

## Capitolo 2

### FORMULAZIONE DEL PROBLEMA DELL'EVOLUZIONE ALTIMETRICA DEL FONDO

#### 2.1 Il problema dell'evoluzione del fondo nel caso bi- dimensionale

##### 2.1.1 Il caso di assetto del fondo trasversalmente piano

Siano  $x_1, x_2, x_3$  coordinate cartesiane di un sistema di riferimento fisso con  $x_1$  e  $x_2$  assi orizzontali e  $x_3$  verticale diretto verso l'alto.

Assumiamo che la miscela fluido-sedimenti defluisca nella regione  $V$ :

$$-\infty < x_1, x_2 < \infty \quad \eta(x_1, t) < x_3 < h(x_1, t) \quad (2.1.1a, b)$$

con  $\eta$  ed  $h$  quote dell'interfaccia miscuglio-ammasso e della superficie libera rispettivamente.

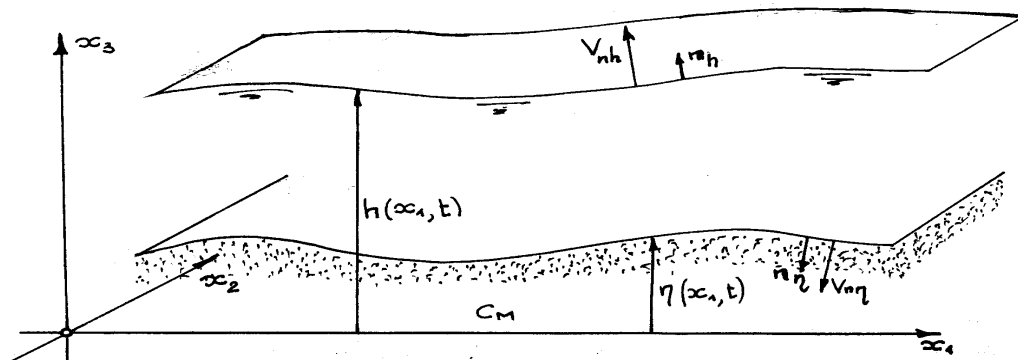


Figura 2.1: Schema del fondo e notazioni.

La regione  $V$  definisce un moto piano delimitato superiormente dalla superficie libera ed inferiormente dall'ammasso incoerente che occupa la regione  $x_3 < \eta$ .

Sia  $c(x_1, x_3, t)$  la concentrazione volumetrica di sedimenti trasportati dal miscuglio: se il trasporto avviene *in sospensione*  $c$  è una funzione che assume valori non nulli sull'intera profondità della corrente; se il trasporto è *di fondo*  $c$  assume valori non nulli solo nelle immediate vicinanze dell'interfaccia. Sia inoltre  $c_M$  la concentrazione di massimo impaccamento caratteristica dell'ammasso, pari ad  $(1 - p)$  con  $p$  porosità dell'ammasso. Detto  $\mathbf{q}_s(x_1, x_3, t)$  il flusso volumetrico di sedimenti l'equazione di bilancio dei sedimenti può porsi nella forma della (1.8.13):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q}_s = 0 \quad (2.1.2)$$

Alla (2.1.2) vanno associate condizioni al contorno che impongono:

- i) assenza di flusso relativo di sedimenti ortogonale alla superficie libera;
- ii) flusso relativo di sedimenti normale all'interfaccia pari al prodotto fra velocità normale dell'interfaccia e differenza fra concentrazione del miscuglio e concentrazione dell'ammasso in corrispondenza dell'interfaccia.

Dunque:

$$\mathbf{q}_s \cdot \mathbf{n}|_{x_3=h} = V_{nh}c|_{x_3=h} \quad (2.1.3)$$

$$\mathbf{q}_s \cdot \mathbf{n}|_{x_3=\eta} = V_{n\eta}(c - c_M)|_{x_3=\eta} \quad (2.1.4)$$

essendo  $V_{nh}$  e  $V_{n\eta}$  le componenti normali delle velocità della superficie libera e dell'interfaccia rispettivamente.

Al fine di ricavare *l'equazione di evoluzione dell'interfaccia* è necessario anzitutto mediare la (2.1.2) rispetto alla turbolenza. Si ottiene:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial \langle q_{s1} \rangle}{\partial x_1} + \frac{\partial \langle q_{s3} \rangle}{\partial x_3} = 0 \quad (2.1.5)$$

Integrando sulla profondità segue:

$$\int_{\eta}^h \frac{\partial C}{\partial t} dx_3 + \int_{\eta}^h \frac{\partial \langle q_{s1} \rangle}{\partial x_1} dx_3 + \langle q_{s3} \rangle \Big|_{\eta}^h = 0 \quad (2.1.6)$$

donde

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta}^h C dx_3 - C|_h \frac{\partial h}{\partial t} + C|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \\
& + \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{\eta}^h \langle q_{s1} \rangle dx_3 - \langle q_{s1} \rangle \frac{\partial h}{\partial x_1} + \langle q_{s1} \rangle|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \\
& \quad + \langle q_{s3} \rangle|_h - \langle q_{s3} \rangle|_{\eta} = 0 \\
& \quad - \langle q_{s2} \rangle|_{\eta} \frac{\partial h}{\partial x_2} + \langle q_{s2} \rangle|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_2}
\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Le espressioni di  $V_{nh}$  e  $V_{n\eta}$  si ottengono osservando che deve risultare:

$$V_{nh} = \frac{dn_h}{dt}, \quad V_{n\eta} = \frac{dn_{\eta}}{dt} \tag{2.1.8a, b}$$

essendo

$$d\mathcal{F}_h = \frac{\partial \mathcal{F}_h}{\partial n_h} dn_h + \frac{\partial \mathcal{F}_h}{\partial t} dt = 0 \tag{2.1.9}$$

$$d\mathcal{F}_{\eta} = \frac{\partial \mathcal{F}_{\eta}}{\partial n_{\eta}} dn_{\eta} + \frac{\partial \mathcal{F}_{\eta}}{\partial t} dt = 0 \tag{2.1.10}$$

con

$$\mathcal{F}_h = x_3 - h(x_1, t) = 0, \quad \mathcal{F}_{\eta} = x_3 - \eta(x_1, t) \tag{2.1.11}$$

