$$

³Nei prossimi capitoli vedremo per quali valori dei parametri β , Fr , St .

dove

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(a_x, b_x, a_y, b_y) = - \left[C + St\omega^2 + \frac{2}{3}\beta St \cos(2x_0) \right] a_x + Da_y + \\ \quad + \omega \left[1 - \frac{1}{3}\beta StC \right] b_x + \frac{1}{3}\omega\beta StDb_y + \omega\beta StD \\ f_2(a_x, b_x, a_y, b_y) = - \omega \left[1 - \frac{1}{3}\beta StC \right] a_x - \frac{1}{3}\omega\beta StDa_y + \\ \quad - \left[C + St\omega^2 + \frac{2}{3}\beta St \cos(2x_0) \right] b_x + Db_y + D \\ f_3(a_x, b_x, a_y, b_y) = - Da_x + \left[C - St\omega^2 - \frac{2}{3}\beta St \cos(2y_0) \right] a_y + \\ \quad - \frac{1}{3}\omega\beta StDb_x + \omega \left[1 + \frac{1}{3}\beta StC \right] b_y + \omega\beta StC \\ f_4(a_x, b_x, a_y, b_y) = \frac{1}{3}\omega\beta StDa_x - \omega \left[1 + \frac{1}{3}\beta StC \right] a_y - Db_x \\ \quad + \left[C - St\omega^2 - \frac{2}{3}\beta St \cos(2y_0) \right] b_y + C - \frac{2}{3}\beta St \cos(2y_0) \end{array} \right.$$

(x_0, y_0) è per ipotesi un punto di equilibrio, quindi soddisfa il sistema (3.6).
Le equazioni (3.17) allora si semplificano e diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(a_x, b_x, a_y, b_y)B \cos(\omega t) + f_2(a_x, b_x, a_y, b_y)B \sin(\omega t) = 0 \\ f_3(a_x, b_x, a_y, b_y)B \cos(\omega t) + f_4(a_x, b_x, a_y, b_y)B \sin(\omega t) = 0 \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Dal momento che $\cos(\omega t)$ e $\sin(\omega t)$ sono funzioni linearmente indipendenti, condizione necessaria affinché sia verificato il sistema (3.18) è:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(a_x, b_x, a_y, b_y) = 0 \\ f_2(a_x, b_x, a_y, b_y) = 0 \\ f_3(a_x, b_x, a_y, b_y) = 0 \\ f_4(a_x, b_x, a_y, b_y) = 0 \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Otengo così un sistema non omogeneo di 4 equazioni lineari nelle 4 incognite a_x, a_y, b_x, b_y . Abbiamo così un metodo che permette, una volta fissati i parametri β, St, Fr, ω e B , di verificare l'esistenza di traiettorie chiuse intorno al punto (x_0, y_0) e di trovarne l'espressione matematica. Ciò mi sarà utile nel capitolo 5, dove confronterò la traiettoria di particelle leggere, ottenuta attraverso simulazioni lagrangiane, con la traiettoria prevista teoricamente in base al sistema (3.19).

Capitolo 4

Simulazioni nel caso di particelle molto pesanti ($\beta = 0$)

Abbiamo già visto che particelle molto pesanti ($\beta = 0$) non possono restar sospese in un flusso cellulare stazionario¹. Scopo di questo capitolo è capire, attraverso l'analisi di simulazioni lagrangiane, se ciò possa invece accadere in un flusso cellulare oscillante e, se non fosse possibile, quanto può essere ridotta la velocità di caduta delle particelle variando i diversi parametri a disposizione. Per far questo ho messo a punto un programma in Fortran che calcola le posizioni e le velocità successive di N^2 particelle² partendo dall'equazione del moto (1.28), e in ogni istante ne determina la posizione media e la velocità verticale media (media su tutte le particelle). Da questi dati ho poi potuto ricavare la media temporale w . All'inizio le particelle sono distribuite uniformemente in due celle adiacenti ($0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq \pi$) e hanno velocità nulla. I passaggi con cui ho discretizzato l'equazione del moto della particella (1.28) sono descritti nell'appendice D.

Vediamo innanzi tutto come diventa tale equazione quando $\beta = 0$, cioè quando la densità ρ_p della particella è molto più grande di quella del fluido ρ_f :

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{1}{Fr^2} \hat{\mathbf{g}} - \frac{[\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)]}{St} + \sqrt{\frac{2}{Pe St^2}} \boldsymbol{\eta}(t) \quad (4.1)$$

Le forze coinvolte sono quindi: il peso della particella, l'attrito di Stokes e la diffusione. Come osservato nel primo capitolo, in questo caso non ci sono vincoli sul numero di Stokes affinché l'equazione di Maxey e Riley sia valida. Considererò un flusso cellulare del tipo descritto nel capitolo 2. Partirò da un flusso indipendente dal tempo $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$.

¹Il flusso cellulare considerato da Maxey in [21] è caratterizzato da aspect ratio $L_{yx} = 1$.

²Nelle mie simulazioni $N^2 = 100^2, 1000^2$

4.1 Flusso cellulare stazionario

In questo caso l'equazione (4.7) diventa:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{1}{Fr^2} \hat{\mathbf{g}} - \frac{[\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t))]}{St} + \sqrt{\frac{2}{Pe St^2}} \boldsymbol{\eta}(t) \quad (4.2)$$

Abbiamo già visto nel capitolo 2 che Martins Afonso [18] analizza in particolare la situazione $\beta = 0$, in un flusso cellulare stazionario con i seguenti parametri fissati: $L_{yx}=1$ (celle quadrate), $Fr=1$. Attraverso simulazioni di tipo lagrangiano egli osserva la dipendenza della velocità media w dal numero di Stokes notando una massima riduzione di w in corrispondenza di $St \cong 1$. Riproducendo questa situazione nelle mie simulazioni ho ottenuto il seguente risultato³:

$$w \cong -0.5279$$

D'altra parte, la velocità nuda teorica w^* è:

$$w^* = \frac{(\beta - 1)St}{Fr^2} = -1$$

da cui si deduce che già nel caso stazionario la velocità w risulta quasi dimezzata (variazione percentuale del 47% circa). A questo punto il mio obiettivo è capire in quali condizioni si può ottenere un'ulteriore riduzione di w partendo dalla situazione di riferimento sopra descritta ($L_{yx}=1$, $Fr=1$, $St=1$) e facendo variare i diversi parametri a disposizione. Comincerò studiando la dipendenza della velocità di caduta media w dal numero di Peclet.

4.1.1 Effetti della diffusione

Prima di studiare gli effetti della diffusione sulla velocità di caduta media delle particelle, domandiamoci quanto debba essere piccolo il raggio a di una particella, ad esempio di una gocciolina d'acqua nell'aria ($\beta \sim 0.001$), affinché essa risenta della diffusione molecolare. Per rispondere a questa domanda prendiamo come punto di riferimento la velocità nuda della particella espressa in metri al secondo:

$$w^* = -\frac{m_p g}{6\pi a \mu} = -\frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_p g}{6\pi a \mu} = \frac{2}{9} \frac{\rho_p g}{\mu} a^2$$

³Ricordiamo che l'unità di misura scelta per le velocità è U_0 , la velocità massima del fluido. In questo caso, ad esempio, w è circa la metà di U_0 .

dove m_p e ρ_p sono rispettivamente la massa e la densità della particella, μ è la viscosità dinamica del fluido. L'energia cinetica della particella è quindi data da:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} m_p (w^*)^2 = \\
& = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \rho_p \right) (w^*)^2 = \\
& = \left(\frac{2}{3} \pi a^3 \rho_p \right) \left(\frac{2 \rho_p g}{9 \mu} a^2 \right)^2 = \\
& = \left(\frac{2}{3} \pi a^3 \rho_p \right) \left(\frac{4 \rho_p^2 g^2}{81 \mu^2} a^4 \right) = \\
& = \frac{8}{243} \pi \frac{\rho_p^3 g^2}{\mu^2} a^7
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Confrontiamo tale valore con l'energia cinetica media traslazionale di una molecola in un gas perfetto:

$$\frac{8}{243} \pi \frac{\rho_p^3 g^2}{\mu^2} a^7 = \frac{3}{2} K_B T \tag{4.4}$$

dove K_B è la costante di Boltzmann pari a $1.38 \cdot 10^{-23} J/K$, e T è la temperatura del gas espressa in gradi Kelvin. Dalla relazione (4.4) si ottiene:

$$a = \sqrt[7]{\frac{729}{16\pi} \cdot \frac{\mu^2 K_B T}{\rho_p^3 g^2}} \tag{4.5}$$

Se fissiamo i seguenti parametri:

- la temperatura dell'aria, $T = 253 K$ ($-20^\circ C$ circa);
- la viscosità dinamica dell'aria⁴ alla temperatura di $253 K$,
 $\mu = 1.61 \cdot 10^{-5} \frac{Kg}{m \cdot s}$;
- la densità dell'acqua, $\rho_p \cong 10^3 \frac{Kg}{m^3}$;
- l'accelerazione di gravità, $g \cong 10 \frac{m}{s^2}$.

dall'equazione (4.5) si ottiene: $a \cong 2 \mu m$.

A questo punto mi sarà utile la relazione di Einstein che esprime la dipendenza del coefficiente di diffusione molecolare k dall'energia cinetica media molecolare, dal raggio a della particella e dalla viscosità del fluido:

$$k = \frac{K_B T}{6\pi a \mu}$$

⁴Per semplicità ho considerato la viscosità dell'aria secca.

Nella situazione considerata risulta $k \cong 6 \cdot 10^{-12} m \cdot s$. Infine, se consideriamo una lunghezza caratteristica del flusso $L = 10^2 m - 10^3 m$ e una velocità tipica del flusso $U = 1 m/s$ si può ricavare il numero di Péclet corrispondente al coefficiente di diffusione k :

$$Pe = \frac{U \cdot L}{k} \cong 1.7 \cdot 10^{-11} - 1.7 \cdot 10^{-10}$$

Ho così ottenuto l'ordine di grandezza che deve avere al più il numero Péclet affinché l'effetto della diffusione non sia trascurabile nella situazione presa ad esempio.

Per analizzare l'effetto della diffusione sulla dinamica di particelle con densità molto maggiore di quella del fluido ho eseguito simulazioni nel caso di 10^4 particelle. Se k è il coefficiente di diffusione, lo spostamento quadratico medio di una singola particella dovuto alla diffusione ha la forma $\langle [X(t) - X_0]^2 + [Y(t) - Y_0]^2 \rangle = 4kt$, quindi il tempo che occorre ad una particella per diffondere lungo una distanza dell'ordine di grandezza di l (il lato della cella scelto come lunghezza caratteristica del flusso) è: $t = l^2/(4d) = (\pi^2 L^2)/(4k)$. Affinché le simulazioni siano corrette, occorre che il passo temporale Δt sia molto minore di questo tempo:

$$\Delta t \ll \frac{\pi^2 L^2}{4k}$$

Dopo aver definito

$$t_* \equiv \frac{\pi^2 L^2 U}{4k_d L}$$

partiamo dalla definizione del numero di Peclet per esprimere in termini di questo t_* :

$$Pe = \frac{UL}{k_d} = \frac{\pi^2 L^2}{4k_d} \frac{4U}{\pi^2 L} = \frac{4}{\pi^2} t_* \Rightarrow t_* = \frac{\pi^2}{4} Pe \quad (4.6)$$

Le simulazioni sono state effettuate all'interno dell'intervallo: $Pe \geq 0.05$. Se $Pe = 0.05$, allora $t_* \cong 0.123$. Al crescere di Peclet t_* aumenta, quindi è sufficiente che sia $\Delta t \ll 0.123$, oltre che $\Delta t \ll St = 1$. Il passo temporale da me scelto per queste simulazioni è⁵ $\Delta t = 0.01$. I risultati delle simulazioni sono illustrati nella figura 4.1. Per piccoli numeri di Peclet la velocità di caduta media w delle particelle sembra tendere alla velocità nuda $w^* = -1$ (si veda anche la figura 4.2): è come se il flusso cellulare non avesse alcun effetto sul moto delle particelle, la diffusione ha un effetto dominante. Al crescere di Peclet la velocità media w diminuisce e tende asintoticamente al

⁵Da un punto di vista pratico, un passo temporale ancora più piccolo renderebbe la simulazione molto più lenta, quindi sono giunta ad un compromesso.

valore che avrebbe in assenza totale di diffusione (l'asintoto mostra il valore di w ottenuto simulando l'assenza di diffusione).

Nelle figure 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6 si possono vedere le posizioni delle particelle 'fotografate' in un istante nel quale la velocità verticale media, v_{ym} , si è già stabilizzata, come si può vedere nella figura 4.2. Se la diffusione è dominante, non sembra manifestarsi alcun fenomeno di concentrazione preferenziale. Man mano che l'effetto della diffusione scompare, le particelle pesanti, come già fatto notare ad esempio da Maxey, tendono a disporsi lungo le pareti verticali delle celle.

Abbiamo quindi visto che la diffusione, nell'intervallo di Peclet da me analizzato ($Pe \geq 0.05$), non contribuisce a rallentare la caduta delle particelle; per questo nelle successive simulazioni ho impostato un numero di Peclet molto alto, $Pe=1000$, in modo che l'effetto della diffusione fosse trascurabile.

4.2 Flusso cellulare oscillante

Consideriamo ora un flusso cellulare oscillante, così come descritto nel capitolo 2. Vedremo come diversi parametri possono influire sulla velocità media w delle particelle. In particolare, continuerò a cercare le condizioni che favoriscono una massima riduzione di w , se non addirittura una sua inversione di segno.

È già stato osservato sperimentalmente che in un fluido oscillante verticalmente può avvenire la levitazione di particelle più dense del fluido [31, 11]. Come spiegato in [11], *la levitazione fu definita da Houghton (1966) come una condizione stabile che si verifica quando, in flusso oscillante, l'effetto delle forze di galleggiamento (effetto combinato della forza peso e della spinta di Archimede) è completamente neutralizzato cosicché la particella oscilla attorno ad una posizione fissa*. Successivamente si osservò anche che in tali condizioni poteva verificarsi addirittura un moto di risalita delle particelle. Il flusso considerato in [31, 11] non è di tipo cellulare, e sebbene i dati sperimentali riguardino particelle più dense del fluido, si analizza soltanto un intervallo limitato di β , $\beta \neq 0$, mentre la situazione qui trattata costituisce un caso limite, in cui $\beta = 0$. Infatti in [31] vengono considerate particelle con densità nell'intervallo: $2.15g/cm^3 \leq \rho_p \leq 7.68g/cm^3$. Il fluido in cui sono immerse è l'acqua ($\rho_f = 1g/cm^3$). Quindi l'intervallo considerato rispetto al parametro β è circa⁶: $0.183 \leq \beta \leq 0.566$. In [11] vengono osservate particelle di densità $\rho_p = 1.17g/cm^3$ immerse in acqua ($\beta \cong 0.898$) e parti-

⁶Ricordiamo che $\beta = \frac{3\rho_f}{2\rho_p + \rho_f}$

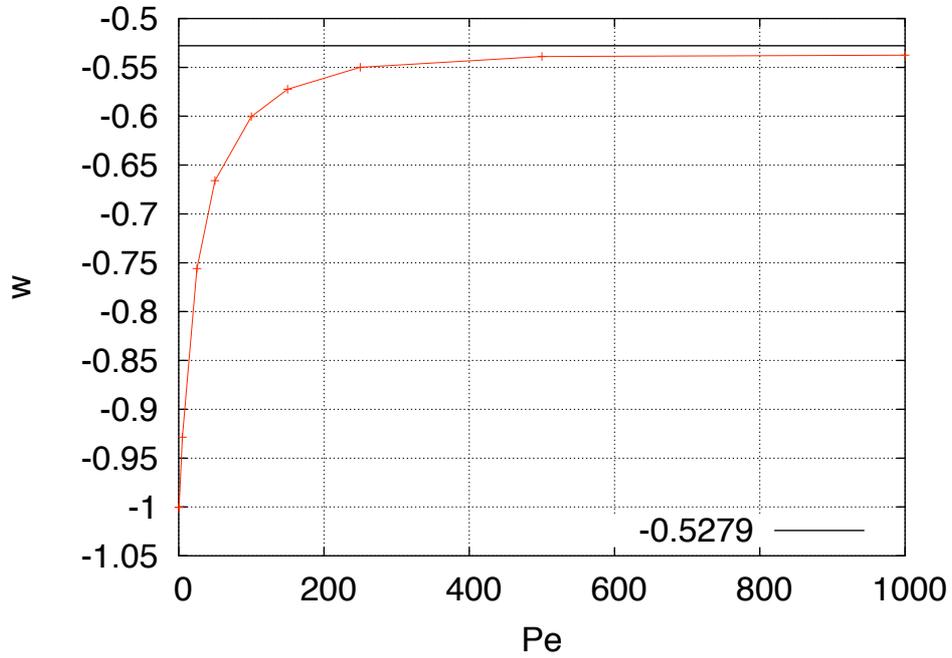


Figura 4.1: Velocità media w in funzione del numero di Peclet (10^4 particelle, $\Delta t = 0.01$, $\beta=0$, $St=1$, $Fr=1$, $L_{yx} = 1$, $\omega = 0$). È rappresentato anche l'asintoto corrispondente all'assenza di diffusione.

