

INTRODUZIONE

I corsi di Meccanica dei Fluidi, Idraulica, Idrodinamica intendono fornire agli studenti di diversi corsi di laurea le basi per lo studio della dinamica dei fluidi, cioè gli strumenti utili per la descrizione del moto dei fluidi e per la predizione del loro movimento conoscendo le forze esercitate su di essi.

I corsi citati hanno in comune i principi fondamentali e le equazioni di base, differenziandosi per i problemi particolari analizzati in dettaglio.

Queste note hanno lo scopo di accompagnare lo studente durante i corsi di Idraulica 1 e Idrodinamica 1 offerti rispettivamente agli allievi dei corsi di laurea (di 1° livello) in ingegneria civile e ambientale e ingegneria navale della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Genova.

Esse sono altresì utilizzate, tutte o in parte per i corsi di Meccanica dei fluidi 1 (CL3 in Ingegneria Chimica) e Idraulica 1 (CL3 in Ingegneria dell'Ambiente – SV)

La forma di queste note è sintetica. In esse vengono riassunti i contenuti fondamentali delle lezioni svolte, cercando di seguire, per quanto possibile, la loro cronologia. Esse devono essere intese come un ausilio alla preparazione dell'esame che presuppone la frequenza al corso e un approfondimento dei temi trattati su testi facilmente reperibili nella biblioteca della Facoltà e in quella del Dipartimento di Ingegneria Ambientale.

⋮

Appunti del corso di Idraulica 1

INDICE

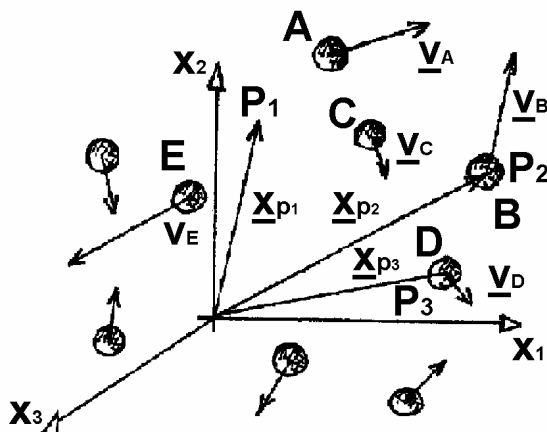
	INTRODUZIONE	Pag.	1
LEZIONE 1	Lo schema di continuo	Pag.	3
LEZIONE 2	Forze agenti su un continuo (fluido)	Pag.	7
LEZIONE 3	Fluidi in quiete	Pag.	13
LEZIONE 4	Fluidi in quiete: la distribuzione di pressione in un fluido a densità costante soggetto al campo di forze gravitazionali	Pag.	17
LEZIONE 5	L'equazione di stato	Pag.	21
LEZIONE 6	La distribuzione di pressione in un gas perfetto a temperatura costante soggetto al campo di forze gravitazionali	Pag.	25
LEZIONE 7	Fenomeni di interfaccia	Pag.	27
LEZIONE 8	La spinta esercitata da un fluido su una superficie piana	Pag.	31
LEZIONE 9	La spinta esercitata da un fluido su una superficie gobba	Pag.	45
LEZIONE 10	La tensione in un fluido in movimento	Pag.	51
LEZIONE 11	Analisi dimensionale e teorema di Buckingham	Pag.	55
LEZIONE 12	Similitudine e modelli	Pag.	61
LEZIONE 13	Descrizione del moto dei fluidi	Pag.	65
LEZIONE 14	I principi della meccanica dei fluidi	Pag.	73
LEZIONE 15	Le correnti fluide	Pag.	79

LEZIONE 16	Il principio di conservazione della massa per una corrente: l'equazione di continuità	Pag.	85
LEZIONE 17	Il principio della quantità di moto: l'equazione del moto	Pag.	89
LEZIONE 18	La valutazione di j	Pag.	93
LEZIONE 19	Alcuni problemi relativi a condotte a sezione circolare	Pag.	97
LEZIONE 20	Perdite concentrate di carico dovute a un brusco allargamento (perdite di borda)	Pag.	103
LEZIONE 21	Perdite concentrate di carico in un impianto	Pag.	107
LEZIONE 22	Problemi relativi ad alcuni semplici impianti	Pag.	111
LEZIONE 23	Fluidi ideali e teorema di Bernoulli per le correnti	Pag.	123
LEZIONE 24	Il teorema di Bernoulli	Pag.	127
LEZIONE 25	Teorie delle turbine Pelton	Pag.	135
LEZIONE 26	I transitori negli impianti idraulici. Il moto vario nelle correnti	Pag.	141

Lezione 1

LO SCHEMA DI CONTINUO

- I fluidi, come tutta la materia, hanno una struttura discontinua essendo formati da molecole (insieme di atomi) poste a distanze grandi rispetto alle loro dimensioni e animate da elevate velocità relative. In un punto arbitrario dello spazio non è quindi possibile definire con precisione le proprietà di un fluido (della materia) perché in tale punto potrebbe non esserci fluido (materia) o potrebbe trovarsi una particolare molecola dotata di una sua massa, di una sua velocità

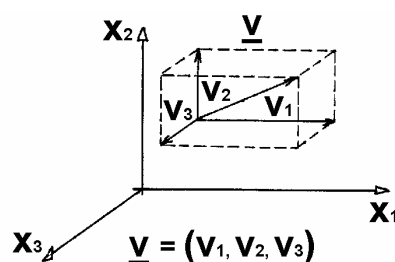


Esempio:

Nel punto P_1 individuato dal vettore posizione \underline{x}_{P_1} (NOTA 1) non è possibile definire alcuna velocità non essendo presente alcuna molecola. Nel punto P_2 , occupato all'istante in esame dalla particella B, possiamo definire la velocità \underline{v}_B che tuttavia è molto diversa dalla velocità \underline{v}_D presente nel punto P_3 ove transita la particella D.

NOTA 1

Una lettera sottosegnata indica un vettore, una grandezza cioè individuata da un modulo, una direzione e un verso. Quindi \underline{v} indica un vettore le cui componenti, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano costituito dagli assi x_1, x_2, x_3 , sono rispettivamente v_1, v_2, v_3 .



- Ciò che avviene a livello molecolare non è però di nostro interesse. E' possibile prescindere da questo carattere discontinuo della materia, se si prende in considerazione un volume che contiene un numero elevato di molecole e si definiscono delle grandezze medie. Ad esempio possiamo definire la densità ρ_1 associata al volume V_1 come il rapporto fra la massa M_1 in esso contenuta e il volume stesso.

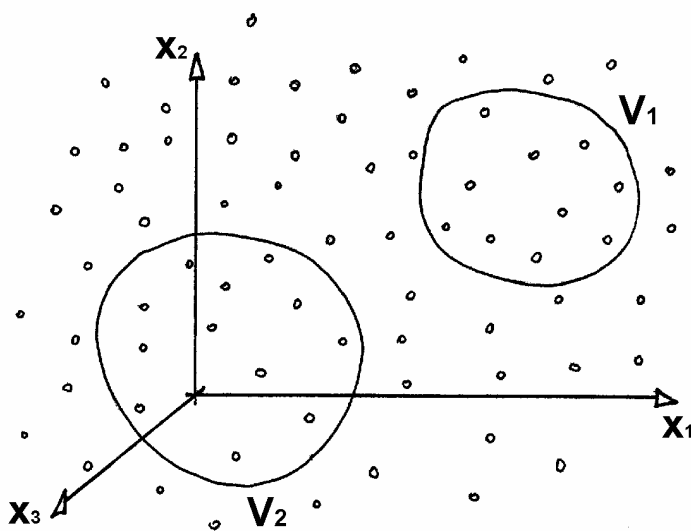
$$\rho_1 = \frac{M_1}{V_1}$$

Similmente possiamo definire

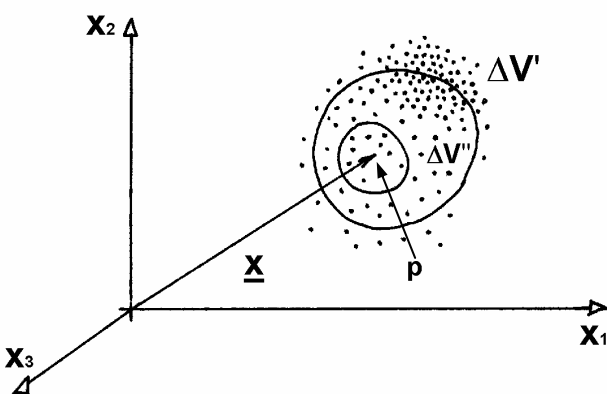
$$\rho_2 = \frac{M_2}{V_2}$$

e in generale

$$\rho_1 \neq \rho_2$$



- La densità in un punto



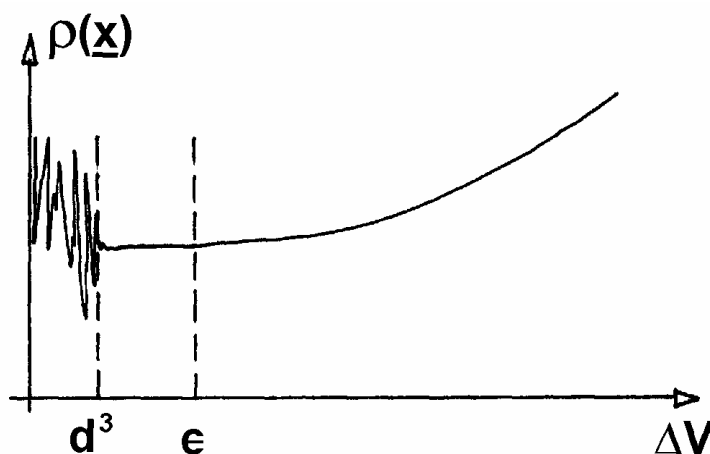
Consideriamo un punto P nello spazio individuato dal vettore posizione $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e un volume $\Delta V'$ che racchiude il punto P. Procedendo come prima possiamo associare al volume $\Delta V'$ una densità $\rho'_{\Delta V}$

$$\rho'_{\Delta V} = \frac{\Delta M'}{\Delta V'}$$

Scegliendo un altro volume $\Delta V''$ otterremo un valore della densità diverso: $\rho_{\Delta V''}$. La densità ρ nel punto P individuato dal vettore \underline{x} è definita come il limite di $\rho_{\Delta V}$ per ΔV tendente a valori piccoli (ϵ).

$$\rho(\underline{x}) = \lim_{\Delta V \rightarrow \epsilon} \frac{\Delta M}{\Delta V}$$

La dimensione del volume ϵ deve essere piccola rispetto alle dimensioni di interesse ma comunque molto maggiore della distanza media fra molecole. Infatti l'andamento di ρ in funzione di ΔV è rappresentato in figura ove d rappresenta la distanza media fra le molecole.



- Le dimensioni della densità ρ sono quelle di una massa divisa per un volume

$$[\rho] = ML^{-3}$$

e l'unità di misura è il Kg/m^3 .

La densità di alcuni fluidi è riportata in una nota relativa alla lezione 5.

-
-
- In modo analogo possiamo definire qualunque altra grandezza F di interesse, che risulterà una funzione continua della variabile \underline{x} (funzione continua dello spazio). In questo modo il fluido (materia) assume una struttura “continua”.

Considerando che le caratteristiche del fluido (materia) dipendono anche dal tempo, in generale avremo:

$$F = F(\underline{x}, t) = F(x_1, x_2, x_3, t)$$

con

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} F(\underline{x}, t) = F(\underline{x}_0, t)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(\underline{x}, t) = F(\underline{x}, t_0)$$

essendo F una qualunque proprietà.

Lezione 2

FORZE AGENTI SU UN CONTINUO (FLUIDO)

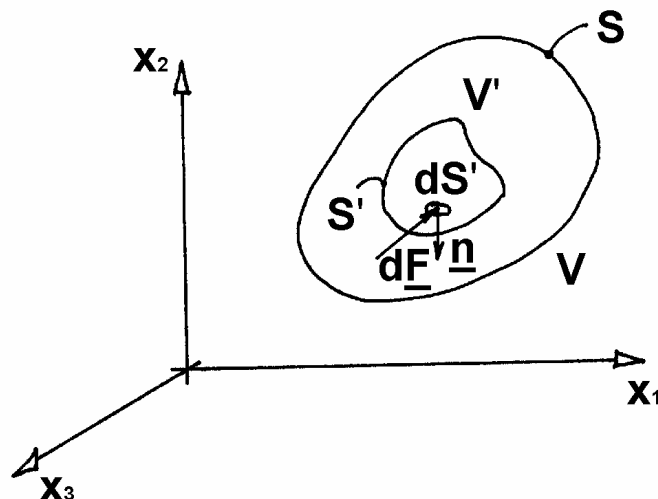
- Le molecole che costituiscono la materia esercitano delle forze sulle molecole circostanti che vengono suddivise in due categorie:

- 1) forze a corto raggio
- 2) forze a lungo raggio

Le prime (forze a corto raggio) assumono valori significativi solo quando le molecole si trovano a distanza dall'ordine delle loro dimensioni. Le seconde (forze a lungo raggio) decadono molto lentamente e rimangono significative anche quando le molecole sono a distanze rilevanti cioè molto maggiori delle loro dimensioni.

- Utilizzando lo schema di continuo illustrato nella LEZIONE 1, si tiene conto delle osservazioni sperimentali precedenti, introducendo due categorie di forze:

- 1) forze di superficie
- 2) forze di massa



Le prime (forze di superficie) sono proporzionali alla superficie considerata e sono il risultato delle forze molecolari di corto raggio. Le seconde (forze di massa) sono invece proporzionali alla massa presa in considerazione e sono il risultato delle forze molecolari di lungo raggio. Consideriamo un volume V di un continuo (fluido) e una sua parte V' . Denotiamo rispettivamente con S e S' le superfici che delimitano V e V' .

Attraverso una porzione piccola dS' (a rigori infinitesima) di normale \underline{n} della superficie S' , il continuo (fluido) all'esterno di S' esercita una forza $d\underline{F}$ (anch'essa piccola e a rigori infinitesima) sul continuo (fluido) all'interno. Se raddoppiano dS' la forza raddoppierà. Come detto precedentemente la forza è proporzionale alla superficie. Avremo quindi

$$d\underline{F} = \underline{t}dS$$

La quantità vettoriale \underline{t} si dice tensione

- Le dimensioni della tensione \underline{t} sono quelle di una forza divisa per una superficie

$$[\underline{t}] = ML^{-1}T^{-2}$$

L'unità di misura è il (NOTA 1) $Kg m^{-1}s^{-2}$ o anche il $(Kg ms^{-2})m^{-2} = Nm^{-2}$ denominata anche pascal (Pa). Nell'ingegneria vengono ancor oggi utilizzate unità di misura diverse. In particolare:

- il chilogrammo forza su metro quadro

$$1 Kg_f / m^2 = 9.81 N / m^2 = 9.81 Pa$$

- un'atmosfera normale

$$1 atm = 1,01325 \cdot 10^5 Pa$$

NOTA 1

Kg indica il chilogrammo massa

m indica il metro

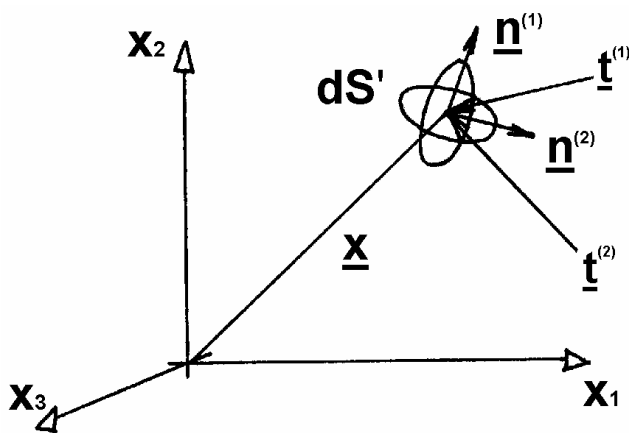
s indica il secondo

N indica il newton ($1N = 1 Kg ms^{-2}$)

- un bar

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

- La tensione \underline{t} in generale dipende dalla posizione \underline{x} della superficie infinitesima dS' , dal tempo t (non confondere \underline{t} con t) e dalla normale \underline{n} . In uno stesso punto e allo stesso tempo due superfici infinitesime di ugual area dS' e diversa normale \underline{n} saranno caratterizzati da valori diversi della tensione.



$$d\underline{F}^{(1)} = \underline{t}^{(1)} dS'$$

$$d\underline{F}^{(2)} = \underline{t}^{(2)} dS'$$

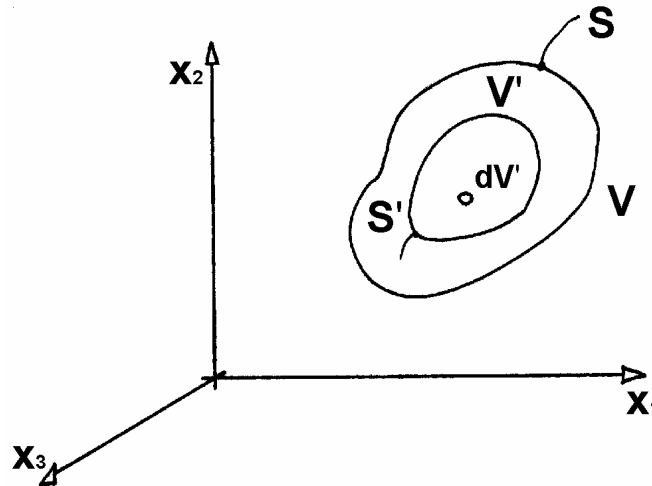
si ha quindi

$$\underline{t} = \underline{t}(\underline{x}, t, \underline{n})$$

- La forza $d\underline{F} = \underline{t}dS'$ descrive completamente l'azione che il continuo (fluido) all'esterno di V' esercita su quello all'interno attraverso la superficie dS' (ASSIOMA DI CAUCHY). Volendo determinare la forza complessiva (risultante) che il continuo (fluido) all'esterno di S' esercita su quello all'interno è necessario:
 - 1) suddividere la superficie S' in parti infinitesime dS'
 - 2) valutare su ciascuna parte la forza infinitesima $d\underline{F}$ esercitata dall'esterno: $d\underline{F} = \underline{t}dS'$
 - 3) sommare tutti i contributi individuati

$$\underline{F} = \int_{S'} \underline{t}dS'$$

- La forza $\underline{F} = \int_{S'} \underline{t} dS'$ rappresenta l'azione del continuo (fluido) all'esterno di V' (ma nelle immediate vicinanze di S') sul continuo all'interno. Tuttavia altra materia esiste anche a distanze elevate (molto maggiori delle dimensioni di V') e tali da non consentirne la rappresentazione nella figura.



Considerando una porzione piccola dV' (a rigori infinitesima) del volume V' , si assume che la materia molto distante da dV' e non rappresentata in figura eserciti una forza $d\underline{G}$ sul continuo contenuto in dV' proporzionale alla sua massa. Se raddoppiamo dV' e quindi la massa in considerazione, la forza raddoppierà. Come detto precedentemente la forza è proporzionale alla massa. Per quanto illustrato nella LEZIONE 1, la massa dM contenuta in dV' è esprimibile come

$$dM = \rho dV'$$

avremo quindi

$$d\underline{G} = \underline{f} \rho dV'$$

La quantità vettoriale \underline{f} è detta campo di forze

- Le dimensioni del campo di forze \underline{f} sono quelle di una forza divisa per una massa cioè quelle di un'accelerazione.

$$[\underline{f}] = LT^{-2}$$

L'unità di misura di \underline{f} è il ms^{-2}

- Il campo di forze \underline{f} in generale dipende dalla posizione \underline{x} e dal tempo t (non confondere \underline{t} con t).
- Volendo determinare la forza complessiva (risultante) che la materia lontana da V' esercita sul continuo (fluido) in esso contenuto è necessario:

1) suddividere il volume V' in parti infinitesime dV'

2) valutare su ciascuna parte la forza infinitesima $d\underline{G}$ (NOTA 2) esercita dall'esterno

$$d\underline{G} = \underline{f}\rho dV'$$

3) sommare tutti i contributi individuati

$$\underline{G} = \int_V \rho \underline{f} dV'$$

NOTA 2

Benchè diversi campi di forze possano essere considerati, nel seguito il campo di forze che incontreremo maggiormente è il campo di forze gravitazionale in cui $\underline{f} = \underline{g}$. Il vettore \underline{g} è diretto verticalmente verso il basso e ha un valore che noi assumeremo costanti pari a $9.81ms^{-2}$.

Lezione 3

FLUIDI IN QUIETE

- Come illustrato nella LEZIONE 2, la tensione \underline{t} all'interno di un continuo (fluido) dipende non solo dalla posizione individuata dal vettore \underline{x} e dal tempo t (non confondere \underline{t} con t) ma anche dall'orientamento della superficie infinitesima dS' presa in esame.

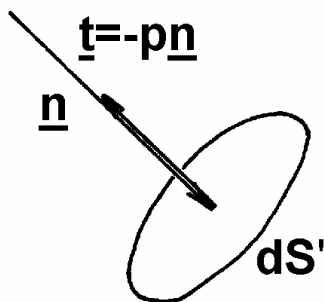
In generale

$$\underline{t} = \underline{t}(\underline{x}, t, \underline{n})$$

- Nei fluidi in quiete, tuttavia, la tensione assume una forma particolarmente semplice (ASSIOMA DI EULERO). In particolare \underline{t} risulta sempre ortogonale alla superficie in considerazione e diretta verso la superficie.

$$\underline{t} = -p\underline{n}$$

La quantità scalare p si dice pressione



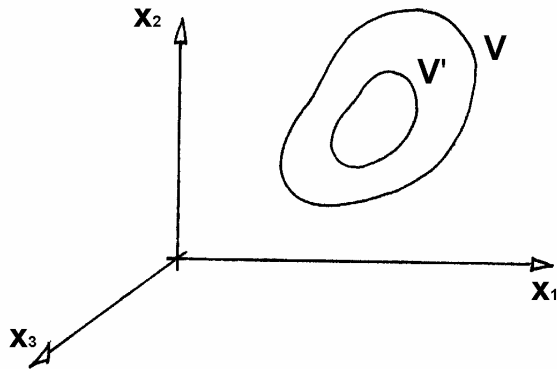
- Le dimensioni della pressione p sono uguali a quelle della tensione ($[p] = ML^{-1}T^{-2}$) così come le unità di misura.

- La pressione p in generale dipende dalla posizione \underline{x} e dal tempo t (non confondere \underline{t} con t)

$$p = p(\underline{x}, t)$$

L'EQUAZIONE INTEGRALE DELLA STATICA

- Consideriamo un volume di fluido V e una sua porzione arbitraria V' . Per il principio della quantità di moto (la derivata della quantità di moto di una massa in movimento rispetto al tempo



è uguale alla risultante delle forze esercitate sulla massa dall'esterno), la risultante delle forze che l'esterno esercita su V' deve annullarsi. Infatti in un fluido in quiete la quantità di moto è sempre nulla, essendo nulla la velocità. Per quanto esposto nella LEZIONE 2, la risultante \underline{R} delle forze esercitate dall'esterno su V' sarà

$$\underline{R} = \int_{s'} \underline{t} dS' + \int_{v'} \rho \underline{f} dV'$$

o, tenendo conto che $\underline{t} = -p\underline{n}$

$$\underline{R} = -\int_{s'} p \underline{n} dS' + \int_{v'} \rho \underline{f} dV'$$

Deve quindi risultare

$$\underline{R} = 0 \quad \text{oppure} \quad \boxed{\int_{s'} p \underline{n} dS' = \int_{v'} \rho \underline{f} dV'}$$

L'equazione precedente è detta equazione integrale della statica e deve valere qualunque volume V' .

L'EQUAZIONE PUNTUALE DELLA STATICA

L'equazione della statica in forma integrale può essere trasformata utilizzando il teorema del gradiente che porge

$$\int_{S'} p \underline{n} dS' = \int_{V'} \nabla p dV'$$

si ottiene quindi

$$\int_{V'} (\nabla p - \rho \underline{f}) dV = 0$$

Considerando che l'equazione della statica in forma integrale vale qualunque porzione V' di V si consideri, l'equazione precedente può essere soddisfatta solo se si annulla la funzione integranda; se cioè

$$\nabla p = \rho \underline{f}$$

L'equazione precedente, detta equazione puntuale della statica, è un'equazione vettoriale che corrisponde a tre equazioni scalari

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \rho f_1 \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = \rho f_2 \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho f_3$$

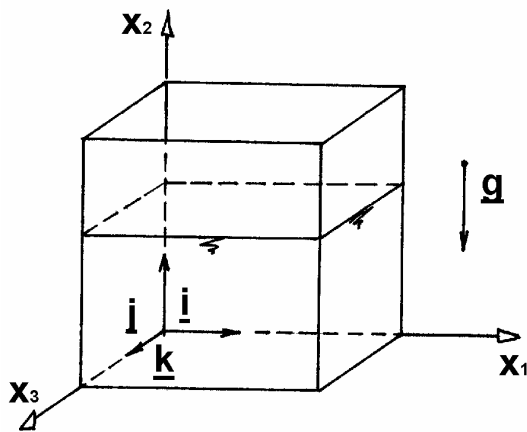
Essa descrive come cambia sullo spazio la pressione p . Tale equazione può essere integrata una volta noto il campo di forze \underline{f} e l'equazione di stato che lega la densità allo stato del fluido.

Appunti del corso di Idraulica 1

Lezione 4

FLUIDI IN QUIETE: LA DISTRIBUZIONE DI PRESSIONE IN UN FLUIDO A DENSITA' COSTANTE SOGGETTO AL CAMPO DI FORZE GRAVITAZIONALE

- In molte circostanze, discusse nella LEZIONE 5, la densità di un fluido può essere considerata costante. Qualora il campo di forze sia quello gravitazionale, è possibile integrare facilmente l'equazione puntuale della statica e ottenere la distribuzione spaziale della pressione.



Esempio:

Consideriamo il fluido, all'interno del contenitore in figura, supposto di densità costante ρ . Il campo di forze sia quello gravitazionale e l'accelerazione \underline{g} sia diretta verticalmente verso il basso, l'equazione puntuale della statica porge

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = -\rho g \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0$$

e impone quindi che la pressione non dipenda né da x_1 né da x_3 : la pressione è costante su un piano orizzontale.

La seconda equazione si trasforma in un'equazione alle derivate ordinarie che può essere facilmente integrata

$$\frac{dp}{dx_2} = -\rho g$$



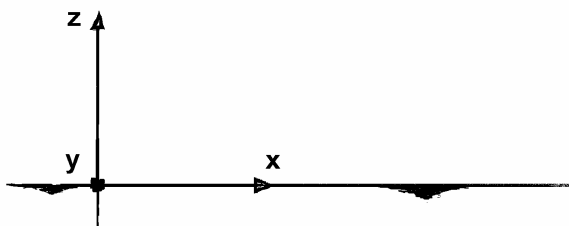
$$p = -\rho g x_2 + c_1 = -\gamma x_2 + c_1$$

La pressione aumenta linearmente all'aumentare della profondità. Il valore della costante c_1 può essere determinato solo se è nota la pressione in un punto. Il prodotto $\gamma = \rho g$ è detto peso specifico e le sue dimensioni sono quelle di una forza divisa per un volume

$$[\gamma] = ML^{-3}LT^{-2} = ML^{-2}T^{-2}$$

L'unità di misura è il Nm^{-3} . Nell'ingegneria viene talvolta utilizzato il chilogrammo forza su metro cubo.

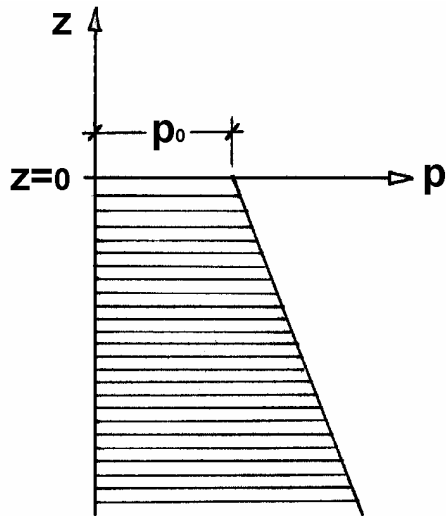
$$1Kg_f m^{-3} = 9.81 Nm^{-3}$$



- Con riferimento agli assi in figura, denotiamo con p_0 la pressione nel piano $z = 0$ che risulta essere l'interfaccia fra due fluidi. Non consideriamo per il momento il fluido sovrastante, che possiamo pensare essere aria, e focalizziamo l'attenzione su quello sottostante di peso specifico γ . Al fine di

analizzare un caso reale possiamo pensare quest'ultimo come acqua. Si ha dunque

$$p = p_0 - \gamma z$$



Essendo ρ (NOTA 1) pari a $1000 \text{ Kg}/\text{m}^3$ ed essendo p_0 pari alla pressione atmosferica cioè circa $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, l'andamento della pressione è quello riportato in figura.

La pressione raddoppia ad una profondità di circa 10m mentre diviene $3p_0$ a una profondità di circa 20m e così via. Dal grafico risulta evidente quanto già detto in precedenza e sintetizzato dalla formula: la pressione aumenta in modo lineare con la profondità.

- Per motivi che saranno chiari nel seguito, introduciamo la quantità

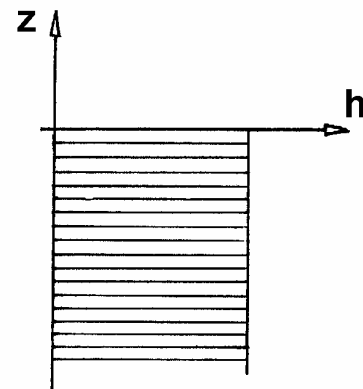
$$h = z + \frac{p}{\gamma}$$

detta carico piezometrico.

In un fluido in quiete h risulta costante

Si ha infatti

$$h = z + \frac{c_1 - \gamma z}{\gamma} = c_1$$



NOTA 1

La densità ρ dell'acqua, che in generale dipende dalla pressione e dalla temperatura (vedi LEZIONE 5), in molti casi può essere assunta costante e pari a $1000 \text{ Kg}/\text{m}^3$. Il peso specifico γ risulta quindi pari a $9810 \text{ N}/\text{m}^3$. Talvolta γ viene espresso in chilogrammi forza su metro cubo. In questo caso si ha $\gamma = 1000 \text{ Kg}_f/\text{m}^3$

- L'equazione della statica per un fluido a densità costante soggetto al campo di forze gravitazionale

$$\frac{d p}{d z} = -\rho g = -\gamma$$

porge anche

$$p_A - p_B = -\gamma (z_A - z_B)$$

Cioè la differenza di pressione fra due punti è pari a γ per la differenza di quota. Chiaramente il punto a quota più bassa ha la pressione maggiore.

Lezione 5

L'EQUAZIONE DI STATO

- Per i cosiddetti fluidi termodinamici, lo stato del fluido (le sue caratteristiche) dipende da due variabili, dette variabili di stato. Le due variabili di stato possono essere scelte arbitrariamente, essendo tutte le altre caratteristiche del fluido legate alle due scelte da equazioni dette “equazioni di stato”. Spesso come variabili di stato vengono scelte:

1) la pressione p

2) la temperatura T

Si ha quindi

$$\rho = \rho(p, T)$$

che è l'equazione di stato che lega la densità alla pressione e alla temperatura. L'equazione evidenzia che variando la pressione e/o la temperatura varia la densità del fluido. Ogni fluido è caratterizzato da una diversa equazione; cioè la sua densità può variare in modo più o meno significativo al variare della pressione e della temperatura.

- In forma differenziale l'equazione di stato può essere scritta nella forma

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right) dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) dT$$

L'equazione precedente può essere riscritta introducendo il coefficiente di comprimibilità isoterma e quello di dilatabilità isobara

- Coefficiente di comprimibilità isoterma

$$\epsilon^{-1} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)$$

- Coefficiente di dilatabilità isobaro

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)$$

L'equazione diviene

$$d\rho = \rho (\epsilon^{-1} dp - \alpha dT)$$

- Essendo proprietà del fluido, ϵ e α a loro volta dipendono da p e T . Tuttavia se le variazioni di p e T non sono elevate, ϵ e α possono essere considerati costanti e pari a ϵ_0 , α_0 .

Segue

$$\frac{d\rho}{\rho} = \epsilon_0^{-1} dp - \alpha_0 dT$$



$$\ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) = \epsilon_0^{-1} (p - p_0) - \alpha_0 (T - T_0)$$



$$\boxed{\rho = \rho_0 e^{\epsilon_0^{-1} (p - p_0) - \alpha_0 (T - T_0)}}$$

dove ρ_0 è la densità alla pressione p_0 e alla temperatura T_0 .

L'equazione precedente può essere considerata come equazione di stato in quelle situazioni in cui le variazioni di p e T non sono rilevanti.

Per valori della pressione e della temperatura pari a quelli ambientali (es.: $p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $T = 20^\circ\text{C}$), i valori di ϵ_0 e α_0 per l'acqua sono molto grandi e molto piccoli rispettivamente ($\epsilon_0 = 2.178 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$, $\alpha_0 = 20.66 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$). Per variazioni di pressione piccole rispetto a ϵ_0 e per variazioni di temperatura piccole rispetto a α_0^{-1} , è possibile approssimare $e^{\epsilon_0^{-1}(p-p_0) - \alpha_0(T-T_0)}$ con 1 e considerare il valore di ρ costante e pari a ρ_0 .

Considerazioni analoghe possono essere fatte anche per altri fluidi tenendo presente che per assumere $\rho \cong \rho_0$ è necessario che siano piccole (molto minori di 1) le quantità $(p - p_0)/\epsilon_0$ e $\alpha_0(T - T_0)$.

- Esistono altre forme di equazione di stato, valide per fluidi o casi particolari. Ad esempio per un gas perfetto che subisce una trasformazione isoterma l'equazione di stato diviene

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}$$

essendo p_0 e ρ_0 la pressione e la densità di riferimento. (NOTA 1)

NOTA 1

A temperatura $T = 15^\circ\text{C}$ e pressione $p = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ si ha:

Densità dell'acqua uguale a $9.99 \cdot 10^2 \text{ Kg/m}^3$

Densità dell'olio lubrificante uguale a $8.67 \cdot 10^2 \text{ Kg/m}^3$

Densità dell'aria uguale a 1.22 Kg/m^3

Densità del mercurio uguale a $1.36 \cdot 10^4 \text{ Kg/m}^3$

Lezione 6

LA DISTRIBUZIONE DI PRESSIONE IN UN GAS PERFETTO A TEMPERATURA COSTANTE SOGGETTO AL CAMPO DI FORZE GRAVITAZIONALE

L'equazione puntuale della statica impone

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti a temperatura costante (LEZIONE 5), si ottiene

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p\rho_0}{p_0} g$$



$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} dz = -\frac{\gamma_0}{p_0} dz$$

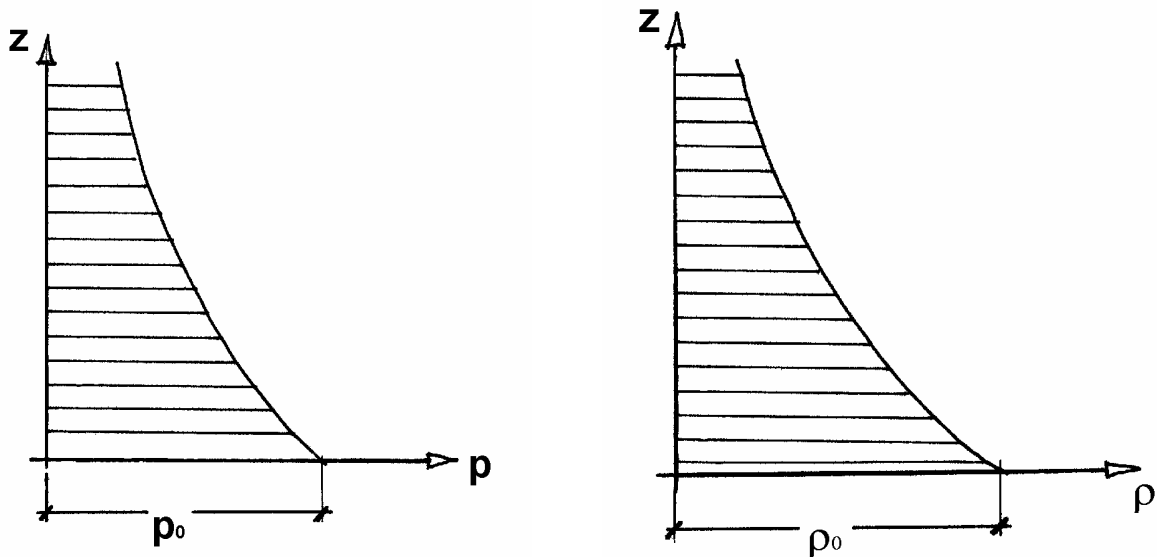


$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{\gamma_0}{p_0} (z - z_0)$$



$$p = p_0 e^{-\frac{\gamma_0 (z - z_0)}{p_0}}$$

Se consideriamo aria a una temperatura di $15^{\circ}C$ e assumiamo p_0 pari a $1,013 \cdot 10^5 Pa$ con $z_0 = 0$, il valore di γ_0 risulta pari a $11.2 N/m^3$. La figura riporta l'andamento di p e di ρ con la quota.



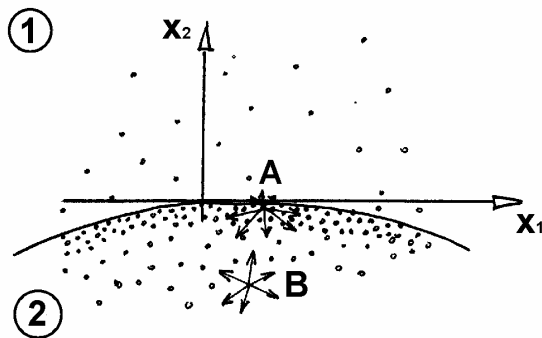
Se tuttavia le variazioni di quota sono modeste (per esempio se $z - z_0$ è inferiore a 100 m.), la quantità $\gamma_0(z - z_0)/p_0$ risulta molto minore di uno ($\gamma_0(z - z_0)/p_0 = 1.1 \cdot 10^{-2}$ per $z - z_0 = 100$ m) e sia la pressione che la densità possono essere assunte costanti. Infatti per valori piccoli di $\gamma_0(z - z_0)/p_0$ si può scrivere $p \cong p_0 \left[1 - \frac{\gamma_0(z - z_0)}{p_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_0(z - z_0)}{p_0} \right)^2 + \dots \right]$. Quindi se $(z - z_0)$ è pari a 100 m o inferiore, p può essere assunta pari a p_0 con un errore di ordine 10^{-4} o minore. E' per questo motivo che nei problemi che noi affronteremo, in cui le variazioni di quota sono modeste, riterremo la pressione atmosferica costante con la quota.