Ricordando infine che  $\partial \mathcal{F} / \partial n$  coincide con  $|\nabla \mathcal{F}|$  le (2.1.8-11) pongono:

$$V_{nh} = \frac{h_{,t}}{\sqrt{1 + h_{,x_1}^2}} \tag{2.1.12}$$

$$V_{n\eta} = -\frac{\eta_{,t}}{\sqrt{1 + \eta_{,x_1}^2}} \tag{2.1.13}$$

Sostituendo la (2.1.12) e (2.1.13) nelle (2.1.3, 4) mediate rispetto alla turbolenza si ottiene:

$$[-\langle q_{s1} \rangle h_{,x_1} + \langle q_{s3} \rangle]_{x_3=h} = C|_h \frac{\partial h}{\partial t} \tag{2.1.14}$$

$$[+\langle q_{s1} \rangle \eta_{,x_1} - \langle q_{s3} \rangle]_{x_3=\eta} = \eta_{,t} [C - c_M]_{x_3=\eta} \tag{2.1.15}$$

Utilizzando la (2.1.14) e (2.1.15), la (2.1.7) diventa infine:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta}^h C dx_3 + c_M \eta_{,t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{\eta}^h \langle q_{s1} \rangle dx_3 = 0 \tag{2.1.16}$$

Indichiamo con  $Q_{s1}$  il flusso volumetrico integrato sulla profondità, dunque:

$$Q_{s1} = \int_{\eta}^h \langle q_{s1} \rangle dx_3 \tag{2.1.17}$$

Indichiamo inoltre con  $\tilde{C}$  la concentrazione media (rispetto alla turbolenza) mediata sulla profondità  $Y$ , dunque:

$$\int_{\eta}^h C dx_3 = Y \tilde{C} \quad (2.1.18)$$

La (2.1.16) assume, allora, la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(Y \tilde{C}) + (1-p)\eta_{,t} + \frac{\partial Q_{s1}}{\partial x_1} = 0 \quad (2.1.19)$$

Nel caso in cui è dominante il trasporto di fondo il primo termine della (2.1.19) risulta trascurabile rispetto ai termini restanti. Se il trasporto è in sospensione e la sospensione è diluita ( $\tilde{C} \leq 10^{-2}$ ) si ha in genere  $Y \Delta \tilde{C} \ll (1-p)\Delta \eta$  sicché, anche in questo caso, il primo termine della (2.1.19) risulta trascurabile.

La (2.1.19) viene dunque in generale formulata nella seguente forma approssimata:

$$(1-p)\eta_{,t} + \frac{\partial}{\partial x_1} Q_{s1} = 0 \quad (2.1.20)$$

L'utilizzo della (2.1.20) richiede la valutazione della *portata solida unitaria*  $Q_{s1}$  in funzione delle variabili indipendenti  $x_1$  e  $t$ . Tale valutazione richiede l'estensione delle relazioni ricavate per  $Q_{s1}$  nel caso di trasporto in condizioni di equilibrio (cap. 1) al caso in cui il campo di moto è variabile nel tempo e lungo la coordinata spaziale  $x_1$ .

### 2.1.2 Generalizzazione al caso tridimensionale

La derivazione della relazione che estende la (2.1.20) al caso generale in cui l'assetto del fondo e della superficie libera variano anche nella direzione trasversale  $x_2$  è lasciata al lettore. Essa risulta immediata osservando che in questo caso si ha:

$$\mathcal{F}_h = x_3 - h(x_1, x_2, t) = 0 \quad (2.1.21)$$

$$\mathcal{F}_\eta = x_3 - \eta(x_1, x_2, t) = 0 \quad (2.1.22)$$

sicché l'integrazione sulla verticale dell'equazione di continuità dei sedimenti (in cui risulta ora  $\mathbf{q}_s \equiv (q_{s1}, q_{s2}, q_{s3})$ ) conduce alla presenza di un solo termine aggiuntivo.

Precisamente, posto

$$Q_{s2} = \int_{\eta}^h q_{s2} dx_3 \quad (2.1.23)$$

la (2.1.20) diventa

$$(1-p)\eta_{,t} + \frac{\partial Q_{s1}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{s2}}{\partial x_2} = 0 \quad (2.1.24)$$

### 2.1.3 Trasporto solido di fondo su fondo con trascurabile inclinazione

L'applicazione della (2.1.24) richiede l'esplicitazione del legame fra il vettore  $\mathbf{Q}_s \equiv (Q_{s1}, Q_{s2})$  ed il vettore tensione tangenziale al fondo  $\boldsymbol{\tau}$ . In assenza di apprezzabili effetti della pendenza (longitudinale e/o trasversale) del fondo si pone:

$$\mathbf{Q}_s = Q_s(\tau_*, R_p) \frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|} \quad (2.1.25)$$

con  $Q_s(\tau_*, R_p)$  intensità della portata solida di fondo in condizioni di equilibrio valutata con il valore  $\tau_*$  della tensione di Shields costruito con il modulo  $|\boldsymbol{\tau}|$  della tensione tangenziale al fondo.