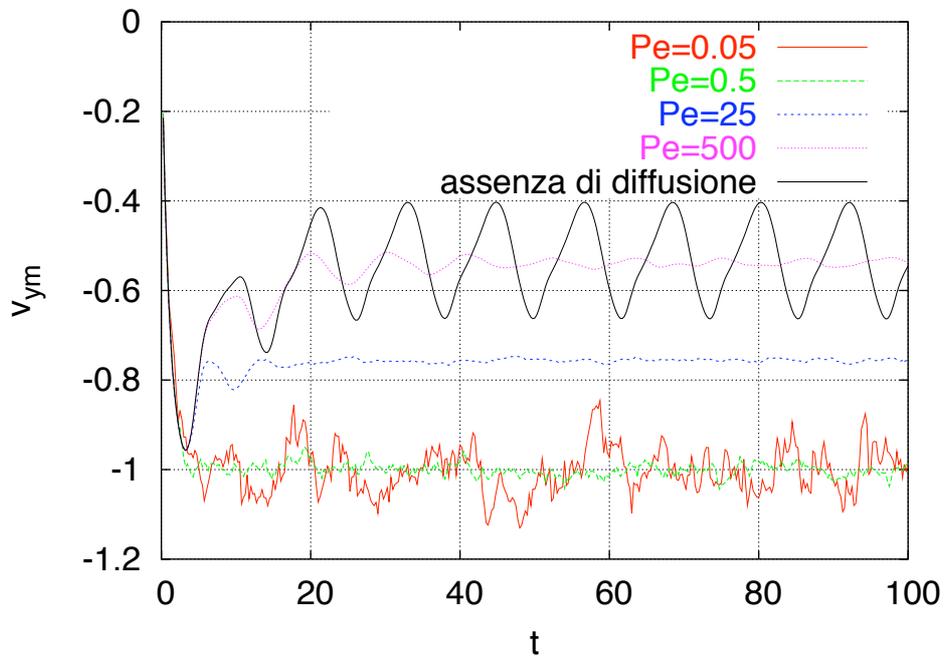


Figura 4.2: Velocità verticale media $v_{y,m}$ in funzione del tempo per diversi valori di Peclet (10^4 particelle, $\Delta t = 0.01$, $\beta=0$, $St=1$, $Fr=1$, $L_{yx} = 1$, $\omega = 0$).

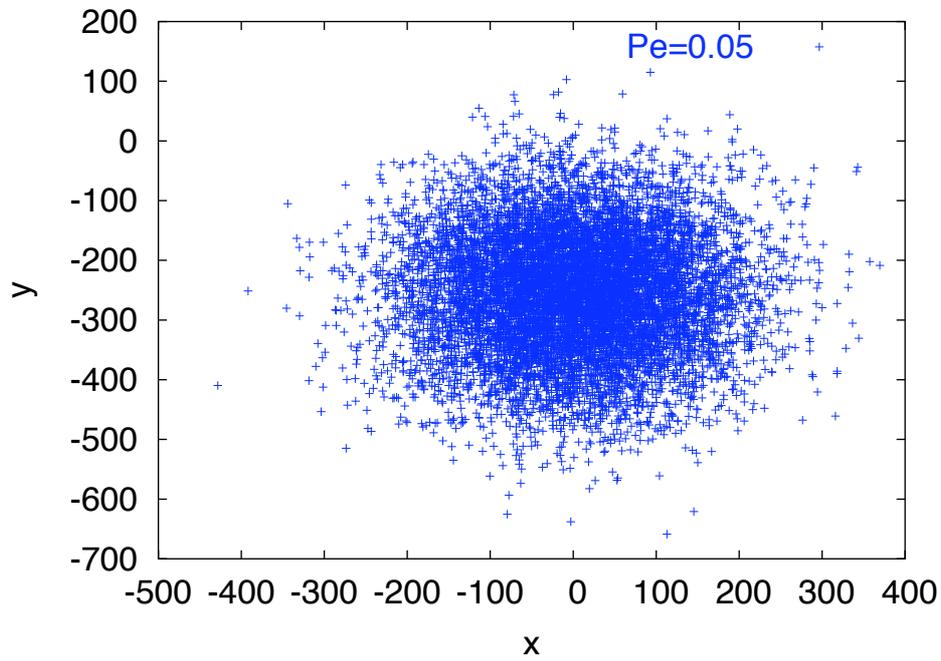


Figura 4.3: Posizione delle particelle per $Pe = 0.05$ nell'istante $t \cong 257$ (10^4 particelle, $\Delta t = 0.01$, $\beta=0$, $St=1$, $Fr=1$, $L_{yx} = 1$, $B=2$).

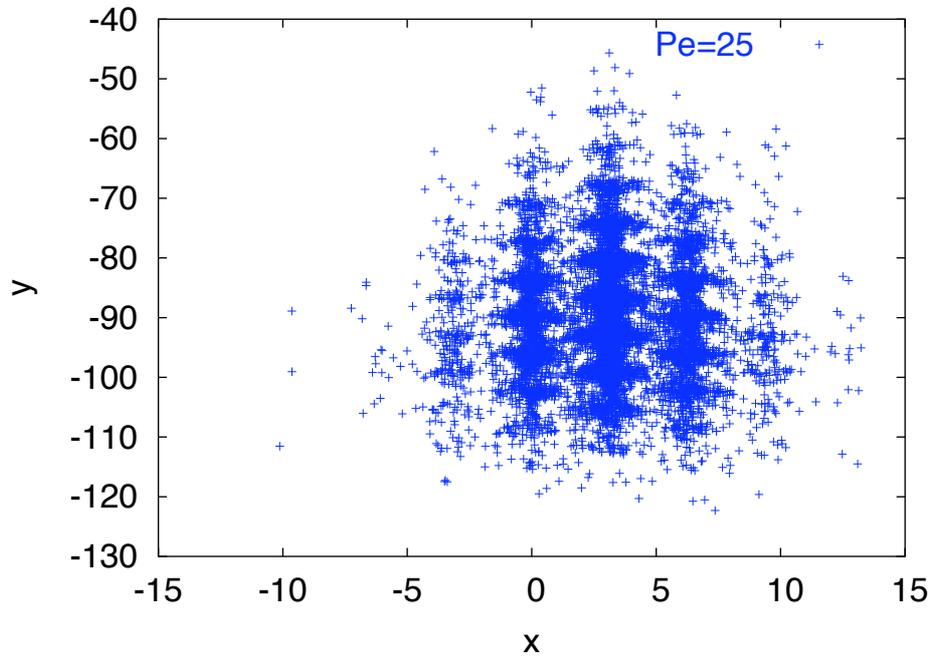


Figura 4.4: Posizione delle particelle per $Pe = 25$ nell'istante $t \cong 121$ (10^4 particelle, $\Delta t = 0.01$, $\beta=0$, $St=1$, $Fr=1$, $L_{yx} = 1$, $B=2$).

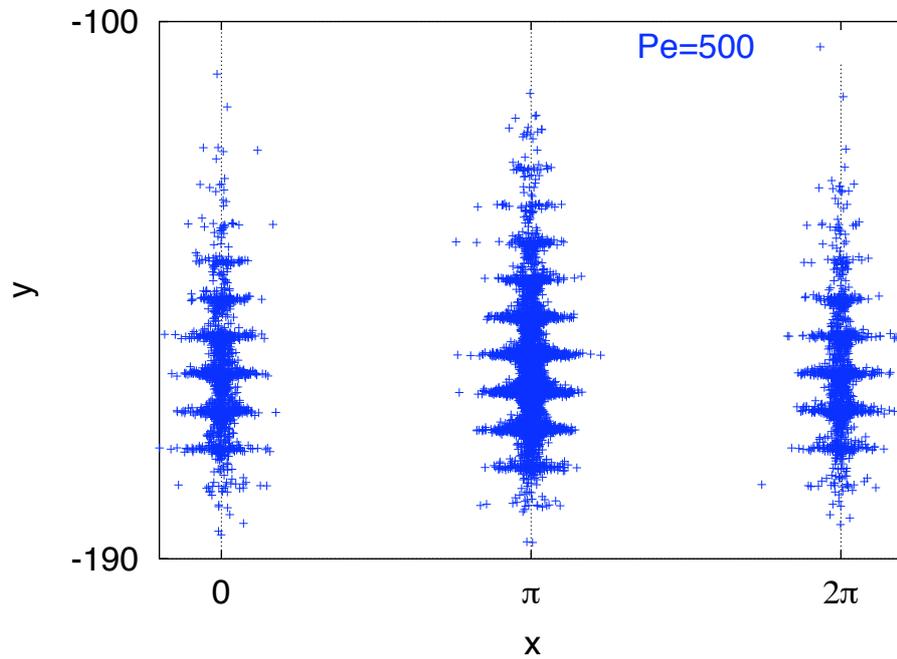


Figura 4.5: Posizione delle particelle per $Pe = 500$ nell'istante $t \cong 292$ (10^4 particelle, $\Delta t = 0.01$, $\beta=0$, $St=1$, $Fr=1$, $L_{yx} = 1$, $B=2$).

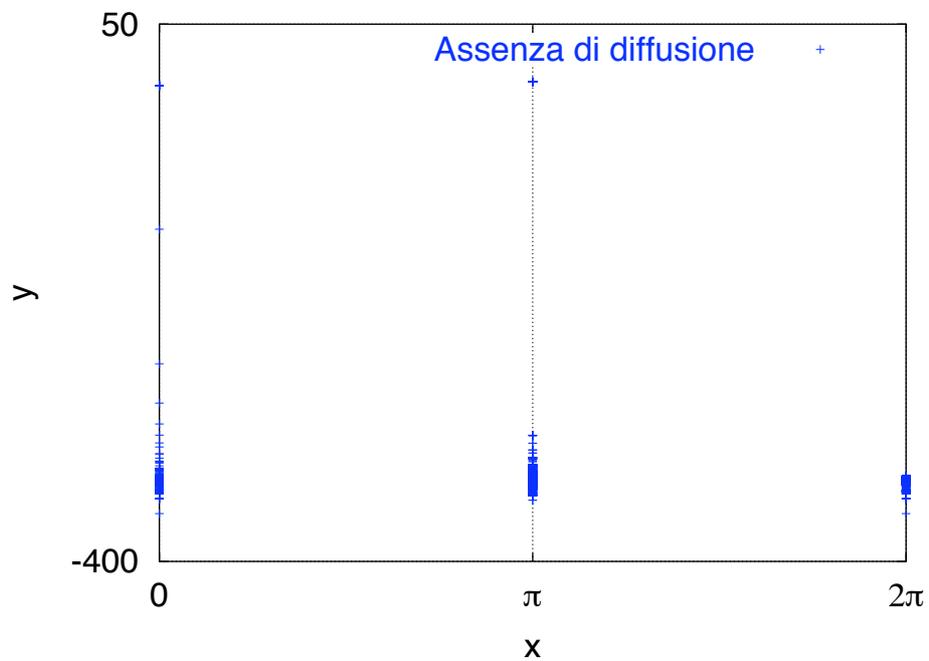


Figura 4.6: Posizione delle particelle in assenza di diffusione nell'istante $t \cong 624$ (10^4 particelle, $\Delta t = 0.01$, $\beta=0$, $St=1$, $Fr=1$, $L_{yx} = 1$, $B=2$).

celle di densità $\rho_p = 2.80g/cm^3$ in una soluzione acquosa di glicerolo⁷ al 55% ($\beta \cong 0.509$). Tuttavia le considerazioni che vengono fatte in [31, 11] saranno comunque utili per riflettere su cosa succede nella situazione da me trattata.

4.2.1 Dipendenza dalla frequenza ω

Flusso oscillante orizzontalmente Consideriamo un flusso cellulare che oscilla orizzontalmente nel quale, dopo aver fissato l'ampiezza delle oscillazioni $B=2$, si faccia variare la frequenza ω . Nella figura 4.7 si vede che, nella situazione particolare considerata, le oscillazioni del flusso non contribuiscono a ridurre la velocità di caduta media delle particelle più di quanto non faccia già un flusso cellulare stazionario.⁸ Ricordiamoci che ad alte frequenze acquista importanza l'integrale di Basset che noi però stiamo in prima approssimazione trascurando, così come aveva fatto Maxey nel caso stazionario [21]. Notiamo che al crescere di ω la velocità di caduta media w tende alla velocità nuda w^* : come previsto da Martins Afonso in [18], la particella non vede più il flusso portante, a causa della sua inerzia non fa in tempo ad assecondare la velocità del flusso sottostante, che varia troppo velocemente. Per frequenze intermedie, si osserva invece una successione di risonanze, similmente a quanto osservato in [7].

Flusso cellulare oscillante verticalmente Consideriamo ora un flusso cellulare che oscilla verticalmente. I parametri sono gli stessi fissati nel caso di oscillazioni orizzontali. Nella figura 4.7 si nota un andamento simile a quello precedente. Si può inoltre osservare che la massima riduzione di w si ottiene per $\omega \cong 0.03$, in corrispondenza della quale $w \cong -0.4849$: abbiamo quindi una riduzione percentuale del 51.5% circa di w rispetto alla velocità nuda (si veda la figura 4.11 in corrispondenza di $B=2$), del 12.9% circa rispetto al caso di flusso stazionario. Fisso quindi la frequenza $\omega = 0.03$ e analizzo la dipendenza di w dall'ampiezza B delle oscillazioni.

⁷Ho calcolato la densità della soluzione facendo una media pesata tra la densità del glicerolo con peso 0.55 e la densità dell'acqua con peso 0.45.

⁸Si potrebbe però andare a vedere cosa succederebbe variando l'ampiezza delle oscillazioni B oppure mantenendo $\omega = 0$. e variando altri parametri, come l'aspect ratio L_{yx} o Froude.