Lezione 7

FENOMENI DI INTERFACCIA

LA TENSIONE SUPERFICIALE

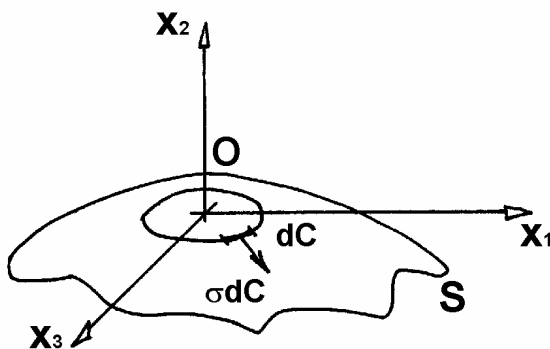
- I fenomeni che hanno luogo all'interfaccia fra due fluidi sono molto complessi e legati alla struttura molecolare della materia. Cerchiamo di dare una semplice spiegazione di tali fenomeni.



Con riferimento alla figura supponiamo che la densità del fluido ① sia inferiore a quella del fluido ②. La particella B del fluido ② è attirata dalle particelle limitrofe. Anche la particella A del fluido ② è attirata dalle particelle limitrofe. Tuttavia, essendo la densità del fluido ① inferiore a quella del fluido ②, la

risultante non sarà nulla ma verso il basso. E' evidente quindi che in prossimità della superficie le particelle tenderanno a formare uno strato più denso. Situazione analoga si avrà nel fluido ①.

- A livello macroscopico il fenomeno può essere schematizzato assumendo che l'interfaccia sia



una superficie soggetta ad uno stato di tensione. Con riferimento alla figura, la superficie S sia l'interfaccia fra due fluidi e C una curva chiusa su S che abbraccia l'origine O degli assi cartesiani (x_1, x_2, x_3) . Il fenomeno descritto precedentemente può essere schematizzato pensando che sul tratto dC , la superficie esterna alla zona delimitata dalla curva C eserciti una forza, sulla superficie

all'interno, di modulo pari a σdC , diretta ortogonalmente all'elemento di linea dC e tangente alla superficie. La quantità σ è detta tensione superficiale ed è una proprietà dell'interfaccia fra due

fluidi. Esisterà quindi la tensione superficiale aria – acqua , aria – olio, olio – acqua ma non la tensione superficiale di un singolo fluido. Dimensionalmente la tensione superficiale è una forza per unità di lunghezza

$$[\sigma] = MLT^{-2}L^{-1} = MT^{-2}$$

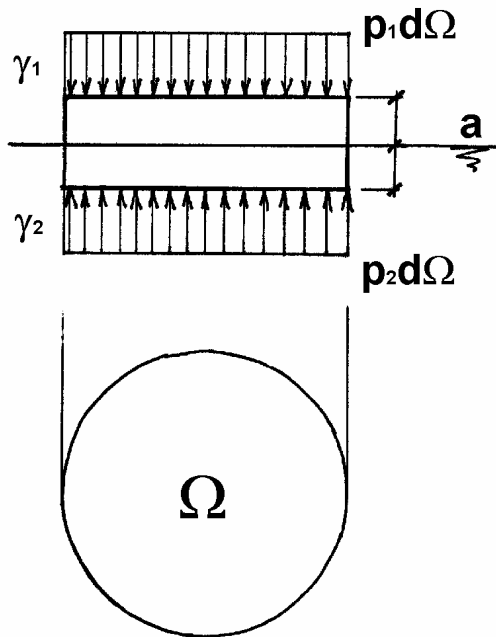
L'unità di misura è il Nm^{-1} o alternativamente il $Kg_f m^{-1}$.

- Nel seguito sono riportati alcuni valori della tensione superficiale di diversi liquidi con l'aria a una temperatura di $15^\circ C$ e alla pressione di un'atmosfera

Acqua	$7.3 \cdot 10^{-2} N / m$
Glicerina	$7.1 \cdot 10^{-2} N / m$
Benzene	$2.8 \cdot 10^{-2} N / m$
Mercurio	$47.3 \cdot 10^{-2} N / m$

CONTINUITA' DELLA PRESSIONE ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE PIANA

• Consideriamo l'interfaccia piana fra due fluidi rispettivamente di peso specifico γ_1 e γ_2 e analizziamo l'equilibrio di un cilindro a sezione circolare (vedi figura) di area Ω e altezza $2a$ per metà immerso nel primo fluido e per l'altra metà immerso nel secondo fluido. Si denoti con p_1 la



pressione (costante per quanto visto precedentemente nella LEZIONE 4) sulla base superiore del cilindro e con p_2 la pressione sulla base inferiore. Il fluido all'esterno del cilindro eserciterà quindi una forza verso il basso pari a $p_1\Omega$ dovuta alla somma di tante forze infinitesime $p_1d\Omega$ esercitate sull'area infinitesima $d\Omega$. Analogamente sarà presente una forza verso l'alto pari a $p_2\Omega$. Infine, sempre nella direzione verticale, è presente il peso del fluido contenuto dentro al cilindro pari a $\gamma_1\Omega a + \gamma_2\Omega a$. Non esiste altra forza nella direzione verticale; quindi l'equilibrio in tale direzione impone che

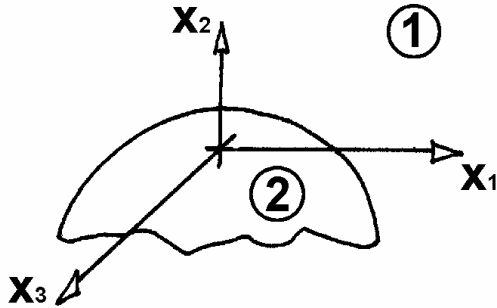
$$p_2\Omega = p_1\Omega + a\Omega(\gamma_1 + \gamma_2)$$

Nel limite di a tendente a zero si ottiene

$$p_2 = p_1$$

Dunque all'interfaccia, la pressione nel fluido ① è uguale alla pressione del fluido ②.

IL SALTO DI PRESSIONE ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE GOBBA



Qualora l'interfaccia fra due fluidi non sia piana la pressione p_1 all'interfaccia nel fluido ① sarà diversa dalla pressione p_2 all'interfaccia nel fluido ②. E' possibile mostrare che il salto di pressione $\Delta p = p_1 - p_2$ è pari a

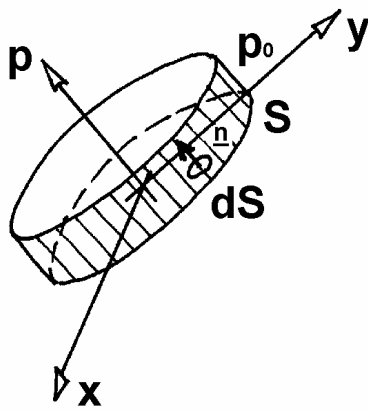
$$\pm \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

essendo R_1 e R_2 i raggi principali di curvatura nel punto in considerazione. La pressione sarà maggiore sul fluido che si trova dalla parte concava della superficie.

Lezione 8

LA SPINTA ESERCITATA DA UN FLUIDO SU UNA SUPERFICIE PIANA

- In primo luogo mostriamo (come assunto precedentemente nella LEZIONE 7) che la spinta su una superficie piana S prodotta da una distribuzione di pressione costante p_0 è una forza \underline{F} ortogonale alla superficie stessa diretta verso la superficie e di modulo pari al valore della pressione per l'area della superficie.



Per quanto esposto nella LEZIONE 2 e nella LEZIONE 3 si ha

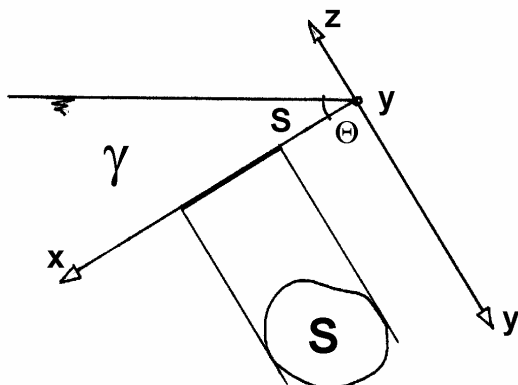
$$\underline{F} = \int_S -p \underline{n} dS$$

Nella situazione in esame $p = p_0$ e \underline{n} sono costanti.

Segue dunque

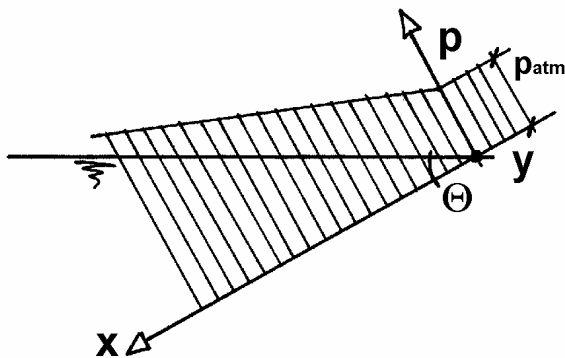
$$\underline{F} = -p_0 \underline{n} \int_S dS = -\underline{n} p_0 S$$

La forza \underline{F} è quindi diritta come \underline{n} , ha verso opposto e il suo modulo è pari a $p_0 S$.



S in esso contenuta.

- Consideriamo ora il problema illustrato in figura dove a sinistra del piano (x, y) è presente un liquido di peso specifico γ . Al di sopra del liquido e a destra della superficie è presente aria supposta a pressione costante pari alla pressione atmosferica p_{atm} . Nel disegno è anche raffigurato il piano (x, y) ribaltato sul foglio in modo tale da visualizzare la superficie



Si voglia determinare la forza esercitata dal liquido sulla superficie.

Nella figura accanto è rappresentato l'andamento della pressione sul piano (x, y) . Da quanto esposto nella LEZIONE 4 e nella LEZIONE 5 emerge che

$$p = p_{atm} + \gamma x \text{sen } \theta$$

essendo la profondità η del generico punto del piano (x, y) rispetto al pelo libero pari a $x \text{sen } \theta$.

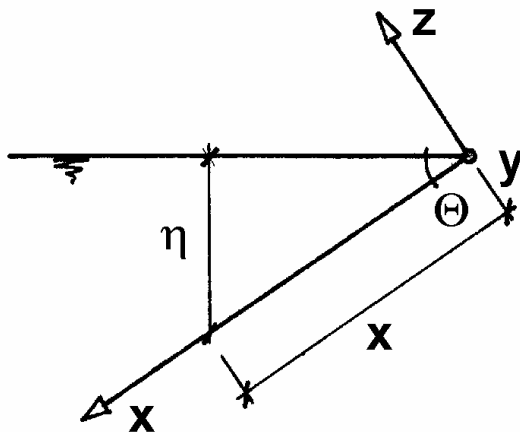
Volendo determinare la forza esercitata dal liquido sulla superficie S , è necessario determinare

$$\underline{F} = \int_S -p \underline{n} dS = \int_S (-p_{atm} + \gamma x \text{sen } \theta) \underline{n} dS$$

Tenendo conto che \underline{n} è costante, la forza \underline{F} può essere scomposta facilmente in due parti

$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = -\underline{n} p_{atm} S - \underline{n} \int_S \gamma x \text{sen } \theta dS$$

La forza $\underline{F}_1 = \underline{n} p_{atm} S$ è esattamente bilanciata da una forza uguale e contraria esercitata dall'aria sulla superficie. Per questo motivo il problema di determinare \underline{F} viene trasformato nella determinazione di \underline{F}_2



$$\underline{F}_2 = \int_S (p - p_{atm}) \underline{n} dS$$

La pressione p diminuita dalla pressione atmosferica è detta pressione relativa p_r .

- Considerando che l'uso della pressione relativa è più diffuso di quello della pressione assoluta, nella rimanente parte di questa lezione e nelle lezioni seguenti indicheremo con p la pressione relativa e con \underline{F} la forza da essa indotta.

- Dalla relazione

$$\underline{F} = -\underline{n} \int_S \gamma x \sin \theta dS$$

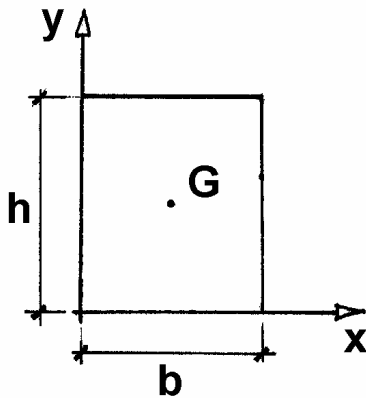
emerge chiaramente che la forza \underline{F} è ortogonale alla superficie (la direzione di \underline{F} coincide con quella di \underline{n}) è diretta dal liquido verso la superficie e ha intensità F pari a

$$\int_S \gamma x \sin \theta dS = \gamma \sin \theta \int_S x dS = \gamma \sin \theta x_G S = \gamma \eta_G S = p_G S \quad (\text{NOTA 1})$$

ove con il pedice G si sono indicate quantità riferite al baricentro G della superficie. Da quanto ricavato emerge inoltre che l'intensità della forza esercitata dal liquido sulla superficie può essere ricavata moltiplicando l'area della superficie per il valore della pressione (relativa) nel baricentro della superficie stessa.

- Nel seguito ricaviamo le coordinate x_G, y_G del baricentro di alcune semplici superfici piane

1) Rettangolo



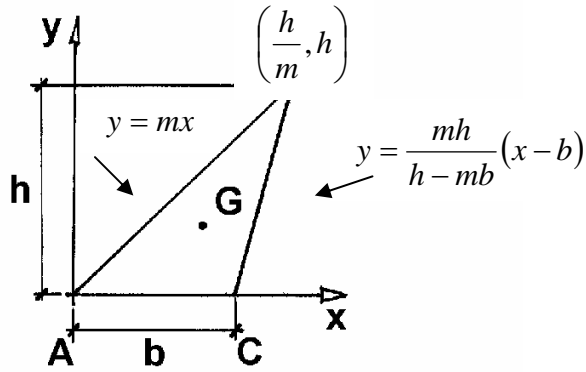
$$x_G = \frac{1}{S} \int_S x dS = \frac{1}{bh} \int_0^h \left(\int_0^b x dx \right) dy = \frac{h \frac{1}{2} b^2}{bh} = \frac{b}{2}$$

$$y_G = \frac{1}{S} \int_S y dS = \frac{1}{bh} \int_0^b \left(\int_0^h y dy \right) dx = \frac{b \frac{1}{2} h^2}{bh} = \frac{h}{2}$$

NOTA 1

$\int_S x dS$ è detto momento statico della superficie S rispetto all'asse y . Si ha quindi $\int_S x dS = x_G S$ essendo

2) Triangolo



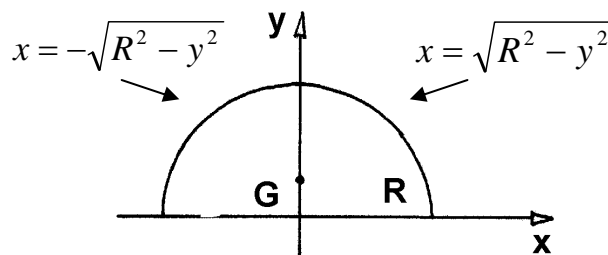
$$y_G = \frac{1}{S} \int_S y dS = \frac{2}{bh} \int_0^h \int_{y/m}^{y \frac{(h-mb)}{mh} + b} y dx dy$$

$$y_G = \frac{2}{bh} \int_0^h y \left[b + y \left(\frac{h-mb}{mh} - \frac{1}{m} \right) \right] dy = \frac{2}{bh} \left[b \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} \left(\frac{h-mb-h}{mh} \right) \right] = \frac{2}{bh} \left[\frac{bh^2}{2} - \frac{mbh^2}{3m} \right] = \frac{3bh^2 - 2bh^2}{3bh} = \frac{h}{3}$$

La coordinata y_G non dipende dal valore di m !

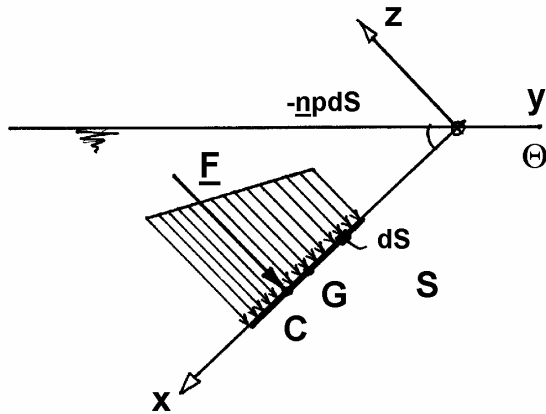
Ripetendo il calcolo ruotando il triangolo è facilmente verificabile che il baricentro G dista dalla base sempre un terzo dell'altezza qualunque lato sia scelto come base.

3) Semicerchio



x_G la coordinata x del baricentro della superficie S .

$$y_G = \frac{1}{S} \int_S y dS = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} y dx dy = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R 2y\sqrt{R^2-y^2} dy = \frac{2}{\pi R^2} \left[-\frac{2}{3} (R^2-y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^R = \frac{4}{3\pi} R$$



- Nota la direzione, il verso e il modulo della forza \underline{F} , per risolvere completamente il problema è necessario determinare la retta di applicazione di \underline{F} . La forza \underline{F} deve essere infatti equivalente alla somma delle forze infinitesime $-\underline{np}dS$ esercitate dal fluido sulle superfici infinitesime dS che

compongono S . \underline{F} sarà equivalente se avrà la stessa risultante e lo stesso momento rispetto ad un qualsiasi polo. Indicando con C il punto di incontro della retta di applicazione di \underline{F} con la superficie S si deve avere

$$F x_C = \int_S p x dS \qquad F y_C = \int_S p y dS$$

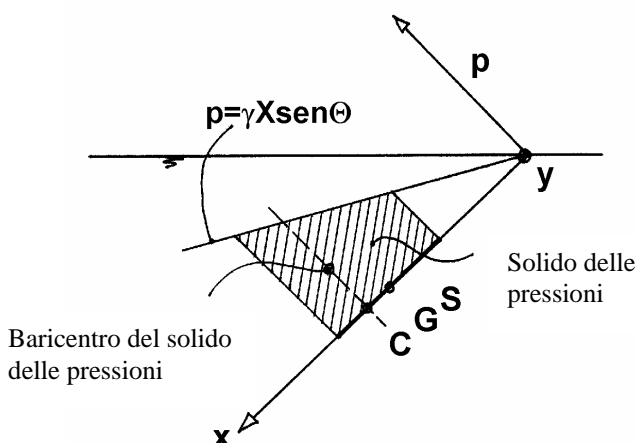
essendo (x_C, y_C) le coordinate del punto C detto “centro di spinta”.

Le formule precedenti, insieme alla relazione

$$F = \int p dS$$

precedentemente ricavata, evidenziano un importante risultato: le coordinate x_C, y_C coincidono con le coordinate del baricentro del cosiddetto solido delle pressioni, cioè di un solido, nello spazio

(x, y, p) , individuato dall’intersezione delle superfici $p = 0$ e $p = \gamma x \sin \theta$ con un cilindro a generatrici parallele all’asse p e con una direttrice coincidente con il contorno di S (vedi figura). E’ importante anche notare che il valore



di F coincide con il volume del solido delle pressioni.

- I risultati illustrati precedentemente suggeriscono una procedura semplice e rapida per il calcolo della forza \underline{F} e della sua retta di applicazione
- 1) Nello spazio (x, y, p) , con il piano (x, y) contenente la superficie S e l'asse p a esso ortogonale, tracciare l'andamento di $p(x, y)$.
 - 2) Individuare il solido delle pressioni.
 - 3) Scomporre il solido delle pressioni in parti di cui sia semplice valutare il volume e la posizione del baricentro.
 - 4) Valutare il volume V_i ($i = 1, 2, \dots, N$) delle N parti così individuate.
 - 5) Valutare le coordinate (x_{ci}, y_{ci}) dei baricentri degli N volumi.
 - 6) Calcolare la forza \underline{F}

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^N (-V_i \underline{n})$$

- 7) Calcolare le coordinate (x_c, y_c) del centro di spinta

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^N (V_i x_{ci})}{\sum_{i=1}^N V_i} \quad ; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^N (V_i y_{ci})}{\sum_{i=1}^N V_i}$$

- Consideriamo le relazioni già ottenute e discusse

$$Fx_C = \int_S pxdS \quad Fy_C = \int_S pydS$$

Discende

$$x_C = \frac{\int_S pxdS}{F} = \frac{\int_S pxdS}{\int_S pdS} = \frac{\int_S \gamma x^2 \text{sen } \theta dS}{\int_S \gamma x \text{sen } \theta dS} = \frac{\int_S x^2 dS}{\int_S xdS} = \frac{\int_S x^2 dS}{x_G S}$$

La quantità $\int_S x^2 dS$ è il momento d'inerzia della superficie S rispetto all'asse y e viene indicato con J_{yy} . E' inoltre noto che $J_{yy} = J_{y_G y_G} + S x_G^2$, essendo $J_{y_G y_G}$ il momento d'inerzia rispetto ad un asse parallelo all'asse y e passante per il baricentro G . Segue

$$x_C = \frac{J_{yy}}{x_G S} = \frac{S x_G^2 + J_{y_G y_G}}{x_G S} = x_G + \frac{J_{y_G y_G}}{x_G S}$$

Tale risultato mostra in particolare che il centro di spinta è sempre a una profondità maggiore o al più uguale al baricentro.

In modo analogo si mostra che

$$y_C = \frac{\int_S pydS}{\int_S pdS} = \frac{\int_S \gamma xy \text{sen } \theta dS}{\int_S \gamma x \text{sen } \theta dS} = \frac{\int_S xy dS}{\int_S xdS} = \frac{J_{xy}}{x_G S} = y_G + \frac{J_{x_G y_G}}{x_G S}$$

essendo J_{xy} e $J_{x_G y_G}$ i momenti centrifughi della superficie S rispetto agli assi x, y e ad assi a essi paralleli passanti per il baricentro G di S .

Resta da sottolineare che le formule precedentemente ricavate sono valide per una distribuzione continua di p e con riferimento ad un sistema di assi coordinati tali che la pressione si annulli nell'origine e lungo tutto l'asse y .

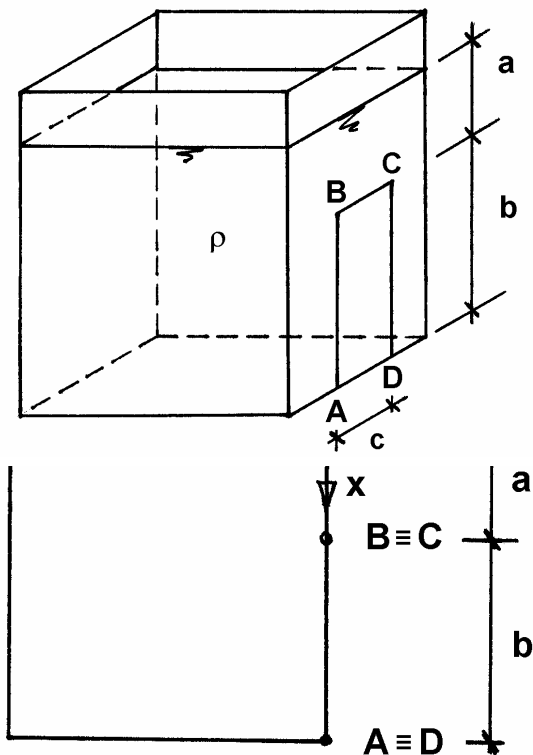
ESERCIZI SULLA DETERMINAZIONE DELLA SPINTA SU UNA SUPERFICIE PIANA

1) Si consideri il serbatoio in figura riempito di un liquido di densità ρ e si determini il momento

M necessario a mantenere in equilibrio la paratoia ABCD incernierata (e quindi in grado di ruotare ma non traslare) lungo il lato AD. Dati:

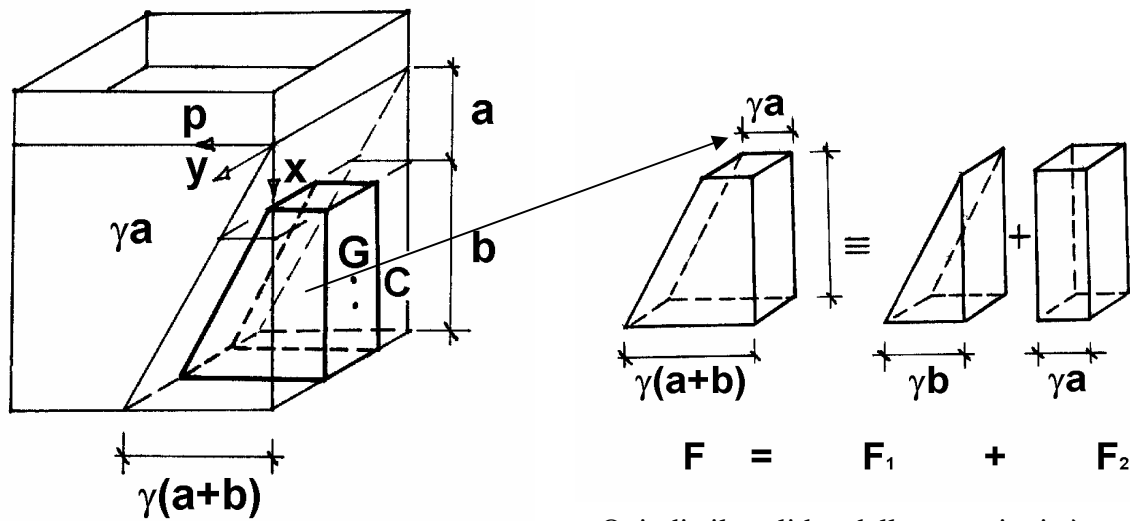
$$a = 0.5\text{m}, b = 0.7\text{m}, c = 0.2\text{m}$$

$$\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3 \text{ (acqua)}$$



Soluzione: Si introduca il sistema di riferimento in figura. Si ha

$$p = \rho g x$$



Quindi il solido delle pressioni è quello riportato nella figura seguente insieme a una

sua semplice scomposizione.

Emerge quindi che

$$F = F_1 + F_2 = \gamma \frac{b^2 c}{2} + \gamma abc$$

Il risultato ottenuto coincide con la relazione

$$F = p_G S$$

Infatti la pressione nel baricentro G della superficie è pari a

$$p_G = \gamma \left(a + \frac{b}{2} \right)$$

mentre

$$S = bc$$

Segue

$$F = \gamma abc + \gamma \frac{b}{2} bc$$

che coincide con la relazione già trovata.

Sapendo che il baricentro di un triangolo si trova a una distanza dalla base pari ad un terzo dell'altezza e che il baricentro di un rettangolo si trova a una distanza dalla base pari a metà dell'altezza è facile verificare che

$$x_C = (F_1 x_{C1} + F_2 x_{C2}) / F$$

$$\begin{aligned} x_C &= \left[\frac{\gamma b^2 c}{2} \left(a + \frac{2}{3} b \right) + \gamma abc \left(a + \frac{b}{2} \right) \right] / \left[\gamma \frac{b^2 c}{2} + \gamma abc \right] = \left[\frac{b}{2} \left(a + \frac{2}{3} b \right) + a \left(a + \frac{b}{2} \right) \right] / \left[a + \frac{b}{2} \right] = \\ &= \left[\frac{b}{2} \left(a + \frac{b}{2} + \frac{b}{6} \right) + a \left(a + \frac{b}{2} \right) \right] / \left[a + \frac{b}{2} \right] = \left[\left(\frac{a+b}{2} \right) \left(a + \frac{b}{2} \right) + \frac{b^2}{12} \right] / \left[a + \frac{b}{2} \right] = \left(a + \frac{b}{2} \right) + \frac{b^2 / 12}{a + \frac{b}{2}} \end{aligned}$$

Il valore di x_C appena determinato coincide con quello ricavabile dalla relazione

$$x_C = x_G + \frac{S_{y_G y_G}}{x_G S}$$

sapendo che il momento d'inerzia di un rettangolo rispetto ad un asse baricentrale è pari a un dodicesimo del prodotto della base con il cubo dell'altezza.

Segue infine che la forza \underline{F} è ortogonale alla superficie (quindi parallela all'asse z), diretta verso la superficie e di intensità pari a

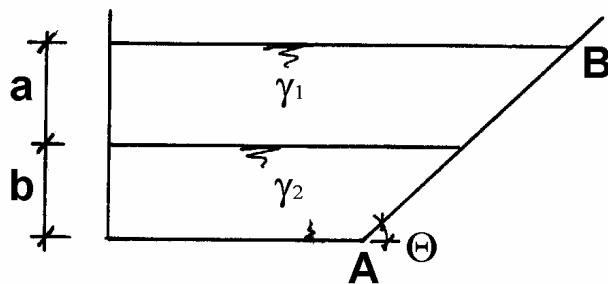
$$F = (9.81 \times 1000 \times 0.5 \times 0.7 \times 0.2 + 9.81 \times 1000 \times 0.35 \times 0.7 \times 0.2) N = 1167 N$$

Il momento da applicare per mantenere in equilibrio la paratoia sarà un vettore diretto lungo l'asse y , nel verso positivo, di modulo pari a

$$M = F(a + b - x_C) = F \left(a + b - a - \frac{b}{2} - \frac{b^2 / 12}{a + \frac{b}{2}} \right)$$

E' facile verificare che la quantità precedente coincide con

$$M = \gamma \frac{b^2 c}{2} \frac{b}{3} + \gamma abc \frac{b}{2} = \gamma cb^2 \left[\frac{b}{6} + \frac{a}{2} \right]$$



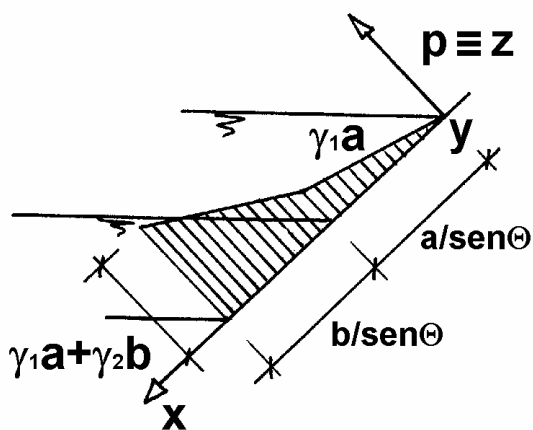
Segue quindi

$$M = 9.81 \times 1000 \times 0.2 \times \left[\frac{0.7}{6} + \frac{0.5}{2} \right] Nm = 719 Nm$$

2) Assumendo il problema piano e di larghezza unitaria, calcolare la forza esercitata dai fluidi sulla superficie AB. Siano γ_1 e γ_2 il peso specifico del fluido sovrastante e sottostante rispettivamente.

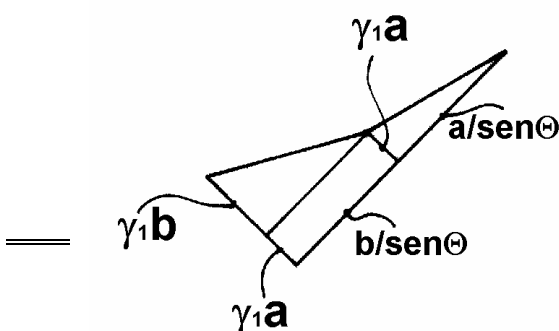
$$\text{Dati: } \gamma_1 = 800 \text{ Kg}_f / \text{m}^3; \gamma_2 = 1000 \text{ Kg}_f / \text{m}^3$$

$$a = 0.5m, b = 0.3m, \theta = \pi/4$$



Soluzione: Con riferimento agli assi in figura, la distribuzione di pressione risulta descritta da:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \gamma_1 x \text{sen } \theta \quad \text{per } x \leq \frac{a}{\text{sen } \theta} \\ p = \gamma_1 a + \gamma_2 \left(x - \frac{a}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen } \theta \quad \text{per } x \geq \frac{a}{\text{sen } \theta} \end{array} \right.$$

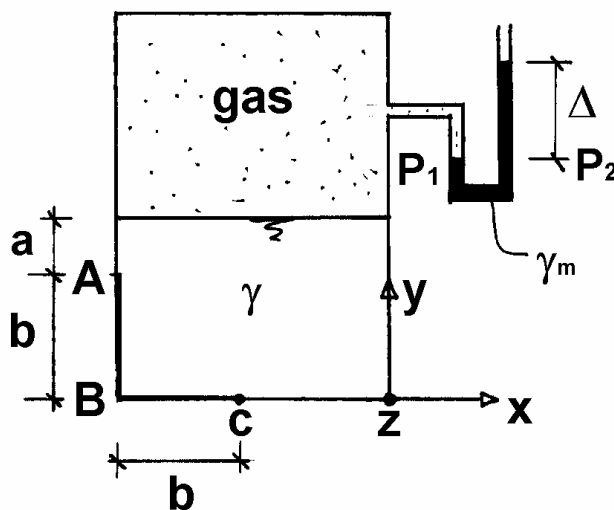


E' conveniente scomporre il solido delle pressioni come indicato in figura. Risulterà dunque

$$F = \gamma_1 \frac{a^2}{2 \sin \theta} + \gamma_1 \frac{ab}{\sin \theta} + \gamma_2 \frac{b^2}{2 \sin \theta}$$

Sostituendo i valori numerici

$$F = \left(800 \times \frac{0.5}{\sin \frac{\pi}{4}} \left[\frac{0.5}{2} + 0.3 \right] + 1000 \times \frac{0.3^2}{2 \sin \frac{\pi}{4}} \right) Kg_f = 375 Kg_f$$



- 3) Assumendo il problema piano e di larghezza unitaria, determinare il momento \underline{M} necessario a mantenere in equilibrio la paratoia ABC incernierata in C. Si trascuri il peso specifico del gas (si assuma quindi costante la sua pressione). La pressione del gas viene misurata attraverso il tubo manometrico contenente il liquido di peso specifico γ_m rilevando il dislivello Δ . Sia γ il peso specifico del liquido all'interno del serbatoio

Dati: $\gamma = 1000 \frac{Kg_f}{m^3}, \gamma_m = 13000 \frac{Kg_f}{m^3}$

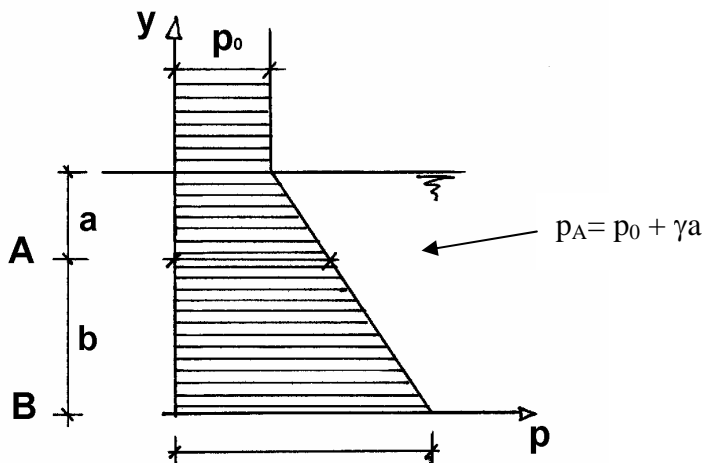
$\Delta = 5cm, a = 25cm, b = 35cm$

Soluzione: Il momento \underline{M} è un vettore ortogonale al piano del disegno ($\underline{M} = (0,0,M_z)$) e con una componente M_z negativa. Focalizziamo ora l'attenzione sul calcolo del modulo di \underline{M} .

Con riferimento alla figura la pressione p_0 nel gas è pari alla pressione nel punto P_1 che a sua volta è uguale alla pressione nel punto P_2 . Si ha dunque

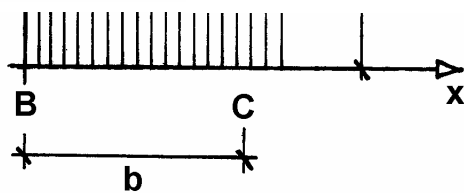
$$p_0 = \gamma_m \Delta$$

Sulla superficie AB la distribuzione di pressione sarà dunque quella qui rappresentata



$$p_B = p_0 +$$

$$p_B = p_0 + \gamma (a + b)$$



Sulla superficie BC la distribuzione di pressione sarà

La forza esercitata dal liquido sulla superficie AB sarà dunque orizzontale diretta da destra verso sinistra e pari alla somma di due contributi $F_1 + F_2$

$$F_1 = p_A b = (p_0 + \gamma a) b$$

$$F_2 = (p_B - p_A) \frac{b}{2} = \gamma \frac{b^2}{2}$$

Il primo contributo (F_1) è applicato ad una distanza da B pari a $b/2$, il secondo (F_2) è applicato ad una distanza da B pari a $b/3$.

Sulla superficie BC la distribuzione di pressione è costante e quindi il liquido eserciterà una forza diretta verticalmente verso il basso di intensità F_3 tale che

$$F_3 = p_B b = [p_0 + \gamma(a + b)] b$$

Inoltre F_3 è applicata ad una distanza da C pari a $\frac{b}{2}$.