In presenza di apprezzabile inclinazione del fondo, direzione e intensità del trasporto di fondo variano rispetto a quanto predetto dalla (2.1.25).

## 2.2 Trasporto solido di fondo su fondo arbitrariamente inclinato

L'assetto trasversale del fondo dei corsi d'acqua non è in generale orizzontale. Al fine di indagare i processi di rilievo per la morfodinamica è quindi necessario determinare la direzione del vettore portata solida al fondo in funzione dell'assetto planoaltimetrico di quest'ultimo. Infatti la presenza di una pendenza trasversale del fondo fa sì che il moto dei sedimenti devii dalla direzione locale del moto del fluido in misura crescente al crescere della pendenza trasversale.

La questione è stata oggetto di numerose analisi sia teoriche che sperimentali. E' opportuno distinguere il caso in cui la pendenza del fondo è sufficientemente piccola da giustificare una trattazione lineare del problema, dal caso più complesso in cui la pendenza del fondo è paragonabile con l'angolo di riposo del materiale. Nel primo caso l'intensità del trasporto può in prima approssimazione assumersi ininfluenzata dalla pendenza del fondo mentre l'angolo di deviazione del vettore portata solida, malgrado sia piccolo, svolge un ruolo significativo. Nel secondo caso l'intensità del trasporto è anch'essa significativamente influenzata dalla pendenza del fondo.

### 2.2.1 Il caso di fondo a debole inclinazione

Il problema è stato trattato da Engelund (1974), Ikeda (1982), Parker (1984) e Talmon et al. (1994). Introduciamo un sistema di coordinate curvilineo ortogonale  $(s, n, z)$  con  $s$  asse curvilineo che definisce la direzione

*longitudinale*,  $n$  asse orizzontale ortogonale ad  $s$  che definisce la direzione *trasversale* e  $z$  asse ortogonale agli assi  $s$  ed  $n$ . Sia  $P$  un punto generico del fondo. Ciascuno dei piani verticali del fascio di centro  $P$  interseca il fondo secondo una linea di diversa pendenza in  $P$ . In particolare definiamo *pendenza longitudinale*  $i_s$  la pendenza in  $P$  della linea intersezione della superficie di fondo con il piano  $(sz)$  e *pendenza trasversale*  $i_n$  la pendenza in  $P$  della linea intersezione della superficie di fondo con il piano  $(nz)$ . Si ha:

$$i_s = -\frac{1}{h_s}\eta_{,s}, \quad i_n = -\eta_{,n} \quad (2.2.1)$$

dove si è indicato con  $h_s$  il coefficiente metrico longitudinale definito nella forma

$$h_s = \frac{1}{1 + c(s)n} \quad (2.2.2)$$

con  $c(s)$  curvatura locale dell'asse  $s$ .

Assumiamo che le pendenze  $i_s$  ed  $i_n$  siano entrambe piccole. In tal caso è possibile ricavare una forma del tutto generale per il vettore portata solida  $\mathbf{q}$  per via puramente dimensionale stipulando che debbano essere soddisfatte le seguenti condizioni:

- i) Deve sussistere la seguente dipendenza dimensionale:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\boldsymbol{\tau}, \nabla\eta; \varrho_s - \varrho, g, d, \mu) \quad (2.2.3)$$

- ii) La dipendenza di  $\mathbf{q}$  da  $\nabla\eta$  è assunta lineare.  
 iii) Per valori nulli di  $\nabla\eta$  il vettore  $\mathbf{q}$  assume la struttura caratteristica del moto uniforme:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_o = q_o(\tau, R_p) \frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|} \quad (2.2.4)$$

risulta cioè diretto come il vettore tensione tangenziale al fondo e ha intensità determinata da relazioni valide per il moto uniforme valutate con il valore locale della tensione di Shields.

Con i vincoli precedenti la struttura di  $\mathbf{q}$  assume la forma generale:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_o(1 + \mathbf{Q} \cdot \nabla\eta) \quad (2.2.5)$$

con  $\mathbf{Q}$  tensore (2x2) le cui componenti sono in generale funzioni di  $\tau_*$  ed  $R_p$ . Considerazioni teoriche e osservazioni sperimentali hanno consentito di fornire una struttura ai coefficienti del tensore  $\mathbf{Q}$ .

In particolare, ricordando l'espressione della dipendenza della tensione critica dalla pendenza longitudinale, un semplice sviluppo in serie di Taylor delle relazioni di moto uniforme fornisce:

$$Q_{ss} = -\frac{\tau_{*c}}{\mu} \frac{dq_o}{d\tau_*} \quad (2.2.6)$$

Meno semplice è la derivazione della forma del coefficiente trasversale  $Q_{nn}$ . Numerose osservazioni sperimentali ed analisi teoriche suggeriscono la seguente struttura di  $Q_{nn}$ :

$$Q_{nn} = -\frac{r}{\sqrt{\tau_*}} \quad (2.2.7)$$

con  $r$  coefficiente adimensionale che Talmon et al. (1995) suggeriscono assuma il valore 0.56. Valori compresi fra 0.5 e 0.6 appaiono ragionevoli.

Infine non esistono risultati teorici o sperimentali che suggeriscano valori non nulli per i coefficienti  $Q_{sn}$  e  $Q_{ns}$ .