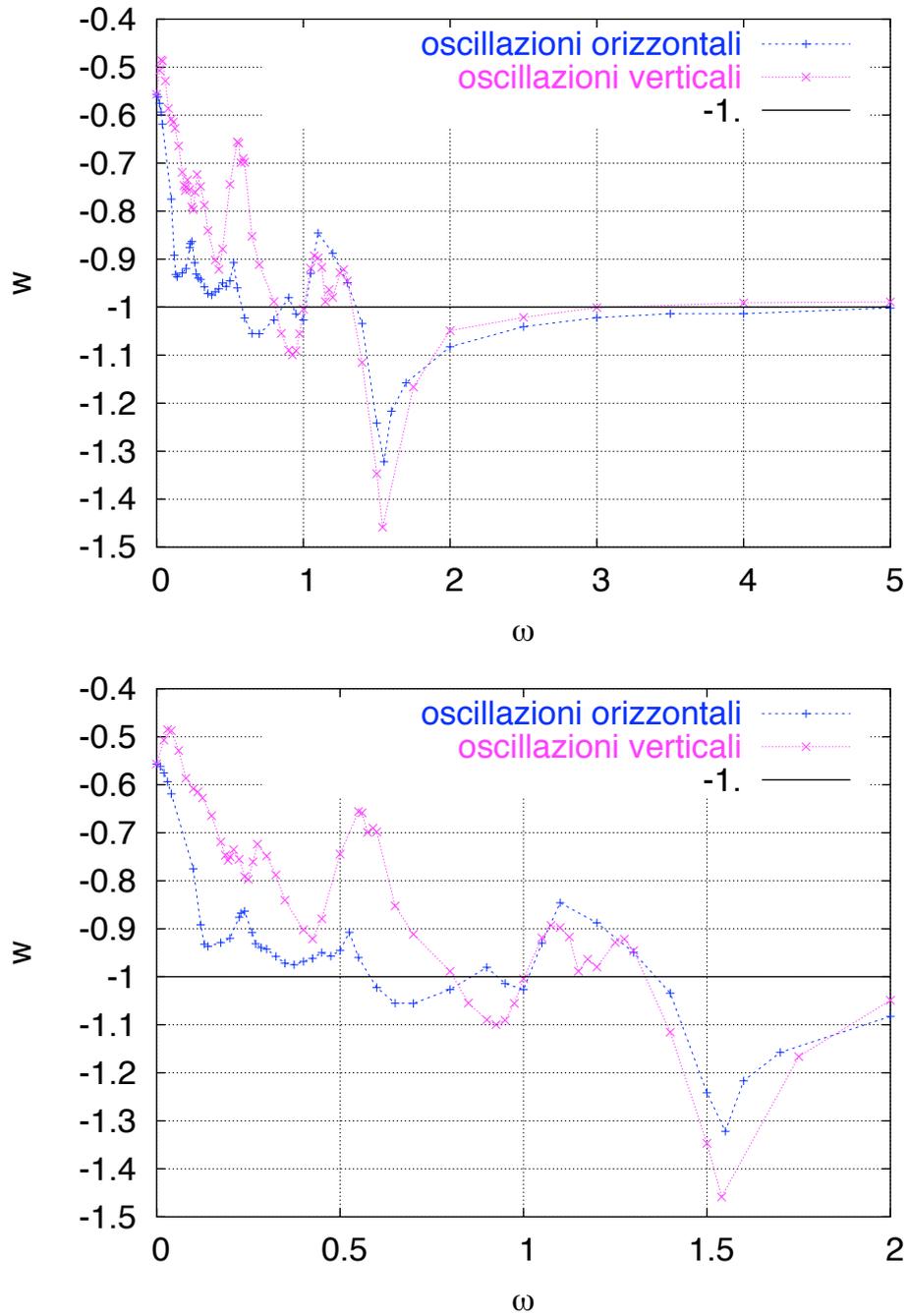


Figura 4.7: velocità terminale media w in funzione della frequenza ω in un flusso cellulare che oscilla verticalmente/orizzontalmente (10^6 particelle, $\beta=0$, $St=1, \Delta t = 0.05$, $Fr=1$, $Pe=1000$, $L_{yx}=1$, $B=2$)

4.2.2 Ampiezza delle oscillazioni

Osserviamo la figura 4.8. E' evidente che per valori di B sempre più piccoli w tende al valore che avrebbe in un flusso stazionario ($w = 0.5565$)⁹. Si osserva una massima riduzione di w in corrispondenza del valore di partenza B=2. Ciò potrebbe confermare che la risonanza osservata nella figura 4.7 per $\omega = 0.03$ avviene per un valore di B strettamente legato a ω . Nelle esperienze di laboratorio già citate di [11] viene misurata la frequenza di levitazione e si vede che al crescere dell'ampiezza delle oscillazioni la frequenza di levitazione scende. Qualcosa di simile si può osservare nella figura 4.14, in cui si mostra la dipendenza di w dall'ampiezza delle oscillazioni B per diversi valori della frequenza in prossimità di $\omega = 0.03$. Si vede come, limitatamente alle frequenze considerate, l'ampiezza B per la quale si ha la massima riduzione di w si sposti verso valori sempre più al crescere della frequenza. Si osserva la massima riduzione di w per $\omega = 0.06$: $w = -0.4730$, quindi una differenza percentuale di circa il 2% rispetto al caso $\omega = 0.03$. Non troviamo quindi riduzioni significative della velocità di caduta media. Analizzando ancora la figura 4.14, vediamo che al crescere di B w aumenta sempre di più, superando il valore che avrebbe nel caso di flusso stazionario. Come già osservato per le alte frequenze, mi aspetto che per B ancora più grandi w tenda alla velocità nuda, come è evidente nel caso $\omega = 0.5$

4.2.3 Aspect ratio

Come per B, ho considerato un intervallo limitato di L_{yx} nell'intorno di $L_{yx} = 1$. Si nota come anche l'aspect ratio possa influenzare la velocità terminale di particelle pesanti determinando in alcuni casi un'ulteriore rallentamento nella loro caduta. Si osserva una w minima per $L_{yx} = 1.6$: $w \cong 0.3223$, quindi abbiamo una riduzione percentuale del 67.8% rispetto alla velocità nuda (figura 4.12), del 42.1% rispetto al caso stazionario. Si capisce quindi che l'aspect ratio influisce notevolmente sulla velocità di caduta media w .

4.2.4 Froude

Dopo aver fissato $L_{yx} = 1.6$, vediamo infine che effetto ha la gravità. Notiamo che con Froude varia anche la velocità nuda, per cui è utile a maggior ragione osservare il grafico della variazione percentuale di w rispetto a w^* (figura 4.13): per $Fr \cong 1.025$ si ottiene una riduzione percentuale di w del 71.4%

⁹Nelle simulazioni relative ad un flusso oscillante ho considerato 10^6 particelle. C'è una variazione percentuale del 3%, quindi trascurabile, rispetto al risultato ottenuto con 10^4 particelle.

rispetto alla velocità nuda w^* . Questo risultato differisce quindi molto poco da quello già ottenuto per $Fr = 1$. Come già osservato per l'ampiezza delle oscillazioni B, sembra che ci possa essere uno stretto legame tra il numero di Fr e la frequenza di risonanza $\omega = 0.03$. Osserviamo in particolare che se $|w^*| \gg 1$, cioè se la velocità nuda è molto più grande della massima velocità del flusso, significa che, in termini di Froude:

$$1/Fr^2 \gg 1/St$$

Quindi l'equazione del moto per una particella molto pesante diventa:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{1}{Fr^2} \hat{\mathbf{g}} - \frac{\mathbf{V}(t)}{St} \quad (4.7)$$

che è esattamente l'equazione relativa al caso di fluido fermo. Perciò, man mano che Fr diventa più piccolo, la velocità di caduta media w tenderà alla velocità nuda w^* (si veda la figura 4.10).

4.2.5 Osservazioni finali

Le simulazioni qui descritte non mostrano un fenomeno di levitazione né di risalita da parte di particelle pesanti, ma si riesce a raggiungere una riduzione di velocità almeno del 71%. Un buon contributo è dato dall'aspect ratio. In [31, 11] vengono considerate anche oscillazioni asimmetriche, e quindi introdotto un'altro parametro, k_o , che indica il grado di asimmetria delle oscillazioni. La frequenza di levitazione misurata in [11] si riduce aumentando k_o .

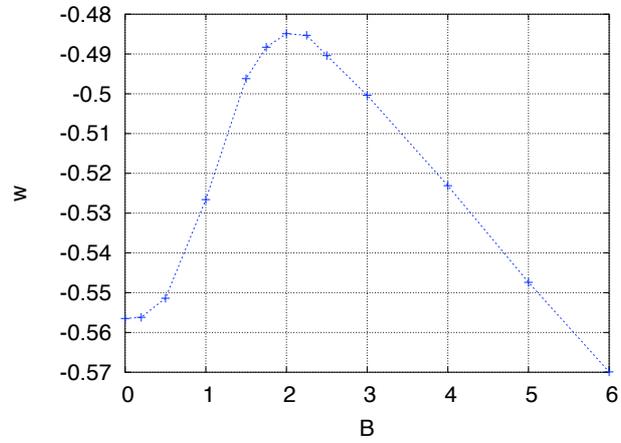


Figura 4.8: w in funzione di B (10^6 particelle, $St=1$, $\omega=0.03$, $L_{yx}=1$, $Fr=1$).

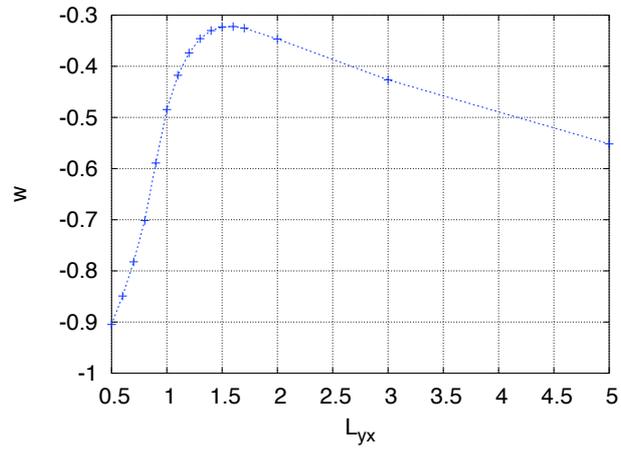


Figura 4.9: w in funzione di L_{yx} (10^6 particelle, $St=1$, $\omega=0.03$, $B=2$, $Fr=1$).

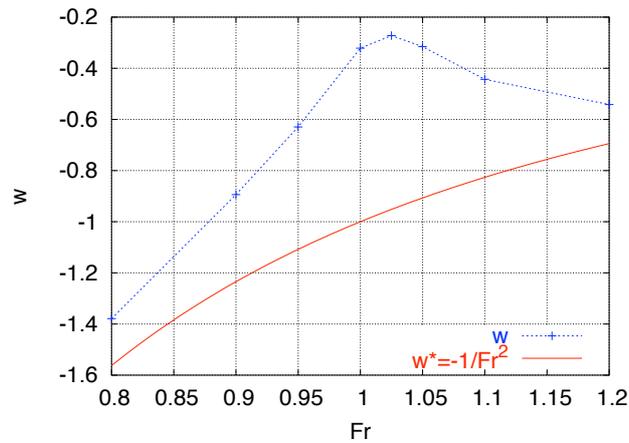


Figura 4.10: w in funzione di Froude (10^6 particelle, $St=1$, $\omega=0.03$, $B=2$, $L_{yx}=1.6$).

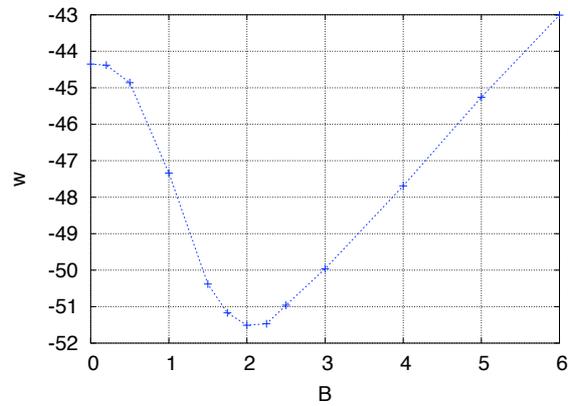


Figura 4.11: Variazione percentuale di w rispetto a w^* in funzione di B (10^6 particelle, $St=1$, $\omega=0.03$, $L_{yx}=1$, $Fr=1$).

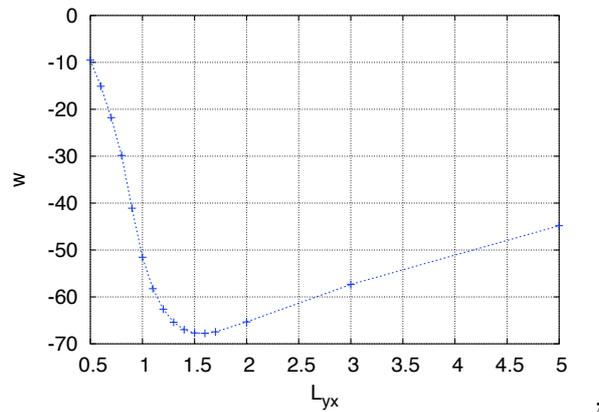


Figura 4.12: Variazione percentuale di w rispetto a w^* in funzione di L_{yx} (10^6 particelle, $St=1$, $\omega=0.03$, $B=2$, $Fr=1$).

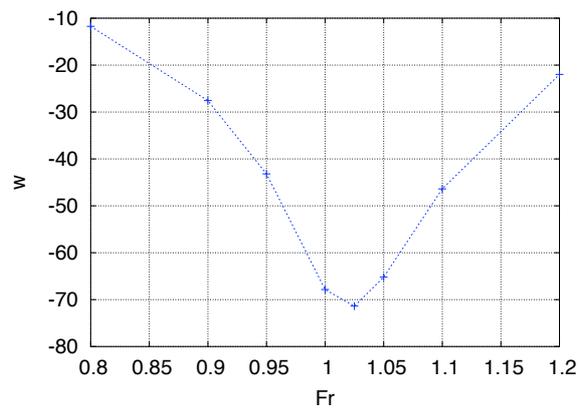


Figura 4.13: Variazione percentuale di w rispetto a w^* in funzione di B , L_{yx} , Froude (10^6 particelle, $St=1$, $\omega=0.03$, $B=2$, $L_{yx}=1.6$).

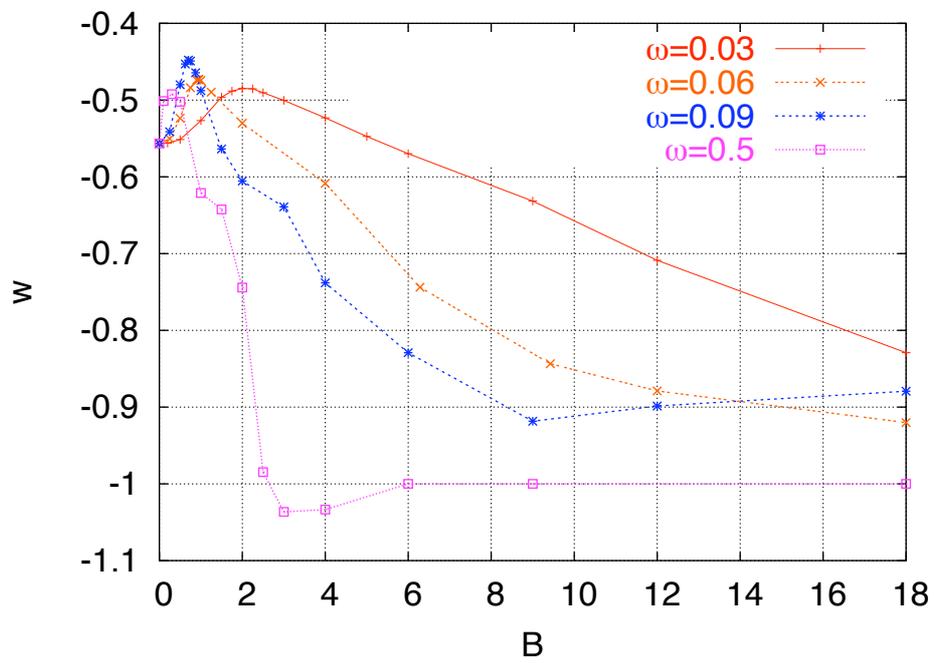


Figura 4.14: w in funzione di B per diverse frequenze fissate (10^6 particelle, $St=1$, $L_{yx}=1$, $Fr=1$).