Il modulo di M risulterà quindi

$$\begin{aligned} M &= F_1 \frac{b}{2} + F_2 \frac{b}{3} + F_3 \frac{b}{2} = (p_0 + \gamma a) \frac{b^2}{2} + \gamma \frac{b^3}{6} + [p_0 + \gamma(a + b)] \frac{b^2}{2} = p_0 b^2 + \gamma a b^2 + \gamma \frac{2}{3} b^3 = \\ &= \left[13000 \times 0.05 \times (0.35)^2 + 1000 \times 0.25 \times (0.35)^2 + 1000 \times \frac{2}{3} \times (0.35)^3 \right] \text{Kg}_f \text{m} = 139 \text{Kg}_f \text{m} \end{aligned}$$

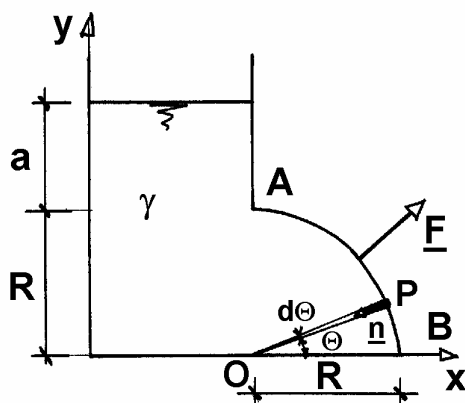
Lezione 9

LA SPINTA ESERCITATA DA UN FLUIDO SU UNA SUPERFICIE GOBBA

- Come illustrato nella LEZIONE 2 e nella LEZIONE 3, la forza esercitata da un fluido in quiete su una superficie S risulta

$$\underline{F} = \int_S - p \underline{n} dS$$

Mentre per una superficie piana \underline{n} è indipendente dalla posizione sulla superficie e quindi costante, facilitando la valutazione dell'integrale, nel caso di una superficie gobba \underline{n} risulta variabile. Non è possibile illustrare una procedura generale per la valutazione dell'integrale considerando che essa dipende dalla forma della superficie. Consideriamo il caso particolare illustrato in figura (assunto piano). Poniamoci l'obiettivo di determinare la forza \underline{F} esercitata dal liquido di peso specifico γ sulla superficie AB assunta di larghezza unitaria. In primo luogo è opportuno valutare separatamente la componente lungo la direzione x e quella lungo la direzione y .



$$F_x = \int_S - p n_x dS$$

$$F_y = \int_S - p n_y dS$$

Per valutare gli integrali è conveniente utilizzare un sistema di coordinate polari con l'origine nel punto O . Nel generico punto P della superficie AB si ha

$$\underline{n} = (-\cos\theta, -\sin\theta)$$

Inoltre $dS = R d\theta$ avendo assunto la larghezza della superficie unitaria. Infine la pressione p nel punto P risulterà

$$p = \gamma [a + R - R \sin \theta] = \gamma a + \gamma R (1 - \sin \theta)$$

Segue quindi

$$\begin{aligned} F_x &= \int_0^{\pi/2} -[\gamma a + \gamma R(1 - \sin \theta)](-\cos \theta) R d\theta = \gamma(a + R)R [\sin \theta]_0^{\pi/2} + \gamma R^2 \frac{1}{4} [\cos 2\theta]_0^{\pi/2} = \\ &= \gamma(a + R)R - \frac{\gamma R^2}{2} = \gamma \left(a + \frac{R}{2} \right) R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y &= \int_0^{\pi/2} -[\gamma a + \gamma R(1 - \sin \theta)](-\sin \theta) R d\theta = -\gamma(a + R)R [\cos \theta]_0^{\pi/2} - \gamma R^2 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \gamma(a + R)R - \gamma \frac{\pi R^2}{4} \end{aligned}$$

Nel caso in esame si è riusciti facilmente a valutare gli integrali che forniscono F_x e F_y . Tuttavia quando la geometria del problema è più complessa, la valutazione di \underline{F} utilizzando l'espressione

$\int_S -p \underline{n} dS$ può risultare difficile.

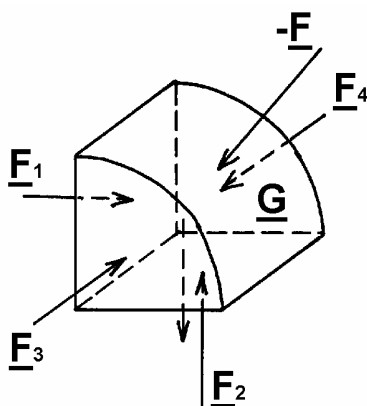
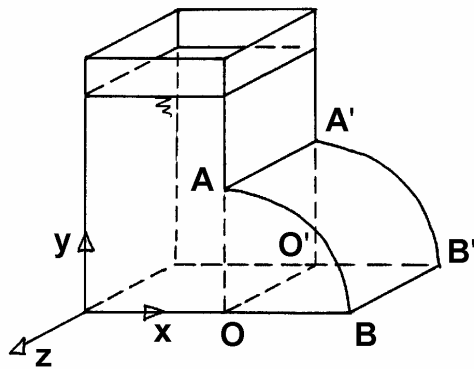
- Una procedura alternativa che spesso consente il rapido calcolo di \underline{F} è quella illustrata nel seguito
 - Utilizzando superfici piane e la superficie gobba in esame, isolare un volume di fluido.
 - Determinare le forze $\underline{F}_1, \underline{F}_2, \dots, \underline{F}_N$ che il fluido all'esterno del volume esercita sulle superfici piane.
 - Calcolare la forza \underline{F} esercitata dal fluido sulla superficie gobba, imponendo l'equilibrio del volume isolato, su cui l'esterno esercita $\underline{F}_1, \underline{F}_2, \dots, \underline{F}_N, -\underline{F}$ e la forza peso \underline{G}

Risulterà

$$\sum_{i=1}^N \underline{F}_i - \underline{F} + \underline{G} = 0$$

Da cui

$$\underline{F} = \underline{G} + \sum_{i=1}^N \underline{F}_i$$



Al fine di illustrare chiaramente la procedura, applichiamo al problema considerato precedentemente. Consideriamo il volume di fluido delimitato dalla superficie gobba $AA'B'B$, dalle superfici piane $AA'O'O$, $OO'B'B$, OAB , $O'A'B'$.

Considerando l'orientamento delle superfici piane e indicando con $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ i versori degli assi x, y, z rispettivamente, è facile vedere che

$$\underline{F}_1 = F_1 \underline{i}; \quad \underline{F}_2 = F_2 \underline{j}; \quad \underline{F}_3 = -F_3 \underline{k}; \quad \underline{F}_4 = F_4 \underline{k}$$

$$\underline{G} = -G \underline{j}$$

L'equilibrio del volume considerato alla traslazione lungo i tre assi impone

$$F_x = F_1; \quad F_y = F_2 - G; \quad F_z = F_4 - F_3$$

avendo denotato con (F_x, F_y, F_z) il vettore \underline{F} .

Utilizzando i risultati illustrati nella LEZIONE 8 è possibile determinare F_i . Si ha

$$F_1 = \gamma \left(a + \frac{R}{2} \right) R; \quad F_2 = \gamma (a + R) R$$

$$F_3 = F_4 = \gamma \left(a + R - \frac{4R}{3\pi} \right) \frac{\pi R^2}{4}$$

Inoltre

$$G = \gamma \frac{\pi R^2}{4}$$

Segue

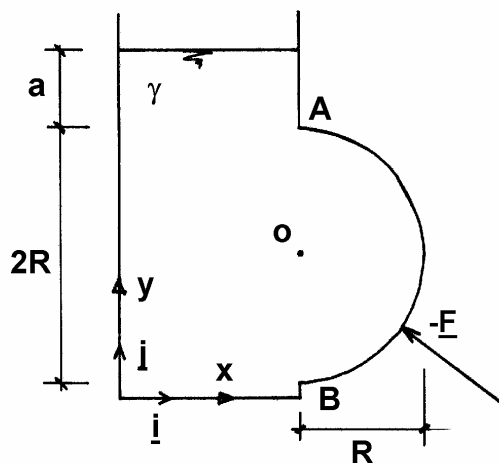
$$F_x = \gamma \left(a + \frac{R}{2} \right) R; \quad F_y = (a + R) R - \gamma \frac{\pi R^2}{4}; \quad F_z = 0$$

I risultati ottenuti coincidono con quelli ricavati precedentemente.

- Nel caso di una superficie gobba, il sistema equivalente alla somma delle forze infinitesime $-pndS$ è in generale fornito da una forza e da una coppia. Per individuare la retta di applicazione di \underline{F} e il valore della coppia è necessario imporre l'equilibrio alla rotazione del volume in esame. Nel nostro caso, considerando che le forze infinitesime passano per la retta OO' e per la simmetria del problema, si può affermare che la forza \underline{F} passa per la retta OO' in un punto equidistante da O e da O' e il valore della coppia è nullo.

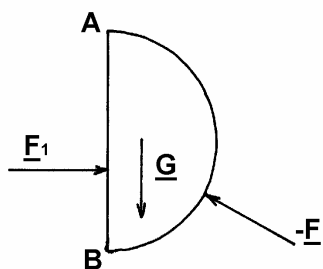
ESERCIZI SULLA DETERMINAZIONE DELLA SPINTA SU UNA SUPERFICIE GOBBA

1)



Si consideri il problema piano rappresentato in figura e costituito dalla determinazione della forza \underline{F} esercitata dal fluido di peso specifico γ sulla superficie AB supposta di larghezza unitaria.

Soluzione: si consideri il volume isolato dalla superficie gobba AB e dalla superficie piana AB , come evidenziato nella figura accanto. Per quanto spiegato precedentemente



Da cui

$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{G}$$

$$F_x = F_1 = \gamma(a + R)2R$$

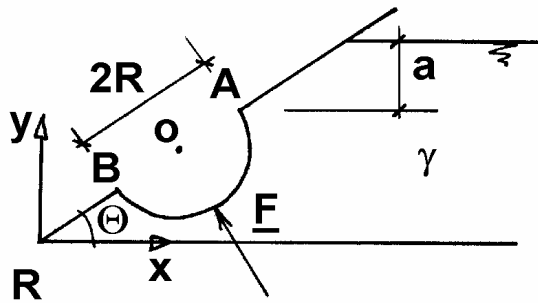
$$F_y = G = \gamma \frac{\pi R^2}{2}$$

con

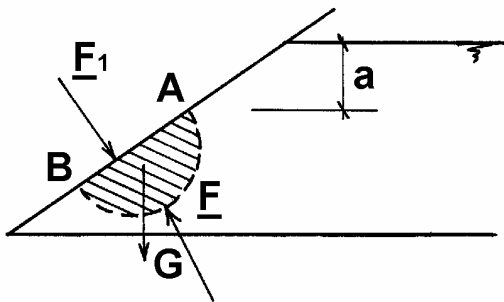
$$\underline{F}_1 = F_1 \underline{i} \quad \underline{G} = -G \underline{j} \quad \underline{F} = F_x \underline{i} - F_y \underline{j}$$

E' evidente inoltre che la forza \underline{F} passa per il punto O.

2) Si consideri il problema piano rappresentato in figura e costituito dalla determinazione della forza \underline{F} esercitata dal fluido di peso specifico γ sulla superficie gobba AB supposta di larghezza unitaria.



Soluzione: il modo più rapido per risolvere il problema è quello di considerare il serbatoio evidenziato nella figura a lato e imporre l'equilibrio del volume tratteggiato e costituito dalla superficie gobba AB e da quella piana AB .



Su tale volume l'esterno eserciterà le seguenti forze:

$$\underline{F}, \underline{F}_1, \underline{G}$$

Si ha inoltre

$$\underline{F} = (-F_x, F_y); \underline{F}_1 = (F_1 \sin \theta, -F_1 \cos \theta); \underline{G} = (0, -G)$$

Segue

$$\underline{F} = -\underline{F}_1 - \underline{G}$$

$$\underline{F} = (-F_x, F_y) = (-F_1 \sin \theta, F_1 \cos \theta) + (0, G)$$

oppure

$$F_x = F_1 \sin \theta \quad , \quad F_y = F_1 \cos \theta + G$$

ove

$$F_1 = \gamma(a + R \sin \theta) 2R$$

$$G = \gamma \frac{\pi R^2}{2}$$

Lezione 10

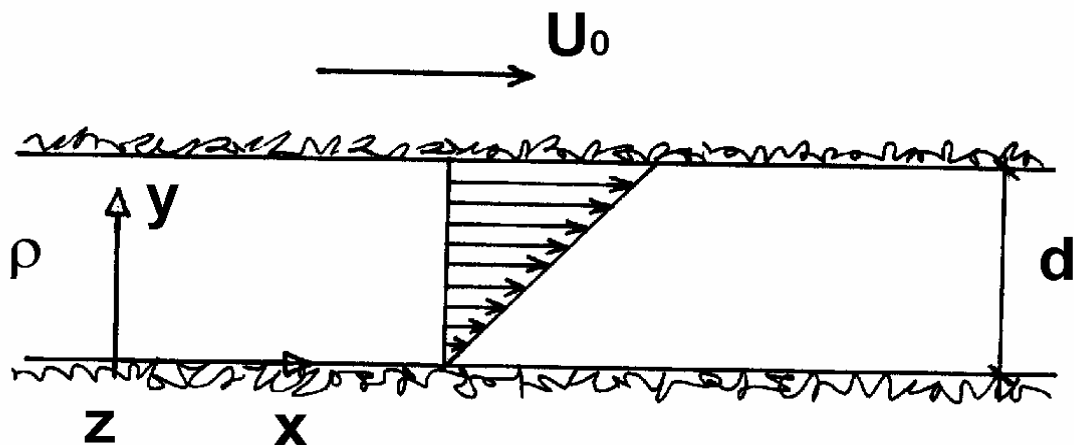
LA TENSIONE IN UN FLUIDO IN MOVIMENTO

- Abbiamo visto (LEZIONE 3) che in un fluido in quiete la tensione \underline{t} è sempre ortogonale alla superficie. In altre parole se un fluido è in quiete

$$\underline{t} = -p\underline{n}$$

Nei fluidi in movimento, tuttavia, la direzione di \underline{t} non coincide con quella di \underline{n} e in generale si manifestano delle componenti tangenti alla superficie.

Esaminiamo la situazione rappresentata in figura: due piastre parallele fra di loro sono poste ad una distanza d e costituiscono così un meato riempito di un fluido di densità ρ . La piastra inferiore è ferma mentre quella superiore viaggia con una velocità U_0 in una direzione parallela alla piastra stessa.



Introduciamo il sistema di riferimento in figura. Se misurassimo il campo di moto, ci accorgeremmo che la velocità ha un'unica componente nella direzione x che si annulla in corrispondenza $y = 0$, assume il valore U_0 per $y = d$ e varia linearmente con y

$$u = \frac{U_0}{d} y$$

Per mantenere la piastra superiore in movimento con velocità U_0 è necessario applicare una forza nella direzione x che, rapportata alla superficie della piastra, porge un valore che indicheremo con τ . È evidente che il valore di τ è uguale e contrario alla componente nella direzione x della tensione t_x esercitata dal fluido sulla parete. Misure di τ mostrano che

- 1) τ è proporzionale a U_0
- 2) τ è inversamente proporzionale a d

Si ha cioè

$$\tau \sim \frac{U_0}{d}$$

La costante di proporzionalità dipende dal fluido contenuto all'interno del meato ed è denominata "viscosità dinamica" (μ)

$$\tau = \mu \frac{U_0}{d} \quad (\text{NOTA 1})$$

Le dimensioni di μ sono quelle di una massa divisa per una lunghezza e per un tempo

$$[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$$

mentre l'unità di misura è il $Kg / (ms) = Pa \cdot s$, anche se talvolta viene utilizzato il centipoise (cP), essendo

$$cP = 10^{-3} Kg / (ms)$$

NOTA 1

Il legame $\tau = \mu U_0 / d$ è valido per i fluidi cosiddetti newtoniani. L'aria, l'acqua e molti fluidi di interesse ingegneristico sono "newtoniani". Per altri fluidi il legame fra τ, U_0, d può essere più complicato.

- La viscosità dinamica di un fluido, essendo una sua proprietà, dipende dallo stato del fluido e quindi dalla pressione e dalla temperatura. Per l'acqua in condizioni ordinarie (pressione atmosferica e temperatura pari a 20°C)

$$\mu = 1cP$$

- Spesso si utilizza la “viscosità cinematica” ν definita come il rapporto fra la viscosità dinamica e la densità del fluido

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Le dimensioni di ν sono quelle di una lunghezza al quadrato su un tempo

$$[\nu] = L^2/T$$

mentre l'unità di misura è m^2/s .

Anche la viscosità cinematica dipende da pressione e temperatura. Per l'acqua in condizioni ordinarie

$$\nu \cong 10^{-6} m^2/s \quad (\text{NOTA 2})$$

- Il legame $\tau = \mu U_0/d$ è un caso particolare di una relazione più generale che nella geometria in considerazione può scriversi

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

La tensione tangenziale τ può infatti variare al variare di y . In geometrie più complesse la relazione fra \underline{t} e il campo di moto, detta “legame costitutivo”, diviene più complessa. Si rimanda lo studente interessato a corsi successivi.

NOTA 2

Per aria secca alla pressione atmosferica e alla temperatura di 20°C si ha

$$\begin{aligned} \mu &\cong 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Kg}/(ms) \\ \nu &\cong 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/s \end{aligned}$$

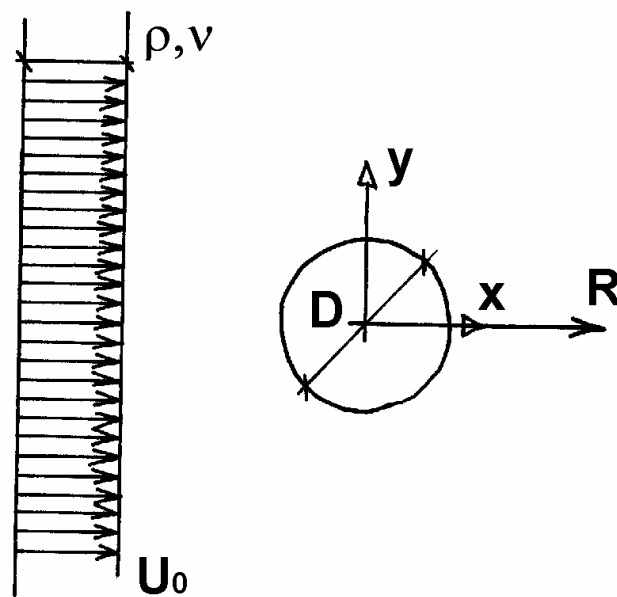
Lezione 11

ANALISI DIMENSIONALE E TEOREMA DI BUCKINGAM

- I problemi a cui non siamo interessati e i problemi della fisica in generale, sono caratterizzati dalla ricerca della dipendenza di una grandezza fisica Q_0 dalle altre grandezze fisiche Q_1, Q_2, \dots, Q_N coinvolte nel fenomeno in esame. In altre parole si vuole determinare la funzione f che lega Q_0 a Q_1, Q_2, \dots, Q_N

$$Q_0 = f(Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$$

Un esempio tipico in idrodinamica è la ricerca della resistenza (forza nella direzione del moto) incontrata da un corpo (per esempio una sfera) che avanza in fluido fermo. Utilizzando un sistema di riferimento solidale con il corpo (vedi figura), il problema è costituito dalla valutazione di R (modulo di \underline{R}).



E' evidente che il valore di R sarà influenzato

- dalle caratteristiche del fluido (nel caso in esame dalla densità ρ e dalla viscosità cinematica ν)
- dalle dimensioni della sfera (il diametro D)
- dalla velocità con cui il fluido investe la sfera (U_0)

Si cercherà quindi di valutare la funzione f tale che

$$R = f(\rho, \nu, D, U_0)$$

E' evidente che la funzione f di cui sopra è un caso particolare di quella scritta inizialmente

$$Q_0 = f(Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$$

con

$$Q_0 = R, \quad N = 4, \quad Q_1 = \rho, \quad Q_2 = \nu, \quad Q_3 = D, \quad Q_4 = U_0$$

Alcune volte è possibile risolvere il problema in esame risolvendo le equazioni che governano il fenomeno. In tal caso è possibile fornire un'espressione analitica di f . In altri casi ciò non è possibile e il legame fra Q_1, Q_2, \dots, Q_N può essere cercato solo attraverso esperienze di laboratorio. Se il valore di N è elevato il numero di esperimenti da eseguire risulta estremamente alto. In tale situazione è utile il teorema di Buckingham, detto anche teorema Π .

- Teorema Π

Il teorema Π stabilisce che la relazione

$$Q_0 = f(Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$$

fra $N + 1$ grandezze fisiche può essere trasformata in una nuova relazione fra $N + 1 - M$ numeri adimensionali

$$\Pi_0 = \bar{f}(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{N-M})$$

essendo M (NOTA 1) il numero massimo di grandezze dimensionalmente indipendenti che può essere individuato all'interno delle $N + 1$ grandezze Q_0, Q_1, \dots, Q_N e Π_i numeri adimensionali.

Dimostrazione:

Si voglia trasformare la relazione

$$Q_0 = f(Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$$

- Si scelga il massimo numero M di grandezze dimensionalmente indipendenti.

Non si perde di generalità se si suppone che le grandezze scelte siano Q_1, Q_2, \dots, Q_M .

- Si individui il monomio $Q_1^{\alpha_0} Q_2^{\beta_0} Q_3^{\gamma_0} \dots Q_M^{\omega_0}$ che abbia le stesse dimensioni di Q_0 .

Dalla definizione di M e di grandezze dimensionalmente indipendenti i valori $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \dots, \omega_0$ non sono tutti nulli.

- Si divida la relazione di partenza sia a destra che a sinistra per $Q_1^{\alpha_0} Q_2^{\beta_0} Q_3^{\gamma_0} \dots Q_M^{\omega_0}$. Si avrà

$$\frac{Q_0}{Q_1^{\alpha_0} Q_2^{\beta_0} \dots Q_M^{\omega_0}} = \Pi_0 = f_0(Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$$

E' evidente che il termine a sinistra della relazione precedente è un rapporto adimensionale.

- Si individui il monomio $Q_1^{\alpha_{M+1}} Q_2^{\beta_{M+1}} \dots Q_M^{\omega_{M+1}}$ che abbia le stesse dimensioni di Q_{M+1}

- Laddove nella funzione f_0 (evidentemente diversa da f) compare Q_{M+1} si sostituisca

$$\frac{Q_{M+1}}{Q_1^{\alpha_{M+1}} Q_2^{\beta_{M+1}} \dots Q_M^{\omega_{M+1}}} Q_1^{\alpha_{M+1}} Q_2^{\beta_{M+1}} \dots Q_M^{\omega_{M+1}} = \Pi_{M+1} Q_1^{\alpha_{M+1}} Q_2^{\beta_{M+1}} \dots Q_M^{\omega_{M+1}}$$

segue dunque

$$\Pi_0 = f_1(Q_1, Q_2, \dots, Q_M, \Pi_{M+1}, Q_{M+2}, \dots, Q_N)$$

NOTA 1

- M grandezze si dicono dimensionalmente indipendenti se il monomio

$$Q_1^\alpha Q_2^\beta Q_3^\gamma \dots Q_M^\omega$$

avente dimensioni nulle, implica

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \dots, \quad \omega = 0$$

Se esistono valori $\alpha, \beta, \dots, \omega$ diversi da zero e tali che il monomio

$$Q_1^\alpha Q_2^\beta Q_3^\gamma \dots Q_M^\omega$$

ha dimensioni nulle, allora le M grandezze sono dimensionalmente dipendenti.

- Il valore massimo di M dipende dalla natura del fenomeno. In particolare se il fenomeno è geometrico $M = 1$, se il fenomeno è cinematico $M = 2$, se il fenomeno è di natura dinamica $M = 3$ e così via.

- Si ripeta il punto precedente per $Q_{M+2}, Q_{M+3}, \dots, Q_N$ per giungere alla relazione

$$\Pi_0 = f_{N-M}(Q_1, Q_2, \dots, Q_M, \Pi_{M+1}, \Pi_{M+2}, \dots, \Pi_N)$$

- Cambiando l'unità di misura della sola Q_1 (procedura possibile essendo Q_1, Q_2, \dots, Q_M grandezze dimensionalmente indipendenti), i valori di $\Pi_0, \Pi_{M+1}, \Pi_{M+2}, \dots, \Pi_N$ non cambiano essendo Π_i numeri adimensionali. Neanche i valori di Q_2, Q_3, \dots, Q_M cambiano non essendo variata le loro unità di misura. Segue quindi che la funzione f_{N-M} non può dipendere esplicitamente da Q_1 .
- Cambiando l'unità di misura Q_2 e seguendo il ragionamento esposto al punto precedente si conclude che f_{N-M} non può dipendere esplicitamente da Q_2 .
- Analogamente si può concludere che f_{N-M} non dipende esplicitamente da Q_3, Q_4, \dots, Q_M
- E' possibile quindi concludere che

$$Q_0 = f_0(Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$$

si trasforma in

$$\Pi_0 = \bar{f}(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{N-M})$$

come si voleva dimostrare.

- L'utilità del teorema Π emerge chiaramente applicandolo all'esempio considerato precedentemente.

$$R = f(\rho, v, D, U_0)$$

Essendo il problema di natura dinamica $M = 3$.

Scegliamo ρ, U_0, D come grandezze dimensionalmente indipendenti.

In primo luogo verifichiamo che ρ, U_0, D siano dimensionalmente indipendenti, cioè che il monomio

$$\rho^\alpha U_0^\beta D^\gamma$$

con dimensioni nulle implichi $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$. Si ha

$$[\rho] = ML^{-3}; [U_0] = LT^{-1}; [D] = L$$

segue dunque

$$[\rho^\alpha U_0^\beta D^\gamma] = M^\alpha L^{-3\alpha} L^\beta T^{-\beta} L^\gamma$$

Dunque $[\rho^\alpha U_0^\beta D^\gamma] = 0$ se e solo se

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ -3\alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ -\beta &= 0 \end{aligned}$$

Il sistema algebrico lineare precedente è omogeneo e il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero: la soluzione allora è quella identicamente nulla. E' quindi possibile concludere che ρ, U_0, D , sono grandezze dimensionalmente indipendenti

Cerchiamo ora il monomio $\rho^\alpha U_0^\beta D^\gamma$ che ha le stesse dimensioni di R . Sapendo che

$$[R] = MLT^{-2}$$

Si ottiene

$$M^\alpha L^{-3\alpha} L^\beta T^{-\beta} L^\gamma = MLT^{-2}$$

$$\begin{aligned} \alpha = 1 & & \alpha = 1 \\ -3\alpha + \beta + \gamma = 1 & \Rightarrow & \gamma = 2 \\ -\beta = -2 & & \beta = 2 \end{aligned}$$

Dunque la relazione iniziale può essere scritta nella forma

$$\frac{R}{\rho U_0^2 D^2} = f_1(\rho, U_0, D, v)$$

Cerchiamo ora il monomio $\rho^\alpha U_0^\beta D^\gamma$ che ha le dimensioni di v . Sapendo che

$$[v] = L^2 T^{-1}$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} M^\alpha L^{-3\alpha} L^\beta T^{-\beta} L^\gamma &= L^2 T^{-1} \\ \alpha = 0 & & \alpha = 0 \\ -3\alpha + \beta + \gamma = 2 & \Rightarrow & \gamma = 1 \\ -\beta = -1 & & \beta = 1 \end{aligned}$$

Si può quindi concludere

$$\frac{R}{\rho U_0^2 D^2} = f_2\left(\frac{v}{U_0 D}\right)$$

Per motivi storici invece del numero adimensionale $\frac{v}{U_0 D}$ si ritiene che $\frac{R}{\rho U_0^2 D^2}$ dipenda da

$$\frac{U_0 D}{v}$$

Dunque

$$\frac{R}{\rho U_0^2 D^2} = \bar{f}\left(\frac{U_0 D}{v}\right)$$

Il numero $\frac{U_0 D}{v}$ è detto numero di Reynolds e viene usualmente indicato con Re

$$Re = \frac{U_0 D}{v}$$

Il numero $\frac{R}{\rho U_0^2 D^2}$ è detto numero di Newton e viene usualmente indicato con Ne

Applicando il teorema Π si è trasformato il problema iniziale, che prevedeva la determinazione della funzione f di 4 variabili indipendenti, sulla determinazione della funzione \bar{f} che dipende da una sola variabile indipendente con chiaro e indubbio vantaggio.

IL TEOREMA Π NEI PROBLEMI DI IDRODINAMICA

Nei problemi idrodinamici, oltre al numero di Newton (Ne) e al numero di Reynolds (Re), possono comparire altri numeri adimensionali. I più comuni sono

- Il numero di Fronde

$$Fr = \frac{U_0}{\sqrt{gD}}$$

che compare qualora il fenomeno sia influenzato anche dalla accelerazione di gravità

- Il numero di Mach

$$Ma = \frac{U_0}{\sqrt{\epsilon/\rho}}$$

che compare qualora il fenomeno sia influenzato dalla comprimibilità del fluido

- Il numero di Weber

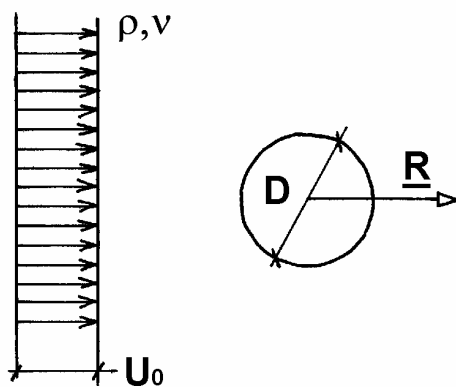
$$We = \sqrt{\frac{\rho D U_0^2}{\sigma}}$$

che compare qualora il fenomeno sia influenzato dalla tensione superficiale.

Lezione 12

SIMILITUDINE E MODELLI

Consideriamo nuovamente il problema descritto nella LEZIONE 11: un fluido di densità ρ e viscosità cinematica ν investe una sfera di diametro D con una velocità U_0



La forza che il fluido esercita sulla sfera nella direzione del moto risulta esprimibile nella forma (vedi teorema Π)

$$R = \rho U_0^2 D^2 \bar{f} \left(\frac{U_0 D}{\nu} \right)$$

che spesso viene riscritta nella forma

$$R = \frac{\rho}{2} U_0^2 \pi \frac{D^2}{4} C_D \left(\frac{U_0 D}{\nu} \right)$$

ove $C_D = \frac{8}{\pi} \bar{f}$ è detto coefficiente di resistenza e risulta evidentemente funzione di Reynolds.

- Emerge chiaramente che per conoscere R è necessario conoscere il valore di C_D per il valore del numero di Reynolds caratteristico del problema.

Se ad esempio pensiamo la sfera come l'approssimazione di una batisfera investita da una corrente oceanica di intensità pari a 0.2 m/s e supponiamo che D sia pari a 2 m , il numero di Reynolds risulterà pari a

$$Re = \frac{2 \times 0.2}{10^{-6}} = 4 \times 10^5$$

Nel caso in esame dovremo dunque valutare C_D per tale valore di Re . Ciò però non comporta la misura della forza esercitata sulla batisfera ($D = 2 \text{ m}$) da una corrente di 0.2 m/s . E' infatti possibile misurare C_D utilizzando "un modello", cioè una sfera molto più piccola, a patto di aumentare U_0 in modo tale che il numero di Reynolds rimanga inalterato. Indicati con il pedice m le grandezze relative al modello deve risultare

$$\frac{U_0 D}{\nu} = \frac{U_{0m} D_m}{\nu_m}$$

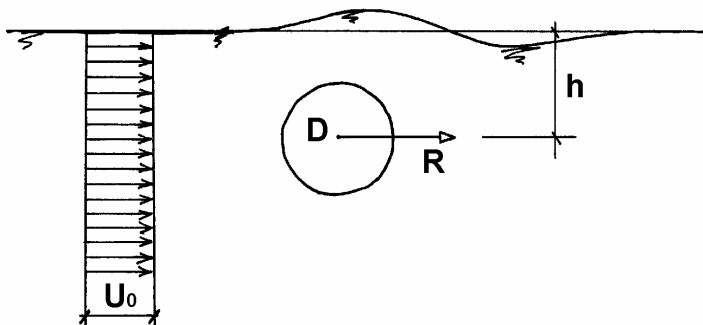
Utilizzando nel modello, come di solito avviene, lo stesso fluido del problema originale si ha

$$\frac{U_{0m}}{U_0} = \frac{D}{D_m}$$

Tale risultato indica che se il rapporto D_m/D è pari a $1/10$, il rapporto U_{0m}/U_0 dovrà essere pari a 10. Il valore ricercato di C_D sarà dunque pari a $8 R_m / (\pi \rho U_{0m}^2 D_m^2)$

- Consideriamo ora un problema lievemente diverso:

la batisfera si trova in prossimità della superficie libera a una profondità pari a h



Analizzando il problema risulta chiaramente che il valore di R sarà influenzato anche dal valore di h e dal valore dell'accelerazione di gravità g . La presenza della sfera in prossimità della superficie libera genera infatti un'onda la cui evoluzione dipende da g

$$R = f(\rho, U_0, D, \nu, g, h)$$

Applicando il teorema Π si ottiene

$$R = \frac{\rho}{2} U_0^2 \pi \frac{D^2}{4} C_D \left(Re, Fr, \frac{h}{D} \right)$$

essendo

$$Re = \frac{U_0 D}{\nu} ; Fr = \frac{U_0}{\sqrt{gD}}$$

In questo problema per determinare R è necessario valutare C_D per i valori di $Re, Fr, \frac{h}{D}$ propri del problema originale. Vediamo se è possibile utilizzare un modello.

Per semplicità indichiamo $\lambda = \frac{L_m}{L}$ la scala di riduzione delle lunghezze e con $\tau = \frac{T_m}{T}$ la scala di riduzione dei tempi. La scala di riduzione di ogni altra grandezza cinematica deriva dalla conoscenza di λ e τ . Infatti

$$\nu = \frac{U_m}{U} = \frac{L_m}{L} \frac{T}{T_m} = \frac{\lambda}{\tau}$$

La scala ν di riduzione delle velocità è pari dunque a $\frac{\lambda}{\tau}$. Similmente è possibile determinare per esempio la scala di riduzione delle accelerazioni. Una corretta modellazione del fenomeno impone che i valori del numero di Reynolds, del numero di Froude e il rapporto $\frac{h}{D}$ del prototipo e del modello risultino uguali. E' evidente che se il modello è ridotto in scala, il rapporto $\frac{h_m}{D_m}$ risulta uguale al rapporto $\frac{h}{D}$.

Vediamo ora cosa emerge imponendo

$$Re = Re_m$$

Utilizzando nel modello lo stesso fluido del prototipo si ha

$$\frac{L^2}{T} = \frac{L_m^2}{T_m} \Rightarrow \tau = \frac{T_m}{T} = \left(\frac{L_m}{L} \right)^2 = \lambda^2$$

Stabilita la scala di riduzione delle lunghezze λ , l'uguaglianza dei numeri di Reynolds del modello e del prototipo determina la scala di riduzione dei tempi τ pari a λ^2 e conseguentemente le scale di riduzione di tutte le altre grandezze cinematiche.

Ad esempio

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \lambda^{-1}$$

Vediamo ora cosa segue imponendo

$$Fr = Fr_m$$

$$\frac{L^2}{T\sqrt{L}} = \frac{L_m}{T_m\sqrt{L_m}} \Rightarrow \tau = \frac{T_m}{T} = \sqrt{\frac{L_m}{L}} = \lambda^{1/2}$$

Stabilita la scala di riduzione delle lunghezze λ , l'uguaglianza dei numeri di Froude del modello e del prototipo determina la scala di riduzione dei tempi τ pari a $\lambda^{1/2}$.

Emerge che utilizzando nel modello lo stesso fluido del prototipo è impossibile mantenere inalterati i valori di tutti i numeri adimensionali che influenzano il fenomeno. E' infatti possibile mantenere inalterato il valore di un solo numero adimensionale.

- Se si mantiene inalterato il numero di Reynolds si effettuerà una “similitudine di Reynolds”. Se viceversa si manterrà inalterato il numero di Froude si effettuerà una “similitudine di Froude”. In funzione del problema in esame potranno essere considerate similitudine di Mach, Weber,... E' evidente che si sceglierà di effettuare una certa similitudine invece di un'altra in funzione dell'importanza degli effetti rappresentati dai diversi numeri.
- Se gli effetti viscosi sono i più rilevanti si sceglierà di effettuare una similitudine di Reynolds
- Se gli effetti gravitazionali sono i più rilevanti si sceglierà di effettuare una similitudine di Froude
- ...
- Resta da sottolineare che l'uguaglianza fra il numero di Newton del prototipo e quello del modello fissa la scala di riduzione delle forze

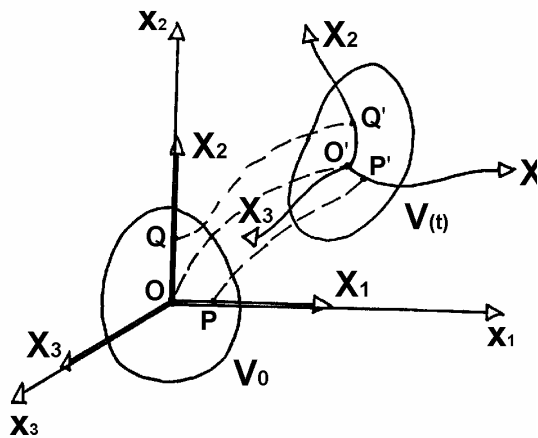
$$Ne = Ne_m$$

Utilizzando nel prototipo e nel modello lo stesso fluido

$$\frac{F}{L^4 T^{-2}} = \frac{F_m}{L_m^4 T_m^{-2}} \Rightarrow \varphi = \frac{F_m}{F} = \left(\frac{L_m}{L}\right)^4 \left(\frac{T_m}{T}\right)^{-2} = \lambda^4 \tau^{-2}$$

Lezione 13

DESCRIZIONE DEL MOTO DEI FLUIDI



- Consideriamo un volume di fluido $V(t)$ in movimento che all'istante iniziale $t=0$ occupa la regione V_0 .

Sia (x_1, x_2, x_3) un sistema cartesiano di riferimento fisso nello spazio e (X_1, X_2, X_3) un secondo sistema di riferimento inizialmente coincidente con (x_1, x_2, x_3) ma che si deforma nel tempo essendo solidale con il fluido.

- Una qualunque grandezza F del fluido (ad esempio la densità ρ) può essere descritta fornendo la funzione f_1

$$F = f_1(X_1, X_2, X_3, t)$$

o fornendo la funzione f_2

$$F = f_2(x_1, x_2, x_3, t)$$

Nel primo caso (descrizione lagrangiana), fissando i valori di X_1, X_2, X_3 , si ottiene una funzione che descrive la variazione di F di una particolare particella fluida al variare del tempo sapendo che quella particella fluida occuperà posizioni diverse nello spazio al trascorrere del tempo.

Nel secondo caso (descrizione euleriana), fissando i valori di x_1, x_2, x_3 , si ottiene una funzione che descrive la variazione di F in un punto dello spazio che al variare del tempo sarà occupato da particelle diverse.

Le funzioni f_1 e f_2 sono chiaramente diverse e sono legate fra di loro dal moto del fluido. In particolare nota la funzione f_2 è possibile ricavare f_1 se sono note le funzioni

$$x_1 = \varphi_1(X_1, X_2, X_3, t)$$

$$x_2 = \varphi_2(X_1, X_2, X_3, t)$$

$$x_3 = \varphi_3(X_1, X_2, X_3, t)$$

queste ultime descrivono il moto delle particelle fluide. In particolare fissato il valore di X_1, X_2, X_3 le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ descrivono la traiettoria di una particella fluida. Siccome una particella fluida non può occupare due posizioni diverse allo stesso tempo e due particelle fluide non possono occupare la stessa posizione, le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono invertibili e in particolare si possono ottenere le funzioni

$$X_1 = \Phi_1(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$X_2 = \Phi_2(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$X_3 = \Phi_3(x_1, x_2, x_3, t)$$

Le funzioni Φ_1, Φ_2, Φ_3 consentono a loro volta di determinare f_2 nota la funzione f_1 .