Giustificiamo la (2.2.7). A tale scopo consideriamo l'equilibrio dinamico di un particella sferica che saltella in prossimità del fondo con velocità  $\mathbf{V}_p$ . Con le notazioni del paragrafo 1.6.4 possiamo scrivere:

$$\mathbf{G} + \mathbf{A} + \mathbf{F}_D + \mathbf{R} + \mathbf{N} = 0 \quad (2.2.8)$$

con  $(\mathbf{G} + \mathbf{A})$  peso sommerso della particella,  $\mathbf{F}_D$  spinta esercitata dal fluido sulla particella, diretta come la velocità relativa del fluido rispetto alla particella,  $\mathbf{R}$  risultante della forza d'attrito che interpreta le azioni di contatto della particella che saltella sul fondo ed  $\mathbf{N}$  reazione normale del fondo sulla particella.

Introduciamo le seguenti notazioni (vedi fig. 2.2):

$\theta$  :  $\arctan(i_s)$

$\varphi$  :  $\arctan(i_n)$

$\delta$  : angolo che la direzione del vettore velocità della particella forma con l'asse  $s$

$\chi$  : angolo che la direzione del vettore tensione al fondo forma con l'asse  $s$ .

Segue:

$$\mathbf{G} + \mathbf{A} = \left( \frac{\pi}{6} (\varrho_s - \varrho) g d^3 \right) (\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad (2.2.9a)$$

$$\mathbf{F}_D = \varrho c_D \left( \pi \frac{d^2}{4} \right) \frac{(\mathbf{V}|_{z_p} - \mathbf{V}_P)}{|\mathbf{V}|_{z_p} - \mathbf{V}_P|} |\mathbf{V}|_{z_p} - \mathbf{V}_P|^2 \quad (2.2.9b)$$

$$\mathbf{R} = -\mu N (\cos \delta, \sin \delta \cos \varphi, \sin \delta \sin \varphi) \quad (2.2.9c)$$

$$N = |\mathbf{G} + \mathbf{A}| \cos \theta \cos \varphi \quad (2.2.9d)$$

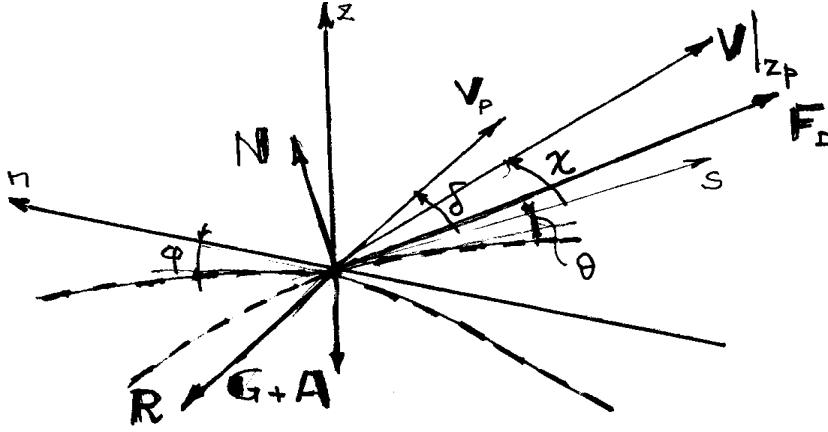


Figura 2.2: Schema dell'equilibrio dinamico della particella su fondo debolmente inclinato e notazioni.

dove si è indicata con  $\mathbf{V}|_{z_p}$  la velocità del fluido alla distanza media dal fondo alla quale la particella saltella.

Proiettando la (2.2.8) sulle direzioni  $s$  e sulla direzione tangente al fondo nel piano  $(n, z)$  si ottiene:

$$\mu N \cos \delta = \rho c_D \left( \pi \frac{d^2}{4} \right) (U|_{z_p} - V_p \cos \delta) \sqrt{(U|_{z_p} - V_p \cos \delta)^2 + (V|_{z_p} \cos \varphi - V_p \sin \delta)^2} \quad (2.2.10a)$$

$$\mu N \sin \delta = \rho c_D \left( \pi \frac{d^2}{4} \right) (V|_{z_p} - V_p \sin \delta) \sqrt{(U|_{z_p} - V_p \cos \delta)^2 + (V|_{z_p} \cos \varphi - V_p \sin \delta)^2} \quad (2.2.10b)$$

$$-(G - A) \cos \theta \sin \varphi \quad (2.2.10c)$$

Confondendo  $\cos \delta$ ,  $\cos \theta$  e  $\cos \varphi$  con l'unità, trascurando  $\sin \delta$  rispetto a  $\cos \delta$  e  $V|_{z_p}$  rispetto a  $U|_{z_p}$ , osservando infine che risulta  $(V/U)|_{z_p} \cong (\tau_n/\tau_s) \cong \sin \chi$  e ricordando le (1.74-6), si ottiene:

$$\sin \delta = \sin \chi - \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\tau_{*c1}}{\tau_*}} \sin \varphi \quad (2.2.11)$$

La (2.2.11) conferma la struttura della (2.2.7) anche se con valori della costante  $r$  un po' minori rispetto alla (2.2.7). Dunque il moto delle particelle



solide devia dalla direzione del moto delle particelle fluide in misura proporzionale alla pendenza trasversale del fondo. È importante osservare che la costante di proporzionalità decresce al crescere della tensione di Shields, una caratteristica che svolge un importante effetto sulla selezione granulometrica che si osserva nei corsi d'acqua.

## 2.3 Il problema di evoluzione del fondo nel caso 1-D

### 2.3.1 Premessa

In analogia con la teoria delle correnti a fondo fisso dell'Idraulica classica, lo studio degli assetti di equilibrio del fondo e della corrente e della loro evoluzione temporale in risposta a variazioni della geometria dell'alveo o dell'alimentazione idrica o solida, può essere effettuato nell'ambito dello schema 1-D quando la scala delle variazioni spaziali esaminate risulta molto grande rispetto alla profondità e alla larghezza del corso d'acqua.