Capitolo 5

Particelle leggere ($\beta = 1.5$)

In questo capitolo mi occuperò di particelle leggere immerse in un flusso cellulare oscillante lungo la verticale. Dopo aver individuato in quali condizioni tutte le particelle possono restar sospese, illustrerò il significato dinamico assunto in questa situazione dai punti di equilibrio stabile relativi ad un flusso cellulare stazionario, di cui si è parlato nel capitolo 3. Inoltre, al contrario di quanto fatto per le particelle pesanti, cercherò di quantificare le condizioni in cui si rompe la situazione di equilibrio in cui tutte le particelle rimangono sospese. Nelle simulazioni trascurerò l'effetto della diffusione, soltanto alla fine mi soffermerò brevemente su questo aspetto. Fisserò inizialmente $\beta = 1.5$, avendo preso come termine di confronto un risultato delle simulazioni descritte per questo valore di β da Marchioli, Fantoni e Soldati in [17] nel caso di flusso cellulare stazionario e avendo fissato $w^* = 0.625$ e $St \cong 0.06$.¹

5.1 Osservazioni preliminari

Nel primo capitolo abbiamo visto come l'equazione del moto di una particella inerziale fornita da Maxey e Riley [19] possa essere semplificata, in un modo che viene mostrato nell'appendice A. Possiamo riscrivere sia l'equazione di Maxey (5.1) che la sua espressione semplificata (5.2) nella forma:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t), t) + \frac{2}{3}\beta [\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) - \mathbf{V}(t)] \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) \quad (5.1)$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t), t) \quad (5.2)$$

¹La velocità terminale w ottenuta con il mio programma è in accordo con il risultato di [17] con un errore percentuale di circa il 10%.

dove

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}(t), t) \equiv \beta \frac{d\mathbf{u}}{dt}(\mathbf{X}(t), t) + \frac{(1 - \beta)}{Fr^2} \hat{\mathbf{g}} - \frac{[\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)]}{St}$$

La figura 5.1 ci mostra la dipendenza dal numero di Stokes della velocità media di risalita di particelle leggere ($\beta = 1.5$) con velocità nuda fissata ($w^* = 0.625$) nel caso di flusso cellulare stazionario ($\omega = 0, L_{yx} = 1$) e utilizzando sia l'equazione (5.1) che la (5.2). In questo caso possiamo riscrivere $\mathbf{F}(\mathbf{X}(t), t)$ in termini della velocità nuda w^* :

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}(t), t) \equiv \beta \frac{d\mathbf{u}}{dt}(\mathbf{X}(t), t) + \frac{[\mathbf{w}^* + \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) - \mathbf{V}(t)]}{St}$$

Nella figura 5.1 notiamo come i due modelli tendano a coincidere man mano che il numero di Stokes diminuisce. Infatti, se tale numero tende a 0 entrambe le equazioni si riducono a quella usata da Stommel [29] per studiare particelle di inerzia trascurabile²:

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{w}^* + \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)$$

Nel caso trattato la velocità nuda fissata è pari a $w^* = 0.625$: nelle unità di misura da noi scelte, ciò significa che tale velocità è minore di quella massima del fluido. È stato mostrato che in tal caso una frazione delle particelle rimane intrappolata [29, 21]: ciò aiuterebbe a comprendere la riduzione di velocità media che si osserva nella figura.

Sto considerando un intervallo limitato di valori di Stokes: infatti abbiamo visto, nel primo capitolo, che condizione necessaria affinché sia valido il modello di Maxey e Riley è: $St \ll \frac{1}{3\beta}$. Per $\beta = 1.5$ tale condizione si riduce a: $St \ll 0.2$.

Guardando ancora la figura 5.1 notiamo che al crescere di Stokes i due grafici mostrano un comportamento diverso: utilizzando l'equazione del moto completa (5.1) la velocità di risalita media w delle particelle aumenta al crescere di Stokes, mentre applicando il modello semplificato (5.2) la velocità w diminuisce sempre di più. Al crescere di Stokes aumenta l'inerzia della particella, e quindi sempre più difficilmente segue le linee di flusso del fluido. Il termine per cui differiscono le due equazioni, in cui compare $\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) - \mathbf{V}(t)$, diventa quindi sempre più importante accrescendo la differenza tra i due modelli.

Nella figura 5.2 è rappresentata la velocità di risalita media delle particelle in funzione del tempo per diversi numeri di Stokes (i parametri sono gli stessi fissati per le considerazioni precedenti). In questo caso, l'equazione del moto

²Si veda a tal proposito il capitolo 2.

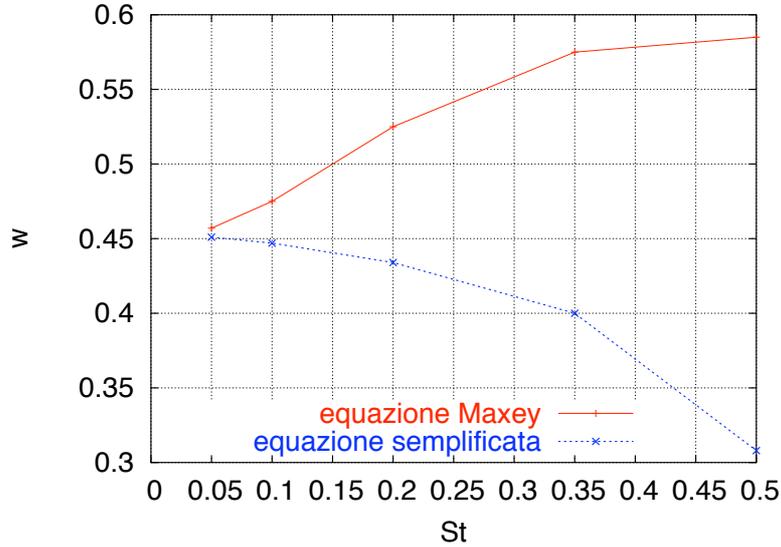


Figura 5.1: Velocità terminale di risalita w delle particelle in funzione del numero di Stokes ($\beta = 1.5, w^* = 0.625, L_{yx} = 1, \omega = 0$).

utilizzata per la particella è la (5.2). Ho notato che per $St < 0.85$ risulta definita la velocità terminale, cioè la media temporale della velocità di risalita (si veda la figura 5.1 in cui sono visibili i valori assunti dalla velocità terminale al variare di St nell'intervallo $0.5 < St < 0.5$). Per $St = 0.85$, invece, la velocità terminale non sembra essere definita: la velocità di risalita media sembra diminuire nel tempo molto lentamente senza raggiungere un valore definito. Per $St = 0.875$ la velocità terminale appare di nuovo definita. Sembrerebbe quindi che non sempre sia possibile individuare una velocità terminale definita.

5.2 Dipendenza della velocità media w da B

Vediamo ora quali sono gli effetti dell'ampiezza B delle oscillazioni del flusso sul moto delle particelle. Ho fissato un numero di Stokes, $St = 0.05$, abbastanza piccolo da rispettare la condizione (1.27), $St \ll \frac{1}{3\beta}$, ma allo stesso tempo non troppo piccolo per non eliminare del tutto l'effetto dell'inerzia. Ho considerato il caso di flusso oscillante verticalmente con una frequenza bassa ($\omega = 0.1$) e ho individuato una situazione particolare in cui la velocità terminale media w è nulla e tutte le particelle sembrano ruotare intorno ai punti di equilibrio stabile corrispondenti ad un flusso stazionario. I para-

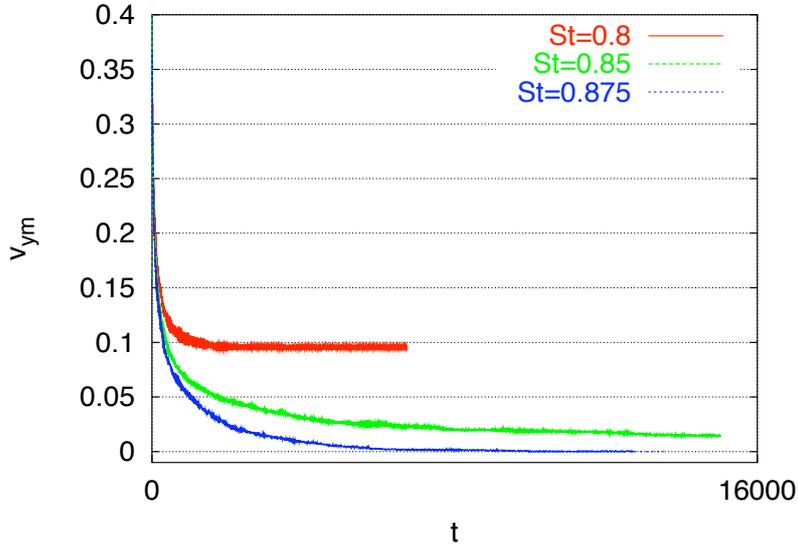


Figura 5.2: Velocità di risalita media delle particelle in funzione del tempo per diversi numeri di Stokes ($\beta = 1.5, w^* = 0.625, L_{yx} = 1, \omega = 0$). In questo caso ho utilizzato l'equazione del moto per la particella (5.2).

metri fissati sono: $\beta = 1.5, Fr = 1$. Aumenterò gradualmente l'ampiezza delle oscillazioni per vedere a che punto la velocità terminale media da nulla diventa positiva. Prima di tutto osserviamo cosa succede nel caso stazionario ($B = 0$): nella figura 5.3 si vede che la velocità media w è nulla, infatti tutte le particelle vanno a posarsi sui punti di equilibrio stabile, come si può notare nelle figure 5.4 e 5.5. Inoltre, nella figura 5.4 possiamo notare l'accordo tra i punti di equilibrio stabile previsti teoricamente (si veda il capitolo 3) e i punti su cui vanno a posarsi le particelle nella simulazione: ciò costituisce una conferma dell'efficienza del programma messo a punto per svolgere le simulazioni. Osserviamo adesso la figura 5.6 e notiamo che in un flusso non stazionario che oscilla verticalmente con frequenza $\omega = 0.1$ e ampiezza $B \leq 8$ la y media oscilla attorno ad un valore fisso y_0 con un'ampiezza dell'ordine di B : come vedremo, le particelle ruotano tutte intorno ai punti di equilibrio corrispondenti al caso stazionario. Questo si osserva per $B \leq 8$, mentre tra $B=8$ e $B=9$ si verifica una transizione (si veda la figura 5.6) in cui la velocità media w da nulla diventa positiva. Per illustrare quello che avviene per $0 < B \leq 8$, mostrerò il caso particolare $B=1$. Nella figura 5.7 si possono vedere le posizioni successive assunte dalle particelle ad intervalli di tempo equidistanti pari a circa $1/8$ del periodo di oscillazione del flusso: al centro delle traiettorie sono rappresentati i punti di equilibrio stabile relativi ad un

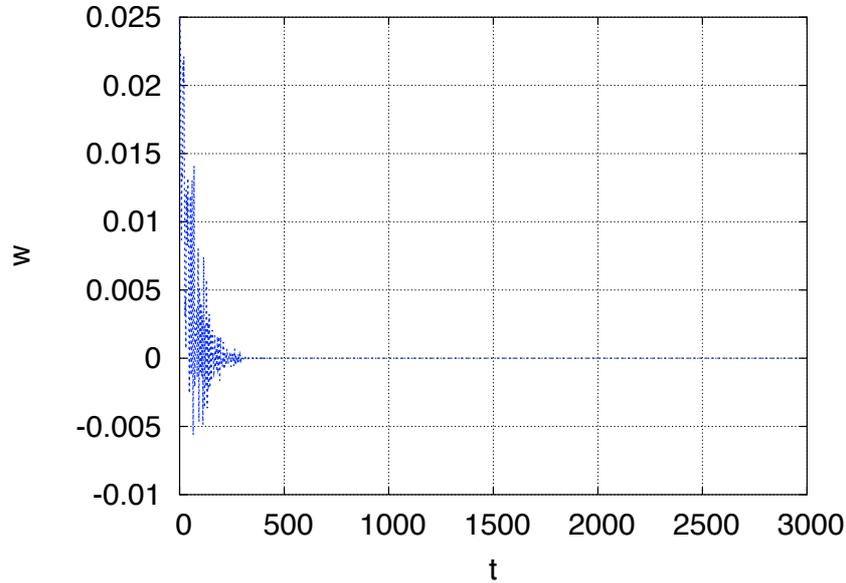


Figura 5.3: Velocità media w delle particelle nel caso di flusso stazionario ($B = 0, \beta = 1.5, Fr = 1, St = 0.05, L_{yx} = 1$).

flusso cellulare stazionario e calcolati in base ai criteri visti nel capitolo 3.

Nella figura 5.9 si può vedere la traiettoria di una particella dall'istante di partenza fino a quando inizia a ruotare intorno al punto (1.596, 4.710) (punto di equilibrio stabile corrispondente al caso stazionario). Nelle due figure successive 5.10 e 5.11, possiamo confrontare l'andamento asintotico, cioè per $t \rightarrow \infty$, delle coordinate di una singola particella con la previsione teorica fatta risolvendo numericamente il sistema di equazioni (3.19) introdotto nel capitolo 3. Si nota un buon accordo tra il risultato della simulazione e la sua previsione teorica (si veda anche la figura 5.8). La figura 5.12 è indicativa del fatto che, per un'ampiezza sufficientemente grande delle oscillazioni ($B=8$) il ciclo limite a cui tende asintoticamente la traiettoria della particella ha quasi raggiunto un'estensione, lungo l'orizzontale, confrontabile al lato di una cella elementare.

5.3 Dipendenza da β

Consideriamo ancora un flusso cellulare che oscilla verticalmente con frequenza $\omega = 0.1$ e ampiezza $B=1$. Sappiamo che per $\beta = 1.5$ la velocità terminale media è nulla, come è nulla la media temporale della velocità di ogni singola

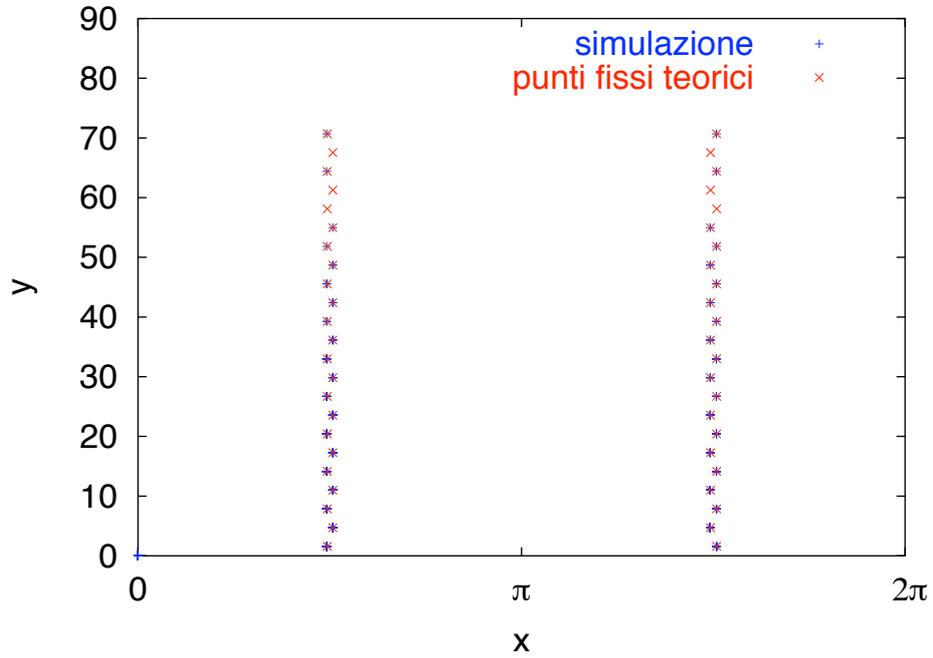


Figura 5.4: Confronto tra i punti di equilibrio stabile previsti teoricamente e le posizioni delle particelle all'istante $t \simeq 2961$ ottenute in una simulazione ($B = 0$, $\beta = 1.5$, $Fr = 1$, $St = 0.05$, $L_{yx} = 1$).