Essendo f_1 diversa da f_2 , è evidente che la derivata di f_1 rispetto al tempo sarà diversa dalla derivata parziale rispetto al tempo di f_2

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} \neq \frac{\partial f_2}{\partial t}$$

In particolare $\frac{\partial f_1}{\partial t}$ descrive come cambia nel tempo la grandezza F di una particella fluida che si muove nello spazio. La funzione $\frac{\partial f_2}{\partial t}$ descrive invece come varia F in un punto dello spazio che al trascorrere del tempo sarà occupato da particelle fluide diverse.

Per descrivere il moto dei fluidi si usa in generale un approccio euleriano, cioè si assegna o si ricerca la funzione

$$F = f_2(x_1, x_2, x_3, t)$$

e si indica con $\frac{\partial F}{\partial t}$ la funzione $\frac{\partial f_2}{\partial t}$.

Certi concetti della fisica richiedono tuttavia la valutazione di $\frac{\partial f_1}{\partial t}$ che indicheremo con $\frac{dF}{dt}$.

$\frac{\partial F}{\partial t}$ è detta *derivata locale*.

$\frac{dF}{dt}$ è detta *derivata totale o materiale o sostanziale*.

Considerando che spesso è necessario valutare $\frac{dF}{dt}$ e che F è usualmente assegnata come funzione di x_1, x_2, x_3, t è necessario individuare una semplice procedura per valutare $\frac{\partial f_1}{\partial t}$ nota f_2 .

Considerando che $f_1(X_1, X_2, X_3, t)$ è uguale a

$$f_2(\varphi_1(X_1, X_2, X_3, t), \varphi_2(X_1, X_2, X_3, t), \varphi_3(X_1, X_2, X_3, t), t)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[f_2(\varphi_1(X_1, X_2, X_3, t), \varphi_2(X_1, X_2, X_3, t), \varphi_3(X_1, X_2, X_3, t), t) \right]_{\underline{x}} = \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \end{aligned}$$

Notando che $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial t}$ sono le tre componenti della velocità delle particelle fluide, dalla formula precedente si ottiene

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + v_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial F}{\partial x_3}$$

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla F}$$

La derivata materiale è dunque fornita dalla somma della derivata locale più il cosiddetto termine convettivo pari al prodotto scalare fra le velocità e il gradiente di F . (NOTA 1)

NOTA 1

- Assegnata la funzione scalare $F(x_1, x_2, x_3, t)$, il gradiente di F , indicato con ∇F , è un vettore le cui componenti sono così definite

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3} \right)$$

- Assegnata la funzione vettoriale $\underline{F}(x_1, x_2, x_3, t)$ che corrisponde a tre funzioni scalari $\underline{F} = (F_1(\underline{x}, t), F_2(\underline{x}, t), F_3(\underline{x}, t))$, la divergenza di \underline{F} , indicata con $\nabla \cdot \underline{F}$, è uno scalare così definito

$$\nabla \cdot \underline{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$$

Il rotore di \underline{F} , indicato con $\nabla \times \underline{F}$, è un vettore così definito

$$\nabla \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \underline{i} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) - \underline{j} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \right) + \underline{k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

- Assegnati due vettori $\underline{a}, \underline{b}$ ($\underline{a} = (a_1, a_2, a_3), \underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$) il prodotto scalare è così definito

$$c = \underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

il prodotto vettoriale è così definito

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \underline{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \underline{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \underline{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

ALCUNE GRANDEZZE CINEMATICHE

- Utilizzando un approccio euleriano, il moto di un fluido viene descritto assegnando il vettore velocità \underline{v} come funzione di \underline{x} e del tempo t :

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t)$$
$$\Downarrow$$
$$v_1 = v_1(x_1, x_2, x_3, t)$$
$$v_2 = v_2(x_1, x_2, x_3, t)$$
$$v_3 = v_3(x_1, x_2, x_3, t)$$

- Il calcolo dell'accelerazione \underline{a} può essere semplicemente eseguito valutando la derivata materiale di \underline{v}

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} \Rightarrow a_1 = \frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3}$$

$$a_2 = \frac{dv_2}{dt} = \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3}$$

$$a_3 = \frac{dv_3}{dt} = \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v}$$

- Le traiettorie, che sono un concetto tipicamente lagrangiano, possono essere calcolate integrando l'equazione

$$d\underline{x} = \underline{v}(\underline{x}, t) dt$$

note le posizioni iniziali delle particelle fluide.

- Le linee di corrente sono definite come quelle linee che in ogni punto sono tangenti, al vettore velocità. Esse si ricavano integrando l'equazione

$$d\underline{x} \times \underline{v}(\underline{x}, t) = 0$$

LA DERIVATA MATERIALE DI UNA GRANDEZZA INTEGRATA SU UN VOLUME MATERIALE

- Nello studio del moto dei fluidi è spesso necessario calcolare l'integrale di una certa grandezza F su un volume di fluido in moto e valutare la sua derivata materiale (fatta cioè seguendo il moto della massa fluida) utilizzando un approccio euleriano, cioè considerando un volume fisso nello spazio. In altre parole è necessario valutare

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F dV$$

considerando un volume non in movimento

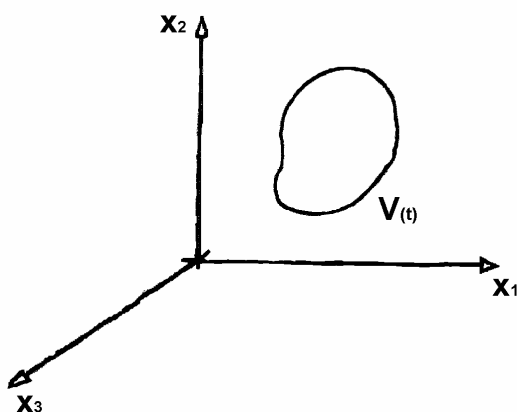
Per esempio la massa M associata a un volume di fluido in movimento è

$$M = \int_{V(t)} \rho dV$$

Infatti dalla definizione stessa di densità, la massa infinitesima associata a un volume infinitesimo dV sarà ρdV . Per determinare la massa di V è necessario sommare tutti i contributi e quindi integrare su tutto il volume $V(t)$. Il principio di conservazione della massa impone poi che la massa M associata al volume $V(t)$ di fluido in movimento rimanga costante.

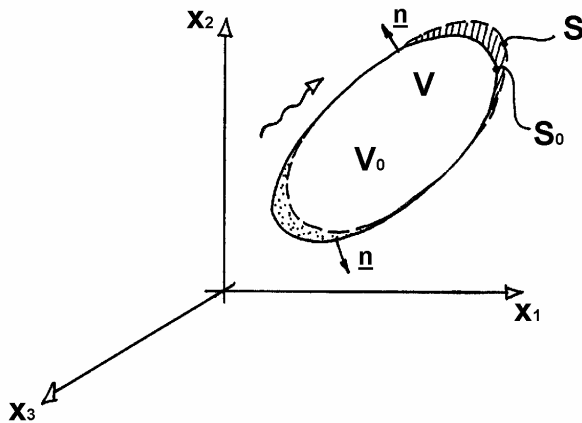
E' necessario dunque imporre

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0$$



Tale calcolo risulta difficile da effettuarsi pur essendo nota la funzione $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$, considerato che il volume $V(t)$ è mobile. E' pertanto utile trasformare l'integrale di cui sopra in uno da effettuarsi su un volume fisso nello spazio. Vediamo come ciò è possibile.

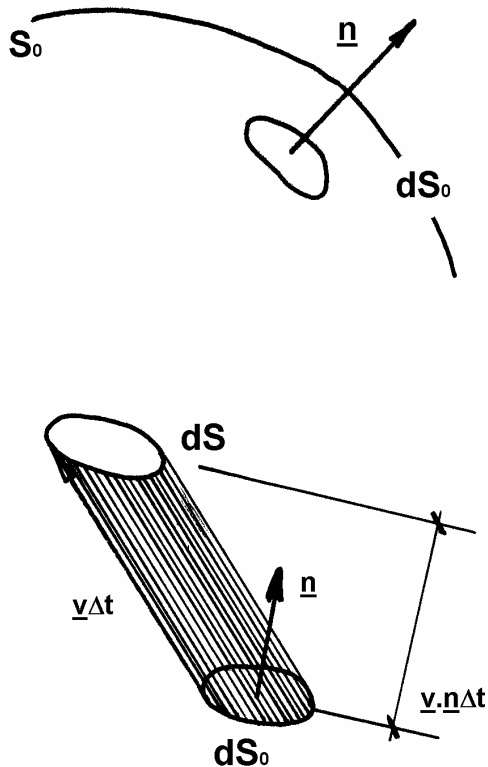
- Consideriamo il volume $V(t)$ al tempo t_0 e denotiamolo con V_0 . Indichiamo con S_0 la sua



frontiera . Consideriamo quindi il volume all'istante $t_0 + \Delta t$ e indichiamolo con V . Sia S la frontiera di V . Il volume V sarà quasi coincidente con V_0 , essendo trascorso un tempo piccolo (a rigori infinitesimo) Δt . Rispetto a V_0 , il volume V avrà in più il volume tratteggiato e in meno il volume punteggiato. Cerchiamo di quantificare

tale differenza. Con riferimento alla figura accanto consideriamo una parte infinitesima di S_0 e denotiamola con dS_0 . Sia \underline{n} la normale alla superficie uscente per convenzione dal volume V_0 . Se indichiamo con \underline{v} la velocità del fluido valutata sulla superficie infinitesima dS_0 , dopo un

tempo piccolo Δt , la particella fluida che si trovava su dS_0 si sarà spostata nello spazio di una quantità $\underline{v}\Delta t$. Essendo dS_0 una superficie infinitesima si possono trascurare le differenze di velocità fra le diverse particelle fluide che si trovano su dS_0 . Il volume di fluido che ha attraversato dS_0 nell'intervallo di tempo Δt e che occuperà il volume delimitato da dS , dS_0 e da una superficie cilindrica con generatrici parallele a $\underline{v}\Delta t$ (vedi figura) sarà dunque



$$dS_0 (\underline{v} \cdot \underline{n}) \Delta t$$

Tale volume sarà positivo se $\underline{v} \cdot \underline{n}$ è positivo (se cioè il fluido esce da V_0), mentre sarà negativo se $\underline{v} \cdot \underline{n}$ è negativo (se cioè il fluido entra in V_0).

La differenza fra il volume V e il volume V_0 sarà dunque

$$\int_{S_0} (\underline{v} \cdot \underline{n}) \Delta t \, dS_0$$

Vediamo ora di valutare

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F dV$$

ad un generico tempo t_0 . Applichiamo la definizione di derivata

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F dV \right]_{t_0} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_0} F(t_0 + \Delta t) dV - \int_{V_0} F(t_0) dV_0}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_0} F(t_0 + \Delta t) dV_0 + \int_{S_0} F(t_0 + \Delta t) (\underline{v} \cdot \underline{n}) \Delta t dS_0 - \int_{V_0} F(t_0) dV_0}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_0} \left[F(t_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{t_0} \Delta t \right] dV_0 + \int_{S_0} F(t_0 + \Delta t) (\underline{v} \cdot \underline{n}) \Delta t dS_0 - \int_{V_0} F(t_0) dV_0}{\Delta t} = \\ &= \int_{V_0} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{t_0} dV_0 + \int_{S_0} F(t_0) (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS_0 \end{aligned}$$

Si è quindi dimostrato (dimostrazioni più rigorose sono disponibili nei libri di testo) il teorema del trasporto

$$\left(\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F dV \right)_{t=t_0} = \int_{V_0} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{t=t_0} dV_0 + \int_{S_0} F(t_0) (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS_0$$

essendo V_0 un volume fisso nello spazio che nell'istante in considerazione coincide con il volume mobile V .

Lezione 14

I PRINCIPI DELLA MECCANICA DEI FLUIDI

- Il moto dei fluidi è controllato da alcuni principi fondamentali della fisica. Enuncieremo nel seguito:
 - il principio di conservazione della massa
 - il principio della quantità di moto
 - il principio del momento della quantità di motoche verranno utilizzati nel corso

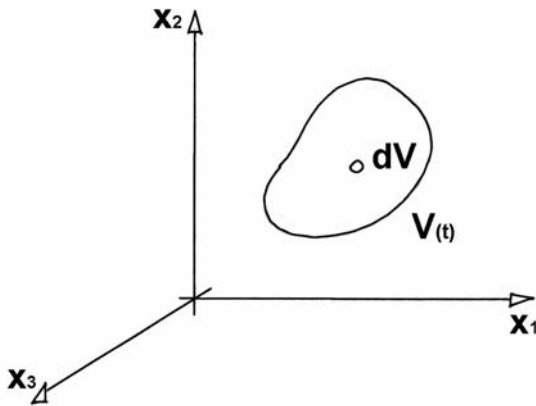
- **IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA**
“La massa associata ad un volume materiale di fluido è costante nel tempo”

- **IL PRINCIPIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO**
“La derivata rispetto al tempo della quantità di moto di un volume materiale di fluido è uguale alla risultante delle forze che l'esterno esercita sul volume di fluido”

- **IL PRINCIPIO DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO**
“La derivata rispetto al tempo del momento della quantità di moto di un volume materiale di fluido è uguale al momento risultante delle forze che l'esterno esercita sul volume di fluido”

- Vediamo ora a quali equazioni conducono i principi enunciati precedentemente

IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA



Dalla definizione stessa di densità, la massa infinitesima associata al volume infinitesimo dV è

$$\rho dV$$

La massa del volume materiale $V(t)$ è dunque fornita dalla somma dei contributi derivanti da tutti i volumi infinitesimi che compongono $V(t)$. Si ha dunque

$$M(t) = \int_{V(t)} \rho dV$$

e il principio di conservazione della massa impone la costanza di M

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0$$

Utilizzando il teorema del trasporto si può anche scrivere

$$\int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_0 + \int_{S_0} \rho (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS_0 = 0$$

Per quanto esposto nella LEZIONE 13 la quantità

$$\int_{S_0} \rho (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS_0$$

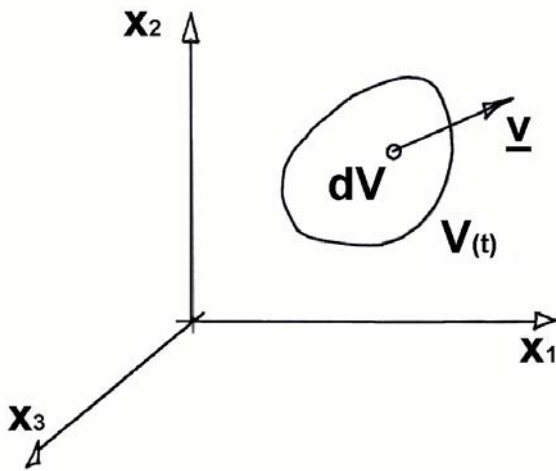
rappresenta la massa di fluido che attraversa la superficie S_0 nell'unità di tempo. Tale quantità è detta "portata massica". Il principio della conservazione della massa impone che

$$\int_S \rho (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS_0 = - \int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_0$$

In altre parole la portata massica deve uguagliare la derivata temporale della massa contenuta all'interno di V_0 cambiata di segno.

In particolare se la densità del fluido è costante, essendo inoltre V_0 costante, la portata massica associata a S_0 deve annullarsi. Tanto fluido entra in V_0 , tanto deve uscire, non essendo possibile che il fluido si accumuli in V_0 per variazioni di densità.

IL PRINCIPIO DELLA QUANTITA' DI MOTO



Come discusso nel punto precedente la massa infinitesima associata al volume dV risulta pari a

$$\rho dV$$

La quantità di moto della massa ρdV sarà

$$\rho \underline{v} dV$$

Si noti che la quantità di moto è una grandezza vettoriale la cui direzione e verso coincidono con quelli di \underline{v} . La quantità di moto del volume $V(t)$ sarà dunque fornita da

$$\int_V \rho \underline{v} dV$$

Il principio della quantità di moto impone dunque

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \underline{v} dV = \int_{V(t)} \rho \underline{f} dV + \int_{S(t)} \underline{t} dS$$

dove le forze che l'esterno esercita su V sono state suddivise in forze di massa e forze di superficie (vedi LEZIONE 2). Utilizzando il teorema del trasporto si può anche scrivere

$$\int_{V_0} \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} dV_0 + \int_{S_0} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS_0 = \int_{V_0} \rho \underline{f} dV_0 + \int_{S_0} \underline{t} dS_0$$

o in forma compatta

$$\underline{I} + \underline{M} = \underline{G} + \underline{\Pi}$$

Dove

$$\underline{I} = \int_{V_0} \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} dV_0$$

è il termine di inerzia locale

$$\underline{M} = \int_{S_0} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS_0$$

è il flusso di quantità di moto attraverso S_0

$\underline{G} = \int_{V_0} \rho \underline{f} dV_0$ è la risultante delle forze di massa sul volume V_0 . Nel caso di campo di forze gravitazionali \underline{G} corrisponde al peso di V_0

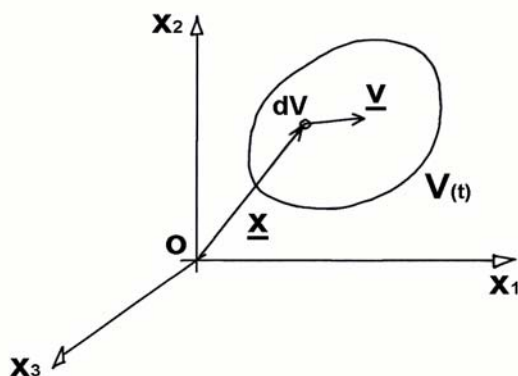
$\underline{\Pi} = \int_{S_0} \underline{t} dS_0$ è la risultante delle forze di superficie sulla superficie S_0

Si noti che spesso il termine \underline{M} viene suddiviso in due contributi

$$\underline{M} = \underline{M}_u - \underline{M}_i$$

dividendo la superficie S_0 in due parti. Nella prima $\underline{v} \cdot \underline{n}$ è positivo e il fluido esce da V_0 , nella seconda $\underline{v} \cdot \underline{n}$ è negativo e il fluido entra in V_0 . \underline{M}_u rappresenta quindi il flusso di quantità di moto in uscita mentre \underline{M}_i quello in ingresso. Resta da sottolineare che sia \underline{M}_u che \underline{M}_i sono quantità vettoriali la cui direzione è coincidente con quella della velocità \underline{v} . Segue che $-\underline{M}_i$ è un vettore opposto a \underline{M}_i .

IL PRINCIPIO DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO



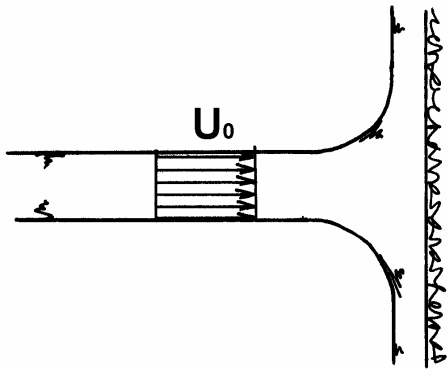
Procedendo come nei punti precedenti, il principio del momento della quantità di moto fornisce

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \underline{x} \times (\rho \underline{v}) dV = \int_{V(t)} \underline{x} \times (\rho \underline{f}) dV + \int_{S(t)} \underline{x} \times \underline{t} dS$$

o applicando il teorema del trasporto

$$\int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} [\underline{x} \times (\rho \underline{v})] dV_0 + \int_{S_0} (\underline{x} \times \rho \underline{v})(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS_0 = \int_{V_0} \underline{x} \times (\rho \underline{f}) dV_0 + \int_{S_0} \underline{x} \times \underline{t} dS_0$$

- Per concludere questa lezione illustriamo una semplice applicazione del principio della quantità di moto in forma integrale che dimostra la capacità della relativa equazione di consentire la soluzione di problemi anche complessi.

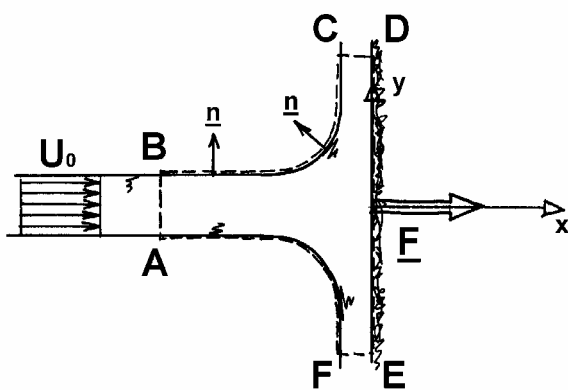


Si consideri un getto che orizzontalmente va a urtare una superficie verticale. Siano U_0 e Ω la velocità del fluido nel getto e la sezione di quest'ultimo (vedi figura). Si cerchi la forza \underline{F} che il getto esercita sulla superficie.

Soluzione: il problema può essere risolto utilizzando l'equazione del principio della quantità di moto in forma integrale

$$\underline{I} + \underline{M}_u - \underline{M}_i = \underline{G} + \underline{\Pi}$$

Per procedere è necessario in primo luogo individuare il volume V_0 . E' evidente che l'equazione precedente vale qualunque volume si scelga, ma una scelta opportuna consente la soluzione del problema mentre altre scelte non conducono a utili espressioni. Per risolvere il problema in esame



consideriamo il volume (detto il controllo) tratteggiato in figura e introduciamo un sistema (x, y, z) di riferimento. Notiamo inoltre che per la simmetria del problema la forza \underline{F} sarà diretta lungo l'asse x . E' conveniente quindi proiettare l'equazione del principio della quantità di moto lungo la direzione x

$$I_x + M_{ux} - M_{ix} = G_x + \Pi_x$$

Assumendo il problema stazionario il termine

$$I_x = \int_{V_0} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} dV_0$$

sarà nullo. Si noti che \underline{V} è stato espresso come (U, V, W) .

Se inoltre assumiamo che l'asse z sia verticale, il vettore \underline{G} sarà parallelo a z e quindi il termine

$$G_x = \int_{V_0} \rho g_x dV_0$$

sarà anch'esso nullo.

Notiamo ora che dalle superfici BC e AF non esce né entra della massa in quanto \underline{v} e \underline{n} sono ortogonali. Si ha un flusso di massa e quindi di quantità di moto solo attraverso AB , CD e EF . In particolare la superficie AB contribuisce a \underline{M}_i mentre le superfici CD e EF contribuiscono a \underline{M}_u . Infine, notando che il vettore velocità del fluido in uscita è parallelo all'asse y (è evidente che il fluido che attraversa le superfici CD e EF si muove parallelamente alla superficie rigida), si può concludere che

$$M_{ux} = 0$$

Risulta inoltre

$$M_{ix} = \int_{\Omega} \rho U_0^2 d\Omega = \rho U_0^2 \Omega$$

essendo la velocità del fluido un ingresso pari a U_0 e uniformemente distribuita su Ω .

Come detto precedentemente $\underline{\Pi}$ rappresenta la risultante delle forze di superficie che l'esterno esercita sul fluido contenuto all'interno di V_0 . Sulle superfici AB , BC , CD , EF e FA la pressione relativa è nulla e non esistono (o sono trascurabili) le tensioni tangenziali. Segue quindi che $\underline{\Pi}$ è pari a $-\underline{F}$ (principio di azione e reazione) e in particolare

$$\Pi_x = -F_x$$

Si può quindi concludere

$$-\rho U_0^2 \Omega = -F_x$$

oppure

$$\boxed{F_x = \rho U_0^2 \Omega}$$

Il problema illustrato verrà poi ripreso nel seguito per illustrare come sia possibile estrarre energia dal getto e trasformarla in lavoro.

Lezione 15

LE CORRENTI FLUIDE

- Lo studio del moto dei fluidi nel caso generale è estremamente complesso e la scrittura delle equazioni necessarie a determinare il campo di moto e lo stato di tensione così come la descrizione delle tecniche di soluzione di tali equazioni sono argomenti propri dei corsi della laurea specialistica. Ci limiteremo qui ad analizzare un caso particolare ma molto frequente e di notevole rilevanza applicativa che è quello delle correnti.

Le correnti fluide sono definite come un moto in cui la velocità è “sensibilmente” parallela a una direzione che è facile individuare. Con il termine “sensibilmente” accettiamo che la direzione della velocità si discosti localmente da quella della corrente anche se gli angoli formati da \underline{v} e dalla direzione della corrente devono essere comunque piccoli e tali da poter essere trascurati. Si dice anche che una corrente è un moto quasi indirezionale.

- Definiamo ora alcune grandezze tipiche delle correnti:

- Sezione della corrente: Ω

La sezione di una corrente è la superficie individuata dall'intersezione di un piano ortogonale alla direzione della corrente con il dominio fluido.

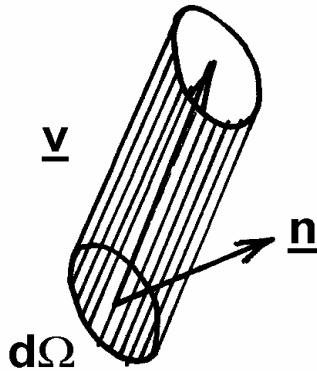
- Asse della corrente e ascissa curvilinea s

L'asse della corrente è il luogo geometrico dei baricentri delle diverse sezioni. E' possibile introdurre un'ascissa curvilinea s lungo l'asse della corrente.

- Portata volumetrica della corrente: Q

La portata volumetrica della corrente è definita come il flusso di volume (di fluido) attraverso la generica sezione Ω

$$Q = \int_{\Omega} (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\Omega$$



Abbiamo già visto (LEZIONE 13) che considerando una superficie infinitesima (in questo caso $d\Omega$) di normale \underline{n} , il volume di fluido che attraversa $d\Omega$ nel tempo dt è fornito dall'espressione $(\underline{v} \cdot \underline{n}) dt d\Omega$, avendo assunto che tutte le particelle fluide che si trovano su $d\Omega$ all'istante iniziale si muovono con la stessa velocità \underline{v} e percorrono la distanza $\underline{v} dt$ nel tempo dt . Definito il flusso come il volume che attraversa la superficie Ω rapportato al tempo deriva

$$Q = \int_{\Omega} (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\Omega$$

- Portata massica della corrente: Q_m

La portata massica della corrente è definita come il flusso di massa (di fluido) che attraversa la generica sezione Ω

$$Q_m = \int_{\Omega} \rho (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\Omega$$

- Portata ponderale della corrente: Q_p

La portata ponderale della corrente è definita come il flusso di peso (di fluido) che attraversa la generica sezione Ω

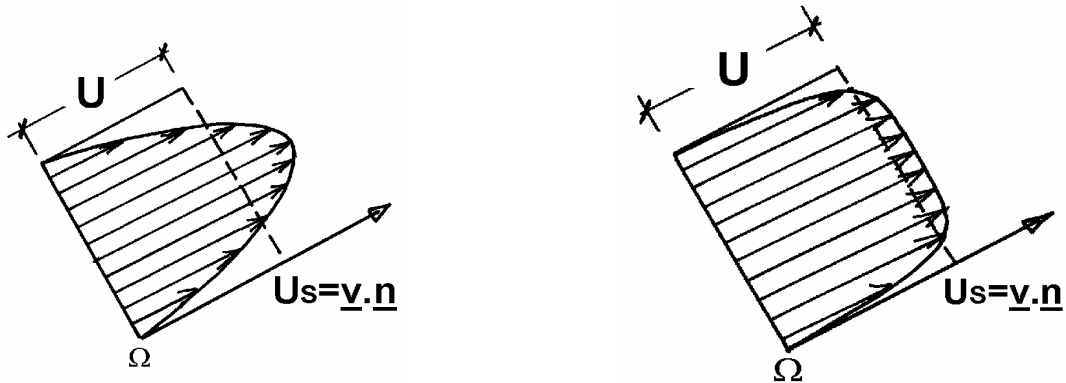
$$Q_p = \int_{\Omega} \rho g (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\Omega$$

- La velocità media sulla sezione: U

Muovendosi all'interno di una sezione, la velocità assume valori diversi. E' quindi utile definire il valore medio che la velocità assume su Ω . Considerando che la velocità è "sensibilmente" ortogonale a Ω è opportuno considerare solo la componente di \underline{v} perpendicolare a Ω . Si ha quindi

$$U = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \underline{v} \cdot \underline{n} d\Omega$$

Nei moti laminari (si rimanda ai corsi di laurea specialistica per una definizione precisa del



regime di moto laminare e di quello turbolento) la velocità si discosta anche sensibilmente da U mentre nei moti turbolenti la distribuzione di velocità sulla sezione tende ad essere molto piatta e pari ad U .

- Il carico piezometrico h

Nella LEZIONE 4 è stato definito il carico piezometrico h come somma della quota z e della quantità p/γ e si è visto che in un fluido in quiete h risulta costante. E' possibile dimostrare (anche se ciò non verrà qui fatto) che il valore di h non varia muovendosi su una sezione, mentre h varia al variare di s . E' quindi possibile attribuire un valore di h alla sezione.

$$h = z + \frac{p}{\gamma}$$

- il carico totale H

Al carico piezometrico h è possibile aggiungere la quantità $\frac{v^2}{2g} = \frac{v \cdot v}{2g}$ detta carico cinetico e ottenere il carico totale. E' facile vedere che il carico cinetico rappresenta l'energia cinetica del fluido per unità di peso, cioè l'energia cinetica di una massa di fluido divisa per il peso del fluido. Analogamente è possibile vedere che il termine z del carico piezometrico rappresenta l'energia potenziale per unità di peso.

Il termine p/γ , detto carico di pressione, rappresenta un'energia per unità di peso non posseduta dai corpi rigidi. Dimensionalmente $h, H, z, \frac{p}{\gamma}, \frac{v^2}{2g}$ sono delle lunghezze e si misurano in metri nel sistema metrico internazionale.

Siccome la velocità non è costante sulla sezione è opportuno definire il carico totale H mediato sulla sezione

$$H = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \left(h + \frac{v^2}{2g} \right) d\Omega = h + \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{v^2}{2g} d\Omega$$

Tenendo conto che la componente della velocità normale alla superficie può essere scritta come somma di U più uno scarto \bar{u} che per definizione ha media nulla sulla sezione

$$\underline{v} \cdot \underline{n} = U + \bar{u}$$

con

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \bar{u} d\Omega = 0$$

si ha

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{v^2}{2g} d\Omega = \frac{1}{\Omega} \frac{1}{2g} \int_{\Omega} (U + \bar{u})^2 d\Omega = \frac{1}{\Omega} \frac{1}{2g} \int_{\Omega} U^2 \left(1 + \frac{\bar{u}}{U} \right)^2 d\Omega = \frac{U^2}{2g} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \left[1 + \left(\frac{\bar{u}}{U} \right)^2 \right] d\Omega$$

Essendo in generale $\bar{u} \ll U$ e quindi $(\bar{u}/U)^2 \ll 1$ si può scrivere

$$H \cong h + \frac{U^2}{2g}$$

- Flusso di energia meccanica di una corrente

Nei punti precedenti abbiamo visto che a una corrente possiamo associare una portata di fluido cioè un flusso di volume. Q rappresenta il volume di fluido che attraversa Ω nell'unità di tempo. Al volume di fluido che attraversa Ω possiamo associare una massa, un peso ed evidentemente un'energia. Possiamo quindi definire il flusso di energia associato ad una corrente come

$$P = \int_{\Omega} (\underline{v} \cdot \underline{n}) \gamma H d\Omega$$

essendo H l'energia per unità di peso.

Segue

$$P \cong \int_{\Omega} \gamma (\underline{v} \cdot \underline{n}) \left[h + \frac{U^2}{2g} \right] d\Omega =$$
$$\cong \gamma QH$$

Per ultimo sottolineiamo che tutte le grandezze caratterizzanti le correnti (U, Q, h, H, \dots) risultano funzioni dell'ascissa s e del tempo t .

Per la determinazione di U, Q, h, \dots si utilizzano delle equazioni che derivano dai principi enunciati nella LEZIONE 14 e che verranno ricavate nella LEZIONE 16 e nella LEZIONE 17.



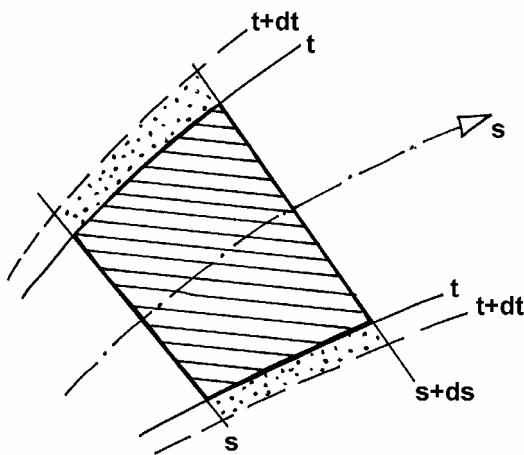
Lezione 16

IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA PER UNA CORRENTE: L'EQUAZIONE DI CONTINUITA'

- Nella LEZIONE 14 si è visto che il principio di conservazione della massa conduce a

$$\int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_0 + \int_{S_0} \rho(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS_0 = 0$$

Applichiamo l'equazione precedente al volume di controllo V_0 (vedi figura) individuato dal



contorno della corrente al tempo t e dalle sezioni di ascisse s e $s + ds$ (volume tratteggiato). La linea tratteggiata sia il contorno della corrente al tempo $t + dt$.

Il primo termine dell'equazione derivante dal principio di conservazione della massa può essere approssimato nel seguente modo:

$$\int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_0 \cong \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \Omega \right)_{s,t} ds$$

dove $(\Omega)_{s,t} ds$, a meno di termini di ordini ds^2 , rappresenta il volume V_0 e dove le quantità $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ e Ω possono essere valutate in s e al tempo t .

Il secondo termine rappresenta il flusso di massa attraverso la superficie S_0 che delimita V_0 , positivo se uscente. Dalla sezione posta in $s + ds$ il flusso è $[\rho Q]_{s+ds,t}$ mentre il flusso corrispondente alla sezione posta in s è $[\rho Q]_{s,t}$. La massa uscita nell'intervallo dt dalla superficie laterale del volume di controllo è pari al prodotto di ρ per il volume punteggiato in figura, quest'ultimo essendo pari a

$$\left[\frac{\partial \Omega}{\partial t} \right]_{s,t} dt ds$$

il flusso legato alla superficie laterale sarà dunque

$$\left[\rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right]_{s,t} ds$$

L'equazione derivante dal principio di conservazione della massa, detta anche equazione di continuità, risulta dunque

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \Omega \right]_{s,t} ds + [\rho Q]_{s+ds,t} - [\rho Q]_{s,t} + \left[\rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right]_{s,t} ds = 0$$

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \Omega \right]_{s,t} ds + [\rho Q]_{s,t} - \left[\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} \right]_{s,t} ds - [\rho Q]_{s,t} + \left[\rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right]_{s,t} ds = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho \Omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} = 0}$$

Come detto in precedenza, questa è l'equazione di continuità per le correnti.

- Nel caso di un moto stazionario, un moto cioè in cui le grandezze non dipendono dal tempo si ha

$$\frac{d(\rho Q)}{ds} = 0$$

Si noti che la derivata rispetto a s è ora ordinaria, considerato che sia ρ sia Q dipendono solo da s .

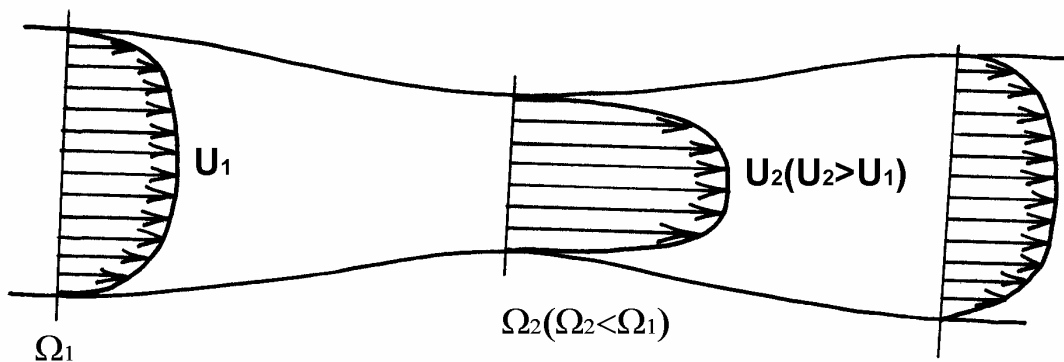
Segue

$$\rho Q = \text{costante}$$

la portata massica lungo le correnti stazionarie si mantiene dunque costante. Se inoltre il fluido in esame è a densità costante l'equazione di continuità impone

$$Q = \text{costante}$$

Essendo $Q = U\Omega$, quando la sezione diminuisce la velocità aumenta, quando invece la sezione aumenta la velocità diminuisce



Ciò non è vero se il fluido è a densità variabile. In tal caso infatti si deve mantenere costante il prodotto $\rho U\Omega$.

- Nel caso di un condotto a sezione indipendente dal tempo (per esempio un condotto in acciaio) e di un fluido a densità costante si ha

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

Si noti che la derivata rispetto a s rimane parziale. La funzione Q che soddisfa l'equazione precedente è

$$Q = Q(t) = \Omega(s)U(s, t)$$

Se poi la sezione Ω è costante si ha

$$U = U(t)$$

cioè quello che si definisce un moto in blocco. Infatti in ogni sezione la velocità è uguale anche se essa varia nel tempo.