Sono dunque esclusi dall'oggetto dell'indagine i processi di formazione ed evoluzione di forme di fondo di piccola scala (ripples, dune e antidune) o di grande scala (barre), queste ultime essendo caratterizzate da tipici valori della lunghezza dell'ordine di alcune larghezze del fondo.

In altre parole le indagini fondate sul modello 1-D si propongono di determinare l'assetto altimetrico del *fondo medio* del corso d'acqua e la sua evoluzione su scale spazio-temporali molto grandi.

La questione riveste notevole interesse applicativo sia nei confronti dell'interpretazione del processo di evoluzione naturale dei corsi d'acqua, sia per quanto riguarda gli effetti che interventi di sistemazione o regolazione dei corsi d'acqua possono indurre sul regime di trasporto dei sedimenti e quindi sull'evoluzione dell'assetto altimetrico del fondo. Si pensi, ad esempio, alle conseguenze della realizzazione di un invaso attraverso la costruzione di uno sbarramento: quest'ultimo, intercetta non solo la portata liquida ma anche la portata solida, sicchè il suo effetto sull'alveo di valle è quello di dar luogo ad un processo di erosione distribuito su un lungo tratto del corso d'acqua e persistente per un consistente periodo di tempo successivo alla costruzione dello sbarramento.

Simili problemi si incontrano per effetto di interventi di sistemazione (i cosiddetti *drizzagni*) che, producendo artificialmente il salto di uno o più meandri, inducono nel tempo un aumento di pendenza del corso d'acqua che si realizza attraverso un progressivo processo di erosione a monte e deposito a valle.

Analogamente una consistente riduzione di portata di un corso d'acqua conseguente alla *derivazione artificiale di una portata* a fini potabili, irrigui o energetici, non essendo accompagnata dalla derivazione di una corrispondente portata solida, induce una riduzione della capacità di trasporto e quindi conseguenti fenomeni di deposito.

Questi problemi ed altri analoghi richiedono che la progettazione strettamente idraulica sia accompagnata da valutazioni di natura morfodinamica ottenibili attraverso l'adozione di un modello unidimensionale per la corrente trattata come corrente a fondo mobile.

Esaminiamone la formulazione.

### 2.3.2 Formulazione

L'equazione di evoluzione del fondo in forma generale si scrive (vedi la (2.1.23)):

$$(1 - p) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{sy}}{\partial y} = 0 \quad (2.3.1)$$

essendo  $x$  ed  $y$  rispettivamente coordinate longitudinale e trasversale cartesiane. (fig. 2.3). Siano inoltre  $b_{f1}$  e  $b_{f2}$  le coordinate trasversali delle

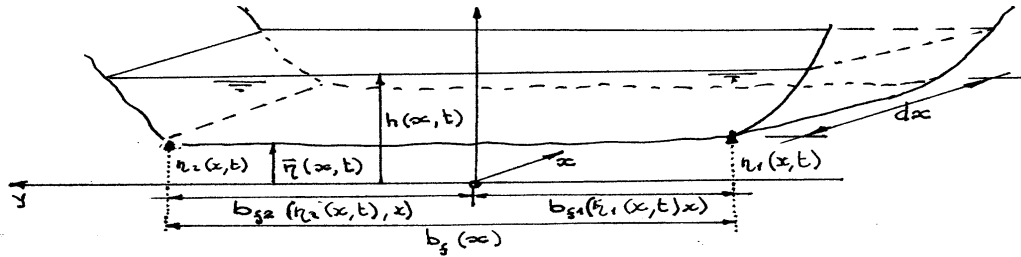


Figura 2.3: Schema di sezione di corrente a fondo mobile.

estremità del fondo attivo della sezione. Si noti che risulta:

$$b_{fi} = b_{fi}(\bar{\eta}(x, t), x) \quad (i = 1, 2) \quad (2.3.2)$$

essendo le linee intersezioni delle sponde (fisse) col fondo (mobile) definite dalle equazioni

$$y = b_{fi}(z, x), \quad z = \bar{\eta}(x, t) \quad (i = 1, 2) \quad (2.3.3)$$

Definiamo

$$b_f = b_{f2} - b_{f1} = b_f(\bar{\eta}(x, t), x) \quad (2.3.4)$$

avendo trascurato la differenza fra le quote ( $\eta_1$  ed  $\eta_2$  rispettivamente) del fondo in corrispondenza delle estremità del fondo attivo ed  $\bar{\eta}$ . La formulazione unidimensionale dell'equazione di evoluzione del fondo si ottiene dalla (2.3.1) operando un'integrazione nella direzione trasversale fra  $b_{f1}$  e  $b_{f2}$ . Si ottiene

$$(1-p) \frac{\partial}{\partial t} \int_{b_{f1}}^{b_{f2}} \eta \, dy - c_M \eta|_{b_{f2}} \frac{db_{f2}}{d\bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} - c_M \eta|_{-b_{f1}} \frac{db_{f1}}{d\bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{b_{f1}}^{b_{f2}} Q_{sx} \, dy - Q_{sx}|_{b_{f2}} \frac{db_{f2}}{dx} + Q_{sx}|_{b_{f1}} \frac{db_{f1}}{dx}$$

$$+ Q_{sy}|_{b_{f2}} - Q_{sy}|_{b_{f1}} = 0 \quad (2.3.5)$$

Posto che la sponda sia non erodibile e non vi siano apporti laterali di sedimenti deve risultare:

$$\mathbf{Q}_s \cdot \mathbf{n}_{b_{f1}} = \mathbf{Q}_s \cdot \mathbf{n}_{b_{f2}} = 0 \quad (2.3.6)$$

con  $\mathbf{n}_{b_{f1}}$  ed  $\mathbf{n}_{b_{f2}}$  versori normali alle superfici  $y = b_{f1}$  e  $y = b_{f2}$  rispettivamente. Si ha:

$$\mathbf{n}_{b_{fi}} = \frac{(-b_{fi,x}; 1)}{\sqrt{1 + (b_{fi,x})^2}} \quad (i = 1, 2) \quad (2.3.7)$$