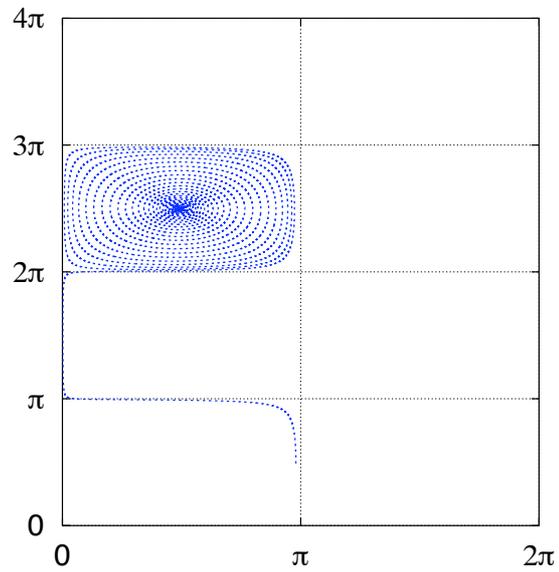


Figura 5.5: Traiettoria di una singola particella ($B = 0$, $\beta = 1.5$, $Fr = 1$, $St = 0.05$, $L_{yx} = 1$) prima di raggiungere il punto fisso.

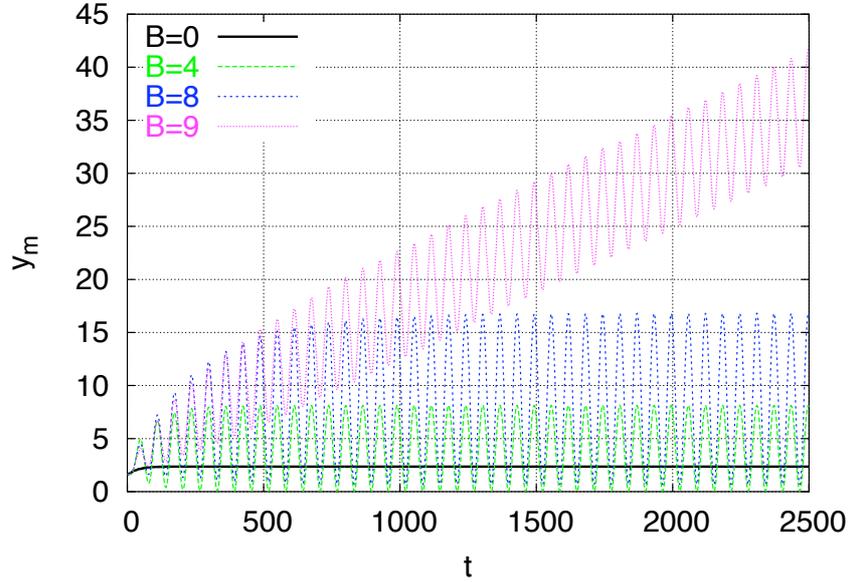


Figura 5.6: Valor medio delle y delle particelle, y_m , in funzione del tempo ($\beta = 1.5, St = 0.05, \omega = 0.1, L_{yx} = 1$)

particella. Nella situazione da me scelta, incrementando β la situazione non cambia ($\beta = 2.0, 2.5, 3.0$). Per $\beta = 1$ si ha una transizione, nel senso che le traiettorie delle particelle non tendono più a dei cicli limite: si assiste ad un movimento delle particelle sia verso l'alto che verso il basso e vincolato lungo i bordi delle celle, come si può notare nella figura 5.16 (si veda la situazione già analizzata da Babiano [2] e descritta nel capitolo 2). Particelle più pesanti mostrano una velocità di caduta media superiore alla velocità nuda w^* :

- se $\beta = 0$ ($w^* = -0.05$) $w \cong -0.1714$;
- se $\beta = 0.5$ ($w^* = -0.025$) $w \cong -0.0685$.

Ciò conferma le previsioni di Martins Afonso [18] illustrate nel capitolo 2: se fissiamo tutti i parametri tranne β , facendo variare β notiamo che ad una riduzione nella velocità di risalita di particelle leggere ($\beta > 1$) corrisponde una maggiore velocità di caduta delle particelle pesanti ($\beta < 1$) rispetto al caso di fluido fermo.

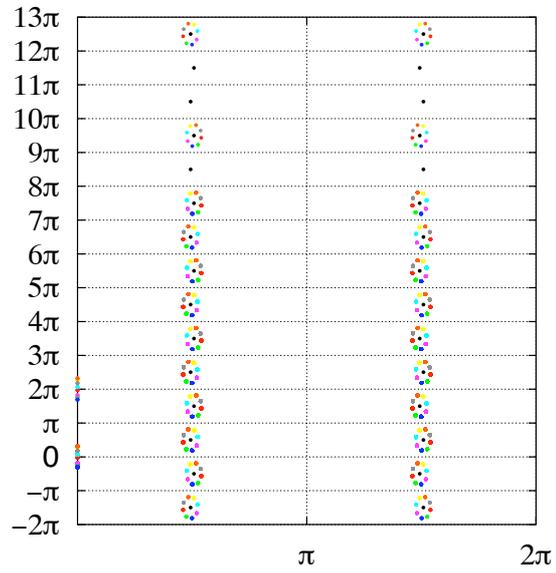


Figura 5.7: Posizioni successive delle particelle equidistanziate da intervalli temporali pari a circa $1/8$ del periodo di oscillazione del flusso ($\beta = 1.5$, $St = 0.05$, $Fr = 1$, $L_{yx} = 1$, $\omega = 0.1$, $B = 1$).

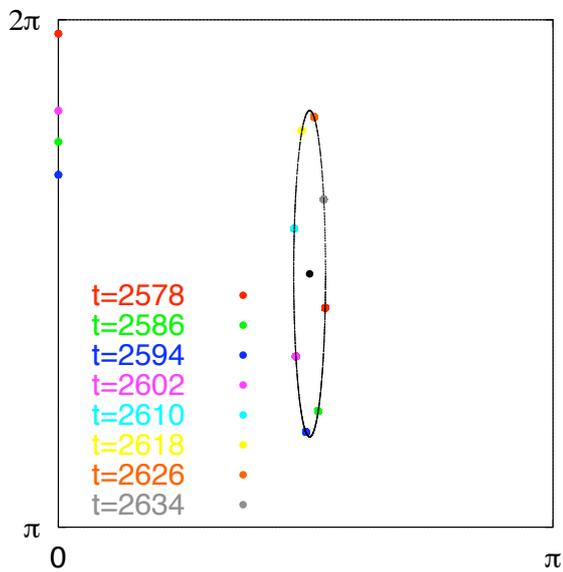


Figura 5.8: Dettaglio delle posizioni successive di alcune particelle e confronto tra la curva chiusa percorsa dalle particelle e il ciclo limite previsto teoricamente ($\beta = 1.5$, $St = 0.05$, $Fr = 1$, $L_{yx} = 1$, $\omega = 0.1$, $B = 1$).

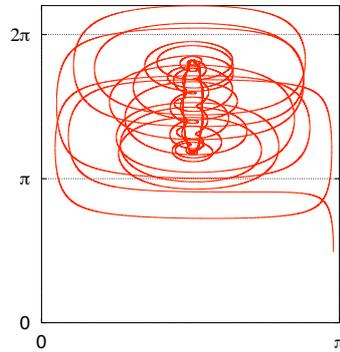


Figura 5.9: Traiettoria di una particella nel caso $\beta = 1.5$, $St = 0.05$, flusso cellulare oscillante verticalmente con frequenza $\omega = 0.1$ e ampiezza $B = 1$ ($L_{yx} = 1$).

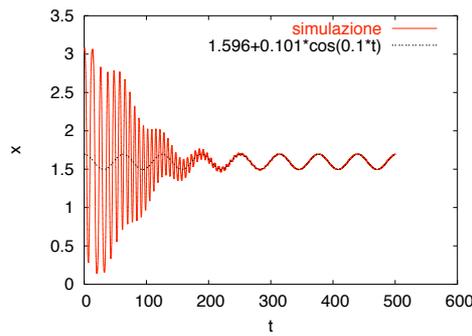


Figura 5.10: Confronto tra l'andamento asintotico della coordinata y nella figura 5.9 e la sua previsione teorica.

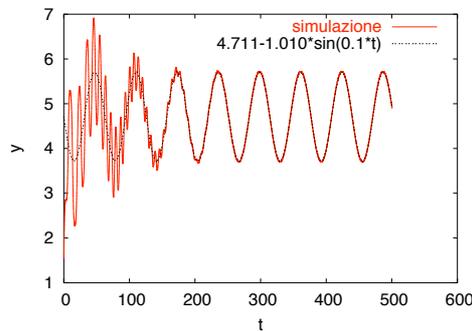


Figura 5.11: Confronto tra l'andamento asintotico della coordinata x nella traiettoria della figura 5.9 e la sua previsione teorica.

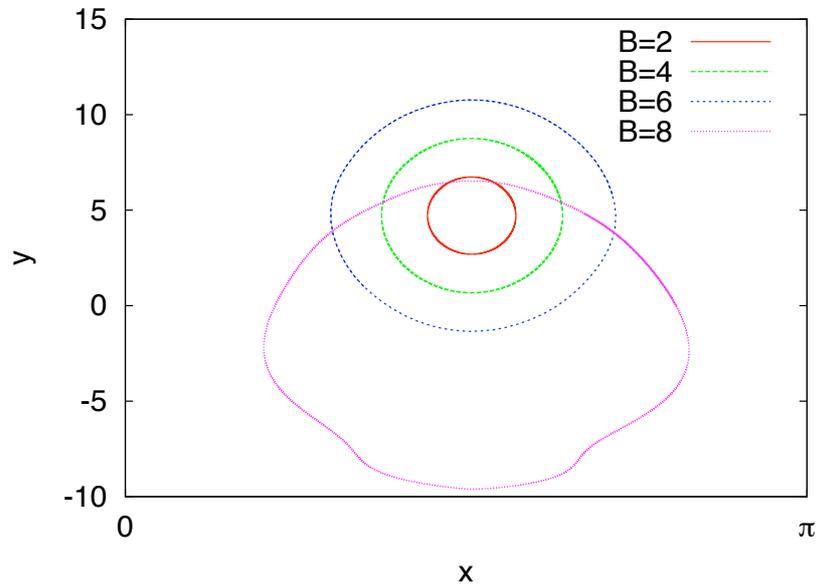


Figura 5.12: Ciclo limite a cui tende asintoticamente la traiettoria di una singola particella in un flusso oscillante verticalmente al variare dell'ampiezza B delle oscillazioni ($\beta = 1.5, St = 0.05, Fr = 1, \omega = 0.1, L_{yx} = 1$). Si nota che per $B=0$ il ciclo limite ha quasi raggiunto un'estensione orizzontale pari al lato della cella.

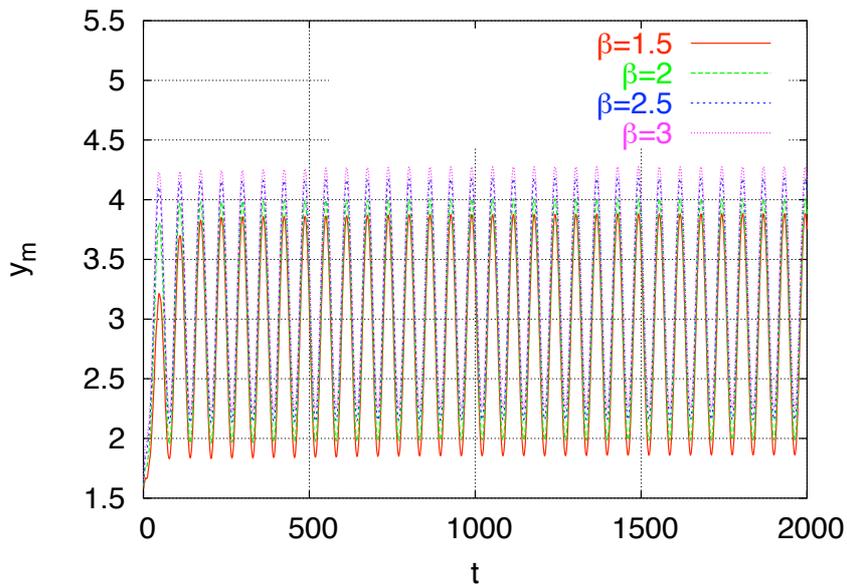


Figura 5.13: Dipendenza dal tempo della coordinata y media delle particelle al variare di β nell'intervallo $1.5 \leq \beta \leq 3$ ($B = 1, \omega = 0.1, Fr = 1, L_{yx} = 1$).

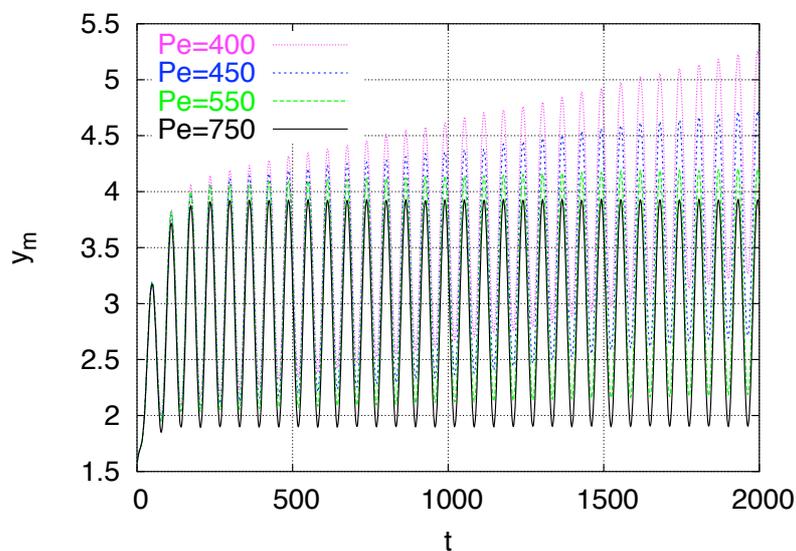


Figura 5.14: Andamento nel tempo della coordinata y media delle particelle al variare di Péclet ($\beta = 1.5, St = 0.05, Fr = 1, \omega = 0.1, B = 1, L_{yx} = 1$).

5.4 Diffusione

Come è ragionevole, solo una debole diffusione fa sì che la situazione di equilibrio permanga. Osservando la figura 5.14 l'equilibrio sembra spezzarsi per valori di Péclet compresi tra 550 e 750.