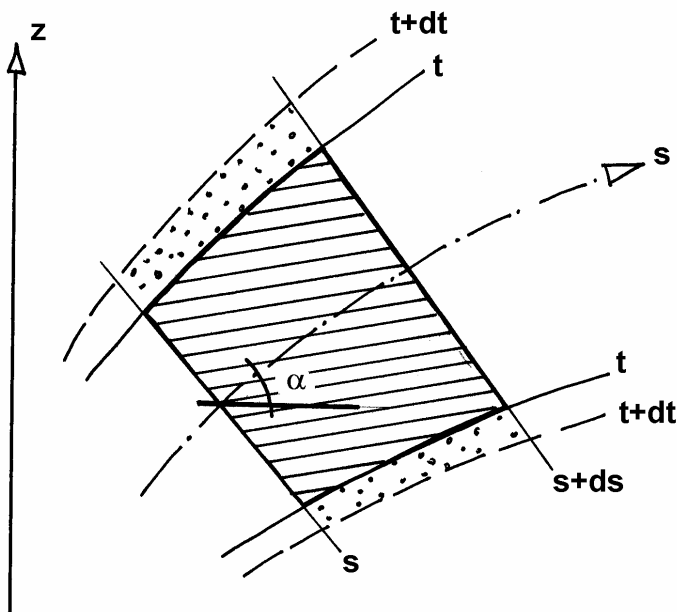
Lezione 17

IL PRINCIPIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO: L'EQUAZIONE DEL MOTO

- Nella LEZIONE 14 si è visto che il principio della quantità di moto conduce a

$$\int_{V_0} \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} dV_0 + \int_{S_0} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS_0 = \int_{V_0} \rho \underline{f} dV_0 + \int_{S_0} \underline{t} dS_0$$

Applichiamo l'equazione precedente al volume di controllo V_0 (vedi figura) individuato dal



contorno della corrente al tempo t e dalle sezioni poste all'ascissa s e all'ascissa $s + ds$ (volume tratteggiato). La linea tratteggiata sia il contorno della corrente al tempo $t + dt$. Infine l'angolo α denoti l'angolo formato dall'asse della corrente con un piano orizzontale e il campo di forze \underline{f} sia quello gravitazionale. L'equazione considerata è un'equazione vettoriale. Essendo il vettore velocità parallelo

all'ascissa curvilinea s , proiettiamo l'equazione lungo s

$$I_s + M_{us} - M_{is} = G_s + \Pi_s$$

Il termine I_s può essere approssimato dalla relazione

$$I_s = \left[\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} \right]_{s,t} (\Omega)_{s,t} ds$$

dove $(\Omega)_{s,t} ds$, a meno di termini di ordine ds^2 , rappresenta il volume V_0 . La derivata rispetto al tempo di ρU può essere valutata al tempo t e all'ascissa s comportando ciò un errore in I_s di ordine ds^2 e $ds dt$.

Il fluido entra nel volume di controllo solo attraverso la sezione posta in s . Il flusso di quantità di moto in ingresso, proiettato nella direzione s è quindi

$$M_{is} = (\rho QU)_{s,t}$$

Il flusso di quantità di moto in uscita è dato dalla somma di due termini

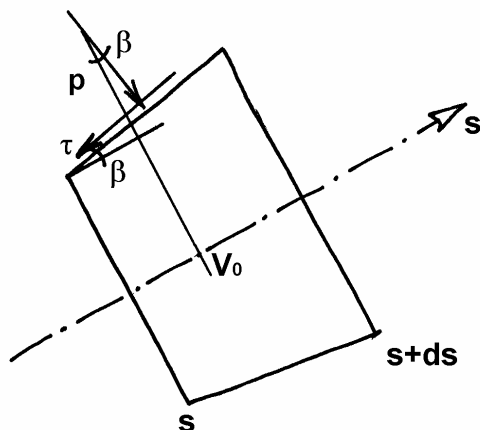
$$M_{us} = (\rho QU)_{s+ds,t} + (\rho)_{s,t} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} \right)_{s,t} ds (U)_{s,t}$$

Il primo termine rappresenta il flusso di quantità di moto in uscita dalla sezione caratterizzata dall'ascissa $s + ds$, il secondo è legato al flusso di quantità di moto attraverso la superficie laterale.

Invero come discusso nella LEZIONE 16 il termine

$$(\rho)_{s,t} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} \right)_{s,t} ds$$

è il flusso di massa attraverso la superficie laterale del volume di controllo che trascina con se quantità di moto nella direzione s .



Il termine G_s è facilmente calcolabile e risulta

$$G_s = -(\Omega)_{s,t} ds (\rho)_{s,t} g \sin \alpha$$

Resta infine da calcolare Π_s . Sulla sezione caratterizzata dall'ascissa s , la distribuzione della pressione è idrostatica (vedi LEZIONE 15) così come sulla sezione posta in $s + ds$. Le tensioni tangenziali agenti sulle sezioni poste in s e $s + ds$ non forniscono alcun contributo a Π_s .

Sulla superficie laterale, l'esterno esercita una tensione che ha una componente normale alla superficie e una tangente. Entrambe le componenti forniscono un contributo a Π_s . Con riferimento alla figura e denotando con β l'angolo (piccolo) che il contorno forma con l'asse s , si ha

$$\Pi_s = (p\Omega)_{s,t} - (p\Omega)_{s+ds,t} + (p)_{s,t} S_\ell \sin \beta - (\tau)_{s,t} S_{\ell b} \cos \beta$$

Nell'espressione precedente mentre S_ℓ indica tutta la superficie laterale del volume di controllo, $S_{\ell b}$ è quella parte a contatto con un contorno solido in grado cioè di esercitare una resistenza al moto del fluido. Analizzando la geometria del problema è possibile dedurre che

$$S_\ell \sin \beta = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial s} \right)_{s,t} ds$$

$$S_{\ell b} = (B)_{s,t} ds$$

essendo B la parte del perimetro della generica sezione a contatto con un contorno solido (B è detto perimetro bagnato).

L'equazione della quantità di moto porge dunque

$$\left[\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} \right]_{s,t} (\Omega)_{s,t} ds + (\rho Q U)_{s+ds,t} + \left(\rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} U \right)_{s,t} ds - (\rho Q U)_{s,t} = -$$

$$- (\rho \Omega)_{s,t} g \sin \alpha ds + (p\Omega)_{s,t} - (p\Omega)_{s+ds,t} + (p)_{s,t} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial s} \right)_{s,t} ds - (\tau B)_{s,t} ds$$

dove si è anche assunto che β sia così piccolo da poter considerare $\cos \beta \cong 1$

Tenendo conto che

$$(\rho Q U)_{s+ds} = (\rho Q U)_s + \frac{\partial(\rho Q U)}{\partial s} ds + o(ds^2)$$

$$(p\Omega)_{s+ds} = (p\Omega)_s + \frac{\partial(p\Omega)}{\partial s} ds$$

e che il $\sin \alpha$ può essere espresso come $\partial z / \partial s$ indicando con z la quota dell'asse della corrente si ha

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} \Omega + U \frac{\partial \rho}{\partial t} \Omega + U \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} + \rho Q \frac{\partial U}{\partial s} + \rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} U = -\gamma \Omega \frac{\partial z}{\partial s} - p \frac{\partial \Omega}{\partial s} - \Omega \frac{\partial p}{\partial s} + p \frac{\partial \Omega}{\partial s} - \tau B$$

essendo tutte le quantità valutate in s al tempo t . Nell'equazione precedente la somma dei termini sottolineati si annulla in forza dell'equazione di continuità.

Segue, dividendo per $\gamma\Omega$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{g} U \frac{\partial U}{\partial s} = -\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\tau B}{\gamma\Omega}$$

o ancora

$$\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{U^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\tau}{\gamma R_i}$$

essendo R_i il raggio idraulico della sezione pari al rapporto fra l'area della sezione ed il perimetro bagnato

$$R_i = \frac{\Omega}{B}$$

Infine per un fluido barotropico (NOTA 1), la cui densità è funzione solo della pressione, è possibile scrivere

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - j}$$

$$\text{ove } H = z + \int \frac{dp}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} \text{ e } j = \frac{\tau}{\gamma R_i}$$

L'equazione precedente costituisce l'equazione del moto di una corrente. Essa ci dice che il carico totale (l'energia per unità di peso del fluido) diminuisce nella direzione del moto a causa del termine $-j$ (j è infatti una quantità sempre positiva) mentre il termine $-\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$ può causare variazioni o positive o negative del carico.

Il termine j corrisponde alle perdite di carico per unità di percorso.

NOTA 1

Se il fluido è barotropico, se cioè $\gamma = \gamma(p)$, si ha

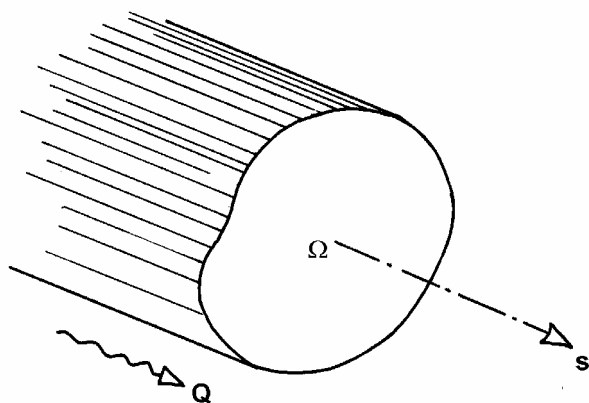
$$\frac{\partial}{\partial s} \int \frac{dp}{\gamma} = \frac{d}{dp} \int \frac{dp}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s}$$

Lezione 18

LA VALUTAZIONE DI j

- L'equazione di continuità e l'equazione del moto per le correnti richiedono, per essere risolte, un'espressione che leghi j alle caratteristiche cinematiche della corrente.

Per determinare tale relazione consideriamo un moto stazionario (quindi indipendente dal tempo) e uniforme (quindi indipendente dalla coordinata s). La sezione (di forma arbitraria) deve essere perciò costante. Si ricordi che



$$j = \frac{\tau}{\gamma R_i}$$

L'analisi del problema mostra che τ dipende:

- dalle caratteristiche del fluido ρ, ν
- dalla dimensione e dalla forma della sezione descrivibile dal raggio idraulico R_i (o convenzionalmente dalla dimensione $4R_i$) e da parametri di forma ε_{fi}
- dalle dimensioni della scabrezza y_r che influenza senza dubbio il valore della tensione alla parete
- dalla velocità media della corrente U

(si potrebbe pensare che τ sia influenzato anche dalla portata Q . Tuttavia avendo affermato che τ dipende da U e Ω e sapendo che $Q = U\Omega$, sarebbe ridondante affermare che τ dipende anche da Q)

Si ha dunque

$$\tau = f(4R_i, \varepsilon_{fi}, y_r, U, \rho, \nu)$$

Applicando il teorema Π (vedi LEZIONE 11) e scegliendo come grandezze dimensionalmente indipendenti $4R_i, U, \rho$ si ottiene

$$\frac{\tau}{\rho U^2} = f_1\left(\frac{4R_i U}{\nu}, \frac{y_r}{4R_i}, \varepsilon_{fi}\right)$$

La quantità j può dunque essere valutata utilizzando l'espressione

$$j = \frac{\tau}{\gamma R_i} = \frac{\rho U^2 f_1}{\rho g R_i} = \frac{U^2}{2g} \frac{8 f_1}{4R_i} = \frac{\lambda}{4R_i} \frac{U^2}{2g}$$

$$\text{dove } \lambda = 8 f_1 = \lambda\left(\frac{4R_i U}{\nu}, \frac{y_r}{4R_i}, \varepsilon_{fi}\right)$$

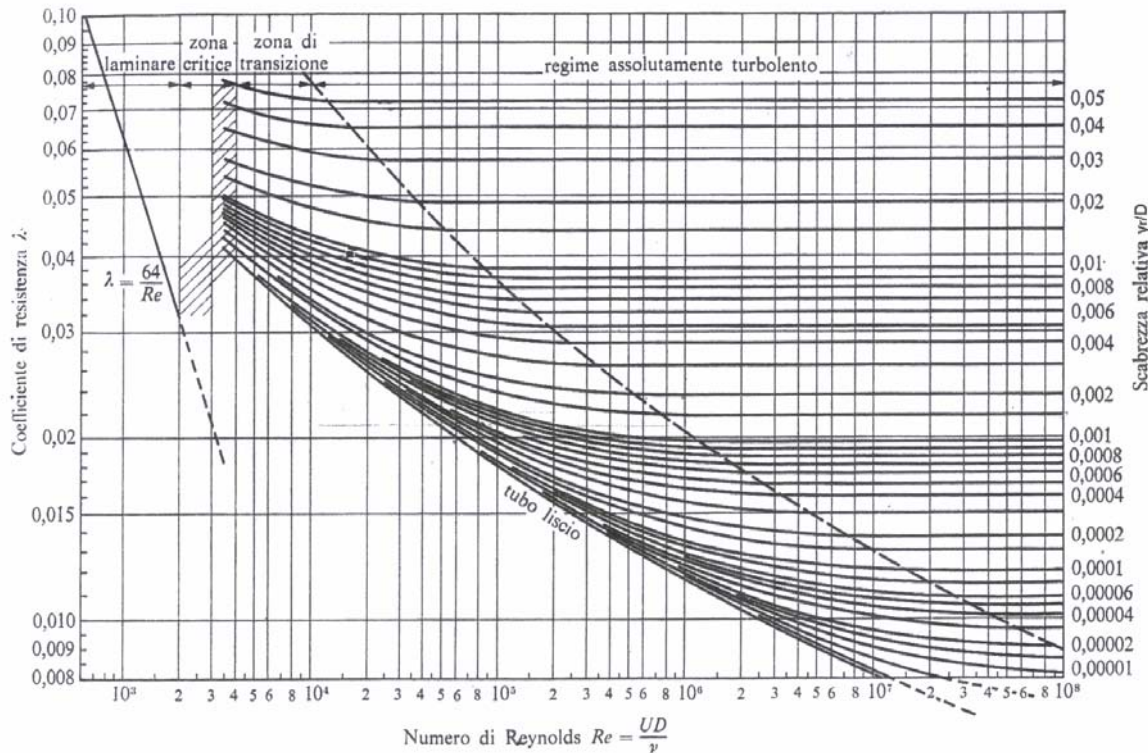
λ è detto coefficiente di resistenza e dipende dal numero di Reynolds $Re = \frac{4R_i U}{\nu}$, dalla scabrezza relativa $\frac{y_r}{4R_i}$ e dalla forma della sezione descritta dai parametri ε_{fi} .

Chiaramente per determinare λ è necessario ricorrere a misure sperimentali. Per un condotto a sezione circolare $4R_i = D$, essendo D il diametro del condotto (infatti $R_i = \frac{\pi D^2}{4} / \pi D = \frac{D}{4}$).

Si ha dunque

$$\lambda = \lambda\left(\frac{UD}{\nu}, \frac{y_r}{D}\right)$$

Nel grafico sottostante (denominato diagramma di Moody) è riportato l'andamento di λ in funzione di $Re = UD/v$ per diversi valori di $\varepsilon = y_r/D$



Sempre per condotti a sezione circolare nel regime di moto turbolento esistono formule empiriche per la valutazione di λ . Una delle più usate, anche se non esplicita, è quella di Colebrook

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3.71} \right)$$

Notiamo che per valori di Re tendenti ad infinito, il valore di λ risulta indipendente da Re . Quando λ dipende solo da ε si ha il regime di parete assolutamente scabra. Per $\varepsilon = 0$ (parete liscia) λ dipende solo da Re . Il regime di transizione è quello in cui λ dipende sia da Re che da ε . Si noti infine che la formula di Colebrook è valida in regime di moto turbolento ($Re > 2000 - 2200$). Quando il regime di moto è laminare ($Re \leq 2000 - 2200$) il valore di λ può essere calcolato analiticamente (ciò verrà fatto nei corsi previsti sulla laurea specialistica) e risulta

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

-
- Per il calcolo di λ relativo a condotti di forma diversa dalla circolare si consultino libri di testo o manuali dell'ingegnere.
 - L'espressione di j è stata ottenuta supponendo il moto stazionario e uniforme. Nel caso di moti lentamente variabili o di condotti lentamente convergenti o divergenti, si utilizza la stessa espressione utilizzando i valori locali e istantanei di Re e ε (NOTA 1).

NOTA 1

Un valore indicativo di y_r può essere dedotto dalla seguente tabella

- Vetro, ottone, rame, piombo, tubi trafilati	$0.1 \cdot 10^{-4} \text{m}$
- Tubi saldati, amianto - cemento	$0.5 \cdot 10^{-4} \text{m}$
- Ghisa asfaltata	$1.0 \cdot 10^{-4} \text{m}$
- Ferro galvanizzato	$1.5 \cdot 10^{-4} \text{m}$
- Ghisa	$3-5 \cdot 10^{-4} \text{m}$
- Calcestruzzo	$5-50 \cdot 10^{-4} \text{m}$
- Tubi chiodati	$10-100 \cdot 10^{-4} \text{m}$

Lezione 19

ALCUNI PROBLEMI RELATIVI A CONDOTTE A SEZIONE CIRCOLARE

Come accennato nella LEZIONE 18, se consideriamo il moto stazionario all'interno di una condotta a sezione circolare e costante, l'equazione di continuità, (per fluido a densità costante) porge

$$Q = \text{costante} \Rightarrow U = \text{costante}$$

Questa situazione, anche se particolare, è estremamente frequente nella pratica.

L'equazione del moto inoltre si semplifica e diviene

$$\frac{dH}{ds} = -\frac{\lambda U^2}{D 2g}$$

Siccome la sezione Ω è costante così come il suo diametro D e la sua scabrezza y_r (se la condotta è costruita tutta di uno stesso materiale) segue che anche il coefficiente di resistenza λ è costante.

Infatti

$$Re = \frac{UD}{\nu} = \text{costante}; \quad \varepsilon = \frac{y_r}{D} = \text{costante}$$

L'equazione del moto può dunque essere facilmente integrata porgendo

$$H_2 - H_1 = -\frac{\lambda U^2}{D 2g} (s_2 - s_1) = -\frac{\lambda U^2}{D 2g} L$$

essendo L la distanza fra due sezioni diverse con ascissa curvilinea s_2 e s_1 rispettivamente (s_2 a valle di s_1) e carico totale H_2 e H_1 .

La relazione

$$H_2 - H_1 = -\frac{\lambda U^2}{D 2g} L$$

o l'equivalente

$$H_2 - H_1 = -\frac{\lambda Q^2}{D 2g \Omega^2} L$$

consentono di determinare una delle caratteristiche della condotta o della corrente note le altre.
(NOTA 1)

1) Problema 1: calcolo delle perdite di carico

Di una condotta in ghisa asfaltata sia assegnato il diametro D e la lunghezza L . Conoscendo il valore della portata di acqua defluente, valutare le perdite di carico totali subite dalla corrente fra la sezione iniziale e quella finale. Dati: $D = 15\text{cm}$, $L = 500\text{m}$, $Q = 25 \frac{\ell}{s}$

Soluzione:

Dai dati disponibili è immediato calcolare la sezione Ω e quindi la velocità media

$$\Omega = \pi \frac{D^2}{4} = 1.767 \cdot 10^{-2} \text{m}^2 \quad U = \frac{Q}{\Omega} = 1.415 \text{m/s}$$

Conoscendo il materiale con cui è stata realizzata la condotta è possibile valutare la scabrezza assoluta (vedi LEZIONE 18)

$$y_r = 1.0 \cdot 10^{-4} \text{m}$$

Segue

$$Re = \frac{UD}{\nu} = 2.12 \cdot 10^5 \quad \varepsilon = \frac{y_r}{D} = 6.67 \cdot 10^{-4}$$

Dal diagramma di Moody è possibile stimare

$$\lambda = 0.0195$$

e quindi le perdite di carico

$$H_2 - H_1 = -\frac{\lambda U^2}{D} \frac{L}{2g} = 6.63\text{m}$$

NOTA 1

Notiamo che in questo caso, essendo la velocità costante, le equazioni precedenti possono essere anche scritte nella forma

$$H_2 - H_1 = h_2 - h_1 = -\frac{\lambda U^2}{D} \frac{L}{2g} = -\frac{\lambda}{D} \frac{Q^2}{2g\Omega^2} L$$

2) Problema 2: calcolo della portata

La differenza fra il carico iniziale e quello finale in un tubo in rame lungo L è $\Delta H = H_1 - H_2$.

Conoscendo il diametro D del tubo, valutare la portata Q di acqua defluente .

Dati: $L = 10m$, $\Delta H = 5m$, $D = 2,6cm$

Soluzione:

Dall'equazione del moto è possibile ricavare

$$Q = \Omega \sqrt{\frac{2g\Delta HD}{\lambda L}}$$

La precedente relazione non consente tuttavia il calcolo diretto di Q perché λ dipende dal numero di Reynolds e quindi da Q . E' necessario dunque procedere per tentativi.

Dalla conoscenza del materiale della condotta (rame) deriva il valore di $y_r = 0.1 \cdot 10^{-4}m$ e quello di

$$\varepsilon = \frac{y_r}{D} = 3.85 \cdot 10^{-4}$$

Se si suppone che il regime di moto sia quello di parete assolutamente scabra (alti valori del numero di Reynolds) si ottiene un valore di primo tentativo di λ

$$\lambda_1 = 0.0158$$

Con esso è possibile ricavare un valore di primo tentativo di Q

$$Q_1 = 2.13 \frac{\ell}{s}$$

da cui discendono

$$U_1 = 4.01 \frac{m}{s} \text{ e } Re_1 = 1.04 \cdot 10^5$$

Avendo ora a disposizione un valore di tentativo del numero di Reynolds è possibile controllare se l'ipotesi iniziale di regime di parete assolutamente scabra era corretta o no. Dall'analisi del diagramma di Moody emerge che la condotta è nel regime di transizione. La conoscenza di Re consente di ottenere un secondo valore di λ

$$\lambda_2 = \lambda(1.04 \cdot 10^5, 3.85 \cdot 10^{-4}) \cong 0.02$$

Con tale valore di λ è possibile ottenere un secondo valore di Q

$$Q_2 = 1.89 \frac{\ell}{s}$$

da cui discendono

$$U_2 = 3.56 \frac{m}{s} \quad e \quad Re_2 = 9.26 \cdot 10^4$$

la conoscenza di Re_2 consente di ottenere un terzo valore di λ

$$\lambda_3 = \lambda(9.26 \cdot 10^4, 3.85 \cdot 10^{-4}) \cong 0.0201$$

che porta a un valore di Q praticamente coincidente con Q_2 . Si è ottenuta la convergenza del risultato. Se Q_3 fosse stato sensibilmente diverso da Q_2 il calcolo avrebbe dovuto proseguire.

3) Problema 3: calcolo del diametro (Problema di progetto)

Fra due serbatoi, distanti 4 Km, si vuole posare una tubazione in grado di far defluire una portata Q di acqua. Si decide di utilizzare tubi in ghisa asfaltata ($y_r = 0.1mm$). Sapendo che il dislivello fra il pelo libero dei due serbatoi è ΔH , valutare il diametro del tubo da utilizzare.

$$\text{Dati: } Q = 3 \frac{\ell}{s}, \quad \Delta H = 10m$$

Soluzione:

Il calcolo del diametro di una condotta, noti gli altri dati, deve essere fatto per tentativi, cercando di individuare il valore di D che causa delle perdite di carico lungo la condotta pari a ΔH . In altre parole si deve trovare D tale che

$$\Delta H = \frac{\lambda}{D} \frac{Q^2}{2g\Omega^2} L$$

A tal fine è opportuno precisare che la valutazione di D non deve essere fatta con troppe cifre significative, considerando che i diametri in commercio sono un numero limitato. Un valore di primo tentativo per D può essere individuato imponendo che la velocità media nella condotta sia pari a $1 \frac{m}{s}$

$$D_1 = \sqrt{\frac{4Q}{\pi U_1}} = 0.0618m$$

Con tale valore del diametro (ricordiamo di tentativo) valutiamo $\frac{\lambda}{D} \frac{Q^2}{2g\Omega^2} L$ e confrontiamolo con ΔH pari a 10m.

Si ha

D [m]	Ω [m ²]	U [m/s]	Re	ε	λ	$\frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} L$
0.0618	$3 \cdot 10^{-3}$	1.00	$6.18 \cdot 10^{-3}$	$1.62 \cdot 10^{-3}$	$\cong 0.025$	82.6m

Il valore delle perdite risulta molto maggiore del dislivello effettivamente disponibile. Ciò suggerisce che il diametro deve essere maggiore, affinché il fluido viaggi a una velocità inferiore e inferiori siano le perdite. Tentiamo con $D = 10\text{cm}$. Si ha

D	Ω	U	Re	ε	λ	$\frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} L$
0.1	$7.85 \cdot 10^{-3}$	0.38	$3.8 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^{-3}$	$\cong 0.025$	7.36m

Le perdite sono ora inferiori al dislivello. Proviamo $D = 9.5\text{cm}$

D	Ω	U	Re	ε	λ	$\frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} L$
0.095	$7.09 \cdot 10^{-3}$	0.42	$3.99 \cdot 10^4$	$1.05 \cdot 10^{-3}$	$\cong 0.025$	9.44m

Le perdite sono ancora inferiori a ΔH anche se molto vicine. Verifichiamo che con un diametro di 9 cm esse risultano superiori

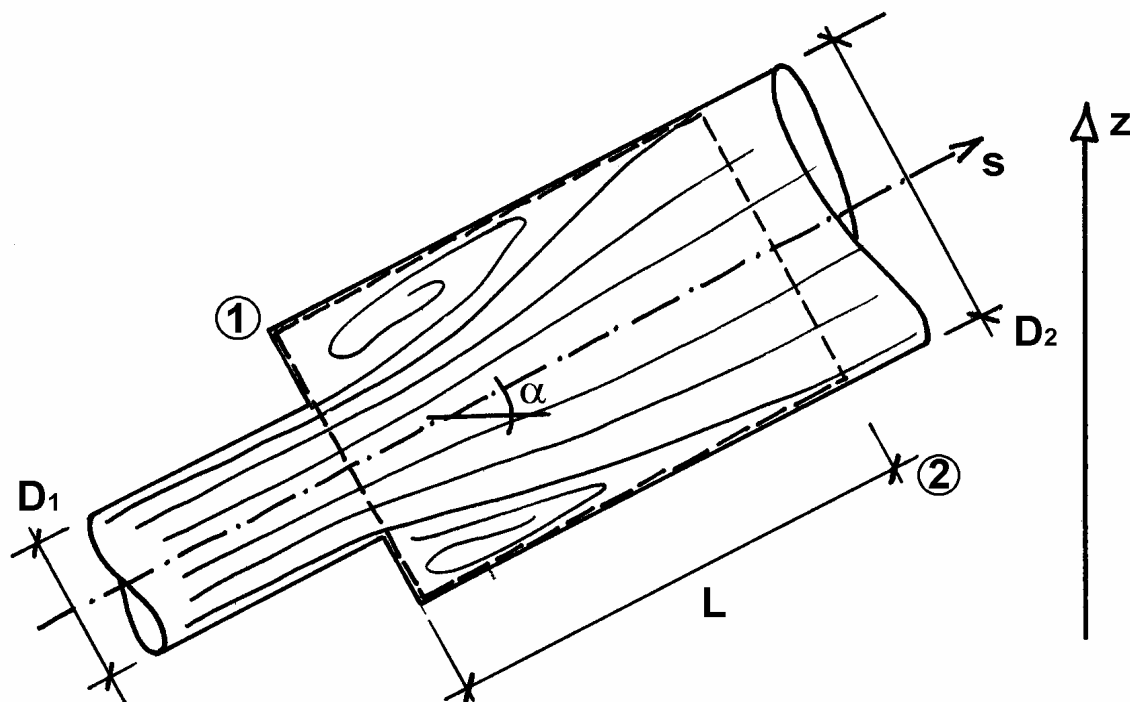
D	Ω	U	Re	ε	λ	$\frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} L$
0.09	$6.36 \cdot 10^{-3}$	0.47	$4.23 \cdot 10^4$	$1.11 \cdot 10^{-3}$	$\cong 0.024$	12.12m

Emerge quindi che il diametro da utilizzare è compreso fra 9 e 9.5 cm.

Lezione 20

PERDITE CONCENTRATE DI CARICO DOVUTE A UN BRUSCO ALLARGAMENTO (PERDITE DI BORDA)

In un impianto è possibile che sia presente il passaggio da un diametro D_1 a uno D_2 maggiore. Localmente il moto non è più unidirezionale, generandosi significative componenti di velocità ortogonali all'asse della condotta. Ciò fa sì che localmente il moto del fluido non possa essere analizzato con le equazioni delle correnti.



Da un punto di vista qualitativo, uno schizzo del campo di moto è riportato nella figura.

Per legare le caratteristiche della corrente immediatamente a monte dell'allargamento con quelle della corrente a valle è possibile utilizzare il principio della quantità di moto in forma integrale (LEZIONE 14). Sottolineamo che il moto riprende le caratteristiche di una corrente a una distanza dall'allargamento dell'ordine di qualche diametro.

Applichiamo dunque il principio della quantità di moto al volume di riferimento tratteggiato in figura e delimitato dalla sezione ①, immediatamente a valle dell'allargamento, e dalla sezione ② a una distanza L tale che il moto abbia ripreso le caratteristiche di una corrente. Proiettiamo l'equazione lungo direzione s

$$I_s + M_{us} - M_{is} = G_s + \Pi_s$$

Supposto il moto stazionario, I e quindi I_s risultano nulli. Sia $\Omega_1 = \pi D_1^2/4$ e $\Omega_2 = \pi D_2^2/4$.

Denotando con Q la portata defluente nell'impianto, si ha

$$M_{us} = \rho Q U_2 = \rho \Omega_2 U_2^2$$

$$M_{is} = \rho Q U_1 = \rho \Omega_1 U_1^2$$

Ricordiamo infatti che per il principio di conservazione della massa impone

$$\Omega_1 U_1 = \Omega_2 U_2 = Q = \text{costante}$$

E' facile verificare che

$$G_s = -\gamma \Omega_2 L \sin \alpha = -\gamma \Omega_2 L \frac{z_2 - z_1}{L} = \gamma \Omega_2 (z_1 - z_2)$$

essendo z_1 e z_2 le quote dei baricentri delle sezioni di ingresso e di uscita del fluido.

Rimane da quantificare Π_s . Sulla sezione ① possiamo assumere che la distribuzione di pressione sia idrostatica in quanto parte della sezione è occupata dalla corrente in arrivo e parte da fluido praticamente fermo. Anche sulla sezione ② è possibile assumere che la distribuzione di pressione sia pari a quella idrostatica. Trascurando le tensioni tangenziali sulla superficie laterale in considerazione del valore modesto di L , si ha

$$\Pi_s = p_1 \Omega_2 - p_2 \Omega_2$$

essendo p_1 e p_2 le pressioni sui baricentri delle sezioni di ingresso e di uscita del fluido.

Si ottiene dunque

$$\rho\Omega_2 U_2^2 - \rho\Omega_1 U_1^2 = \gamma\Omega_2(z_1 - z_2) + p_1\Omega_2 - p_2\Omega_2$$

e dividendo per $\gamma\Omega_2$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma_1} - z_2 - \frac{p_2}{\gamma_2} = h_1 - h_2 = \frac{U_2^2}{g} - \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \frac{U_1^2}{g}$$

Utilizzando quindi la relazione $\Omega_1 U_1 = U_2 \Omega_2$ si può ottenere

$$h_1 - h_2 = \frac{U_2^2}{g} \left[1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right] = \frac{U_1^2}{g} \left[\frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} - \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \right]$$

Essendo $\Omega_2 > \Omega_1$, la relazione precedente mostra che $h_2 > h_1$: il carico piezometrico a valle del restringimento è maggiore di quello a monte.

Ricaviamo ora il valore di $H_1 - H_2$. Si ha

$$H_1 - H_2 = h_1 + \frac{U_1^2}{2g} - h_2 - \frac{U_2^2}{2g} = h_1 - h_2 + \frac{U_2^2 \Omega_2^2}{2g \Omega_1^2} - \frac{U_2^2}{2g} = \frac{U_2^2}{2g} \left[2 - \frac{2\Omega_2}{\Omega_1} + \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} - 1 \right] = \frac{U_2^2}{2g} \left[1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right]^2$$

L'equazione precedente mostra che $H_1 > H_2$, cioè passando attraverso l'allargamento il fluido dissipa dell'energia e l'ammontare dell'energia dissipata è pari a

$$\Delta H_c = \frac{U_2^2}{2g} \left[1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right]^2$$

Tale dissipazione di energia può essere anche quantificata rispetto al carico cinetico di monte

$$\Delta H_c = \frac{U_1^2}{2g} \left[\frac{\Omega_1}{\Omega_2} - 1 \right]^2$$

Quest'ultima relazione mostra che quando una condotta sfocia in un serbatoio, la corrente in arrivo dissipa tutta la sua energia cinetica. Infatti lo sbocco di una condotta in un serbatoio può essere pensato come un brusco allargamento con Ω_1/Ω_2 tendente a zero.

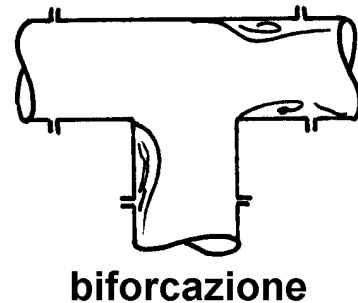
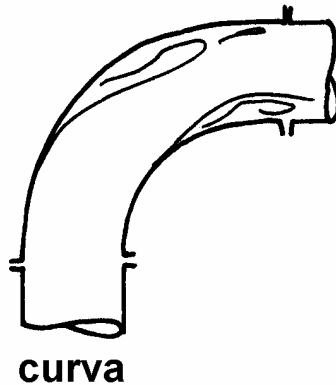
Segue

$$\Delta H_c = \frac{U_1^2}{2g}$$

Lezione 21

PERDITE CONCENTRATE DI CARICO IN UN IMPIANTO

Nella LEZIONE 20 abbiamo determinato le perdite di carico (perdite di energia per unità di peso del fluido) dovute a un brusco allargamento e allo sbocco di una condotta in un serbatoio. In un impianto sono presenti altre sorgenti di perdite di carico localizzate quali imbrocchi, valvole, gomiti, curve, diaframmi, biforcazioni, alcune schematicamente rappresentate in figura.



Le perdite di carico localizzate indotte da tali componenti di un impianto vengono usualmente espresse con una relazione del tipo

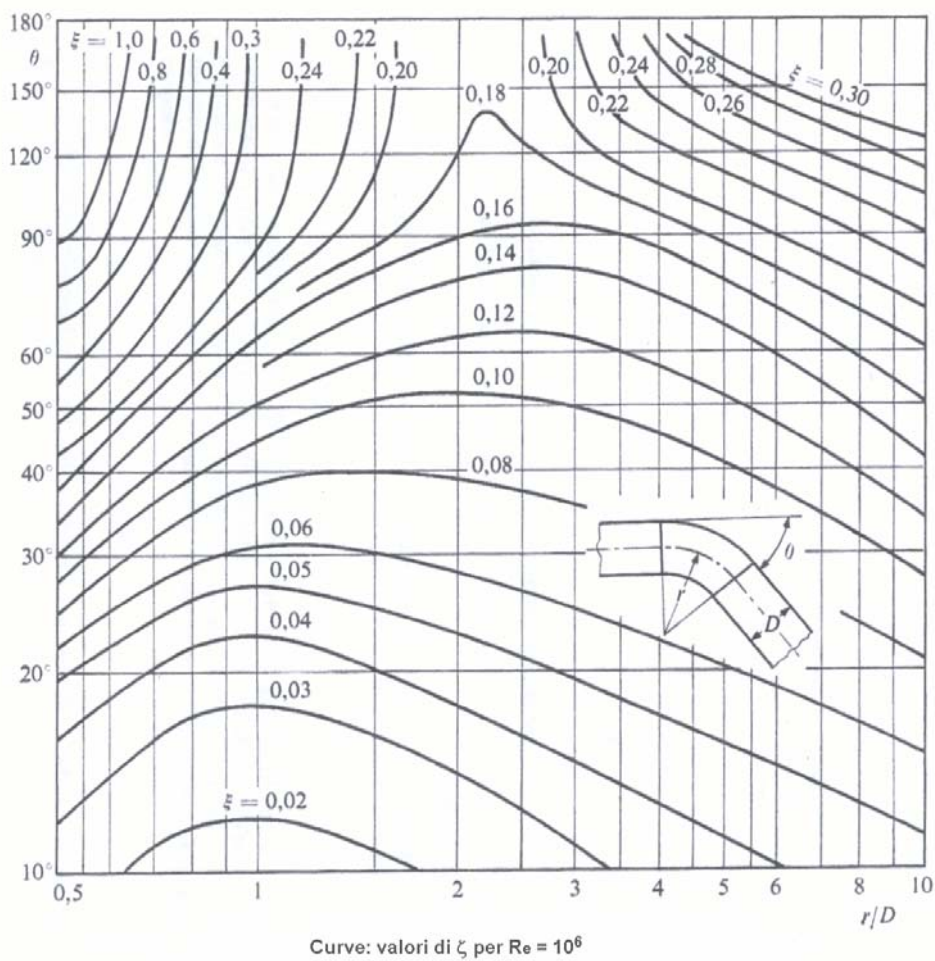
$$\Delta H_c = \zeta \frac{U^2}{2g}$$

in cui U è la velocità media che si stabilisce in una sezione caratteristica e ζ un parametro che dipende essenzialmente dalla configurazione geometrica e dal numero di Reynolds. Spesso però la dipendenza di ζ dal numero di Reynolds è trascurabile.

E' impossibile qui fornire una panoramica sui valori di ζ a causa della grande varietà delle componenti di un impianto dal punto di vista geometrico. Ricordiamo solamente che la determinazione di ζ viene fatta attraverso esperienze di laboratorio caso per caso.