Utilizzando le (2.3.6, 7) la (2.3.3) assume la forma classica:

$$(1-p)b_f \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (b_f \bar{Q}_{sx}) = 0 \quad (2.3.8)$$

avendo indicato con  $\bar{\eta}$  e  $\bar{Q}_{sx}$  rispettivamente la quota media del fondo e la portata solida per unità di larghezza mediata sulla sezione.

La (2.3.8) può poi essere generalizzata al caso in cui siano presenti apporti laterali di sedimenti. Detta  $q_{sl}$  la portata laterale di sedimenti per unità di lunghezza, la (2.3.6) diventa:

$$(1-p)b_f \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (b_f \bar{Q}_{sx}) = q_{sl} \quad (2.3.9)$$

avendo assunto  $q_{sl}$  positiva (negativa) se si tratta di un apporto (sottrazione) di sedimenti. L'utilizzazione delle (2.3.8, 9) richiede la valutazione della portata solida unitaria media. Poichè nell'ambito dello schema unidimensionale non è possibile descrivere la distribuzione trasversale della tensione che la corrente liquida esercita sul fondo (che dipende dagli effetti dei moti secondari), si adotta di norma l'approssimazione:

$$\bar{Q}_{sx} = \frac{1}{b_f} \int_{b_{f1}}^{b_{f2}} Q_{sx}[\tau_*(y), R_p] dy = Q_s[\bar{\tau}_*, R_p] \quad (2.3.10)$$

essendo  $\bar{\tau}_*$  la tensione di Shields costruita con la tensione media al fondo. Si noti che, dato il carattere non lineare della dipendenza di  $Q_{sx}$  da  $\tau_*$ , l'approssimazione (2.3.10) può essere piuttosto severa quando le variazioni di profondità nella sezione sono grandi, come accade, ad esempio, in corrispondenza di anse del corso d'acqua caratterizzate da forte curvatura.

La valutazione di  $\bar{\tau}_*$  accoppia il problema morfodinamico con quello idrodinamico. Si ha infatti:

$$\bar{\tau}_* = \frac{Q^2}{C^2 \Omega^2 (s-1) dg} \quad (2.3.11)$$

con  $C$  conduttanza media della sezione.

La (2.3.9) (con le (2.3.10, 11)) va risolta congiuntamente alle equazioni delle correnti liquide formulate nell'ambito dello schema 1-D. Dunque:

$$\Omega_{,t} + Q_{,x} = 0 \quad (2.3.12)$$

$$Q_{,t} + \left( \frac{\beta Q^2}{\Omega} \right)_{,x} + g \Omega h_{,x} + \frac{Q^2}{\Omega C^2 R} = 0 \quad (2.3.13)$$

Si noti che, nella valutazione delle derivate spaziale e temporale di  $\Omega$  occorre ricordare che si ha:

$$\Omega = \Omega[h(x, t), \bar{\eta}(x, t), x] \quad (2.3.14)$$

Sicché:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\Omega}{dh} \Big|_{\bar{\eta};x} h_{,t} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\eta}} \Big|_{h;x} \bar{\eta}_{,t} = bh_{,t} - b_f \bar{\eta}_{,t} \quad (2.3.15)$$

$$\frac{d\Omega}{dx} = \Omega_{,x} \Big|_{h;\bar{\eta}} + \frac{\partial \Omega}{\partial h} \Big|_{\bar{\eta},x} h_{,x} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\eta}} \Big|_{h,x} \bar{\eta}_{,x} =$$

$$= bh_{,x} - b_f \bar{\eta}_{,x} + \Omega_{,x} \Big|_{h,\bar{\eta}} \quad (2.3.17)$$

Le (2.3.12) e (2.3.13), insieme alle (2.3.15, 16), completano l'insieme delle equazioni di bilancio che descrivono la morfodinamica delle correnti a fondo mobile.

### 2.3.3 Carattere iperbolico del sistema differenziale che governa le correnti a fondo mobile

Al fine di esaminare il carattere matematico del sistema di equazioni (2.3.12), (2.3.13), (2.3.9), definiamo:

$$f_1 = h \quad ; \quad f_2 = Q \quad ; \quad f_3 = \bar{\eta} \quad (2.3.18a - c)$$

e riduciamo il sistema precedente alla forma:

$$f_{i,t} + A_{ij}f_{j,x} = b_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.3.19)$$