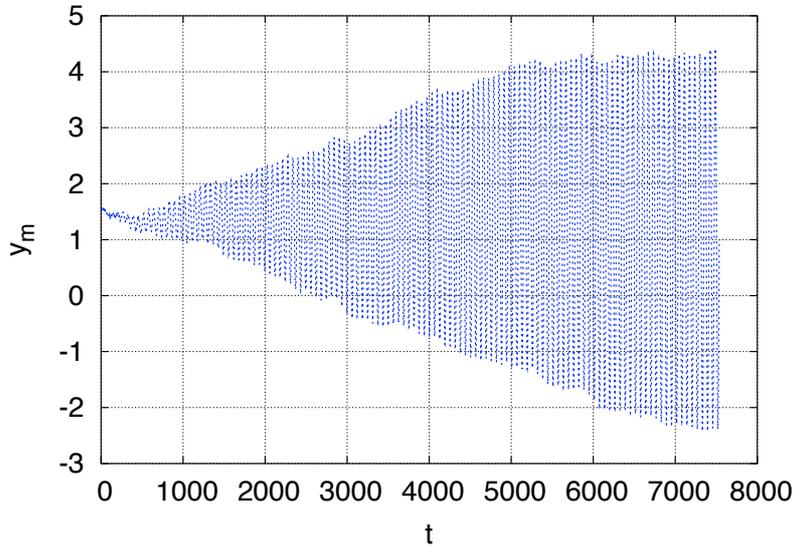


Figura 5.15: Andamento nel tempo della coordinata y media per particelle neutre ($\beta = 1$, $St = 0.05$) nel caso di flusso cellulare oscillante verticalmente con ampiezza $B = 1$ e frequenza $\omega = 0.1$. Gli altri parametri fissati sono: $Fr = 1$ e $L_{yx} = 1$.

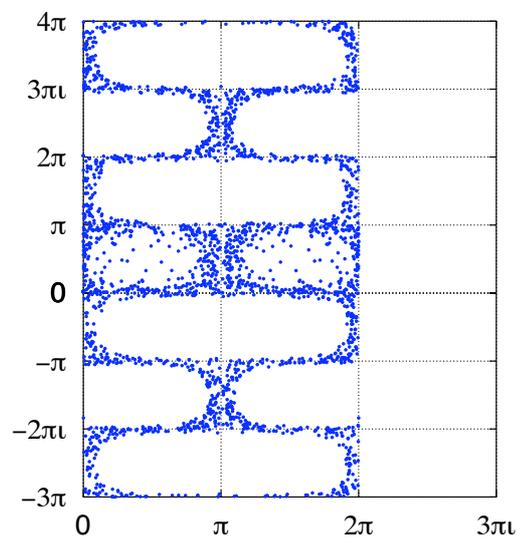


Figura 5.16: Dettaglio delle posizioni delle particelle (nell'istante $t=7540$) nella stessa situazione della figura 5.15.

Conclusioni

Lo studio della dinamica di particelle inerziali in un fluido è oggetto di studio in diversi campi della scienza e della tecnologia. Abbiamo visto ad esempio come tale studio sia legato a diverse problematiche, come la dispersione di inquinanti nell'atmosfera, la formazione delle gocce di pioggia in fase di coalescenza, la dinamica di microorganismi marini (fitoplancton), la separazione di sospensioni diverse in un fluido, la visualizzazione della dinamica di un fluido.

In questo lavoro ho considerato particelle inerziali immerse in un flusso cellulare, cioè spazialmente periodico, e oscillante. Per studiare gli effetti del flusso sulla velocità di sedimentazione delle particelle ho messo a punto un programma in Fortran che, partendo dall'equazione del moto della singola particella, calcoli le posizioni e le velocità successive di N^2 particelle, e in ogni istante ne determini la posizione e la velocità verticale media (media su tutte le particelle). Una volta raggiunto lo stato stazionario (lo studio della cui esistenza è stato un obiettivo del presente lavoro) ho calcolato la media temporale della velocità delle particelle, quantità che chiamerò velocità terminale media. Ho considerato N^2 particelle che all'inizio siano distribuite uniformemente in due celle adiacenti del flusso e che abbiano velocità iniziale nulla.

Prima di tutto mi sono domandata se particelle molto più dense del fluido potessero restare stabilmente sospese, se non addirittura muoversi in direzione opposta alla gravità, in un flusso cellulare oscillante. Ricerche sperimentali [31, 11] hanno già mostrato che ciò può avvenire in un flusso oscillante verticalmente, sebbene non si trattasse di un flusso cellulare. Da un punto di vista teorico, simulazioni di tipo lagrangiano [18] hanno permesso di individuare un numero di Stokes, $St=1$, in corrispondenza del quale si ha una massima riduzione di velocità nel caso di flusso cellulare stazionario. Sono partita quindi da questo lavoro per iniziare l'analisi presentata in questo lavoro di tesi. Ho analizzato prima gli effetti della diffusione molecolare sulla velocità terminale delle particelle in un flusso cellulare stazionario. Si vede che la diffusione non contribuisce a rallentare stabilmente la caduta delle particelle

più di quanto non accada già in un flusso cellulare stazionario. Man mano che l'effetto della diffusione diventa importante, la velocità media di caduta tende alla velocità nuda: è come se le particelle non 'vedessero' più il flusso a causa della forte diffusione. In altre parole, tutto va come se il fluido fosse fermo. Al contrario, via via che si riduce l'effetto diffusivo la velocità di caduta media tende, come è normale aspettarsi, a quella che si avrebbe in un flusso cellulare stazionario in assenza di diffusione. Ho anche mostrato come varia la distribuzione spaziale delle particelle al crescere della diffusione. In assenza di diffusione le particelle pesanti si accumulano lungo le pareti verticali delle celle. Infatti, l'inerzia delle particelle è così forte che non riescono a curvare per effetto del flusso, per cui tendono ad allontanarsi da regioni ad alta vorticità (all'interno delle celle) verso zone in cui la vorticità è assente (le pareti verticali delle celle): è questo un esempio del fenomeno di concentrazione preferenziale che caratterizza le particelle inerziali. Tuttavia, più la diffusione diventa importante, più il fenomeno di concentrazione preferenziale tende a scomparire.

Al fine di individuare le condizioni che rallentano la caduta delle particelle, ho impostato le simulazioni successive in modo che l'effetto della diffusione fosse trascurabile e ho iniziato a considerare un flusso oscillante (con ampiezza delle oscillazioni fissata) nel caso di oscillazioni sia orizzontali che verticali. Ho visto che un flusso cellulare che oscilla orizzontalmente non favorisce la levitazione delle particelle. Al contrario, se le oscillazioni del flusso sono verticali, si ottiene un'ulteriore riduzione della velocità di caduta media in corrispondenza ad una frequenza ω che ho determinato con grande accuratezza. Sono partita quindi da tale valore della frequenza per eseguire le altre simulazioni. È interessante notare, per comprendere a fondo il significato d'inerzia, che per alte frequenze di oscillazione la velocità terminale delle particelle tende alla velocità nuda: anche in questo caso la particella non vede più il flusso portante, ma a causa della sua inerzia non fa in tempo ad assecondare la velocità del flusso sottostante, che varia troppo velocemente. Per frequenze intermedie, invece, si osserva una successione di risonanze.

Facendo variare poi l'ampiezza delle oscillazioni, non ho notato sostanziali miglioramenti rispetto alla situazione di partenza. Ho quindi ipotizzato che dovesse esistere un legame tra la frequenza e l'ampiezza delle oscillazioni per ottenere la massima riduzione di velocità. Per cercare di capire questo legame ho analizzato la dipendenza della velocità terminale dall'ampiezza di oscillazione delle celle per diversi valori della frequenza in un intorno della frequenza di oscillazione ω precedentemente introdotta e ho visto come, limitatamente alle frequenze considerate, l'ampiezza di oscillazione per la quale le particelle rallentano maggiormente diminuisce al crescere della frequenza, similmente a quanto osservato in esperienze di laboratorio [31, 11], in cui a

oscillazioni più ampie del flusso corrisponde una frequenza di levitazione minore, intendendo con ciò indicare la frequenza a cui le particelle cominciano a levitare. Per oscillazioni di ampiezza sempre più grande la velocità terminale media sembra tendere a quella nuda, così come accade per le alte frequenze, come è evidente in uno dei casi osservati nelle simulazioni.

Successivamente ho fatto variare la geometria delle celle, più precisamente il rapporto tra lato verticale e lato orizzontale della cella, quantità che chiamerò *aspect ratio* e indicherò con L_{yx} . Ho eseguito le prime simulazioni fissando $L_{yx} = 1$, e cioè nel caso di celle quadrate. Ho potuto osservare che anche questo parametro influisce sulla velocità di caduta delle particelle, ottenendo un ulteriore rallentamento delle particelle, nel quale la velocità media si è ridotta di circa il 68% rispetto al caso di fluido fermo, del 42% rispetto a quanto ottenuto in un flusso cellulare stazionario.

Infine, ho potuto constatare che riducendo o aumentando leggermente l'effetto della gravità la situazione sostanzialmente non migliora, dato che la riduzione percentuale della velocità terminale rispetto alla velocità nuda aumenta di pochi punti percentuali, raggiungendo il 71% circa.

Nelle situazioni da me considerate non ho quindi constatato il verificarsi della levitazione di particelle molto pesanti in un flusso cellulare oscillante verticalmente, ma ho comunque ottenuto una riduzione significativa della velocità di caduta media, di circa il 71% rispetto al caso di fluido fermo.

Mi sono poi occupata di particelle più leggere del fluido. Sono partita dal caso in cui la densità delle particelle fosse la metà di quella del fluido, questo per verificare l'esito della simulazione da me effettuata nel caso di flusso cellulare stazionario, con un risultato già ottenuto in un lavoro precedente [17]. Fatto questo, ho considerato un flusso cellulare oscillante verticalmente con frequenza piccola ($\omega=0.1$) e ampiezza $B=1$. Riducendo poi l'effetto della gravità (così facendo l'accelerazione del fluido diventa più importante dell'accelerazione di gravità), ho simulato una situazione nella quale tutte le particelle rimangono stabilmente in oscillazione intorno a posizioni fisse. Nel capitolo 3 ho fornito un criterio matematico per verificare l'esistenza delle traiettorie chiuse osservate nelle simulazioni e averne una loro espressione matematica. Dopo essermi concentrata su questa situazione particolare in cui la velocità terminale media delle particelle è definita e risulta nulla, ho cercato di quantificare le condizioni in cui tale velocità da nulla diventa positiva. Fino a che punto posso, ad esempio, aumentare l'ampiezza delle oscillazioni affinché le particelle continuino ad oscillare stabilmente intorno a posizioni fisse? Man mano che B aumenta le curve chiuse (cicli limite) descritte dalle particelle si allargano sempre di più fino a deformarsi. Per B troppo grande ($8 < B < 9$) la velocità terminale media da nulla diventa positiva.

Per particelle ancora più leggere la situazione non cambia (ricordiamo

però che l'effetto della gravità, e quindi anche la spinta di Archimede, in queste simulazioni sono ridotti). Si verifica una transizione allorché le particelle hanno la stessa densità del fluido, situazione in cui le traiettorie delle particelle non tendono più asintoticamente a dei cicli limite.

Successivamente ho introdotto l'effetto della diffusione. Come è ragionevole che sia, solo se la diffusione è molto debole le particelle arrivano a un ciclo limite.

Infine, nel corso del mio lavoro, sarà interessante notare che non sempre è possibile individuare una velocità terminale media. Non si può quindi dare per scontato che, relativamente al sistema dinamico da me trattato (la particella inerziale immersa nel fluido), esista una velocità terminale media.

Appendice A

Modello semplificato per l'equazione di una particella rigida sferica in un flusso non uniforme

Nel primo capitolo sono partita dall'equazione ricavata da Maxey e Riley in [19], nella quale ho trascurato le correzioni di Faxen e l'integrale di Basset, ottenendo così l'equazione (1.24):

$$m_p \frac{d\mathbf{V}}{dt} = (m_p - m_f)\mathbf{g} - 6\pi a\mu [\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)] \\ + m_f \left. \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right|_{(\mathbf{X}(t), t)} - \frac{1}{2}m_f \frac{d}{dt} [\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)]$$

Nel lavoro di De Lillo [13] viene fatta la seguente approssimazione:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \approx \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

per cui si ottiene

$$m_p \frac{d\mathbf{V}}{dt} = (m_p - m_f)\mathbf{g} - 6\pi a\mu [\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)] \\ + m_f \left. \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right|_{(\mathbf{X}(t), t)} - \frac{1}{2}m_f \frac{d}{dt} [\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)]$$

da cui seguono i passaggi:

$$\begin{aligned} \left(m_p + \frac{1}{2}m_f\right) \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= (m_p - m_f)\mathbf{g} - 6\pi a\mu [\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)] + \\ &+ \frac{3}{2}m_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{u}\right) \Big|_{(\mathbf{X}(t), t)} \end{aligned}$$

che in termini del parametro β e del tempo di Stokes τ diventa

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= (1 - \beta)\mathbf{g} - \frac{[\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)]}{\tau} \\ &+ \beta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{X}(t), t) + \beta \mathbf{V}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Se confrontiamo l'equazione (A.1) con l'equazione non approssimata (5.1)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= (1 - \beta)\mathbf{g} - \frac{[\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)]}{\tau} \\ &+ \beta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{X}(t), t) + \frac{2}{3}\beta \left[\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) + \frac{1}{2}\mathbf{V}(t)\right] \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

ricaviamo il termine per cui i due modelli differiscono:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\beta \left[\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) + \frac{1}{2}\mathbf{V}(t)\right] \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) - \beta \mathbf{V}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) &= \\ = \frac{2}{3}\beta [\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) - \mathbf{V}(t)] \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) \end{aligned}$$

Se riscriviamo l'equazione di Maxey (A.2) mettendo in evidenza il termine cosí ottenuto si ricava:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= (1 - \beta)\mathbf{g} - \frac{[\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)]}{\tau} \\ &+ \beta \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{X}(t), t) + \mathbf{V}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)\right] + \frac{2}{3}\beta [\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) - \mathbf{V}(t)] \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) \end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \beta \frac{d\mathbf{u}}{dt}(\mathbf{X}(t), t) + (1 - \beta)\mathbf{g} - \frac{[\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)]}{\tau} \\ &+ \frac{2}{3}\beta [\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) - \mathbf{V}(t)] \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) \end{aligned}$$

Si nota che i due modelli coincidono nel caso di particelle molto pesanti ($\beta = 0$).

Appendice B

Sistemi hamiltoniani

Vengono qui brevemente esposte alcune definizioni e caratteristiche relative a questo tipo di sistema dinamico. Utili fonti di riferimento sono il testo di Hilborn [14] e di Crisanti e al.[10].

Si dice hamiltoniano un sistema dinamico la cui evoluzione temporale è regolata dalle equazioni:

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

dove la funzione $H(q_i, p_i, t)$ è detta hamiltoniana e in generale dipende dalle coordinate q_i , dai corrispondenti momenti coniugati p_i e dal tempo. Nello studio dei sistemi hamiltoniani si definisce grado di libertà ogni coppia (q_i, p_i) . Lo spazio degli stati di un sistema hamiltoniano viene tradizionalmente detto spazio delle fasi. Se il sistema ha N gradi di libertà lo spazio delle fasi corrispondente ha dimensione 2N.

Se H dipende in modo esplicito dal tempo, il sistema viene detto non autonomo. Se H non dipende esplicitamente dal tempo il sistema hamiltoniano viene detto autonomo e H è una costante del moto, per cui la dinamica del sistema evolve su una superficie di dimensione 2N-1. Esiste una classe di sistemi hamiltoniani autonomi, detti integrabili, per i quali esistono N costanti del moto (eattamente tante quante sono i gradi di libertà del sistema). In tal caso la traiettoria del sistema nello spazio delle fasi è vincolata su una superficie N-dimensionale detta toro invariante o toro KAM. Si può mostrare che un sistema integrabile non può avere un comportamento caotico, ma ha sempre una dinamica regolare, periodica o quasi-periodica ¹. In Hilborn [14]

¹Quando le frequenze che caratterizzano l'evoluzione del sistema sono fra loro incommensurabili

viene spiegato che tutti i sistemi hamiltoniani autonomi con un solo grado di libertà per i quali H sia una funzione infinitamente differenziabile di q e p , sono integrabili. Secondo un teorema, detto teorema KAM ² (si vedano ad esempio [6, 14]), se l'hamiltoniana di un sistema non integrabile può essere vista come la somma di un'hamiltoniana integrabile e di una perturbazione non integrabile ma sufficientemente piccola, i tori KAM sopravvivono e vengono gradualmente distrutti al crescere della perturbazione. In un sistema hamiltoniano non integrabile possono quindi sopravvivere delle regioni nello spazio delle fasi in cui la dinamica del sistema non è caotica (si veda anche [2, 4]).