A titolo indicativo forniamo i seguenti valori di ζ

- Per valvole a piena apertura
 - valvole a farfalla $\zeta = 0.2 \div 0.4$
 - valvole a fuso $\zeta = 1.2 \div 2.0$
 - saracinesca piana $\zeta = 0.1 \div 0.3$
 - valvola sferica $\zeta = 0$
- Gomiti a curve

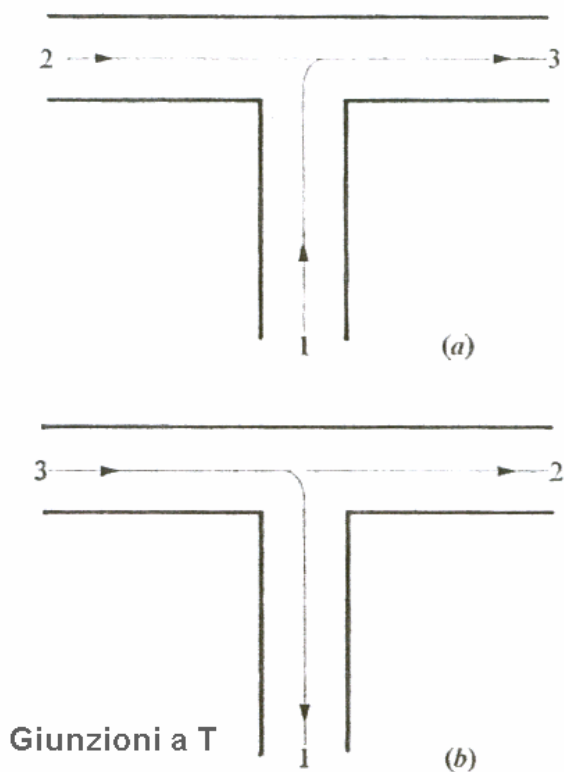


- Imbocco a spigolo vivo

$$\zeta \cong 0.5$$

- Giunzioni a T fra tubi di ugual diametro

$$\Delta H_{i-j} = \xi_{i-j} (U_3^2 / 2g).$$



Per Q_1/Q_3 variabile da 0,5 a 1,0 si ha corrispondentemente:

- | | |
|--|-----------------------------|
| a) per confluenza delle correnti 1 e 2 nella 3 | $\xi_{1-3} =$ da 0,4 a 1,1 |
| | $\xi_{2-3} =$ da 0,5 a 0,6 |
| b) per suddivisione della corrente 3 nelle 1 e 2 | $\xi_{3-1} =$ da 0,8 a 1,3 |
| | $\xi_{3-2} =$ da 0,05 a 0,4 |

Lezione 22

PROBLEMI RELATIVI AD ALCUNI SEMPLICI IMPIANTI

- Nel seguito illustreremo alcuni problemi relativi a semplici impianti. Nell'illustrare la loro soluzione introdurremo *le pompe* (NOTA 1), organi di un impianto in grado di fornire energia al fluido, e tratteremo le *linee dei carichi totali e piezometrici*, utile strumento per determinare graficamente la pressione in una sezione e per accertarsi del buon funzionamento di un impianto.
- Per impostare la soluzione di un problema relativo a un impianto, è necessario analizzare l'evoluzione dell'energia del fluido per unità di peso (carico totale) dalla sezione iniziale dell'impianto a quella finale: il carico iniziale diminuito di tutte le perdite, distribuite e localizzate, ed eventualmente aumentato del carico fornito da pompe presenti sull'impianto deve fornire il carico nella sezione finale. Tale bilancio energetico fornisce un'equazione che consente di determinare una delle caratteristiche dell'impianto note ad altre. Per illustrare la procedura analizziamo nel seguito alcuni problemi particolari.

NOTA 1

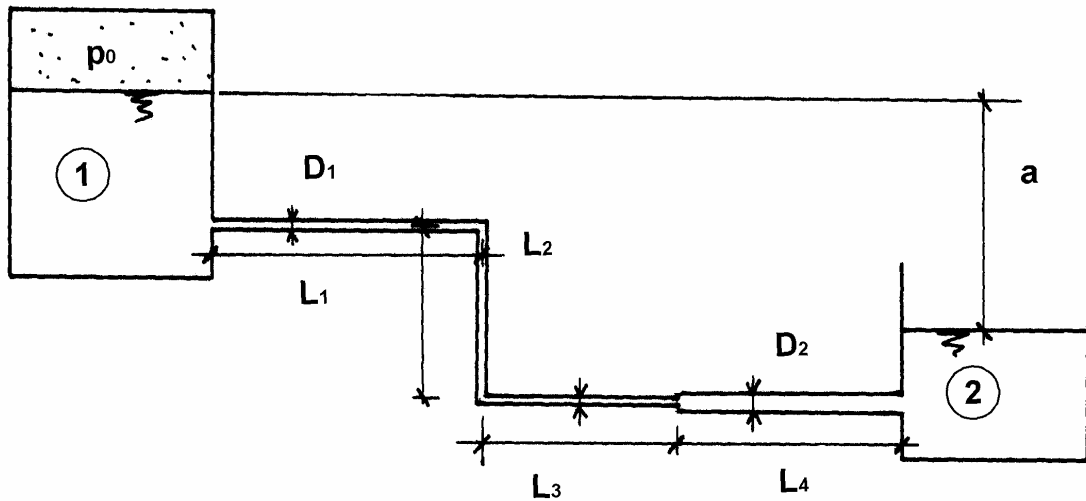
Nell'ambito di un corso di Idraulica 1 non è possibile descrivere nei dettagli il funzionamento delle pompe e le loro caratteristiche. Ci limiteremo qui a dire che le pompe sono essenzialmente caratterizzate dalla prevalenza h_p e dalla portata Q .

La prevalenza è il carico che la pompa fornisce al fluido mentre il valore di Q è la portata che attraversa la pompa. L'energia che la pompa fornisce al fluido nell'unità di tempo è pari a

$$P = \gamma Q h_p$$

(vedi LEZIONE 15). Un'ulteriore caratteristica della pompa è il rendimento η cioè il rapporto fra la potenza P fornita al fluido e la potenza assorbita. Le caratteristiche delle pompe vengono in generale fornite dalle case costruttrici.

Problema 1



Determinare il valore della pressione relativa p_0 nel serbatoio ① affinché nell'impianto in figura defluisca una portata Q di acqua dal serbatoio ① al serbatoio ②. I tubi siano in ghisa asfaltata con un valore di scabrezza assoluta y_r pari a 0.1mm .

Dati: $a = 40\text{ cm}$, $L_1 = 50\text{ m}$, $L_2 = 3\text{ m}$, $L_3 = 75\text{ m}$, $L_4 = 55\text{ m}$, $D_1 = 10\text{ cm}$, $D_2 = 15\text{ cm}$, $Q = 5\text{ l/s}$.

Soluzione:

Introducendo un asse verticale z diretto verso l'alto e con l'origine in corrispondenza del pelo libero del serbatoio ②, il carico totale dell'acqua contenuta all'interno del serbatoio ① (indipendente dalla posizione perché il fluido può considerarsi in quiete) risulta

$$H_1 = h_1 = a + \frac{p_0}{\gamma}$$

mentre nel serbatoio ②, il carico totale risulta nullo

$$H_2 = 0$$

Si deve quindi avere

$$H_1 - \frac{U_1^2}{2g} \left[0.5 + \frac{\lambda_1}{D_1} L_1 + 1 + \frac{\lambda_1}{D_1} L_2 + 1 + \frac{\lambda_1}{D_1} L_3 + \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2} - 1 \right)^2 \right] - \frac{U_2^2}{2g} \left[\frac{\lambda_2}{D_2} L_4 + 1 \right] = H_2$$

ove si è indicata con U_1 e U_2 le velocità nei tubi di diametro D_1 e D_2 rispettivamente. λ_1 e λ_2 indicano i rispettivi coefficienti di resistenza. Infine si è assunto che le perdite concentrate siano valutabili con l'espressione $\zeta \frac{U^2}{2g}$ e $\zeta = 0.5$ per l'imbocco, $\zeta = 1$ per i gomiti e lo sbocco.

Si ha

$$U_1 = \frac{Q_4}{\pi D_1^2} = 0.637 \text{ m/s} \rightarrow \text{Re}_1 = 6.37 \cdot 10^4$$

$$U_2 = \frac{Q_4}{\pi D_2^2} = 0.283 \text{ m/s} \rightarrow \text{Re}_2 = 4.25 \cdot 10^4$$

Essendo

$$\varepsilon_1 = \frac{y_r}{D_1} = 0.001 \quad , \quad \varepsilon_2 = \frac{y_r}{D_2} = 0.000667$$

è possibile valutare λ_1 e λ_2 dal diagramma di Moody.

Risulta

$$\lambda_1 \cong 0.023 \quad \lambda_2 \cong 0.024$$

L'equazione di partenza porge dunque

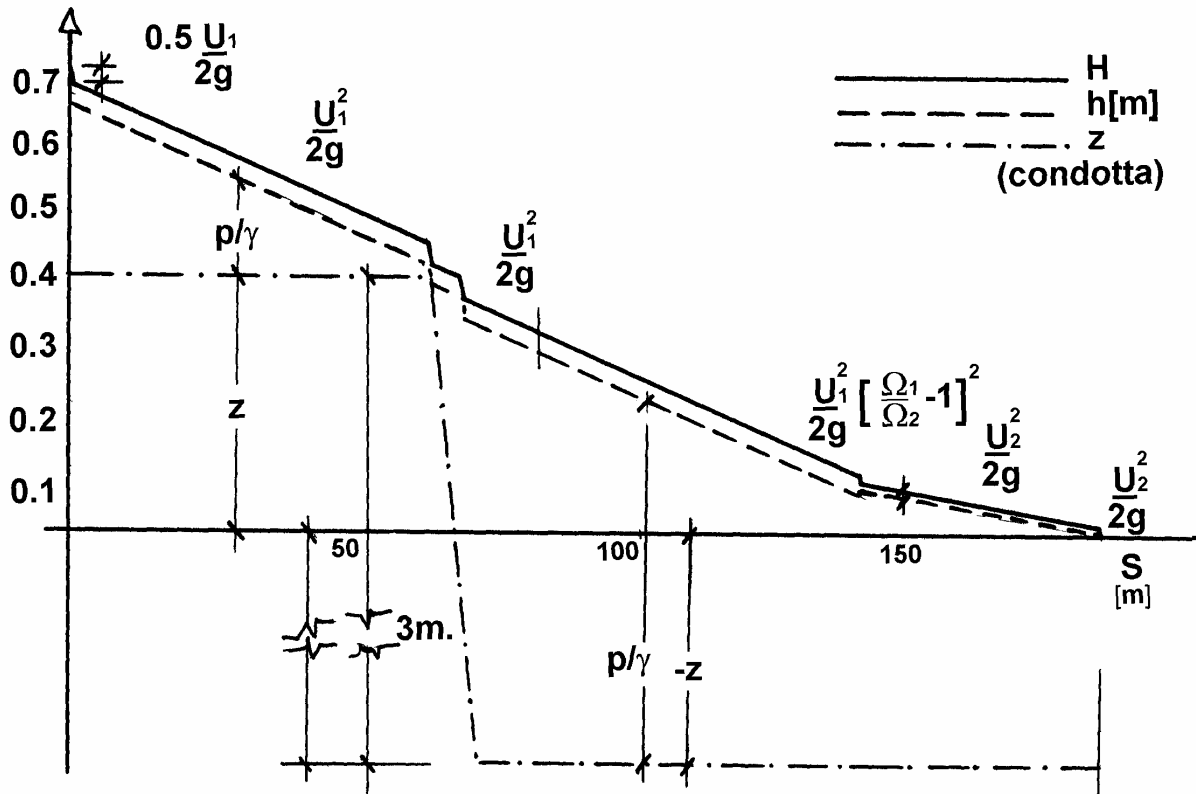
$$\frac{p_0}{\gamma} = -a + \frac{U_1^2}{2g} \left[2.809 + \frac{\lambda_1}{D_1} (L_1 + L_2 + L_3) \right] + \frac{U_2^2}{2g} \left[1 + \frac{\lambda_2}{D_2} L_4 \right]$$

avendo valutato $\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2} - 1 \right)^2 \cong 0.309$.

Effettuando i calcoli si ha

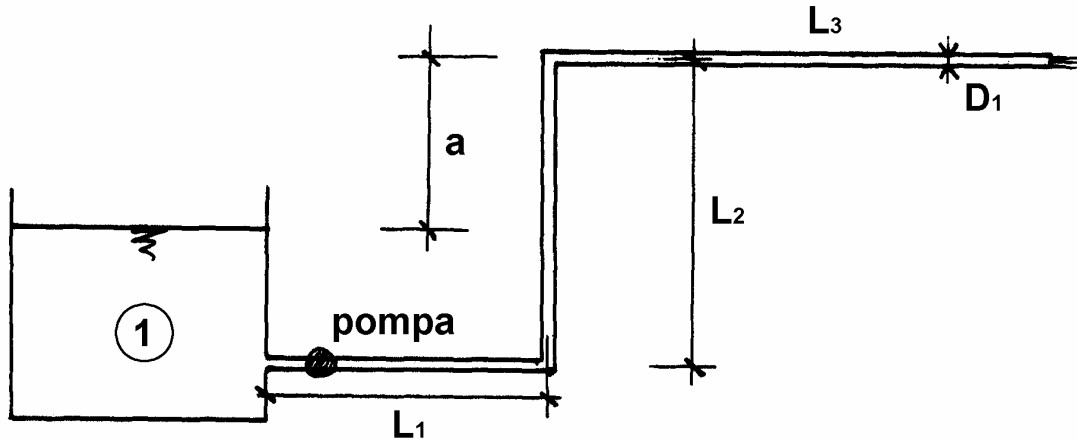
$$\frac{p_0}{\gamma} = [-0.4 + 0.0207(2.809 + 29.4) + 0.00408(1 + 8.8)]m = 0.307m$$

Da cui $p_0 = 3.01 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$



Nella figura sono riportate le linee dei carichi totali e piezometrici e la quota della condotta. Si noti che la differenza fra il carico piezometrico e la quota della condotta rappresenta il valore di p/γ .

Problema 2



Si valuti la prevalenza h_p della pompa necessaria a far defluire un'assegnata portata Q di acqua dal serbatoio ① fino alla fine del tubo (vedi figura). Il tubo sia in rame.

Dati: $L_1 = 10\text{ m}$, $L_2 = 2.5\text{ m}$, $L_3 = 6\text{ m}$, $a = 1.5\text{ m}$, $D_1 = 2.7\text{ cm}$, $Q = 1.5\text{ l/s}$

Soluzione:

Essendo il tubo in rame, si ha $y_r = 0.01\text{ mm}$. Inoltre dalla conoscenza della portata e del diametro segue

$$U = \frac{Q}{\Omega} = 2.62\text{ m/s} \rightarrow Re = 7.07 \cdot 10^4 \rightarrow \varepsilon = \frac{y_r}{D} = 3.7 \cdot 10^{-4}$$

Dalla conoscenza di Re e ε , si ottiene λ dal diagramma di Moody

$$\lambda \cong 0.021$$

Infine, con riferimento a un asse verticale z rivolto verso l'alto e con l'origine in corrispondenza del pelo libero del serbatoio ①, si ha

$$H_1 = 0 \quad ; \quad H_2 = a + \frac{U^2}{2g}$$

e

$$H_1 - 0.5 \frac{U^2}{2g} - \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} (L_1 + L_2 + L_3) - \frac{U^2}{2g} (1+1) + h_p = a + \frac{U^2}{2g} \quad (\text{NOTA 2})$$

NOTA 2

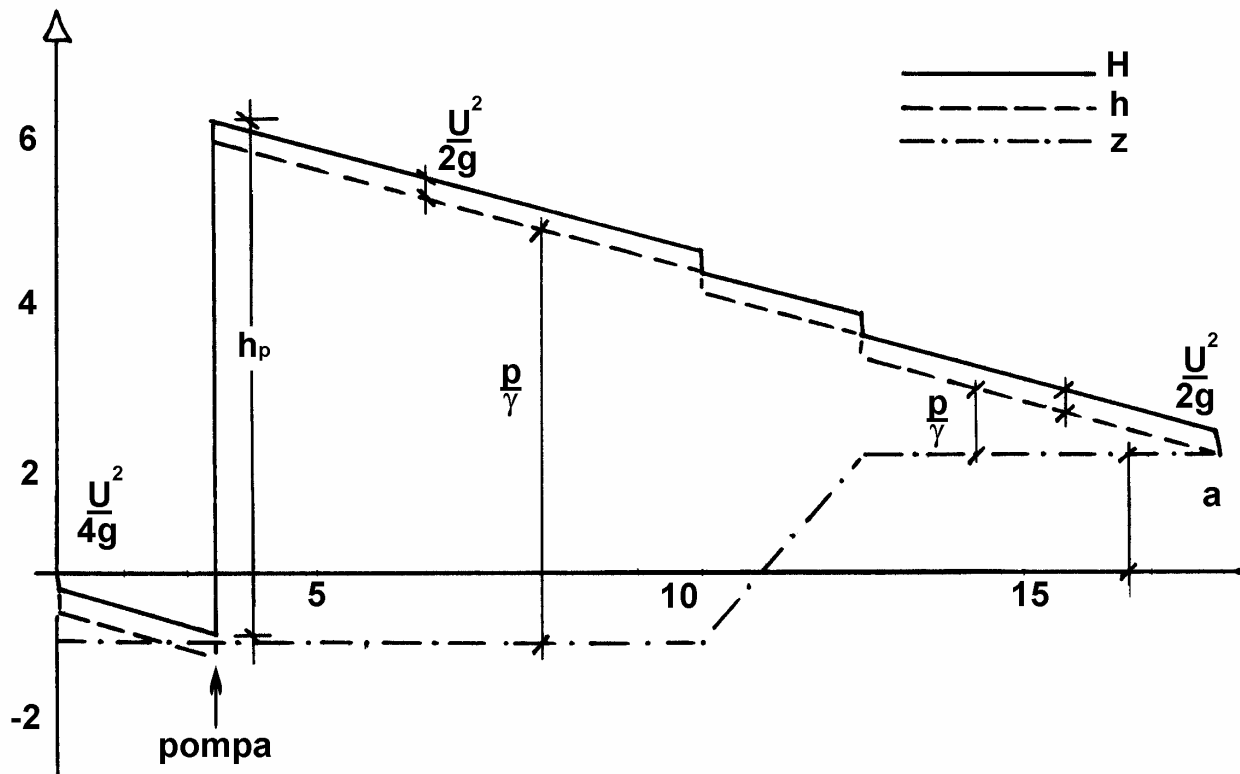
Segue

$$h_p = a + \frac{U^2}{2g} \left[3.5 + \frac{\lambda}{D} (L_1 + L_2 + L_3) \right]$$

Effettuando i calcoli si ha

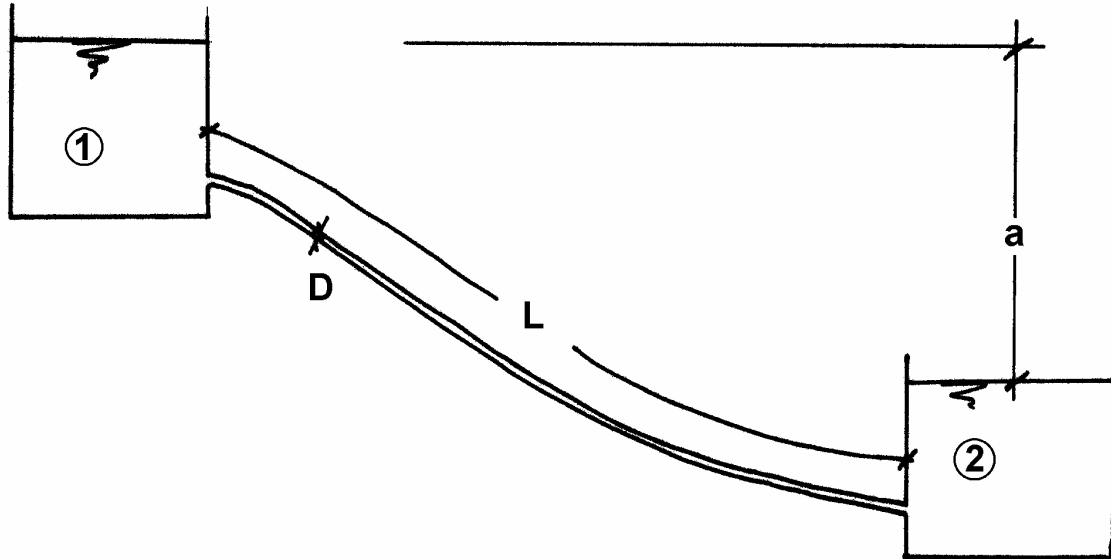
$$h_p = 1.5 + 0.35[3.5 + 14.4] = 7.76m$$

Tracciamo ora la linea dei carichi totali e piezometrici



Si noti che le perdite concentrate di imbocco sono state assunte pari a $0.5 \frac{U^2}{2g}$ mentre quelle causate da un gomito pari a $\frac{U^2}{2g}$.

Problema 3



Valutare il diametro D necessario a far scorrere una assegnata portata Q di acqua dal serbatoio ① al serbatoio ② rappresentati in figura. Si supponga che la condotta sia in ghisa asfaltata.

Dati: $a = 20\text{ m}$, $L = 2.5\text{ Km}$, $Q = 50\text{ l/s}$ e $y_r = 0.1\text{ mm}$

Soluzione:

L'equazione da soddisfare è

$$a = \frac{U^2}{2g} \left[\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{D} L + 1 \right] = \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \left[1.5 + \frac{\lambda}{D} L \right]$$

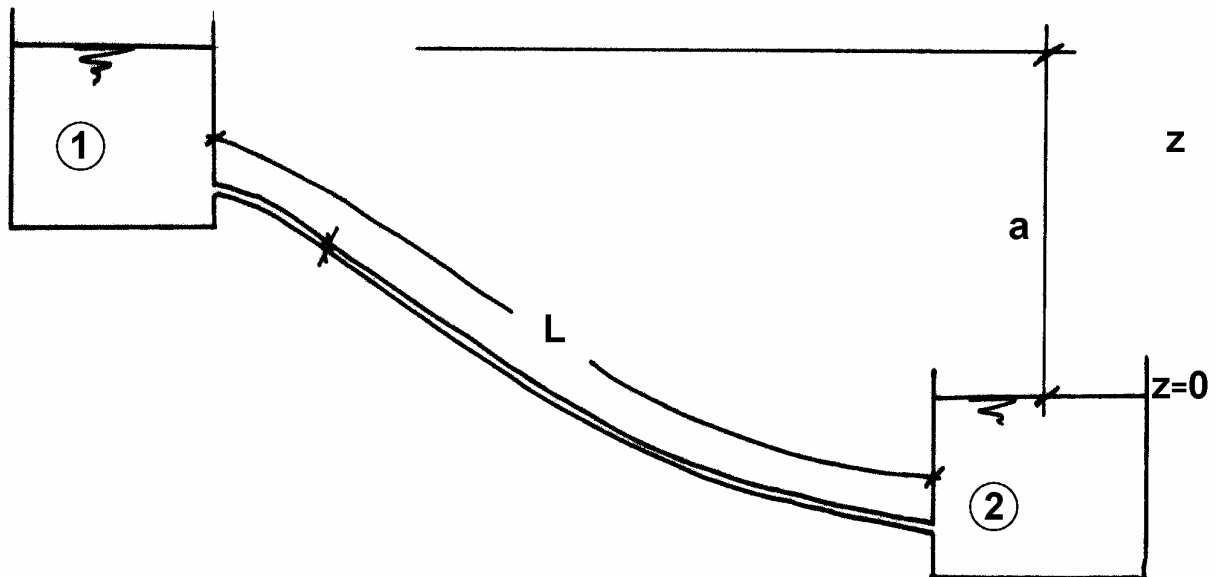
Procediamo per tentativi

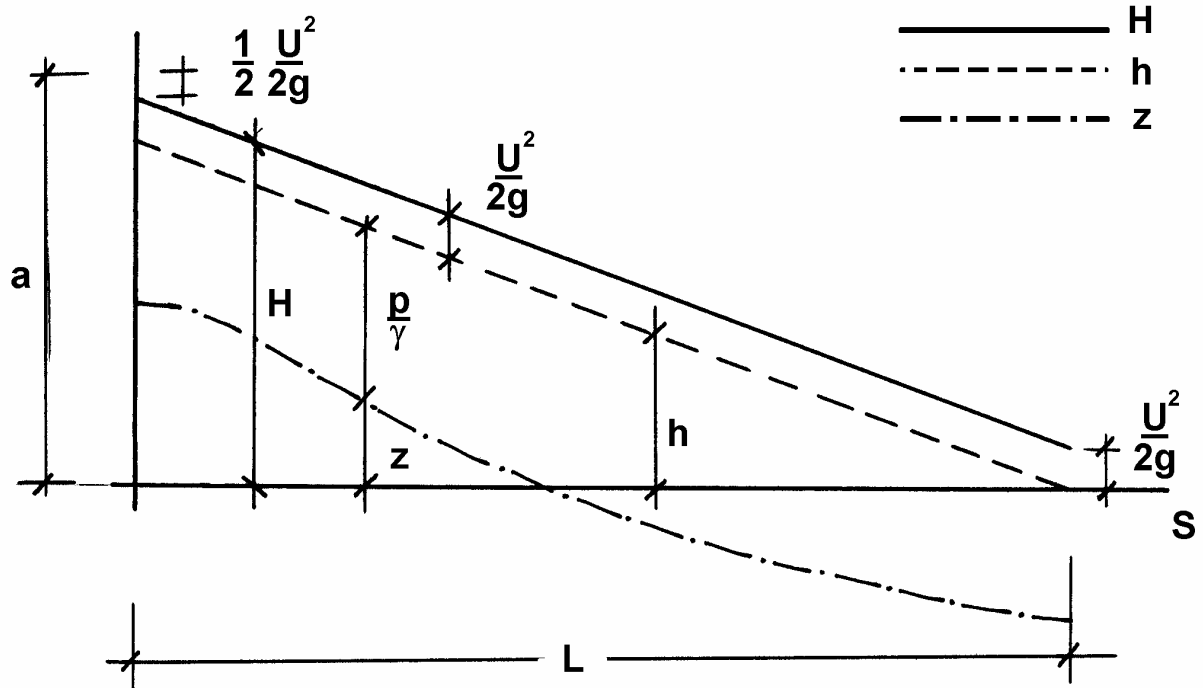
$D [m]$	$U [m/s]$	Re	ε	λ	$\frac{Q^2}{2g\Omega^2} \left[1.5 + \frac{\lambda}{D} L \right] [m]$
0.25	1.02	$2.5 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^{-4}$	~ 0.018	9.6
0.15	2.83	$4.2 \cdot 10^5$	$6.6 \cdot 10^{-4}$	~ 0.019	130.9
0.20	1.59	$3.2 \cdot 10^5$	$5.0 \cdot 10^{-4}$	~ 0.018	29.2
0.22	1.32	$2.9 \cdot 10^5$	$4.5 \cdot 10^{-4}$	~ 0.018	18.3
0.21	1.44	$3.0 \cdot 10^5$	$4.8 \cdot 10^{-4}$	~ 0.018	22.8

Sulla base di questi risultati è possibile concludere che il diametro richiesto è compreso fra 0.21 e 0.22 m.

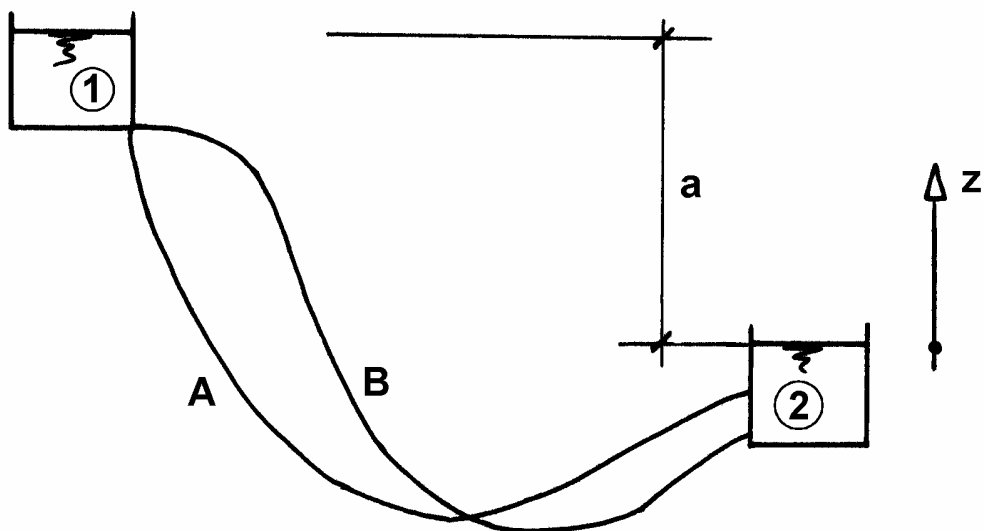
IL PROBLEMA DEL SIFONE

- Tracciamo, in modo qualitativo, le linee del carico totale, piezometrico e della quota della condotta, facendo riferimento ad un asse z rivolto verso l'alto e con l'origine in corrispondenza del serbatoio ② dell'impianto in figura, uguale a quello considerato nel problema precedente.

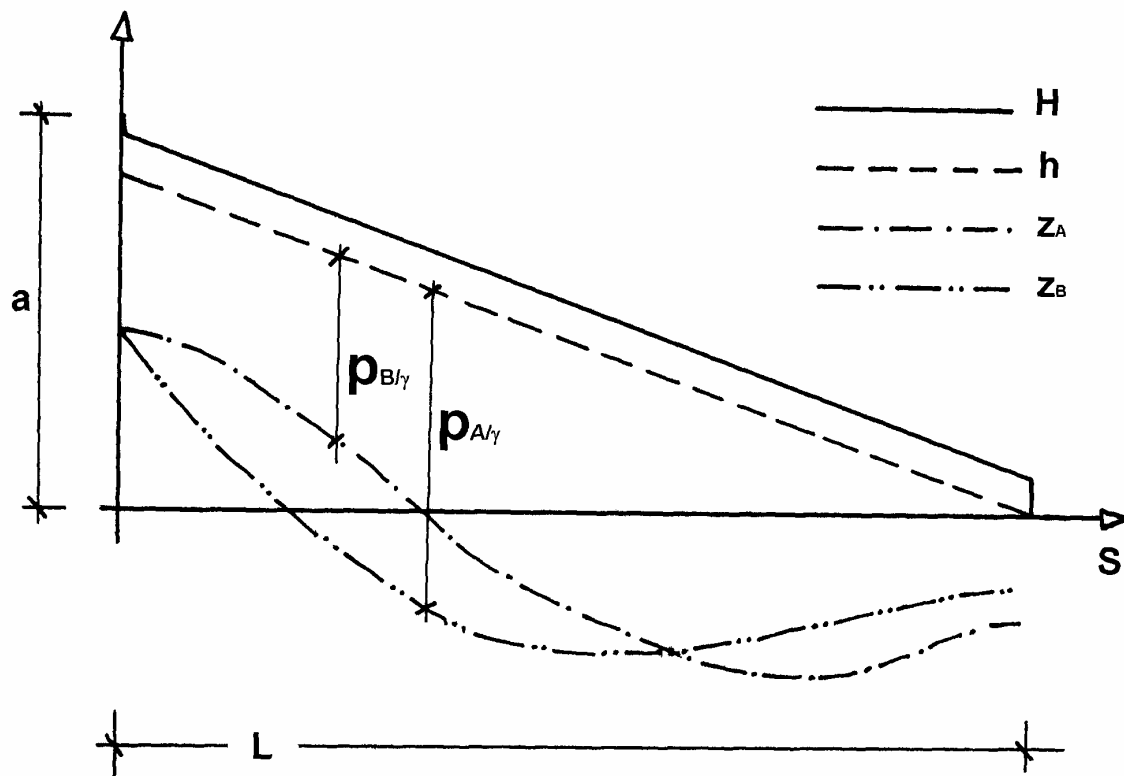




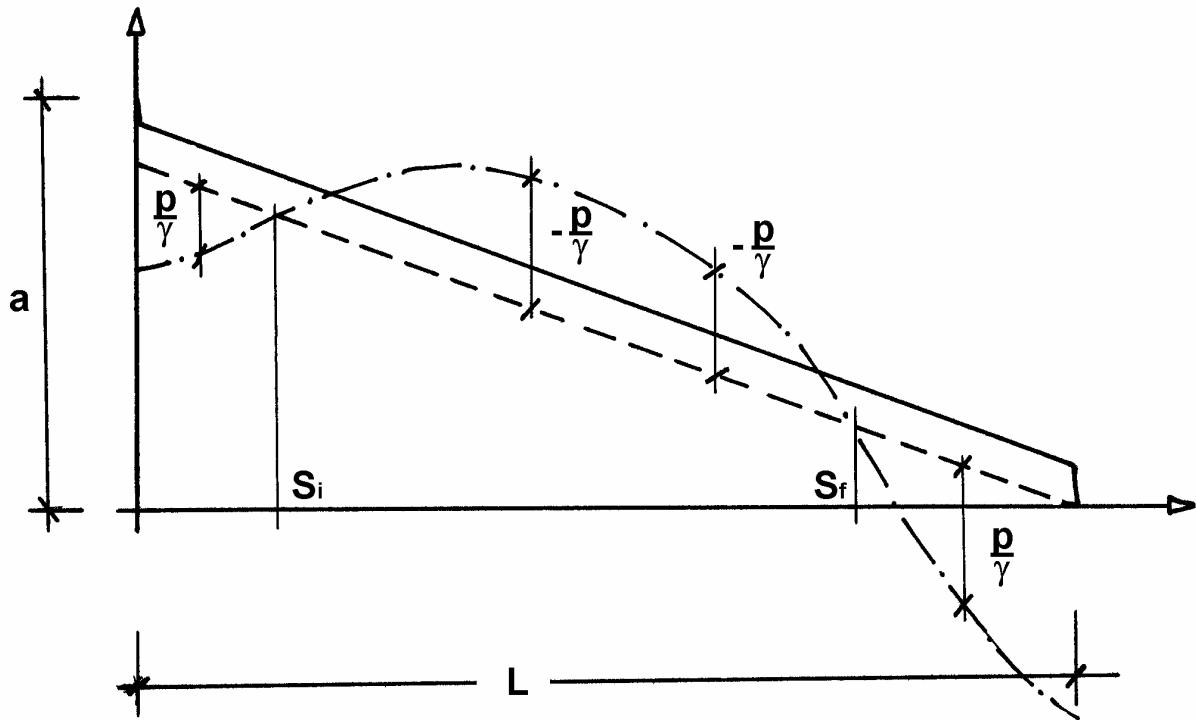
E' interessante osservare che il funzionamento idraulico della condotta non è influenzato, se certi limiti sono rispettati, dall'andamento altimetrico della condotta. Ad esempio nelle condotte A e B della figura seguente defluisce la stessa portata e l'andamento del carico totale e piezometrico è



uguale (chiaramente a patto che il diametro, la scabrezza e la lunghezza della condotta rimangano inalterati). Nelle due condotte sarà solo diversa la distribuzione della pressione come si può notare dalla figura dove sono riportati $H(s)$, $h(s)$ e $z_A(s)$ e $z_B(s)$.



L'impianto funzionerà anche quando la quota della condotta sarà maggiore della linea dei carichi piezometrici. In tale situazione la pressione relativa all'interno della condotta sarà negativa, cioè la pressione assoluta sarà inferiore alla pressione atmosferica (vedi figura seguente). In particolare la condotta sarà in depressione fra la coordinata s_i e la coordinata s_f . Ci sono tuttavia dei limiti sull'andamento altimetrico della condotta. In primo luogo il valore di $z(s)$ non può superare a se si vuole che il fluido inizi a defluire senza problemi. Se anche in un solo punto $z > a$ per innescare il moto è necessario creare una depressione nella condotta.



Anche innescando il moto non è possibile superare certi valori di z , il limite è facilmente valutabile sapendo che la pressione assoluta non può scendere al di sotto di un valore, denominato *tensione di vapore* che dipende dal fluido presente nell'impianto. Alzando la condotta al di sopra di tale limite, la portata defluente nell'impianto diminuirà, fino a che, quando z supererà il valore $a + \frac{p_{atm} - p_{\epsilon}}{\gamma}$, il fluido cesserà di scorrere (p_{ϵ} indica la tensione di vapore).

Lezione 23

FLUIDI IDEALI E TEOREMA DI BERNOULLI PER LE CORRENTI

L'equazione del moto delle correnti stabilisce che

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - j$$

cioè le variazioni di H lungo l'ascissa curvilinea s sono causate da accelerazioni o decelerazioni del moto e dalla resistenza che le pareti oppongono al deflusso del fluido.

Nel caso, estremamente frequente, di moto stazionario si ha

$$\frac{dH}{ds} = -j = -\frac{\tau}{\gamma R_i}$$

cioè il carico totale varia solo per effetto della resistenza esercitata dal contorno della corrente. Si noti che il carico totale diminuisce sempre nella direzione del moto.

Tutti i fluidi sono caratterizzati da una viscosità che può essere più o meno elevata ma che comunque è sempre presente. Ciò implica che τ è sempre diversa da zero e che quindi anche j è sempre non nulla. Tuttavia quando il tratto di condotta oggetto di indagine è relativamente breve, le perdite di carico subite dal fluido possono essere trascurate rispetto al carico stesso. In tale situazione si può assumere che il moto del fluido soddisfi l'equazione

$$\frac{dH}{ds} = 0$$

Tale equazione risulta quindi valida nelle ipotesi che qui ricordiamo

- 1) Perdite di carico trascurabili
- 2) Moto stazionario
- 3) Campo di forze gravitazionali
- 4) Fluido barotropico ($\rho = \rho(p)$)

Sotto tali ipotesi il carico totale H rimane costante lungo s . Tale risultato è noto come teorema di Bernoulli per le correnti. Originariamente il risultato fu ottenuto nell'ipotesi di fluido ideale ($\mu = 0$) e di campo di forze conservativo (non necessariamente gravitazionale).

Se il fluido è barotropico

$$H = z + \int \frac{dp}{\gamma(p)} + \frac{U^2}{2g}$$

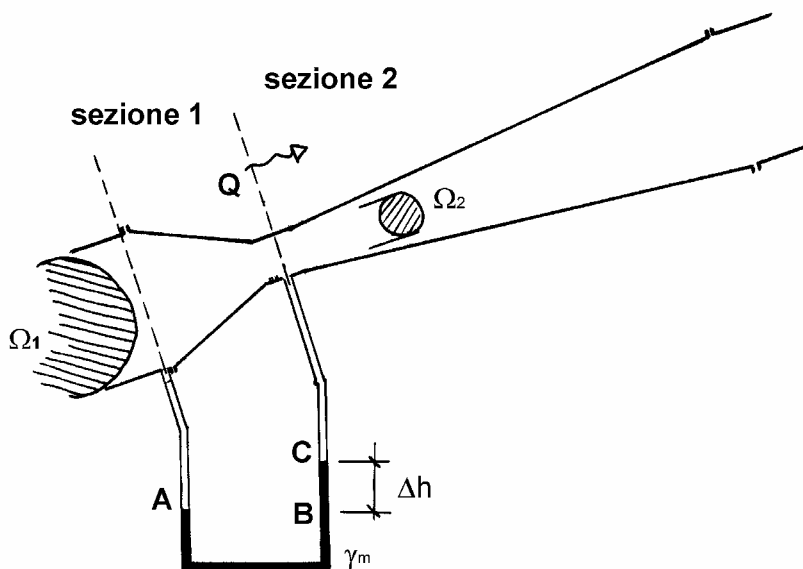
Se il fluido è a densità costante

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g}$$

Si noti che il fatto che H sia costante non implica la costanza dell'energia potenziale o di quella di pressione o dell'energia cinetica: è la loro somma che si mantiene costante. Il fluido può ad esempio aumentare la sua energia cinetica a scapito di quella potenziale o di quella di pressione e viceversa.