Rielaboriamo la (4.1.7) osservando che  $Q_s$  dipende, attraverso  $\bar{\tau}_*$ , da tutte le variabili dipendenti  $Q$ ,  $h$  ed  $\bar{\eta}$ . Si trova:

$$b_f(1-p)\bar{\eta}_{,t} + b_f Q_{s,\bar{\tau}_*} \bar{\tau}_{*,x} + Q_s b_{f,x} = q_{sl}$$

o

$$0 = b_f(1-p)\bar{\eta}_{,t} + b_f \frac{\partial Q_s}{\partial \bar{\tau}_*} \left[ 2 \frac{\bar{\tau}_*}{Q} Q_{,x} - \frac{2}{\Omega} \bar{\tau}_* (\Omega_{,x} |_{h;\bar{\eta}} + bh_{,x} - b_f \bar{\eta}_{,x}) \right] + Q_s b_{f,x} \quad (2.3.20)$$

avendo trascurato le variazioni della conduttanza media  $C$ . La (2.3.20) può essere posta nella forma:

$$f_{3,t} + A_{3j}f_{j,x} = \bar{\eta}_{,t} + A_{31}h_{,x} + A_{32}Q_{,x} + A_{33}\bar{\eta}_{,x} = b_3 \quad (2.3.21)$$

con

$$A_{31} = -2 \frac{\bar{\tau}_*}{\Omega} \frac{b}{(1-p)} \frac{\partial Q_s}{\partial \bar{\tau}_*}; \quad A_{32} = 2 \frac{\bar{\tau}_*}{Q} \frac{1}{1-p} \frac{\partial Q_s}{\partial \bar{\tau}_*}; \quad A_{33} = 2 \frac{\bar{\tau}_*}{\Omega} \frac{b_f}{1-p} \frac{\partial Q_s}{\partial \bar{\tau}_*} \quad (2.3.22)$$

$$b_3 = -\frac{1}{1-p} \frac{Q_s}{b_f} b_{f,x} + \frac{2}{1-p} \frac{\bar{\tau}_*}{\Omega} \frac{\partial Q_s}{\partial \bar{\tau}_*} \Omega_{,x} |_{h;\bar{\eta}} + \frac{q_{sl}}{b_f(1-p)} \quad (2.3.23)$$

Posto

$$q_\tau = \frac{1}{1-p} \frac{\bar{\tau}_*}{Q_s} \frac{\partial Q_s}{\partial \bar{\tau}_*}; \quad \epsilon = \frac{Q_s b_f}{Q} \quad (2.3.24a, b)$$

con  $q_\tau$  quantità tipicamente finita ed  $\epsilon$  tipicamente piccolo, le (2.3.22, 23) assumono la più semplice forma:

$$A_{31} = -2 \frac{Q}{\Omega} \frac{b}{b_f} \epsilon q_\tau; \quad A_{32} = \frac{2}{b_f} \epsilon q_\tau; \quad A_{33} = 2 \frac{Q}{\Omega} \epsilon q_\tau \quad (2.3.25)$$

$$b_3 = -\frac{1}{1-p} \frac{Q}{\Omega} \frac{\Omega_{,x} |_{h;\bar{\eta}}}{b_f} \epsilon q_\tau + \frac{q_{sl}}{b_f(1-p)} \quad (2.3.26)$$

Rielaboriamo, ora la (2.3.13). Si trova:

$$Q_{,t} + \left( 2\beta \frac{Q}{\Omega} \right) Q_{,x} - \beta \left( \frac{Q}{\Omega} \right)^2 \{ \Omega_{,x} |_{h;\bar{\eta}} + bh_{,x} - b_f \bar{\eta}_{,x} \} + g\Omega h_{,x} + \frac{Q^2}{\Omega C^2 R} = 0 \quad (2.3.27)$$

o, nella forma (2.3.19):

$$f_{2,t} + A_{2j}f_{j,x} = Q_{,t} + A_{21}h_{,x} + A_{22}Q_{,x} + A_{23}\bar{\eta}_{,x} = b_2 \quad (2.3.28)$$

con

$$A_{21} = -\beta \left(\frac{Q}{\Omega}\right)^2 b + g\Omega \quad ; \quad A_{22} = 2\beta \frac{Q}{\Omega} \quad ; \quad A_{23} = \beta \left(\frac{Q}{\Omega}\right)^2 b_f \quad (2.3.29)$$

$$b_2 = \beta \left(\frac{Q}{\Omega}\right)^2 \Omega_{,x} |_{h,\bar{\eta}} - \frac{Q^2}{\Omega C^2 R} \quad (2.3.30)$$

Rielaboriamo, infine la (2.3.12). Si trova:

$$bh_{,t} - b_f \bar{\eta}_{,t} + Q_{,x} = 0 \quad (2.3.31)$$

donde, ricordando la (2.1.21):

$$f_{1,t} + A_{1j} f_{j,x} = h_{,t} + A_{11} h_{,x} + A_{12} Q_{,x} + A_{13} \bar{\eta}_{,x} = b_1 \quad (2.3.32)$$

con

$$A_{11} = \frac{b_f}{b} A_{31} \quad ; \quad A_{12} = \frac{1}{b} + \frac{b_f}{b} A_{32} \quad ; \quad A_{13} = \frac{b_f}{b} A_{33} \quad (2.3.33a - c)$$

$$b_1 = \frac{b_f}{b} b_3 \quad (2.3.34)$$

La matrice  $A_{ij}$  può essere sviluppata in serie di potenze del parametro  $\epsilon$  assunto infinitesimo. Segue:

$$A_{ij} = A_{ij}^0 + \epsilon A_{ij}^1 + O(\epsilon^2) \quad (2.3.35)$$

con

$$\{A_{ij}^0\} \equiv \begin{pmatrix} O & 1/b & O \\ g\Omega(1 - \beta F^2) & 2\beta \frac{Q}{\Omega} & \beta \left(\frac{Q}{\Omega}\right)^2 b_f \\ O & O & O \end{pmatrix} \quad (2.3.36)$$

$$\{A_{ij}^1\} = \begin{pmatrix} -2\frac{Q}{\Omega} q_\tau & \frac{2}{b} q_\tau & 2\frac{b_f}{b} \frac{Q}{\Omega} q_\tau \\ -2\frac{Q}{\Omega} \frac{b}{b_f} q_\tau & \frac{2}{b_f} q_\tau & 2\frac{Q}{\Omega} q_\tau \end{pmatrix} \quad (2.3.37)$$