²KAM sta per: Kolmogorov-Arnold-Moser.

Appendice C

Analisi di stabilità lineare dei punti fissi di una particella in un flusso cellulare stazionario

In questa sezione mostrerò i passaggi per ricavare l'equazione di stabilità lineare utilizzata da Maxey [21] per i punti fissi di una particella in un flusso cellulare stazionario. Si parte dall'equazione del moto della particella:

$$St \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} = \frac{2}{3} \beta St \left[\mathbf{u}(\mathbf{X}(t)) + \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right] \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}(t)) - \frac{d\mathbf{X}}{dt} + \mathbf{u}(\mathbf{X}(t)) + \mathbf{w}^*$$

equivalente al sistema di equazioni scalari:

$$\left\{ \begin{array}{l} St \frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{2}{3} \beta St \mathbf{u}(\mathbf{X}(t)) \cdot \nabla u_x(\mathbf{X}(t)) + \\ \quad + \frac{1}{3} \beta St \frac{dX}{dt} \cdot \nabla u_x(\mathbf{X}(t)) - \frac{dX}{dt} + u_x(\mathbf{X}(t)) \\ St \frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{2}{3} \beta St \mathbf{u}(\mathbf{X}(t)) \cdot \nabla u_y(\mathbf{X}(t)) + \\ \quad + \frac{1}{3} \beta St \frac{dY}{dt} \cdot \nabla u_y(\mathbf{X}(t)) - \frac{dY}{dt} + u_y(\mathbf{X}(t)) + w^* \end{array} \right. \quad (\text{C.1})$$

Queste due equazioni sono non lineari in \mathbf{X} . Per renderle lineari sviluppiamo in serie di Taylor (fino al primo ordine) i termini non lineari nell'intorno di un punto di equilibrio (x_0, y_0) :

- $\mathbf{u}(\mathbf{X}(t)) \cdot \nabla u_x(\mathbf{X}(t)) = \frac{\sin(2X(t))}{2} \approx \frac{\sin(2x_0)}{2} + \cos(2x_0)[X(t) - x_0]$
- $\mathbf{u}(\mathbf{X}(t)) \cdot \nabla u_y(\mathbf{X}(t)) = \frac{\sin(2Y(t))}{2} \approx \frac{\sin(2y_0)}{2} + \cos(2y_0)[Y(t) - y_0]$

- $\frac{d\mathbf{X}}{dt} \cdot \nabla u_x(\mathbf{X}(t)) \approx \frac{d\mathbf{X}}{dt} \cdot \nabla u_x(x_0, y_0)$
- $\frac{d\mathbf{X}}{dt} \cdot \nabla u_y(\mathbf{X}(t)) \approx \frac{d\mathbf{X}}{dt} \cdot \nabla u_y(x_0, y_0)$
- $u_x(\mathbf{X}(t)) = \sin(X) \cos(Y) \approx$
 $\approx \sin(x_0) \cos(y_0) + \cos(x_0) \cos(y_0)[X(t) - x_0] - \sin(x_0) \sin(y_0)[Y(t) - y_0]$
- $u_y(\mathbf{X}(t)) = -\cos(X) \sin(Y) \approx$
 $\approx -\cos(x_0) \sin(y_0) + \sin(x_0) \sin(y_0)[X(t) - x_0] - \cos(x_0) \cos(y_0)[Y(t) - y_0]$

Adesso possiamo linearizzare le equazioni (C.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} St \frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{2}{3} \beta St \left[\frac{\sin(2x_0)}{2} + \cos(2x_0)(X(t) - x_0) \right] + \\ \quad + \frac{1}{3} \beta St \left[\frac{dX}{dt} \cos(x_0) \cos(y_0) - \frac{dY}{dt} \sin(x_0) \sin(y_0) \right] - \frac{dX}{dt} + \\ \quad + \sin(x_0) \cos(y_0) + \cos(x_0) \cos(y_0)[X(t) - x_0] - \sin(x_0) \sin(y_0)(Y(t) - y_0) \\ St \frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{2}{3} \beta St \left[\frac{\sin(2y_0)}{2} + \cos(2y_0)(Y(t) - y_0) \right] + \\ \quad + \frac{1}{3} \beta St \left[\frac{dX}{dt} \sin(x_0) \sin(y_0) - \frac{dY}{dt} \cos(x_0) \cos(y_0) \right] - \frac{dY}{dt} + w^* + \\ \quad - \cos(x_0) \sin(y_0) + \sin(x_0) \sin(y_0)[X(t) - x_0] - \cos(x_0) \cos(y_0)(Y(t) - y_0) \end{array} \right. \quad (\text{C.2})$$

Ricordando che (x_0, y_0) è un punto fisso e per questo verifica le equazioni (3.6), il sistema (C.2) si semplifica e diventa:

$$\left\{ \begin{array}{l} St \frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{2}{3} \beta St \cos(2x_0)(X(t) - x_0) + \\ \quad + \frac{1}{3} \beta St \left[\frac{dX}{dt} \cos(x_0) \cos(y_0) - \frac{dY}{dt} \sin(x_0) \sin(y_0) \right] - \frac{dX}{dt} + \\ \quad + \cos(x_0) \cos(y_0)(X(t) - x_0) - \sin(x_0) \sin(y_0)(Y(t) - y_0) \\ St \frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{2}{3} \beta St \cos(2y_0)(Y(t) - y_0) + \\ \quad + \frac{1}{3} \beta St \left[\frac{dX}{dt} \sin(x_0) \sin(y_0) - \frac{dY}{dt} \cos(x_0) \cos(y_0) \right] - \frac{dY}{dt} + \\ \quad + \sin(x_0) \sin(y_0)(X(t) - x_0) - \cos(x_0) \cos(y_0)(Y(t) - y_0) \end{array} \right. \quad (\text{C.3})$$

Al fine di semplificare ulteriormente il problema, definisco le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}\tilde{X}(t) &\equiv X(t) - x_0 \\ \tilde{Y}(t) &\equiv Y(t) - y_0\end{aligned}$$

Allora il sistema (C.3) può essere riscritto come:

$$\left\{ \begin{aligned} St \frac{d^2 \tilde{X}}{dt^2} &= \frac{2}{3} \beta St \cos(2x_0) \tilde{X}(t) + \\ &+ \frac{1}{3} \beta St \left[\frac{d\tilde{X}}{dt} \cos(x_0) \cos(y_0) - \frac{d\tilde{Y}}{dt}(t) \sin(x_0) \sin(y_0) \right] - \frac{d\tilde{X}}{dt}(t) + \\ &+ \cos(x_0) \cos(y_0) X(t) - \sin(x_0) \sin(y_0) \tilde{Y}(t) \\ St \frac{d^2 \tilde{Y}}{dt^2} &= \frac{2}{3} \beta St \cos(2y_0) \tilde{Y}(t) + \\ &+ \frac{1}{3} \beta St \left[\frac{d\tilde{X}}{dt} \sin(x_0) \sin(y_0) - \frac{d\tilde{Y}}{dt} \cos(x_0) \cos(y_0) \right] - \frac{d\tilde{Y}}{dt} + \\ &+ \sin(x_0) \sin(y_0) X(t) - \cos(x_0) \cos(y_0) \tilde{Y}(t) \end{aligned} \right. \quad (\text{C.4})$$

Cerchiamo ora una soluzione $\tilde{\mathbf{X}}(t)$ che abbia la seguente forma:

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \tilde{\mathbf{X}}^* \exp(\lambda t)$$

Il sistema (C.4) diventa allora:

$$\left\{ \begin{aligned} St \lambda^2 \tilde{X}(t) &= \frac{2}{3} \beta St \cos(2x_0) X(t) + \\ &+ \frac{1}{3} \beta St \left[\lambda \tilde{X}(t) \cos(x_0) \cos(y_0) - \lambda \tilde{Y}(t) \sin(x_0) \sin(y_0) \right] - \lambda \tilde{X}(t) + \\ &+ \cos(x_0) \cos(y_0) \tilde{X}(t) - \sin(x_0) \sin(y_0) \tilde{Y}(t) \\ St \lambda^2 \tilde{Y}(t) &= \frac{2}{3} \beta St \cos(2y_0) \tilde{Y}(t) + \\ &+ \frac{1}{3} \beta St \left[\lambda \tilde{X}(t) \sin(x_0) \sin(y_0) - \lambda \tilde{Y}(t) \cos(x_0) \cos(y_0) \right] - \lambda \tilde{Y}(t) + \\ &+ \sin(x_0) \sin(y_0) \tilde{X}(t) - \cos(x_0) \cos(y_0) \tilde{Y}(t) \end{aligned} \right.$$

Nei prossimi passaggi introdurrò le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned} C &\equiv \cos(x_0) \cos(y_0) \\ D &\equiv \sin(x_0) \sin(y_0)\end{aligned}$$

Raccolgo $\tilde{X}(t)$ e $\tilde{Y}(t)$:

$$\begin{cases} \left[St\lambda^2 - \frac{2}{3}\beta St \cos(2x_0) - \frac{1}{3}\beta St C\lambda + \lambda - C \right] \tilde{X}(t) + \left[\frac{1}{3}\beta St D\lambda + D \right] \tilde{Y}(t) = 0 \\ \left[St\lambda^2 - \frac{2}{3}\beta St \cos(2y_0) + \frac{1}{3}\beta St C\lambda + \lambda - C \right] \tilde{Y}(t) - \left[\frac{1}{3}\beta St D\lambda + D \right] \tilde{X}(t) = 0 \end{cases}$$

Raccolgo le diverse potenze di λ :

$$\begin{cases} \left[St\lambda^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\beta St C \right) \lambda - \left(\frac{2}{3}\beta St \cos(2x_0) + C \right) \right] \tilde{X}(t) + \left[\frac{1}{3}\beta St D\lambda + D \right] \tilde{Y}(t) = 0 \\ \left[St\lambda^2 + \left(1 + \frac{1}{3}\beta St C \right) \lambda - \left(\frac{2}{3}\beta St \cos(2y_0) - C \right) \right] \tilde{Y}(t) - \left[\frac{1}{3}\beta St D\lambda + D \right] \tilde{X}(t) = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema omogeneo di due equazioni in due incognite. Condizione necessaria affinché questo sistema ammetta soluzioni non banali è che il determinante dei coefficienti sia nullo. Calcolo quindi tale determinante e impongo che sia uguale a zero:

$$\begin{aligned} & St^2\lambda^4 + 2St\lambda^3 + \left\{ \left[1 - \frac{1}{9}\beta^2 St^2 C^2 \right] - \frac{2}{3}\beta St^2 [\cos(2x_0) + \cos(2y_0)] \right\} \lambda^2 + \\ & + \left\{ \frac{2}{9}\beta^2 St^2 C [\cos(2y_0) - \cos(2x_0)] - \frac{2}{3}\beta St [\cos(2x_0) + \cos(2y_0)] - \frac{2}{3}\beta St C^2 \right\} \lambda + \\ & + \frac{4}{9}\beta^2 St^2 \cos(2x_0) \cos(2y_0) + \frac{2}{3}\beta St C [\cos(2y_0) - \cos(2x_0)] - C^2 + \\ & + \frac{1}{9}\beta^2 St^2 C^2 \lambda^2 + D^2 + \frac{2}{3}\beta St D^2 \lambda = 0 \end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} & St^2\lambda^4 + 2St\lambda^3 + \left\{ \left[1 + \frac{1}{9}\beta^2 St^2 (D^2 - C^2) \right] - \frac{2}{3}\beta St^2 [\cos(2x_0) + \cos(2y_0)] \right\} \lambda^2 + \\ & + \left\{ \frac{2}{9}\beta^2 St^2 C [\cos(2y_0) - \cos(2x_0)] - \frac{2}{3}\beta St [\cos(2x_0) + \cos(2y_0)] + \frac{2}{3}\beta St (D^2 - C^2) \right\} \lambda + \\ & + \frac{4}{9}\beta^2 St^2 \cos(2x_0) \cos(2y_0) + \frac{2}{3}\beta St C [\cos(2y_0) - \cos(2x_0)] + (D^2 - C^2) = 0 \end{aligned}$$

che è l'equazione usata da Maxey [21] per verificare la stabilità dei punti fissi e che mi sarà utile nell'analisi di alcune simulazioni.

Appendice D

Il programma

In questa sezione mostrerò i passaggi attraverso i quali ho discretizzato l'equazione del moto di una particella in un flusso generico in modo da poterla inserire nel programma con il quale ho effettuato simulazioni di tipo lagrangiano. Partiamo quindi dalle equazioni che regolano la dinamica della particella:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) = \mathbf{V}(t) \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt}(t) = \beta \frac{d\mathbf{u}}{dt}(\mathbf{X}(t), t) + \frac{(1-\beta)}{Fr^2} \hat{\mathbf{g}} + \frac{(\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) - \mathbf{V}(t))}{St} + \\ \quad + \frac{2}{3} \beta (\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) - \mathbf{V}(t)) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) + \sqrt{\frac{2}{Pe St^2}} \boldsymbol{\eta}(t) \end{array} \right. \quad (\text{D.1})$$

Dove $\boldsymbol{\eta}(t)$ rappresenta del rumore bianco, cioè un processo stocastico stazionario distribuito gaussianamente tale che $\langle \boldsymbol{\eta}(t) \rangle = 0$ e $\langle \eta_\mu(t) \eta_\nu(0) \rangle = \delta_{\mu\nu} \delta(t)$ (si veda [18]). Ricordando che l'orientamento da me scelto per l'asse y (asse verticale) è verso l'alto e tenendo conto dell'ipotesi di flusso bidimensionale, scriviamo la seconda equazione del sistema D.1 sotto forma delle due equazioni scalari corrispondenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_x}{dt}(t) = \beta \frac{du_x}{dt}(\mathbf{X}(t), t) + \frac{(u_x(\mathbf{X}(t), t) - V_x(t))}{St} + \\ \quad + \frac{2}{3} \beta (\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) - \mathbf{V}(t)) \cdot \nabla u_x(\mathbf{X}(t), t) + \sqrt{\frac{2}{Pe St^2}} \eta_x(t) \\ \frac{dV_y}{dt}(t) = \beta \frac{du_y}{dt}(\mathbf{X}(t), t) + \frac{(u_y(\mathbf{X}(t), t) - V_y(t))}{St} - \frac{(1-\beta)}{Fr^2} + \\ \quad + \frac{2}{3} \beta (\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) - \mathbf{V}(t)) \cdot \nabla u_y(\mathbf{X}(t), t) + \sqrt{\frac{2}{Pe St^2}} \eta_y(t) \end{array} \right.$$

Sviluppando i prodotti scalari che compaiono in queste due equazioni si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_x}{dt}(t) = \beta \frac{du_x}{dt}(\mathbf{X}(t), t) + \frac{(u_x(\mathbf{X}(t), t) - V_x(t))}{St} + \\ \quad + \frac{2}{3}\beta[(u_x(\mathbf{X}(t), t) - V_x(t))\partial_x u_x(\mathbf{X}(t), t) + \\ \quad + (u_y(\mathbf{X}(t), t) - v_y(t))\partial_y u_x(\mathbf{X}(t), t)] + \\ \quad + \sqrt{\frac{2}{Pe St^2}}\eta_x(t) \\ \frac{dV_y}{dt}(t) = \beta \frac{du_y}{dt}(\mathbf{X}(t), t) - \frac{(1-\beta)}{Fr^2} + \frac{(u_y(\mathbf{X}(t), t) - V_y(t))}{St} + \\ \quad + \frac{2}{3}\beta[(u_x(\mathbf{X}(t), t) - V_x(t))\partial_x u_y(\mathbf{X}(t), t) + \\ \quad + (u_y(\mathbf{X}(t), t) - V_y(t))\partial_y u_y(\mathbf{X}(t), t)] + \\ \quad + \sqrt{\frac{2}{Pe St^2}}\eta_y(t) \end{array} \right.$$