IL VENTURIMETRO E ALTRI MISURATORI DI PORTATA

Il venturimetro è un misuratore di portata che, inserito in una condotta, permette di quantificare la



portata che vi scorre attraverso il rilievo di un dislivello fra due superfici libere. Esso è costituito da: un tratto convergente che porta la sezione dal valore Ω_1 della condotta a un valore Ω_2 ; un breve tratto di sezione costante Ω_2 ; un lungo tratto divergente che riporta la sezione al valore originario Ω_1 .

Immediatamente a monte

del tratto convergente, tutto intorno alla sezione sono presenti dei fori collegati ad un tubo a U la cui altra estremità è collegata ad altri fori posizionati attorno alla sezione contratta. All'interno del tubo a U (detto tubo manometrico) è presente un fluido (in generale mercurio) di peso specifico elevato

indicato con γ_m . Quando all'interno della condotta defluisce una portata Q , la pressione nella sezione 1 risulta diversa da quella nella sezione 2 e ciò induce un dislivello fra i due rami del tubo a U. La lettura di tale dislivello consente di valutare Q . Vediamo ora come.

Fra la sezione 1 e la sezione 2 il moto del fluido è accelerato, il tratto è molto breve e ciò consente di trascurare le dissipazioni di energia e di supporre quindi il comportamento del fluido "ideale". Il moto è supposto stazionario. Il fluido è soggetto al campo di forze gravitazionale. Supponiamo infine di considerare un fluido a densità costante. Esistono i presupposti per poter applicare il teorema di Bernoulli per le correnti. Segue dunque

$$H_1 = h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{U_2^2}{2g} = H_2$$

L'equazione di continuità porge inoltre

$$U_1 \Omega_1 = U_2 \Omega_2 = Q \quad e \quad U_1 = \frac{Q}{\Omega_1}; U_2 = \frac{Q}{\Omega_2}$$

Si ha quindi

$$\frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2} \right) = h_1 - h_2$$

$$Q = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)^2 \right]} \Omega_2 \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = C_Q \Omega_2 \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

essendo $C_Q = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)^2 \right]}$

Il valore di $h_1 - h_2$ può essere facilmente legato a Δh tenendo conto che la pressione p_A in A è uguale alla pressione p_B in B e che il carico piezometrico nella sezione 1 e nel ramo di sinistra del tubo manometrico è costante così come è costante il carico piezometrico nella sezione 2 e nel ramo di destra del tubo manometrico. La costanza del carico piezometrico nelle sezioni deriva dal fatto che il comportamento del fluido è quello di una corrente mentre la costanza del carico piezometrico nei due rami del tubo manometrico discende dal fatto che ivi il fluido è fermo.

Si ha

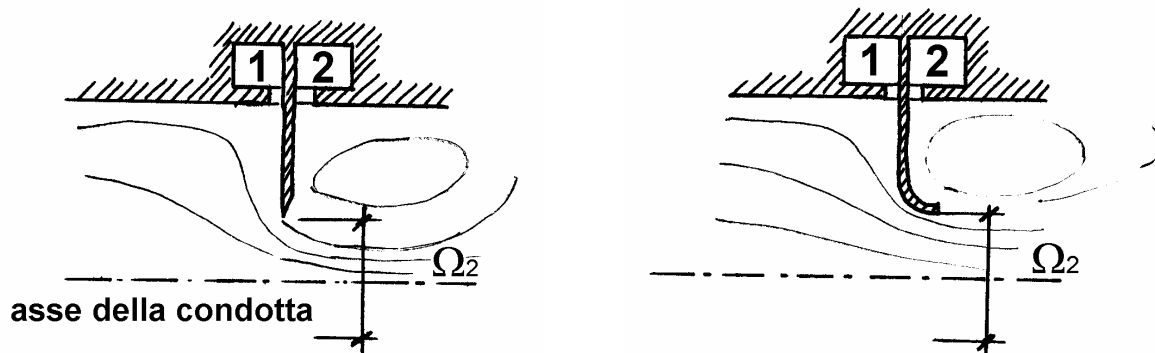
$$h_1 - h_2 = h_A - h_C = \frac{p_A}{\gamma} + z_A - \frac{p_C}{\gamma} - z_C$$

$$h_1 - h_2 = -\Delta h + \frac{1}{\gamma} [p_A - (p_B - \gamma_m \Delta h)] = -\Delta h + \frac{\gamma_m}{\gamma} \Delta h = \Delta h \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right)$$

Da cui

$$Q = C_Q \Omega_2 \sqrt{2g \Delta h \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right)}$$

Altri misuratori di portata sono i diaframmi (figura a sinistra) e i bocchagli (figura a destra).



Essi si basano sullo stesso principio di funzionamento dei venturimetri e presuppongono la lettura della differenza di pressione fra la sezione 1 immediatamente a monte del diaframma e del bocchaglio e la sezione 2 immediatamente a valle.

Si ha

$$Q = C_Q \Omega_2 \sqrt{2g \frac{\Delta p}{\gamma}}$$

essendo Ω_2 la superficie di efflusso del fluido e C_Q un coefficiente che dipende dai dettagli geometrici (per i valori di C_Q si consultino libri di testo o manuali dell'ingegnere).

Lezione 24

IL TEOREMA DI BERNOULLI

- Nella LEZIONE 23 abbiamo dedotto il teorema di Bernoulli per le correnti fluide, partendo dall'equazione del moto valida in tali circostanze. Il carico totale

$$H = z + \int \frac{dp}{\gamma} + \frac{vv}{2g}$$

è definito anche in un moto tridimensionale e rappresenta comunque l'energia meccanica posseduta dal fluido per unità di peso.

- Partendo dalle equazioni tridimensionali che esprimono il principio della quantità di moto per un fluido stokesiano (equazioni di Navier – Stokes) è possibile dimostrare il teorema di Bernoulli nel caso generale. Non siamo in grado di effettuare tale dimostrazione nell'ambito di questo corso, perché ciò presuppone lo studio del moto tridimensionale dei fluidi che verrà effettuato nei corsi della laurea specialistica.

Tuttavia, visto la sua importanza, considerato che il teorema di Bernoulli nella forma generale presenta stretta analogia con quello valido per le correnti e tenendo presente che la soluzione di alcuni problemi che affronteremo nella LEZIONE 25 richiede la sua conoscenza, enuncieremo qui il teorema di Bernoulli nella forma generale elencando le ipotesi che devono essere verificate per la sua validità.

Ipotesi:

1) Fluido ideale

Per fluido ideale si intende un fluido privo di viscosità, tale quindi che la tensione da esso esercitata sia sempre normale alla superficie considerata

$$\underline{t} = -p\underline{n}$$

In natura non esiste un fluido ideale, in quanto tutti i fluidi hanno una viscosità dinamica μ diversa da zero e esercitano anche tensioni tangenti alla superficie considerata.

Tuttavia in moti accelerati, caratterizzati da alti valori del numero di Reynolds e con contorni rigidi limitati, il comportamento dei fluidi reali può essere assimilato a quello dei fluidi ideali.

2) Moto stazionario

Spesso nei problemi si analizzano le situazioni di regime quando tutte le grandezze caratterizzanti il moto sono indipendenti dal tempo.

3) Campo di forze conservativo (NOTA 1)

Spesso nei problemi ingegneristici, il campo di forze che deve essere considerato è quello gravitazionale che è un particolare campo di forze conservativo tale che

$$\varphi = -gz$$

essendo z un asse verticale diretto verso l'alto.

4) Fluido barotropico

Un fluido si dice barotropico quando la densità ρ risulta funzione solo della pressione p . Dovrebbe essere evidente che un fluido a densità costante è in particolare fluido barotropico.

Quando le quattro ipotesi sopra elencate sono verificate il carico totale

$$H = -\frac{\varphi}{g} + \int \frac{dp}{\gamma} + \frac{v \cdot v}{2g}$$

si mantiene costante lungo una linea di corrente.

Ricordiamo che le linee di corrente sono definite dalla proprietà di essere tangenti (quindi parallele) al vettore velocità in ogni punto. La loro equazione in forma differenziale è dunque

$$d\underline{x} \times \underline{v} = 0$$

essendo $d\underline{x}$ l'elemento infinitesimo della linea di corrente (vedi LEZIONE 13).

Se il moto è stazionario le traiettorie delle particelle fluide, definite dall'equazione parametrica

$$d\underline{x} = \underline{v}dt$$

coincidono con le linee di corrente. Emerge quindi che il carico totale H si mantiene costante anche lungo le traiettorie.

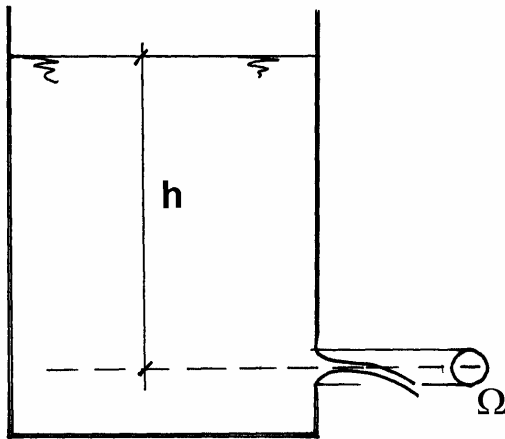
NOTA 1

Ricordiamo che un campo di forze si dice conservativo quando ammette una funzione potenziale φ tale che

$$\underline{f} = \nabla \varphi$$

EFFLUSSO DA LUCI – APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI BERNOULLI

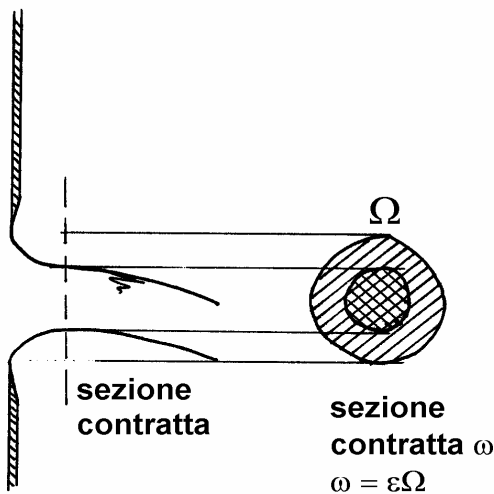
Consideriamo il serbatoio in figura dove, alla profondità h , è praticato un foro circolare di sezione



Ω . Supponiamo che la superficie libera S del serbatoio sia molto maggiore di Ω in modo tale da poter assumere che le variazioni del pelo libero siano lente nel tempo e quindi il moto generato dall'efflusso attraverso il foro sia praticamente stazionario. Il campo di forze cui è soggetto il fluido sia quello gravitazionale. Inoltre la densità del fluido sia costante. All'interno del serbatoio, lontano dal foro, il fluido è praticamente fermo e gli effetti viscosi sono trascurabili. In prossimità del foro, il moto

è accelerato e ad alti numeri di Reynolds. E' possibile dunque assumere ideale il comportamento del fluido e applicare il teorema di Bernoulli. Consideriamo un'asse z rivolto verso l'alto con origine in corrispondenza del livello del foro. Il

carico totale in un qualunque punto all'interno del serbatoio e lontano dal foro vale h . Invero il carico cinetico è nullo perché il fluido è praticamente fermo e il carico piezometrico risulta quindi costante. Il getto avrà una geometria simile a quella illustrata nel disegno. Il getto ha una sezione inferiore a quella del foro perché il fluido che si trova in prossimità della parete non esce con una traiettoria ortogonale alla parete stessa bensì con una che inizialmente è tangente



alla parete. Le traiettorie delle particelle fluide vicine alla parete, che inizialmente si muovono parallelamente a essa, non possono infatti presentare un punto angoloso. L'area del getto, in quella che si definisce sezione contratta dove le traiettorie delle particelle fluide sono fra di loro parallele e ortogonali alla parete del serbatoio, vale

$$\omega = C_c \Omega$$

ove C_c è il cosiddetto coefficiente di contrazione che misure sperimentali mostrano essere circa 0.6. Considerato che le ipotesi del teorema di Bernoulli sono verificate, applichiamo lungo una qualunque linea di corrente passante per un generico punto B della sezione contratta. Si avrà

$$H_A = H_B$$

essendo A un punto all'interno del serbatoio. Per i motivi discussi precedentemente

$$H_A = h$$

indipendentemente dall'esatta forma della linea di corrente e dall'esatta posizione del punto A . E' facile vedere che

$$H_B = v_B^2 / 2g$$

Infatti il valore di z_B è trascurabile rispetto a h e la pressione relativa p_B è nulla (in un getto la pressione è costante sulla generica sezione e pari a quella atmosferica). Si ha quindi

$$h = v_B^2 / 2g$$

da cui

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

La velocità $\sqrt{2gh}$ è detta "velocità torricelliana". La portata uscente dal serbatoio risulta dunque

$$Q = C_c \Omega \sqrt{2gh}$$

Volendo valutare il tempo necessario affinché h passi dal valore h_1 al valore h_2 è necessario imporre un bilancio di massa. Semplici considerazioni sul volume di fluido che attraversa la sezione contratta impongono

$$Qdt = -dhS$$

essendo S l'area della superficie libera del serbatoio. Segue

$$-dhS = C_c \Omega \sqrt{2gh} dt$$

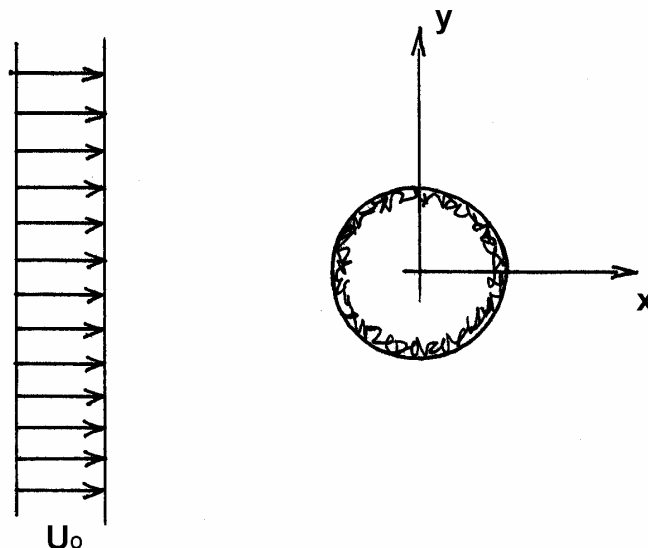
$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{C_c \Omega \sqrt{2g}}{S} dt$$

$$2\sqrt{h_2} - 2\sqrt{h_1} = -\frac{C_c \Omega \sqrt{2g}}{S} (t_2 - t_1)$$

$$\Delta t = (t_2 - t_1) = \frac{2S}{C_c \Omega \sqrt{2g}} (\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1})$$

PRESSIONE DI RISTAGNO – APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI BERNOULLI

Consideriamo un corpo (ad esempio un cilindro) che si muove con velocità costante U_0 all'interno di un fluido fermo. Analizziamo il problema utilizzando un sistema di riferimento solidale con il corpo, trasformando quindi il problema in quello di un oggetto fermo investito da un fluido che lontano dal corpo è animato da una velocità costante pari a U_0 .



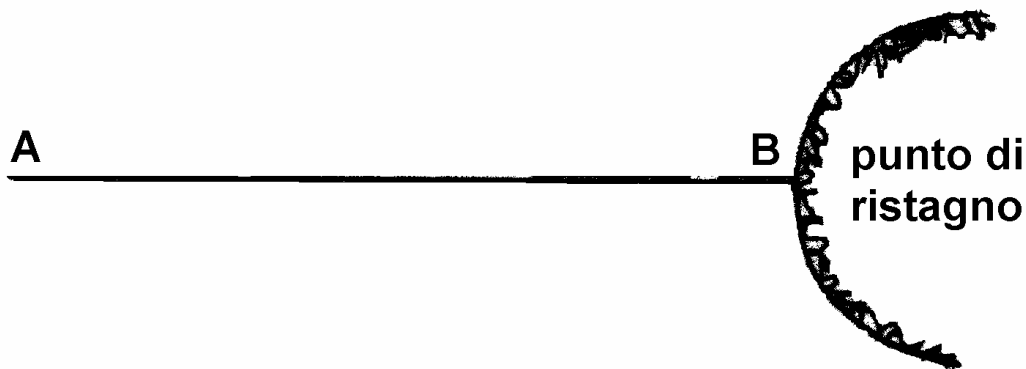
Se ipotizziamo il fluido ideale, la densità costante, il moto stazionario e il campo di forze gravitazionale, sappiamo (teorema di Bernoulli) che

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{|v|^2}{2g} = \text{cost}$$

lungo una linea di corrente (l'accelerazione di gravità è qui supposta diretta come l'asse z).

E' evidente che sul corpo esisterà un punto (detto punto di ristagno) in cui la velocità è nulla. Nel caso di un cilindro il punto di ristagno è posizionato in $(-R,0)$ essendo R il raggio della sezione del cilindro. Consideriamo ora la linea di corrente che passa per il punto di ristagno (vedi figura) e un punto A lontano dal corpo.

Per il teorema di Bernoulli $H_A = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{|v_A|^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{|v_B|^2}{2g} = H_B$



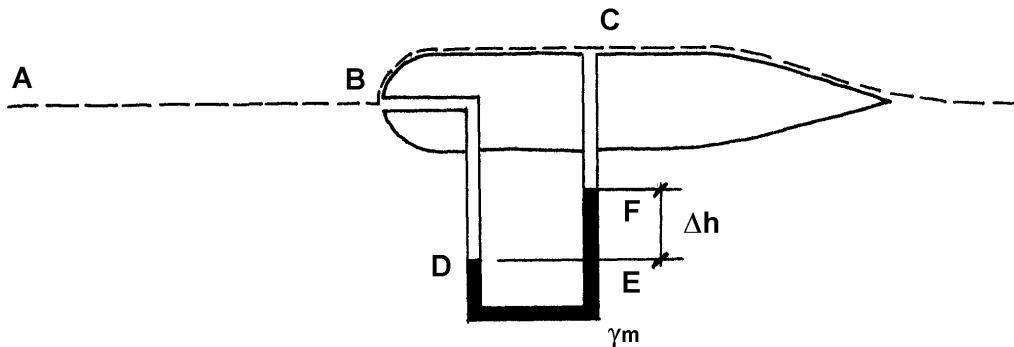
tuttavia $z_A = z_B$ e $|v_A| = U_0, |v_B| = 0$. Segue dunque

$$p_B - p_A = \frac{\rho}{2} U_0^2$$

La differenza di pressione $p_B - p_A$ è detta pressione di ristagno. Essa cresce con il quadrato della velocità U_0 ed è proporzionale alla densità del fluido. Siccome lontano dal corpo, la pressione è pari alla pressione atmosferica, la quantità $\rho U_0^2 / 2$ è semplicemente la pressione relativa nel punto B .

TUBO DI PITOT

E' evidente che nel problema precedentemente analizzato, la misura della pressione relativa in B , consente la valutazione della velocità U_0 . Nel passato, la misura della velocità U_0 veniva effettuata con uno strumento denominato "tubo di Pitot" schematicamente rappresentato in figura.



La velocità nel punto C risulta praticamente quella indisturbata e pari quindi a U_0 (la linea tratteggiata rappresenta la linea di corrente passante per A, B e C).

Si ha quindi

$$p_B - p_C = \frac{\rho}{2} U_0^2$$

Inoltre

$$p_B - p_C = \Delta h (\gamma_m - \gamma)$$

Segue

$$U_0 = \sqrt{2g\Delta h \left(\frac{\rho_m - \rho}{\rho} \right)}$$

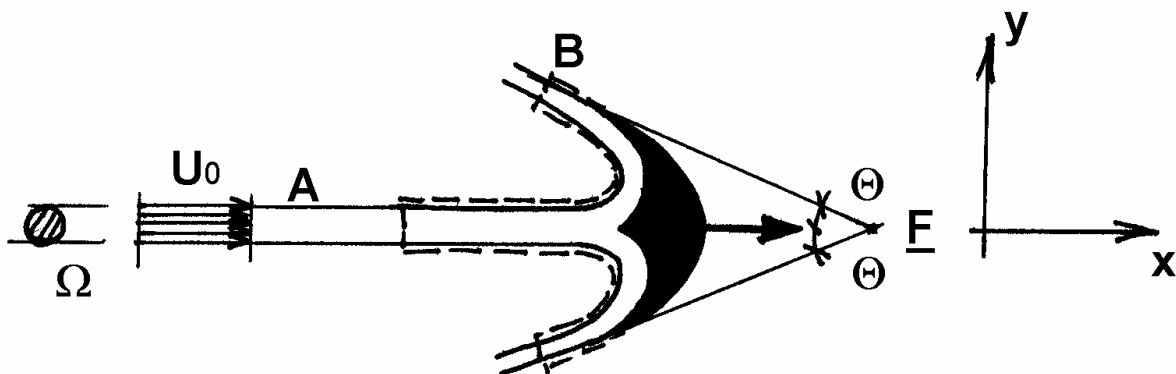
Lezione 25

TEORIA DELLE TURBINE PELTON

Nella LEZIONE 14 abbiamo visto che un getto, che urta una parete piana ferma, esercita su di essa una forza F

$$F = \rho \Omega U_0^2$$

Se la geometria della parete è diversa, diverso è il valore di F . Consideriamo ad esempio la



situazione in figura

In primo luogo osserviamo che la velocità del fluido che si allontana dalla superficie dopo averla urtata è pari ad U_0 . Tale risultato è facilmente ottenibile dal teorema di Bernoulli (si assuma fluido ideale, densità costante, campo di forze gravitazionali con \underline{g} diretta lungo l'asse z , moto stazionario e si applichi il teorema di Bernoulli uguagliando i carichi totali del punto A e del punto B). Per determinare la forza \underline{F} esercitata dal getto è necessario applicare il principio della quantità di moto nella sua forma integrale al volume delimitato dalla linea tratteggiata in figura. Considerando la proiezione dell'equazione nella direzione x , si ottiene

$$I_x + M_{ux} - M_{ix} = G_x + \Pi_x$$

Come discusso nella LEZIONE 14 si ha

$$I_x = 0, G_x = 0, \Pi_x = -F_x, M_{ix} = \rho\Omega U_0^2$$

Nel caso in esame, inoltre, M_{ux} è diverso da zero. Per valutare M_{ux} è necessario notare che la sezione dei getti che abbandonano la superficie deve essere pari a $\Omega/2$.

Per la conservazione della massa deve infatti risultare

$$U_0\Omega = 2U_B\Omega_B$$

Inoltre $U_B = U_0$ e quindi $\Omega_B = \Omega/2$.

Tenendo conto che i getti che abbandonano la superficie hanno un'inclinazione θ rispetto al semiasse negativo x , è facile valutare M_{ux} che risulterà

$$M_{ux} = -2\rho U_B^2 \Omega_B \cos\theta = -\rho\Omega U_0^2 \cos\theta$$

Segue infine

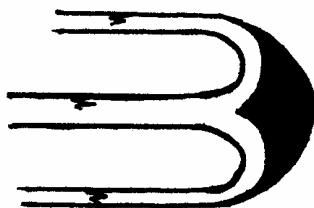
$$F_x = \rho U_0^2 \Omega (1 + \cos\theta)$$

e anche

$$F_x = \rho Q U_0 (1 + \cos\theta)$$

essendo $Q = U_0\Omega$ la portata del getto.

In particolare se $\theta = 0$ (vedi figura) la forza F_x risulta doppia rispetto a quella determinata nella LEZIONE 14 quando $\theta = \pi/2$.

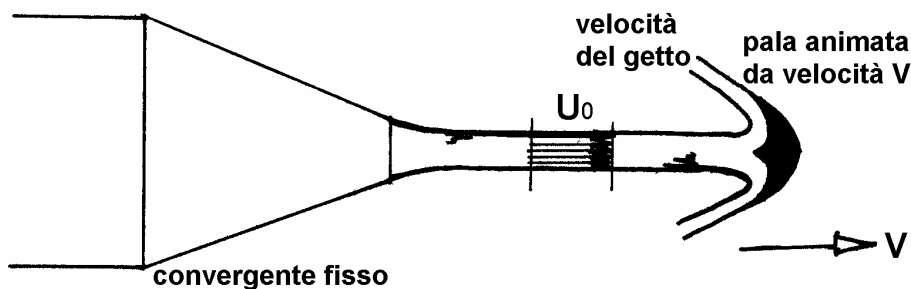


Pur potendo generare forze notevoli, in questa situazione il getto non è in grado di compiere alcun lavoro. La potenza associata al getto (vedi LEZIONE 15)

$$P_d = \gamma Q H = \rho\Omega \frac{U_0^3}{2}$$

non riesce quindi a essere sfruttata.

Al fine di far fare del lavoro al getto e quindi di sfruttare in parte l'energia posseduta dal getto è necessario fare in modo che la superficie (nel seguito anche pala) si muova. Si denoti con V la



velocità della pala rispetto al convergente che genera il getto.

Quest'ultimo abbia una velocità U_0 rispetto al convergente. Applicando il principio della quantità di moto adottando un sistema di riferimento solidale con la pala (sistema inerziale perché in moto con velocità costante) si ottiene

$$F = \rho Q (U_0 - V)^2 (1 + \cos \theta)$$

La forza è inferiore a quella che si ha per la pala ferma poiché il termine $(U_0 - V)^2$ sostituisce il termine U_0^2

Tenendo conto che

$$U_0^2 \Omega = Q U_0$$

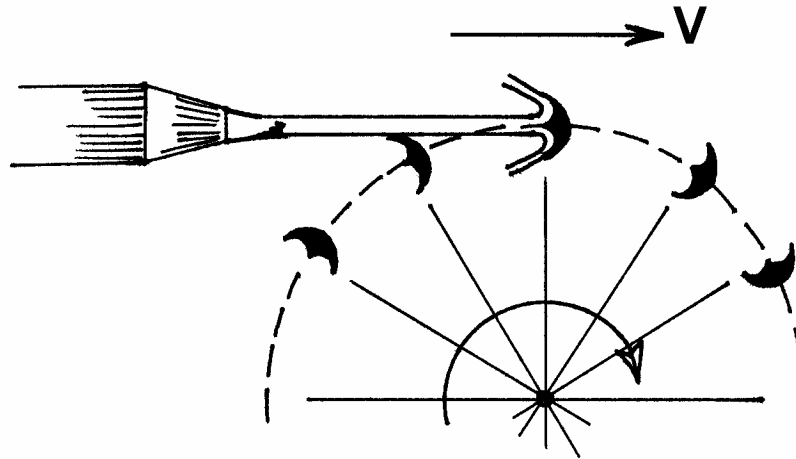
$$(U_0 - V)^2 \Omega = \tilde{Q} (U_0 - V) \quad \text{ove} \quad \tilde{Q} = (U_0 - V) \Omega$$

si può capire che la forza F per la pala in movimento è inferiore a quella relativa alla pala ferma per due motivi.

Il primo è legato al fatto che la velocità di impatto passa da U_0 a $(U_0 - V)$.

Il secondo motivo è dovuto al fatto che per la pala in movimento non tutta la portata Q viene utilizzata, ma una parte di essa (per la precisione ΩV) viene utilizzata per allungare il getto. Questa portata può essere recuperata utilizzando una sequenza di pale: quando una pala si allontana troppo dal convergente ne subentra un'altra in posizione più vicina al convergente. Il fluido compreso fra la prima pala e la nuova pala andrà comunque a urtare la prima pala non andando sprecato.

La situazione descritta sinteticamente nelle righe precedenti può essere ottenuta montando le pale su una ruota



Intuitivamente si può arrivare al risultato

$$F = \rho U_0 \Omega (U_0 - V)(1 + \cos \theta)$$

essendo F la forza sull'insieme delle pale (ruota). Il lavoro fatto dal getto sulla ruota nell'unità di tempo (potenza ceduta dal getto alla ruota) può essere valutato con l'espressione

$$P_U = FV = \rho U_0 \Omega V (U_0 - V)(1 + \cos \theta)$$

Può essere utile valutare quale è la velocità V che rende massima la potenza P_U . Essa può essere calcolata trovando i valori di V che annullano dP_U/dV

$$\frac{dP_U}{dV} = \rho U_0 \Omega (1 + \cos \theta) [U_0 - V - V]$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dP_U}{dV} = 0 \text{ per } V = \frac{U_0}{2}$$

Segue

$$(P_U)_{\max} = \rho U_0 \Omega \frac{U_0^2}{4} (1 + \cos \theta) = \rho \Omega \frac{U_0^3}{4} (1 + \cos \theta)$$

In tal caso il rendimento della ruota, rapporto fra la potenza utilizzata e quella disponibile, risulta

$$\eta = \frac{(P_U)_{\max}}{P_d} = \frac{\rho \Omega U_0^3 (1 + \cos \theta) 2}{4 \rho \Omega U_0^3} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

E' evidente che quando θ si avvicina a 0, il valore di η si avvicina ad 1. Nel caso reale η è uguale a circa $0.95 \div 0.97$. Infatti valori di θ nulli non possono essere realizzati in quanto, per $\theta = 0$, i getti in uscita interferirebbero con la pala seguente. Inoltre bisogna tener conto che gli effetti viscosi, per quanto piccoli, non sono nulli e quindi la velocità dei getti che lasciano la singola pala è inferiore (anche se di poco) rispetto alla velocità dei getti in arrivo.

La macchina idraulica, il cui funzionamento è stato descritto in forma semplice e sintetica nelle righe precedenti, è detta turbina Pelton.

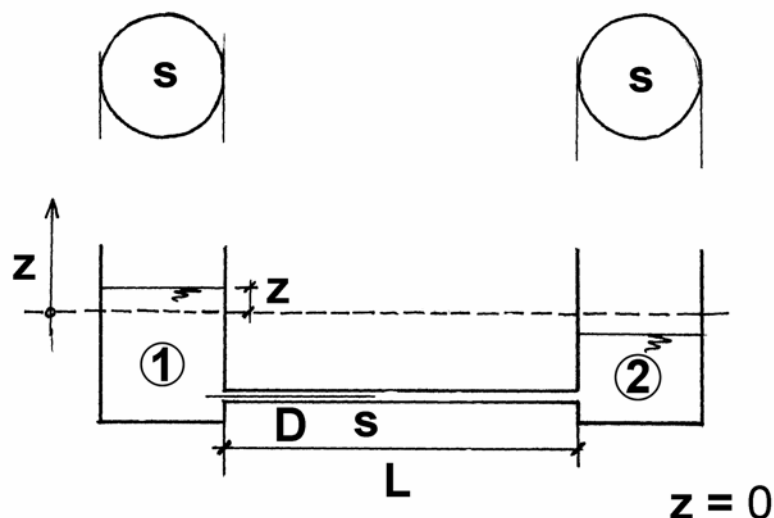
Lezione 26

I TRANSITORI NEGLI IMPIANTI IDRAULICI. IL MOTO VARIO NELLE CORRENTI

La complessità dello studio del moto vario nelle correnti dipende dalle ipotesi che si introducono, le quali a loro volta dipendono dalla natura dell'impianto in cui si realizza il transitorio.

Si possono individuare due diverse situazioni. Nella prima le variazioni di pressione sono modeste e quindi il fluido può essere considerato a densità costante. Nella seconda, invece, si hanno variazioni di pressione notevoli ed è necessario considerare la densità variabile. Consideriamo due casi esemplificativi.

CASO 1: DENSITA' COSTANTE



Nei serbatoi dell'impianto in figura la distribuzione di pressione può essere ritenuta pari a quella idrostatica, essendo il fluido contenuto in essi praticamente fermo.

Questo fatto impone dei limiti al valore che la pressione può assumere all'imbocco e allo sbocco della condotta e quindi alle variazioni di pressione che possono essere osservate in tutto l'impianto. La densità del fluido può quindi essere considerata costante così come costante può essere assunta la sezione della condotta. Al suo interno l'equazione di continuità impone dunque

$$\frac{\partial U}{\partial s} = 0$$

↓

$$U = U(t)$$

Mentre l'equazione del moto fornisce

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - j \quad \text{ove} \quad j = \frac{\lambda U|U|}{D 2g}$$

Una semplice analisi delle grandezze che compaiono nell'espressione di j mostra che j non dipende da s così come il termine $\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$. L'equazione del moto può quindi essere integrata dalla sezione iniziale a quella finale fornendo

$$H_2 - H_1 = \left(-\frac{1}{g} \frac{dU}{dt} - j \right) L$$

ove H_2 e H_1 rappresentano il carico totale nelle sezioni finali e iniziali rispettivamente, mentre $\frac{\partial U}{\partial t}$ è divenuto $\frac{dU}{dt}$ in quanto U non dipende da s . I valori H_2 e H_1 possono essere legati al livello nei serbatoi mettendo in conto le dissipazioni concentrate di energia

$$H_2 = -z + \zeta_2 \frac{U|U|}{2g}$$

$$H_1 = z - \zeta_1 \frac{U|U|}{2g}$$

ove si è indicato con z il livello nel serbatoio ① rispetto a quello in condizioni statiche. Avendo assunto la superficie della sezione dei due serbatoi uguale, deriva che il livello nel serbatoio ② risulta pari a $-z$. ζ_2 vale 1 mentre ζ_1 è pari a 0.5, quando U è positivo. Quando U è negativo, ζ_2 vale 0.5 e ζ_1 è pari a 1. Si ha dunque

$$-z + \zeta_2 \frac{U|U|}{2g} - z + \zeta_1 \frac{U|U|}{2g} = -\left(\frac{1}{g} \frac{dU}{dt} + \frac{\lambda}{D} \frac{U|U|}{2g}\right)L$$

$$\frac{L}{g} \frac{dU}{dt} - 2z = -\frac{U|U|}{2g} \left(\frac{\lambda L}{D} + \zeta_1 + \zeta_2\right) \quad (\text{NOTA 1})$$

Un semplice bilancio di massa all'interno del serbatoio ① mostra che

$$U\Omega dt = -dzS$$

Essendo Ω la superficie della sezione della condotta e S la superficie libera dei due serbatoi.

Segue quindi che

$$U = -\frac{S}{\Omega} \frac{dz}{dt}$$

e

$$-\frac{L}{g} \frac{S}{\Omega} \frac{d^2z}{dt^2} - 2z = \left(\frac{S}{\Omega}\right)^2 \frac{1}{2g} \frac{dz}{dt} \left| \frac{dz}{dt} \right| \left[\frac{\lambda L}{D} + 1.5 \right]$$

Tale equazione può facilmente essere integrata utilizzando un metodo numerico. Un'idea sul comportamento della soluzione può essere ottenuta trascurando le dissipazioni di energia, assumendo cioè il fluido ideale. In tal caso

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{2g\Omega}{LS} z = 0$$

La soluzione è dunque $z = c_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{2g\Omega}{LS}} t\right) + c_2 \operatorname{cos}\left(\sqrt{\frac{2g\Omega}{LS}} t\right)$

NOTA 1:

Si noti che sia le perdite di carico distribuite, sia quelle concentrate sono state assunte proporzionali a $U|U|$ invece che a U^2 in quanto il moto può invertire la sua direzione rispetto alla direzione s .

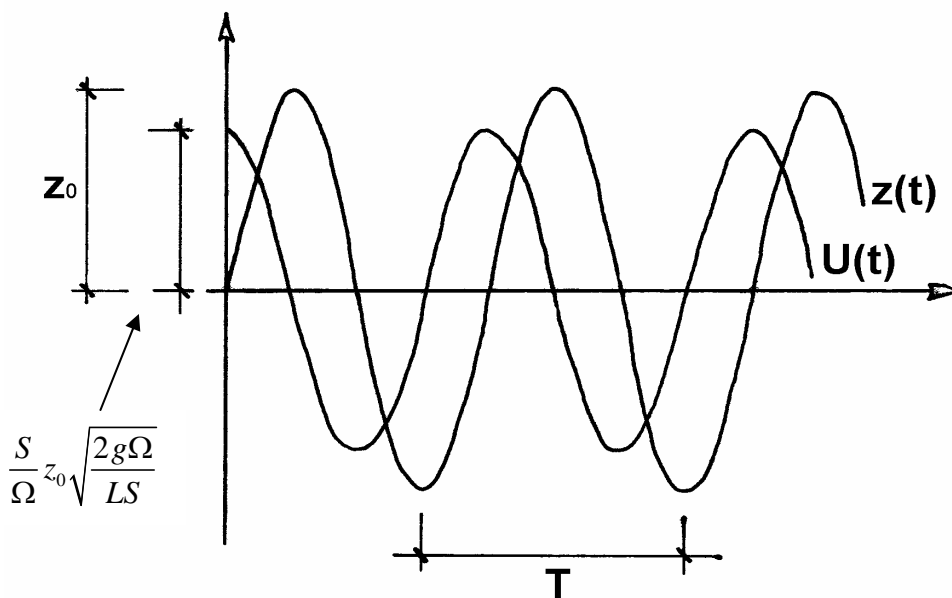
Le costanti c_1 e c_2 possono essere determinate imponendo le condizioni iniziali. Ad esempio se per $t = 0$ il fluido è fermo e z è pari a z_0 si ha

$$\begin{aligned} z_0 &= c_2 \\ 0 &= c_1 \end{aligned}$$

La soluzione mostra quindi che sia il livello nei serbatoi sia la velocità nella condotta oscillano nel tempo con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2g\Omega}{LS}}}$$

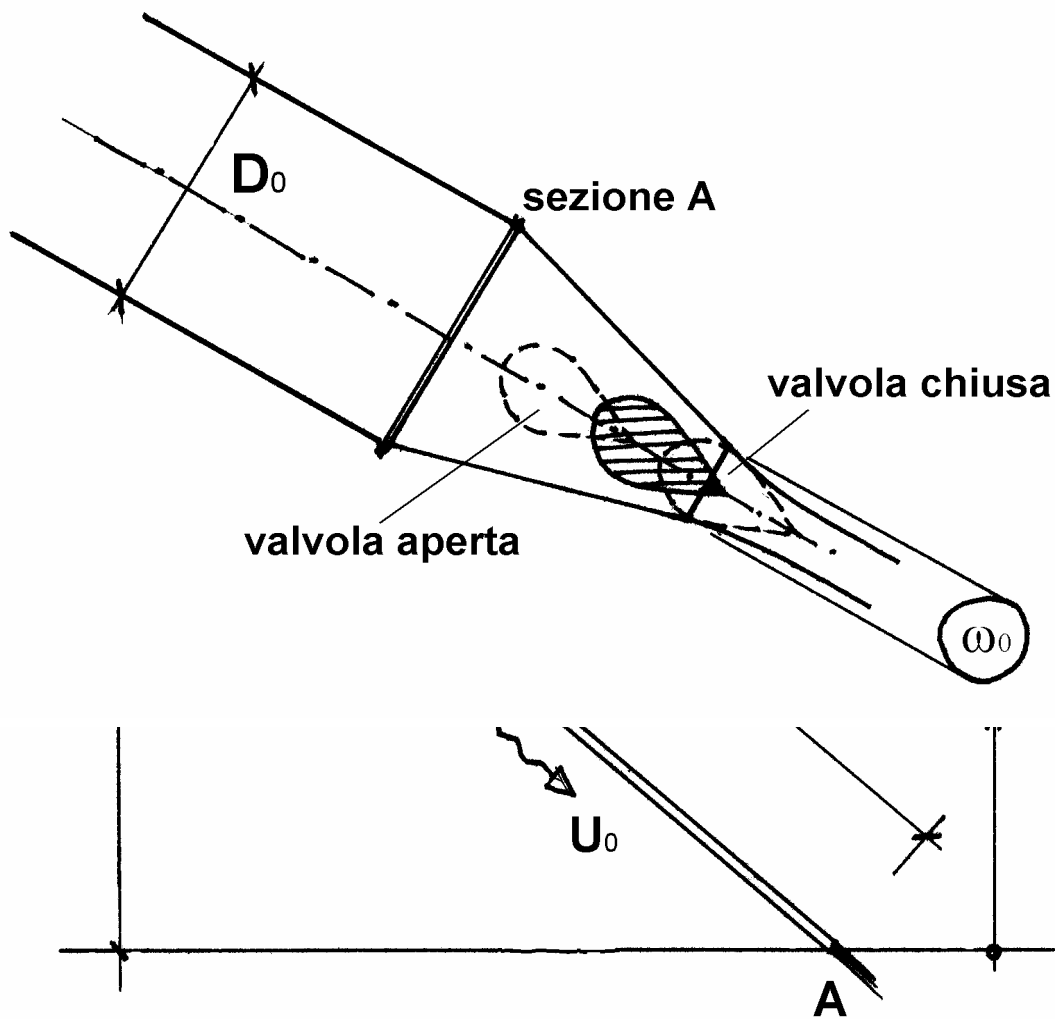
Inoltre fra velocità e pelo libero esiste uno sfasamento di 90°



La presenza delle dissipazioni induce un'attenuazione delle oscillazioni e il fenomeno non è più periodico. L'attenuazione è tanto maggiore quanto più grande risulta il termine

$$\frac{S}{2\Omega L} \left[\frac{\lambda L}{D} + 1.5 \right]$$

Per valori elevati delle dissipazioni si può avere una lenta discesa di z a partire da z_0 senza che il livello nel serbatoio ① assuma valori negativi.