avendo indicato con  $F$  il numero di Froude  $[(Q/\Omega)\sqrt{g\Omega/b}]$ . Al sistema (2.3.18) sono associate 3 famiglie di linee caratteristiche ciascuna caratterizzata da celerità  $c \equiv dx/dt$  soluzione dell'equazione algebrica ottenuta imponendo che risulti

$$|A_{ij} - \delta_{ij}c| = O. \quad (2.3.38)$$

Sviluppando  $c$  in serie di potenze di  $\epsilon$  segue:

$$c = c_o + \epsilon c_1 + O(\epsilon^2). \quad (2.3.39)$$

Al minimo ordine di approssimazione si ottiene:

$$|A_{ij}^o - \delta_{ij} c_o| = \left( 2\beta \frac{Q}{\Omega} - c_o \right) c_o^2 + c_o \frac{g\Omega}{b} (1 - \beta F^2) = 0 \quad (2.3.40)$$

donde

$$c_{o1} = 0 \quad (2.3.41)$$

$$\begin{matrix} c_{o2} \\ c_{o3} \end{matrix} = \beta \frac{Q}{\Omega} \pm \sqrt{\beta^2 \left( \frac{Q}{\Omega} \right)^2 + g \frac{\Omega}{b} (1 - \beta F^2)} = \beta \frac{Q}{\Omega} \left( 1 \pm \frac{1}{\beta F} \right). \quad (2.3.42)$$

Dunque, al prim'ordine di approssimazione (che, si badi, corrisponde ad aver posto  $\epsilon \equiv 0$ , dunque assente l'effetto del trasporto solido) si ritrova il classico risultato valido per il caso di corrente a fondo fisso. Si noti che le celerità risultano entrambe positive in condizioni supercritiche, di segno opposto in condizioni subcritiche.

Procedendo al prim'ordine di approssimazione le due celerità  $c_{o2}$  e  $c_{o3}$  vengono corrette da termini di ordine  $\epsilon$  ( $c_{12}$  e  $c_{13}$  rispettivamente) che non ne modificano in generale il comportamento qualitativo. Viceversa la celerità  $c_{11}$  associata alla presenza di trasporto solido si ottiene uguagliando termini di ordine  $\epsilon$  nella (2.3.38) con  $c_o$  posto pari a  $c_{o1}$  (cioè nullo). Si ottiene:

$$\begin{vmatrix} -\epsilon \left( c_{11} + 2\frac{Q}{\Omega} q_\tau \right) & 1/b(1 + 2\epsilon q_\tau) & 2\epsilon \frac{b_f}{b} \frac{Q}{\Omega} q_\tau \\ g\Omega(1 - \beta F^2) & (-\epsilon c_{11} + 2\beta \frac{Q}{\Omega}) & \beta \left( \frac{Q}{\Omega} \right)^2 b_f \\ -2\epsilon \frac{Q}{\Omega} \frac{b}{b_f} q_\tau & 2\epsilon b_f q_\tau & \epsilon \left( 2\frac{Q}{\Omega} q_\tau - c_{11} \right) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.3.43)$$

che, all'ordine di approssimazione  $\epsilon$ , fornisce:

$$-2\frac{Q}{\Omega} q_\tau \beta \left( \frac{Q}{\Omega} \right)^2 - \left( 2\frac{Q}{\Omega} q_\tau - c_{11} \right) \frac{g\Omega}{b} (1 - \beta F^2) = 0 \quad (2.3.44)$$

donde:

$$c_{11} = 2q_\tau \frac{Q}{\Omega} \frac{1}{1 - \beta F^2} \quad (2.3.45)$$

I risultati precedenti sono di qualche rilievo. Riassumiamoli. Anzitutto il carattere reale delle tre famiglie di linee caratteristiche implica che il sistema differenziale che governa le correnti a fondo mobile, trattate nell'ambito dello schema monodimensionale, è ancora *iperbolico*, come nel caso delle correnti a fondo fisso.

Le celerità associate al sistema a fondo fisso sono modificate di quantità di ordine  $\epsilon$  dal carattere mobile del fondo. Quest'ultimo determina però l'esistenza di una terza famiglia di linee caratteristiche la cui celerità  $c_1$  è  $O(\epsilon)$ , dunque (almeno in generale) assai più piccola di  $c_2$  e  $c_3$ . Inoltre  $c_1$  risulta negativo in condizioni supercritiche e viceversa. Ne consegue che il carattere mobile del fondo rende anche le correnti veloci (per le quali risulta  $c_2 > 0$  e  $c_3 > 0$ ) influenzabili da valle, anche se sulla scala temporale lenta associata al processo di evoluzione del fondo.

Si noti poi che l'essere  $c_1$  in generale assai più piccolo di  $c_2$  e  $c_3$  costituisce il fondamento del procedimento per cui lo studio dell'evoluzione del fondo (cioè la soluzione della (2.3.9)) può essere disaccoppiato dal problema idrodinamico (de Vries, 1969), assumendo che il moto si adatti istantaneamente alle variazioni di topografia del fondo, trattando cioè il moto come stazionario e ignorando quindi i termini  $\partial h/\partial t$ ,  $\partial \bar{\eta}/\partial t$  e  $\partial Q/\partial t$  nelle (2.3.12) e (2.3.13).

Si osservi infine che tale quadro si modifica considerevolmente in prossimità delle condizioni critiche in cui  $c_1$  non assume più valori piccoli (vedi la 2.3.44). Lo schema disaccoppiato cessa allora di essere valido.