Raccogliamo i coefficienti di V_x e V_y :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_x}{dt}(t) = -a_{11}(\mathbf{X}(t), t)V_x(t) - a_{12}(\mathbf{X}(t), t)V_y(t) + \\ \quad + b_x(\mathbf{X}(t), t) + \sqrt{\frac{2}{Pe St^2}}\eta_x(t) \\ \frac{dV_y}{dt}(t) = -a_{21}(\mathbf{X}(t), t)V_x(t) - a_{22}(\mathbf{X}(t), t)V_y(t) + \\ \quad + b_y(\mathbf{X}(t), t) + \sqrt{\frac{2}{Pe St^2}}\eta_y(t) \end{array} \right. \quad (D.2)$$

dove:

$$\begin{aligned}
a_{11}(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{St} + \frac{2}{3}\beta \partial_x u_x(\mathbf{x}, t) \\
a_{12}(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{2}{3}\beta \partial_y u_x(\mathbf{x}, t) \\
a_{22}(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{St} + \frac{2}{3}\beta \partial_y u_y(\mathbf{x}, t) \\
a_{21}(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{2}{3}\beta \partial_x u_y(\mathbf{x}, t) \\
b_1(\mathbf{x}, t) &\equiv \beta \frac{du_x}{dt}(\mathbf{x}, t) + \frac{u_x(\mathbf{x}, t)}{St} + \frac{2}{3}\beta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla u_x(\mathbf{x}, t) \\
b_2(\mathbf{x}, t) &\equiv \beta \frac{du_y}{dt}(\mathbf{x}, t) + \frac{u_y(\mathbf{x}, t)}{St} - \frac{(1-\beta)}{Fr^2} + \\
&\quad + \frac{2}{3}\beta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla u_y(\mathbf{x}, t)
\end{aligned}$$

Scrivo le equazioni D.2 in forma differenziale:

$$\left\{ \begin{array}{l}
dX = V_x dt \\
dY = V_y dt \\
dV_x = \{ -a_{11}(\mathbf{X}(t), t)V_x(t) - a_{12}(\mathbf{X}(t), t)V_y(t) + \\
\quad + b_x(\mathbf{X}(t), t) \} dt + \sqrt{\frac{2}{Pe St^2}} dW_x \\
dV_y = \{ -a_{21}(\mathbf{X}(t), t)V_x(t) - a_{22}(\mathbf{X}(t), t)V_y(t) + \\
\quad + b_y(\mathbf{X}(t), t) \} dt + \sqrt{\frac{2}{Pe St^2}} dW_y
\end{array} \right. \quad (D.3)$$

dove dW_x e dW_y sono due processi stocastici di Wiener incrementali¹. Si può mostrare che $dW = N\sqrt{dt}$, dove N è un numero casuale distribuito gaussianamente con media nulla e varianza unitaria. Scriveremo quindi:

$$\begin{aligned}
dW_x &= N_1 \sqrt{dt} \\
dW_y &= N_2 \sqrt{dt}
\end{aligned} \quad (D.4)$$

Dopo aver fissato un passo temporale² Δ , per discretizzare le equazioni (D.3) introduco le seguenti notazioni:

¹Un processo di Wiener è distribuito in ogni istante come un processo gaussiano con media nulla e la cui varianza dipenda linearmente dal tempo.

²Durante le simulazioni sarà fondamentale scegliere un passo temporale che sia molto più piccolo del numero di Stokes, ovvero del tempo di risposta della particella inerziale alle sollecitazioni del flusso $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$: $\Delta \ll St$.

- $t_n \equiv t_0 + n\Delta$, dove t_0 è l'istante iniziale
- $\mathbf{X}_n \equiv \mathbf{X}(t_n)$
- $\mathbf{V}_n \equiv \mathbf{V}(t_n)$
- $A_{ij,n} \equiv a_{ij}(\mathbf{X}_n, t_n)$
- $B_{i,n} \equiv b_i(\mathbf{X}_n, t_n)$
- $X_{i,n} \equiv (\mathbf{X}_n)_i$
- $V_{i,n} \equiv (\mathbf{V}_n)_i$

Discretizziamo le equazioni (D.3):

$$\begin{cases} X_{i,n+1} - X_{i,n} = V_{i,n}\Delta \\ V_{i,n+1} - V_{i,n} = (-A_{ij,n}V_{j,n} - B_{i,n})\Delta + \sqrt{\frac{2}{PeSt^2}}N_i\sqrt{\Delta} \end{cases}$$

Risolviamo la prima equazione rispetto a $V_{i,n}$:

$$\begin{cases} V_{i,n} = \frac{X_{i,n+1} - X_{i,n}}{\Delta} \\ V_{i,n+1} = V_{i,n} - (A_{ij,n}V_{j,n} + B_{i,n})\Delta + \sqrt{\frac{2\Delta}{PeSt^2}}N_i \end{cases}$$

Sostituiamo l'espressione ottenuta per $V_{i,n}$ nella seconda equazione:

$$\begin{cases} V_{i,n} = \frac{X_{i,n+1} - X_{i,n}}{\Delta} \\ \frac{X_{i,n+2} - X_{i,n+1}}{\Delta} = \frac{X_{i,n+1} - X_{i,n}}{\Delta} - \left(A_{ij,n} \frac{X_{j,n+1} - X_{j,n}}{\Delta} + B_{i,n} \right) \Delta + \sqrt{\frac{2\Delta}{PeSt^2}}N_i \end{cases}$$

Seguono alcuni passaggi per mettere in evidenza $X_{i,n+2}$

$$\begin{cases} V_{i,n} = \frac{X_{i,n+1} - X_{i,n}}{\Delta} \\ X_{i,n+2} - X_{i,n+1} = X_{i,n+1} - X_{i,n} - \left(A_{ij,n} \frac{X_{j,n+1} - X_{j,n}}{\Delta} + B_{i,n} \right) \Delta^2 + \sqrt{\frac{2\Delta}{PeSt^2}}N_i\Delta \end{cases}$$

da cui si ricava:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{i,n} = \frac{X_{i,n+1} - X_{i,n}}{\Delta} \\ X_{1,n+2} = (2 - A_{11,n}\Delta)X_{1,n+1} - (1 - A_{11,n}\Delta)X_{1,n} \\ \quad - A_{12,n}(X_{2,n+1} - X_{2,n})\Delta + B_{1,n}\Delta^2 + \sqrt{\frac{2\Delta}{Pe St^2}}N_1\Delta \\ X_{2,n+2} = (2 - A_{22,n}\Delta)X_{2,n+1} - (1 - A_{22,n}\Delta)X_{2,n} \\ \quad - A_{21,n}(X_{1,n+1} - X_{1,n})\Delta + B_{2,n}\Delta^2 + \sqrt{\frac{2\Delta}{Pe St^2}}N_2\Delta \end{array} \right.$$

Queste equazioni, scritte per esteso, forniscono l'espressione, in forma discreta, della velocità della particella nel generico istante t_n e della sua posizione nell'istante t_{n+2} :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{1,n} = \frac{X_{1,n+1} - X_{1,n}}{\Delta} \\ V_{2,n} = \frac{X_{2,n+1} - X_{2,n}}{\Delta} \\ X_{1,n+2} = \left\{ 2 - \left[\frac{1}{St} + \frac{2}{3}\beta \partial_x u_x(\mathbf{X}_n, t_n)\Delta \right] \right\} X_{1,n+1} + \\ \quad - \left\{ 1 - \left[\frac{1}{St} + \frac{2}{3}\beta \partial_x u_x(\mathbf{X}_n, t_n)\Delta \right] \right\} X_{1,n} + \\ \quad - \frac{2}{3}\beta \partial_y u_x(\mathbf{X}_n, t_n)(X_{2,n+1} - X_{2,n})\Delta + \\ \quad + \left[\beta \frac{du_x}{dt}(\mathbf{X}_n, t_n) + \frac{u_x(\mathbf{X}_n, t_n)}{St} + \frac{2}{3}\beta \mathbf{u}(\mathbf{X}_n, t_n) \cdot \nabla u_x(\mathbf{X}_n, t_n) \right] \Delta^2 + \\ \quad + \sqrt{\frac{2\Delta}{Pe St^2}}N_1\Delta \\ X_{2,n+2} = \left\{ 2 - \left[\frac{1}{St} + \frac{2}{3}\beta \partial_y u_y(\mathbf{X}_n, t_n)\Delta \right] \right\} X_{2,n+1} + \\ \quad - \left\{ 1 - \left[\frac{1}{St} + \frac{2}{3}\beta \partial_y u_y(\mathbf{X}_n, t_n)\Delta \right] \right\} X_{2,n} + \\ \quad - \frac{2}{3}\beta \partial_x u_y(\mathbf{X}_n, t_n)(X_{1,n+1} - X_{1,n})\Delta + \\ \quad + \left[\beta \frac{du_y}{dt}(\mathbf{X}_n, t_n) + \frac{u_y(\mathbf{X}_n, t_n)}{St} + \frac{2}{3}\beta \mathbf{u}(\mathbf{X}_n, t_n) \cdot \nabla u_y(\mathbf{X}_n, t_n) + \right. \\ \quad \left. - \frac{(1-\beta)}{Fr^2} \right] \Delta^2 + \sqrt{\frac{2\Delta}{Pe St^2}}N_2\Delta \end{array} \right.$$

Sono queste le formule che ho poi codificato mediante il linguaggio Fortran 90. Come già detto nel quarto capitolo, supporremo le particelle inizialmente distribuite in modo uniforme in due celle adiacenti e con velocità iniziale nulla. Conoscendo la posizione e la velocità di una singola particella nell'istante iniziale t_0 , le prime due equazioni mi permettono di ottenere la sua posizione nell'istante successivo t_1 . Partendo dalle altre due equazioni si può determinare la posizione della particella nell'istante generico t_{n+2} conoscendone la posizione nei due istanti precedenti t_n e t_{n+1} .

Bibliografia

- [1] Auton T. R., Hunt J. C. R., Prud'homme M., 1988, *The Force Exerted on a Body in Inviscid Unsteady Non-uniform Rotational Flow*, Journal of Fluid Mechanics, **197**, 241-257
- [2] Babiano A., Cartwright J. H. E., Piro O. e Provenzale A., 2000, *Dynamics of a Small Neutrally Buoyant Sphere in a Fluid and Targeting in Hamiltonian Systems*, Phys. Rev. Lett. **84**, 25, 5764-5767
- [3] Bec J., 2002, *Particules, Singularités et Turbulence*, Tesi di Dottorato, Università P. et M. Curie, Parigi
- [4] Boffetta G., Lacorata G., Redaelli G. e Vulpiani A., 2001, *Detecting Barriers to Transport: a Review of Different Techniques*, Physica D **159**, 58-70
- [5] Burton T. D., Maxey M. R., Stock D. E., Wang L. P., 1992, *Chaotic Dynamics of Particle Dispersion in Fluids*, Physics of Fluids A, **4**, 1789-1804
- [6] Cartwright J. H. E., Feingold M. e Piro O., 1999, *An introduction to Chaotic Advection*, Mixing: Chaos and Turbulence, Ed. Chaté H., Villermaux E. e Chomez J. M., Kluwer, 307-342
- [7] Castiglione P., Crisanti A., Mazzino A., Vergassola M. e Vulpiani A., 1998, *Resonant Enhanced Diffusion in Time Dependent Flow*, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 7197-7210
- [8] Castiglione P., Mazzino A., Muratore-Ginanneschi P., 2000, *Numerical Study of Strong Anomalous Diffusion*, Physica A **280**, 60-68
- [9] Celani A., Falkovich G., Mazzino A., Seminara A., 2005, *Droplet Condensation in Turbulent Flows*, Europhysics Letters, **70**, 6, 775-781

- [10] Crisanti A., Falcioni M., Paladin G. e Vulpiani A., 1991, *Lagrangian Chaos: Transport, Mixing and Diffusion in Fluids*, Rivista del Nuovo Cimento, **14**
- [11] Deng Y. e Kwauk M., 1990, *Levitation of Discrete Particles in Oscillating Liquids*, Chemical Engineering Science, **45**, 483-490
- [12] Landau L. D., Lifshitz E. M., 1959, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press
- [13] De Lillo F., *Transport of Inertial Particle in Turbulence*, Tesi di Dottorato di Ricerca in Fisica, Università degli Studi di Torino
- [14] Hilborn R. C., 1994, *Chaos and Nonlinear Dynamics*, Oxford University Press
- [15] Kundu P. K., Cohen I. M., 2001, *Fluid Mechanics*, second edition, Academic Press
- [16] Langmuir I., 1938, *Surface Motion of Water Induced by Wind*, Science **87** (2550), 119-123
- [17] Marchioli C., Fantoni M. and Soldati A., 2007, *Influence of Added Mass on Anomalous High Rise Velocity of Light Particles in Cellular Flow Field: a Note on the Paper by Maxey (1987)*, Physics of Fluids **19**
- [18] Martins Afonso M., 2008, *The Terminal Velocity of Sedimenting Particles in a Flowing Fluid*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **41**, 1-15
- [19] Maxey M. R. and Riley J.J., 1983, *Equation of Motion for a Small Rigid Sphere in a Nonuniform Flow*, Physics of Fluids **26**, 883-889
- [20] Maxey M. R. e Corrsin S., 1986, *Gravitational Settling of Aerosol Particles in Randomly Oriented Cellular Flow Fields*, J. Atmos. Sci. **43**, 1112-1134
- [21] Maxey M. R., 1987, *The Motion of Small Spherical Particles in a Cellular Flow Field*, Physics of Fluids **30**, 1915-1928.
- [22] Maxey M. R., 1990, *On the Advection of Spherical and Non-Spherical Particles in a Non-Uniform Flow*, Philosophical Transactions: Physical Sciences and Engineering, **333**, 289-307
- [23] Mencuccini C., Silvestrini V., *Fisica I - Meccanica Termodinamica*, Liguori Editore.

- [24] Risken H., *The Fokker-Planck Equation - Methods of Solution and Applications*, Springer-Verlag.
- [25] Rubin J., Jones C. K. R. T. e Maxey M., 1995, *Settling and Asymptotic Motion of Aerosol Particles in a Cellular Flow Field*, Journal of Nonlinear Science, **5**, 337-358
- [26] Ruiz J., Macías D. e Peters F., 2004, *Turbulence Increases The Average Settling Velocity of Phytoplankton Cells*, Proceedings of the National Academy of Sciences, **101**, 51, 17720-17724
- [27] Solomon T. H. e Gollub J. P., 1988, *Chaotic Particle Transport in Time-dependent Rayleigh-Bénard convection*, Physical Review A, **38**, 6280-6286
- [28] Stokes G. G., 1851, *On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of a Pendulum*, Transaction of the Cambridge Philosophical Society, **9**, 8-106
- [29] Stommel H., 1949, *Trajectories of Small Bodies Sinking Slowly through Convection Cells.*, Journal of Marine Research, **8**, 24-29
- [30] Tizzi Marco, 2005, *Effetti Lagrangiani sui Processi di Condensazione in un Modello di Convezione Turbolenta*, Tesi di Laurea in Fisica, Università di Genova
- [31] Van Oeveren, R. M. e Houghton, G., 1971, *Levitation and Counter-gravity Motion of Spheres by Non-uniform Hydrodynamic Oscillations*, Chemical Engineering Science, **26**, 1958-1961