CASO 2: FLUIDO COMPRIMIBILE

Consideriamo ora l'impianto in figura, costituito da un serbatoio, una condotta e una valvola posta nella sezione terminale della condotta (sezione A). Quando la valvola posta in A è completamente aperta e il moto è a regime, il fluido defluisce con una velocità media U_0 . Essendo D_0 il diametro della condotta, la portata Q_0 è pari a $U_0 \pi D_0^2 / 4$. Assumiamo che il carico cinetico, pari a $U_0^2 / 2g$ sia trascurabile rispetto a h_0 . Ciò accade quando la condotta termina con un restringimento (vedi figura) e la velocità del getto uscente dalla condotta è molto maggiore della velocità all'interno della condotta.

Poniamoci il problema di studiare cosa succede quando la valvola posta in A si chiude in un tempo τ , detto tempo di chiusura. In tale intervallo temporale la sezione di efflusso passa dal valore ω_0 (vedi figura) a zero con una legge che è detta legge di chiusura

$$\eta(t) = \frac{\omega(t)}{\omega_0}$$

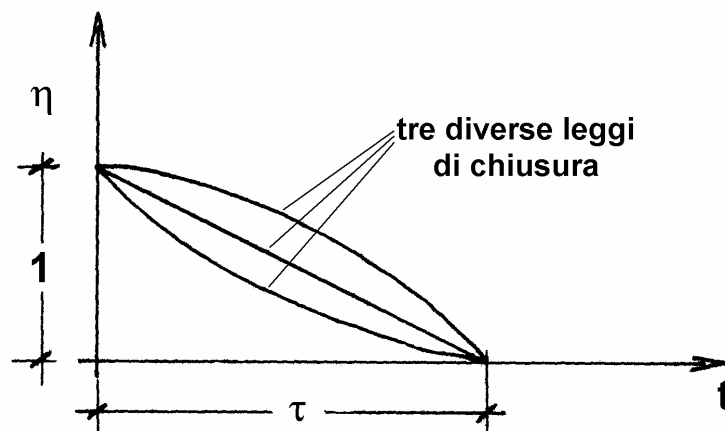
Nonostante $U_0^2/2g$ sia trascurabile rispetto a h_0 , la velocità U_0 è spesso elevata e quindi elevata è l'inerzia del fluido. Se il tempo di chiusura τ è piccolo, sono necessarie forze e quindi pressioni elevate per fermare il fluido. In tale situazione la comprimibilità del fluido non può essere trascurata così come non possono essere trascurate le variazioni della sezione della condotta che si modifica essendo il materiale della condotta dotato di elasticità. Per studiare ciò che accade è quindi necessario fare riferimento alle equazioni delle correnti in forma completa

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - j$$

$$\frac{\partial(\rho\Omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U\Omega)}{\partial s} = 0$$

Esse vengono comunque semplificate introducendo alcune ipotesi. In primo luogo il fluido può essere ipotizzato ideale. Infatti essendo $U_0^2/2g$ molto minore di h_0 il termine j può essere trascurato nell'equazione del moto che diviene

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$$



Il fluido è supposto inoltre barotropico, si assume cioè che la densità dipenda solo dalla pressione

$$\rho = \rho(p)$$

Le ultime ipotesi riguardano la natura della soluzione che si suppone di tipo propagativo, cioè tale che

$$F(s, t) = F(s + cdt, t + dt)$$

con c costante dimensionale ($[c] = LT^{-1}$)

Essendo

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial s} ds$$

risulta $dF = 0$ se $ds = cdt$. Quindi

$$\frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial s} cdt = 0 \Rightarrow c = -\frac{\partial F / \partial t}{\partial F / \partial s}$$

Si assume infine che

$$|c| \gg U$$

Ciò implica che

$$\frac{|c|}{U} = \frac{|\partial F / \partial t|}{|U \partial F / \partial s|} \gg 1$$

Segue dunque che

$$\left| \frac{\partial F}{\partial t} \right| \gg \left| U \frac{\partial F}{\partial s} \right|$$

Le ipotesi che la soluzione sia propagatoria e che $|c| \gg U$ non possono essere verificate in questo momento, esse saranno controllate una volta che la soluzione sarà determinata.

L'equazione del moto conduce a

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[h + \frac{U^2}{2g} \right] = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{1}{g} U \frac{\partial U}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$$

Tuttavia $U \frac{\partial U}{\partial s}$, risulta per le ipotesi fatte, molto minore di $\frac{\partial U}{\partial t}$ essendo $|c| \gg U$ e quindi

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}}$$

Essa costituisce la prima delle equazioni semplificate del fenomeno in esame denominato “COLPO D’ARIETE”. La seconda equazione deriva dall’equazione di continuità che conduce a

$$\rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho U \frac{\partial \Omega}{\partial s} + \rho \Omega \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial \rho}{\partial s} U \Omega = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\rho \left[\frac{\partial \Omega}{\partial t} + U \frac{\partial \Omega}{\partial s} \right] + \Omega \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial s} \right] + \rho \Omega \frac{\partial U}{\partial s} = 0$$

Per le ragioni precedentemente esposte i secondi termini all’interno delle parentesi quadre sono trascurabili rispetto ai primi e conseguentemente possono essere trascurati

$$\rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \Omega \frac{\partial U}{\partial s} = 0$$

Ora le variazioni nel tempo della densità e della sezione devono essere legate alle variazioni della pressione che a loro volta sono legate alle variazioni di h . Si ha infatti

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(z + \int \frac{dp}{\gamma} \right)$$

Tuttavia la quota z della condotta non varia nel tempo e sapendo che $\gamma = \gamma(p)$, si ha

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t}}$$

L’equazione di stato (LEZIONE 5) per un fluido barotropico impone

$$\epsilon = \frac{dp}{d\rho/\rho}$$

Segue quindi

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon} \gamma \frac{\partial h}{\partial t}}$$

Imponendo l'equilibrio alla traslazione verticale di mezza condotta soggetta alle forze che l'esterno esercita su di essa, risulta (trascurando il peso del fluido)

$$pD = 2\sigma s$$

essendo s lo spessore della condotta e σ la tensione all'interno del materiale con cui essa è stata realizzata .

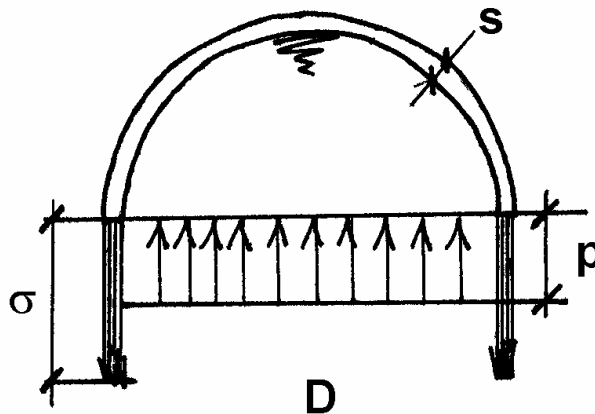
E' evidente dunque che variazioni di pressioni comportano variazioni della tensione σ che a loro volta sono legate alla deformazione della sezione attraverso il modulo di elasticità E del materiale della condotta. Risulta

$$E = \frac{d\sigma}{dD/D} \quad \frac{dp}{d\sigma} = \frac{2s}{D}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{E}{D} dD = \frac{D}{2s} dp$$

Tenendo inoltre conto che



$$\Omega = \frac{\pi D^2}{4}, \quad \frac{d\Omega}{dD} = \frac{\pi D}{2}, \quad \frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{\pi D}{2} \frac{4dD}{\pi D^2} = \frac{2dD}{D}$$

segue

$$\frac{E}{2} \frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{Ddp}{2s} \Rightarrow \frac{d\Omega}{dp} = \frac{\Omega D}{Es}$$

Infine

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{d\Omega}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\Omega D}{Es} \gamma \frac{\partial h}{\partial t}$$

L'equazione di continuità diviene dunque

$$\rho \frac{\Omega D}{Es} \gamma \frac{\partial h}{\partial t} + \Omega \frac{\rho}{\epsilon} \gamma \frac{\partial h}{\partial t} + \rho \Omega \frac{\partial U}{\partial s} = 0$$

$$\left[\rho \frac{D}{Es} + \frac{\rho}{\epsilon} \right] \frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial s}$$

$$\frac{\rho}{\epsilon} \left[\frac{\epsilon D}{Es} + 1 \right] \frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial s}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{1}{g} \frac{\epsilon / \rho}{\left[1 + \frac{\epsilon D}{Es} \right]} \frac{\partial U}{\partial s}$$

Introducendo la costante

$$a = \sqrt{\frac{\epsilon / \rho}{\left[1 + \frac{\epsilon D}{Es} \right]}}$$

le equazioni che governano il moto vario nella condotta possono essere scritte nella forma

$$\frac{\partial h}{\partial s} = - \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{a^2}{g} \frac{\partial U}{\partial s}$$

e costituiscono le cosiddette equazioni semplificate del “colpo d’ariete” perché vedremo nel seguito che durante il transitorio si possono manifestare notevoli sovrappressioni che possono danneggiare la condotta stessa. La soluzione delle equazioni può essere determinata solo dopo aver specificato le condizioni al contorno. Nel problema in esame, nella sezione immediatamente a valle del serbatoio si ha:

Sezione B $h = h_0$

Infatti avendo trascurato il carico cinetico rispetto ad h_0 e le perdite di carico, si può affermare che $h \cong H \cong h_0$.

La condizione al contorno nella sezione terminale della condotta può essere ottenuta applicando il teorema di Bernoulli fra la sezione A e la sezione del getto immediatamente a valle della sezione contratta (sezione C).

$$h_A + \frac{U_A^2}{2g} = h_C + \frac{U_C^2}{2g}$$

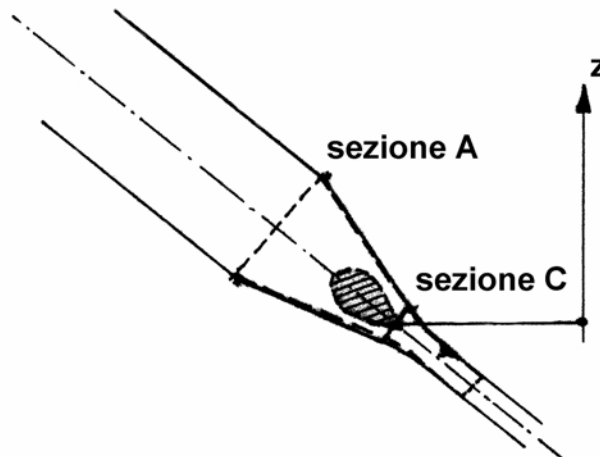
Nella sezione C la pressione relativa è nulla. Inoltre la quota z può essere trascurata rispetto al carico h_A così come il carico cinetico $U_A^2/2g$. Segue dunque

$$U_C = \sqrt{2gh_A}$$

Il principio di conservazione della massa impone inoltre

$$U_A \Omega_A = U_C \omega_C = \sqrt{2gh_A} C_C \omega(t)$$

essendo C_C il coefficiente di contrazione che lega la sezione contratta alla sezione di efflusso del fluido al termine del tratto convergente. La relazione precedente deve valere a qualunque tempo e in



particolare anche all'istante iniziale.

$$U_{A0} \Omega_{A0} = \sqrt{2gh_{A0}} C_{C0} \omega_0$$

Segue quindi

$$\frac{U_A}{U_{A0}} = \sqrt{\frac{h_A}{h_{A0}}} \frac{\omega(t)}{\omega_0}$$

avendo assunto $\Omega_{A0} = \Omega_A = \Omega_0$ e $C_C = C_{C0}$. Quindi nella Sezione A

$$\frac{U}{U_0} = \eta(t) \sqrt{\frac{h}{h_0}}$$

Riassumendo e introducendo un asse x diretto dalla sezione A verso la sezione B con origine nella sezione A, si ha

$$\bullet \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$\bullet \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{a^2}{g} \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\bullet h = h_0 \quad \text{in } x = L \quad \forall t \quad (\text{NOTA 2})$$

$$\bullet \frac{U}{U_0} = \eta(t) \sqrt{\frac{h}{h_0}} \quad \text{in } x = 0 \quad \forall t$$

$$\bullet h = h_0 \text{ e } U = U_0 \quad t \leq 0 \quad \forall x$$

NOTA 2

La costante a introdotta nell'equazione del moto ha le dimensioni di una velocità. E' possibile dimostrare che essa corrisponde alla velocità del suono nella condotta. Nelle condotte in acciaio il valore di a si aggira attorno a 1000 m/s mentre in un fluido indefinito $a \cong 1400 \text{ m/s}$.

La soluzione del problema formulato precedentemente dipende dalla forma della funzione $\eta(t)$ cioè dalla legge di chiusura. Tuttavia è possibile stabilire alcune sue proprietà generali.

In primo luogo notiamo che h e U soddisfano la stessa equazione che ha forma

$$\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0}$$

Ciò può essere facilmente verificato per h , derivando la prima equazione per x , moltiplicandola per a^2 e sottraendo la seconda equazione derivata rispetto al tempo. In modo analogo è possibile verificare che la medesima equazione è soddisfatta da U . Le due funzioni incognite dunque sono caratterizzate dalla medesima dipendenza spazio – temporale.

Per determinare tale dipendenza introduciamo le due nuove variabili indipendenti

$$\xi_1 = t - \frac{x}{a} \quad ; \quad \xi_2 = t + \frac{x}{a}$$

Notiamo inoltre che

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2} \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{a} \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \frac{1}{a} \frac{\partial F}{\partial \xi_2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_2^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1^2} - \frac{2}{a^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_2^2}$$

Sostituendo tali espressioni nell'equazione iniziale si ha

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_2^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_2^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = 0$$

Tale equazione, detta equazione di D'Alambert o equazione della corda vibrante, ha come soluzione generale

$$F = f_1(\xi_1) + f_2(\xi_2)$$

essendo f_1 e f_2 funzioni arbitrarie.

Ricordando le espressioni di ξ_1 e ξ_2 si ha

$$F = f_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

E' quindi facile verificare che sia f_1 che f_2 verificano la definizione di funzioni propagatorie con $c = a$ e $c = -a$ rispettivamente. Infatti

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial t} dt + \frac{\partial f_1}{\partial x} c dt = \frac{df_1}{d\xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} dt + \frac{df_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} a dt = \frac{df_1}{d\xi_1} dt \left(1 - \frac{a}{a}\right) = 0$$

$$df_2 = \frac{\partial f_2}{\partial t} dt + \frac{\partial f_2}{\partial x} c dt = \frac{df_2}{d\xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} dt - \frac{df_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} a dt = \frac{df_2}{d\xi_2} dt \left(1 - \frac{a}{a}\right) = 0$$

Inoltre essendo $|c| = |a|$ e sapendo che l'ordine di a è pari a 10^3 m/s è possibile verificare che $|c| \gg U$, considerato che la velocità del fluido nella condotta è in generale dell'ordine di 1 m/s.

Notiamo che la funzione $f_1(f_2)$ si propaga, non cambiando la sua forma, nella direzione positiva (negativa) dell'asse x con velocità $a(-a)$.

A questo punto tutte le ipotesi formulate inizialmente risultano verificate.

Concludendo si ha

$$h = h_0 + f_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

$$U = U_0 + g_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + g_2\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

L'introduzione delle costanti h_0 e U_0 è possibile essendo le funzioni f_1, f_2, g_1, g_2 arbitrarie.

Le funzioni f_1, f_2, g_1, g_2 sono legate fra di loro, come è possibile mostrare considerando le equazioni iniziali

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$$

↓

$$-\frac{1}{a} \frac{df_1}{d\xi_1} + \frac{1}{a} \frac{df_2}{d\xi_2} = -\frac{1}{g} \frac{dg_1}{d\xi_1} + \frac{1}{g} \frac{dg_2}{d\xi_2}$$

Dovendo tale equazione essere verificata qualunque valore assunto da ξ_1 e ξ_2 emerge

$$g_1 = -\frac{a}{g} f_1 \quad ; \quad g_2 = -\frac{a}{g} f_2$$

Dunque

$$U = U_0 - \frac{g}{a} \left[f_1 \left(t - \frac{x}{a} \right) - f_2 \left(t + \frac{x}{a} \right) \right]$$

Inizialmente essendo $h = h_0$ e $U = U_0$, le funzioni fra f_1 e f_2 sono entrambe nulle. Non appena inizia la manovra di chiusura, nella sezione A la condizione al contorno fa sì che h e U si modifichino. Ciò può avvenire solo se f_1 e f_2 assumono valori diversi da zero. I valori di f_2 generati in A non sono qui di interesse perché f_2 si propaga nella direzione negativa dell'asse x e quindi i valori generati in A non vanno a interessare la condotta, definita da valori di x tali che $0 < x < L$. La funzione f_1 una volta generata in A, si propaga all'interno della condotta verso B dove giunge dopo un tempo pari a L/a .

In B, i valori di f_1 diversi da zero, che arrivano provenienti da A, tenderebbero a far assumere ad h valori diversi da h_0 . Tuttavia la condizione al contorno impone $h = h_0$ e dunque in B, per t maggiori di L/a , si generano valori di f_2 diversi da zero ed in particolari uguali a $-f_1$. Tali valori non nulli di f_2 , generati in B, si propagano verso A con velocità $-a$ e giungono in A solo dopo un tempo $\theta = 2L/a$ dall'inizio della manovra di chiusura. Il tempo che un'onda che viaggia con velocità a impiega a percorrere la distanza $2L$ è detto "durata di fase".

Nella sezione A per tutti i tempi t minori di θ , il valore di f_2 è nullo e si ha

$$h = h_0 + f_1 \left(t - \frac{x}{a} \right)$$
$$U = U_0 - \frac{g}{a} f_1 \left(t - \frac{x}{a} \right)$$

Quindi eliminando f_1 si ottiene

$$h - h_0 = \frac{a}{g} (U_0 - U)$$

Se il tempo di chiusura τ è inferiore a θ , in A per $\tau < t < \theta$ si ha $U = 0$ e quindi

$$h - h_0 = \frac{a}{g} U_0$$

Il valore aU_0/g è il sovraccarico che si manifesta in A, in occasione di una chiusura che avviene in un tempo τ minore di θ (chiusura brusca), e che ha una durata pari a $\theta - \tau$. E' possibile poi

dimostrare che tale sovraccarico è il massimo sovraccarico possibile. E' possibile ricavare la massima sovrappressione dalla conoscenza del legame fra p e h .

$$p_{\max} - p_0 = \rho a U_0$$

Tenendo presente che $a \cong 1000m/s$, $\rho = 1000Kg$ e U_0 può raggiungere valori di $10m/s$, è facile vedere che le sovrappressioni che si possono generare possono causare la rottura della condotta stessa.

Per valori di t maggiori di θ , f_2 assume valori diversi da zero anche in A e non è più possibile ricavare h e U in modo semplice. Spesso è necessario ricorrere a metodi numerici che, tuttavia, utilizzano una forma diversa delle equazioni che verrà ricavata nel seguito.

LE EQUAZIONI LUNGO LE CURVE CARATTERISTICHE

Partiamo dalle equazioni semplificate del colpo d'ariete

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{a^2}{g} \frac{\partial U}{\partial x}$$

e moltiplichiamo la prima equazione per una costante Δ e sommiamo la seconda equazione

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \Delta \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\Delta}{g} \left[\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{a^2}{\Delta} \frac{\partial U}{\partial x} \right]$$

Se $\Delta = dx/dt$ il termine di sinistra diviene dh/dt .

Se $a^2/\Delta = dx/dt$ anche il termine fra parentesi quadre diviene la derivata di U rispetto al tempo.

Si ha dunque

$$dh = \frac{\Delta}{g} dU$$

Ciò è possibile se e sole se

$$\Delta = \frac{a^2}{\Delta}$$

se cioè

$$\Delta = \pm a$$

e quindi se

$$\frac{dx}{dt} = \pm a$$

L'equazione $dh = \frac{\Delta}{g} dU$ o $dh = \pm \frac{a}{g} dU$ può essere facilmente integrata fornendo

$$h - h_0 = \pm \frac{a}{g} (U - U_0)$$

Tali relazioni fra h e U hanno però validità solo quando sono soddisfatte le equazioni

$$dx = \pm a dt$$

che conducono a

$$x = \pm at + \text{costante}$$

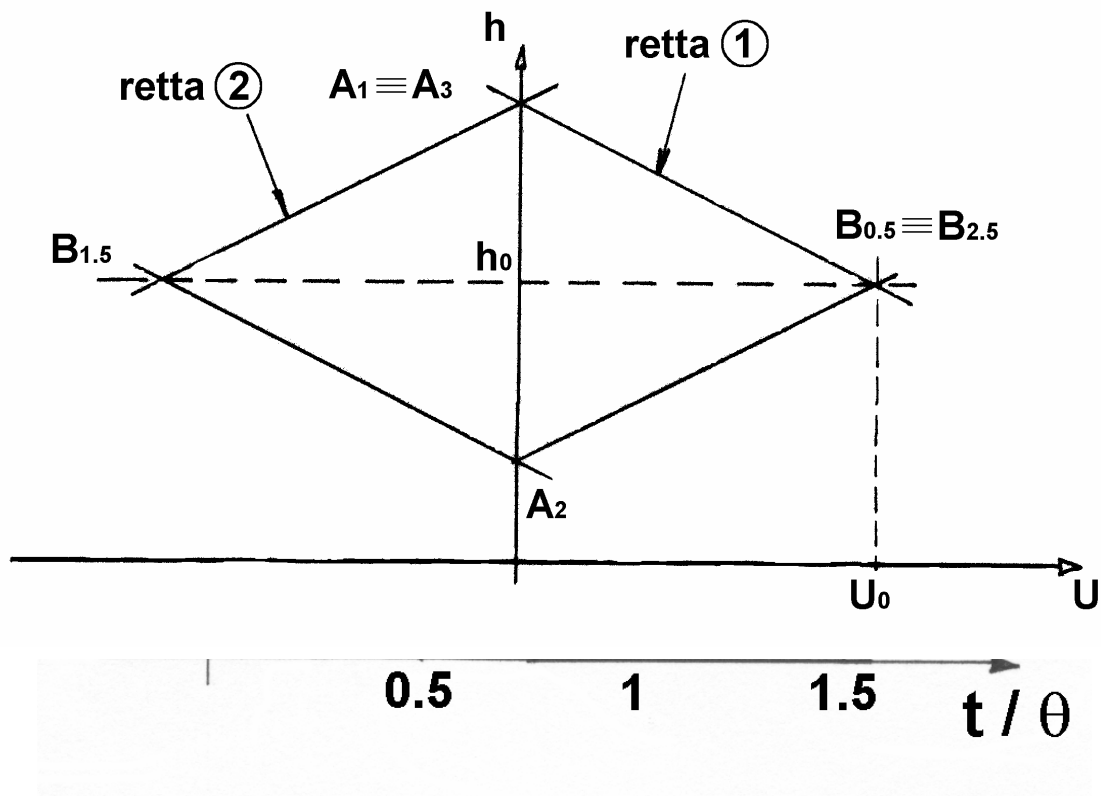
In altre parole solo un osservatore che si muove con velocità $+a(-a)$ cioè con legge $x = +at + \text{cost}$ ($x = -at + \text{cost}$) nel piano orario vedrà il carico h e la velocità U legate dalla relazione $h - h_0 = (a/g)(U - U_0)$ ($h - h_0 = -(a/g)(U - U_0)$).

Le curve (rette) del piano orario definite da $x = \pm at + \text{cost}$ sono dette curve caratteristiche e le equazioni $h - h_0 = \pm \frac{a}{g} (U - U_0)$ valgono solo lungo tali curve.

Un semplice metodo (grafico) per determinare il valore di h e U nelle sezioni A e B è quello di analizzare il fenomeno nel piano (U, h) .

Per esempio consideriamo una chiusura brusca, con legge di chiusura rappresentata in figura

Analizziamo il fenomeno nel piano (U, h)



Per quanto discusso in precedenza, il punto nel piano (U, h) che rappresenta la situazione in B per qualunque tempo inferiore o uguale a $\theta/2$ è il punto (U_0, h_0) . Indicando con B_n e A_n la situazione nella sezione B e nella sezione A rispettivamente al generico tempo $t = n\theta$, il punto $B_{0.5}$ si troverà in (U_0, h_0) . Un osservatore che si trova in B all'istante $t = 0.5\theta$ e si muove con velocità $-a$ verso A, vi giungerà al tempo $t = \theta$. Durante il movimento l'osservatore vedrà un carico e una velocità legati dalla relazione

$$h - h_0 = -\frac{a}{g}(U - U_0)$$

rappresentata in figura dalla retta ①. E' dunque evidente che il punto A_1 che rappresenta la situazione in A all'istante $t = \theta$ deve trovarsi su tale retta. Dove? La condizione al contorno nella sezione A impone che

$$\frac{U}{U_0} = \eta(t) \sqrt{\frac{h}{h_0}}$$

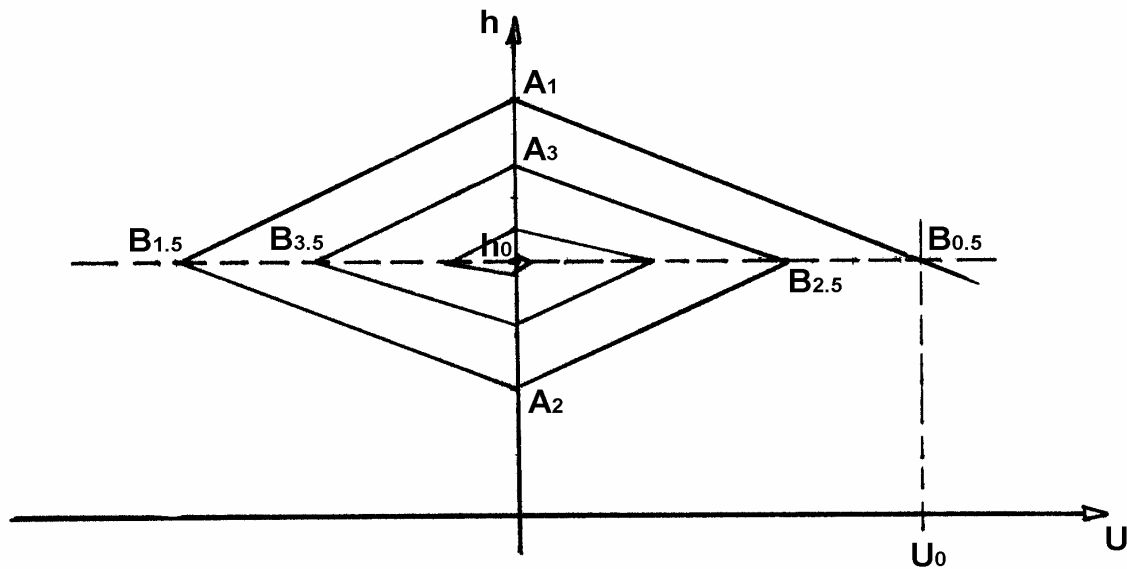
Fissando il valore di t , tale condizione al contorno rappresenta nel piano (U, h) una curva sulla quale deve trovarsi il punto A al tempo considerato. Nel caso in esame $\tau < \theta$ e per $t = \theta$ η vale zero. La curva che rappresenta la condizione al contorno in A degenera quindi nell'asse h . Il punto A_1 dovendosi trovare contemporaneamente lungo la retta ① e lungo la curva $U = 0$, avrà coordinate $\left(0, h_0 + \frac{a}{g} U_0\right)$ (vedi figura). La procedura può essere continuata per esempio per trovare la posizione di $B_{1,5}$. Infatti un osservatore che si trova in A all'istante $t = \theta$ e si muove verso B con velocità a , vi giungerà al tempo $t = 1.5\theta$. Durante il suo movimento vedrà una velocità e un carico legati dalla relazione

$$h - h_{A1} = \frac{a}{g}(U - U_{A1})$$

(retta ②). Quindi il punto $B_{1,5}$ dovrà trovarsi lungo tale retta. Inoltre in B, la condizione al contorno impone che $h = h_0$ ed è quindi facile determinare $B_{1,5}$ come intersezione della retta ② e della retta $h = h_0$. Proseguendo nel tempo è poi possibile determinare la posizione di $A_2, B_{2,5}, A_3$ e così via. Si osservi che, dopo che nella sezione A al tempo $t = \theta$ si è prodotto il massimo sovraccarico, al tempo $t = 2\theta$ il carico scende al di sotto di h_0 di una quantità pari a $(aU_0)/g$. Se il valore di $(aU_0)/g$ è elevato e h_0 non è grande, è possibile che la pressione raggiunga il valore della tensione del vapore e che quindi il fluido cavi. In tal caso si formano all'interno della condotta delle bolle che poi implodono quando la pressione aumenta nuovamente.

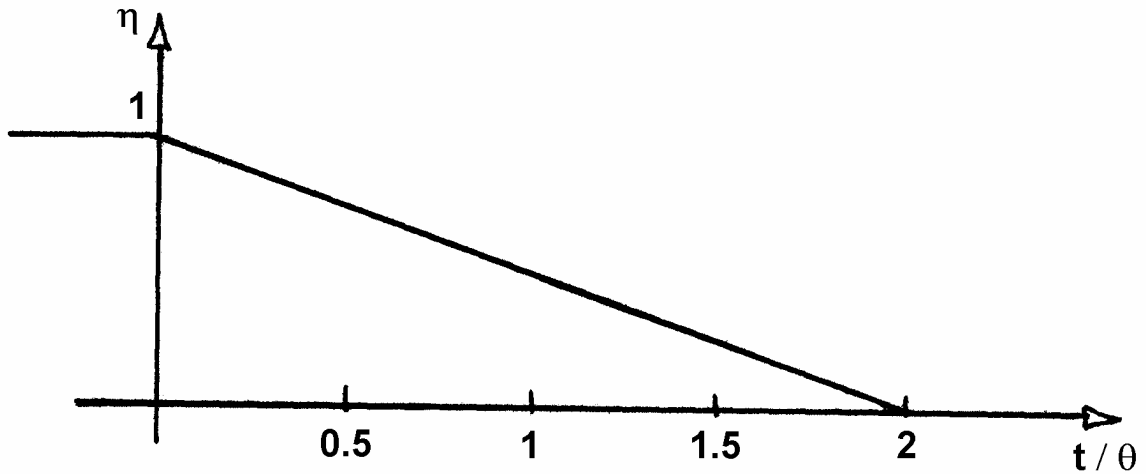
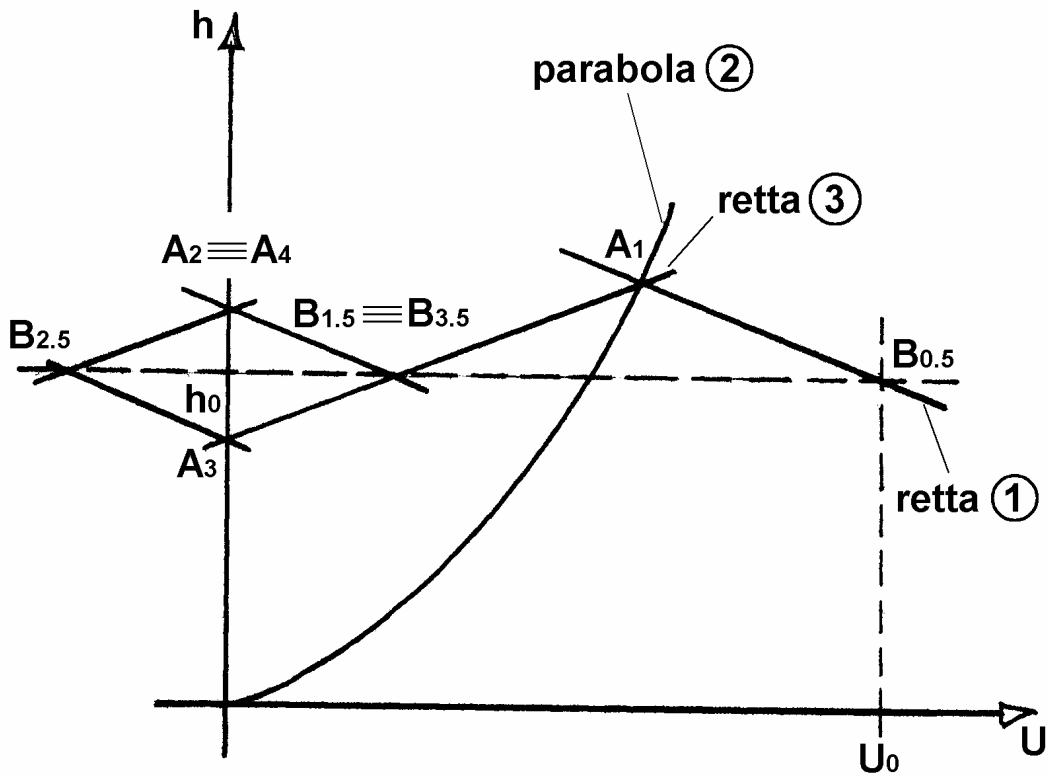
Avendo trascurato le dissipazioni, lo stato del sistema oscilla con periodo 2θ , infatti $B_{2,5}$ coincide con $B_{0,5}$, A_3 coincide con A_1 e così via.

I risultati ottenuti mostrano che esiste una fase in cui il fluido, inizialmente animato da velocità U_0 , rallenta comprimendosi e trasformando la sua energia cinetica in energia elastica di compressione. Questa fase termina quando il fluido è fermo e la pressione massima. A questo punto il fluido si dilata invertendo la sua velocità che assume valori negativi via via crescenti, mentre la pressione



diminuisce. Quando la pressione raggiunge il valore iniziale, la velocità negativa è massima e pari a $-U_0$. A questo punto il fluido rallenta anche se continua a espandersi e quindi ad avere una velocità negativa. La fase di espansione termina quando la pressione raggiunge il valore minimo. In tale situazione $U = 0$. Inizia quindi una fase di compressione legata al fatto che la velocità ritorna positiva. Dopo mezza fase la velocità vale U_0 e la pressione ritorna ad avere il suo valore originario e il fenomeno si ripete identicamente per la mancanza di dissipazioni. Queste ultime causano nella realtà una lenta attenuazione del fenomeno (vedi figura) e al termine del processo si raggiunge una situazione stazionaria descritta da $U = 0$ e $h = h_0$.

Vediamo ora cosa succede in presenza di una manovra lenta tale che $\tau \gg \theta$. In particolare esaminiamo il caso in cui la funzione η sia quella rappresentata nella figura sottostante



Analizziamo il fenomeno nel piano (U, h)

Come nel caso precedente $B_{0.5} \equiv (U_0, h_0)$ e un osservatore che partendo da B all'istante $t = 0.5\theta$ si muove verso la sezione A, la raggiunge al tempo $t = \theta$ osservando, durante il tragitto, valori di U e h descritti dalla retta ①

$$h - h_0 = -\frac{a}{g}(U - U_0)$$

ove deve cadere il punto A_1 . Al tempo $t = \theta$ la valvola posta in A non è ancora chiusa e quindi $U \neq 0$.

$$\frac{U}{U_0} = \eta(\theta) \sqrt{\frac{h}{h_0}}$$

Nel caso in esame $\eta(\theta)$ è pari a 0.5 e la condizione al contorno in A è descritta, nel piano (U, h) dalla parabola ②. E' evidente dunque che A_1 cadrà nell'intersezione fra la retta ① e la curva ②. Un osservatore che, trovandosi in A all'istante $t = \theta$, si muove con velocità $+a$ verso la sezione B vi giungerà al tempo $t = 1.5\theta$, osservando valori di h e U legati dalla relazione (retta ③)

$$h - h_{A1} = \frac{a}{g}(U - U_{A1})$$

Tenendo conto che in B h deve essere uguale a h_0 , è facile posizionare $B_{1.5}$. Continuando nella procedura è poi possibile ottenere $A_2, B_{2.5}, \dots$

Si noti che il sovraccarico che si realizza in A è in questo caso inferiore a $(aU_0)/g$.