ESERCIZIO 1

1) Per avere un moto incomprimibile deve risultare:

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$$

Dunque nel caso in esame:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = b \qquad \frac{\partial v_y}{\partial y} = f$$

deve risultare $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \boxed{b + f = 0}$

2) Il moto è permanente perché non dipende dal tempo

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = 0$$

3) L'accelerazione è data da:

$$\vec{a}(\vec{x},t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}$$

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} \qquad a_z = \ldots$$

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}$$

Nel caso in esame essendo il moto 2D ($v_z = a_z = 0$)

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial v_x}{\partial x} = b \qquad \frac{\partial v_x}{\partial y} = c$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial v_y}{\partial x} = e \qquad \frac{\partial v_y}{\partial y} = f$$

$$\begin{cases} a_x = (a + bx + cy)b + (d + ex + fy)c \\ a_y = (a + bx + cy)e + (d + ex + fy)f \end{cases}$$

Nel punto (3,1) risulta:

$$a_x = (a + 3b + c)b + (d + 3e + f)c$$

$$a_y = (a + 3b + c)e + (d + 3e + f)f$$

4) La velocità di deformazione lineare lungo x:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = b$$

e lungo y

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = f$$

5) La velocità di deformazione angolare nel piano xy:

$$\dot{\vartheta}_{xy} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} = e + c$$

6) Tensore velocità di deformazione $\vec{\mathbb{D}}$:

$$\vec{\mathbb{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & \frac{1}{2}(c+e) \\ \frac{1}{2}(c+e) & f \end{bmatrix}$$

Tensore velocità di rotazione $\vec{\Omega}$:

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(c-e) \\ -\frac{1}{2}(c-e) & 0 \end{bmatrix}$$

7) Il vettore vorticità $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} =$$

$$\omega_x = \omega_y = 0$$

$$\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = e - c$$

Per avere un moto irrotazionale deve essere $\vec{\omega} = 0$, deve dunque risultare $e = c$.

ESERCIZIO 2

Teorema del trasporto. Si vedano gli appunti delle lezioni o le dispense di Blondeaux.

ESERCIZIO 3

Si consideri un sistema di riferimento solidale con la pala (sistema inerziale perché in moto con velocità costante).

Per il teorema di Bernoulli tra le sezione A e B risulta

$$H_A = H_B$$

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{U_B^2}{2g}$$

$$z_A \simeq z_B$$

$$\frac{p_A}{\gamma} \simeq \frac{p_B}{\gamma} = \frac{p_{ATM}}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad U_A = U_B = U_0 - U_p$$

Applicando il principio della quantità di moto lungo x:

$$G_x + \Pi_x = I_x + M_{ux} - M_{ix}$$

$$G_x = 0 \;; \quad \Pi_x = -F_x \;; \quad I_x = 0$$

$$M_{ux} = \rho (U_0 - U_p)^2 \cos\alpha \, \Omega \qquad M_{ix} = \rho (U_0 - U_p)^2 \Omega$$

$$\Rightarrow \quad F_x = \rho (U_0 - U_p)^2 \Omega (1 - \cos\alpha)$$

La potenza ceduta dal getto:

$$P = F_x U_p = \rho (U_0 - U_p)^2 \Omega (1 - \cos\alpha) U_p$$

$$\frac{\partial P}{\partial U_p} = \rho (U_0 - U_p)^2 \Omega (1 - \cos\alpha) - 2\rho (U_0 - U_p) \Omega (1 - \cos\alpha) U_p = 0$$

$$\cancel{\rho \Omega (1 - \cos\alpha)} \left[(U_0 - U_p)^2 - 2 (U_0 - U_p) U_p \right] = 0$$

$$(U_0 - U_p)(U_0 - U_p - 2U_p) = 0 \quad < \begin{array}{l} U_0 = U_p \rightarrow F_x = 0 \; ! \\ U_0 = 3U_p \rightarrow \boxed{U_p = U_0/3} \end{array}$$

ESERCIZIO 4

La velocità in uscita dall'ugello si ottiene dal teorema di Bernoulli:

$$\frac{U_u^2}{2g} = \Delta Z \quad \Rightarrow \quad U_u = \sqrt{2g\,\Delta Z} = 8.86 \ m/s$$

Per continuità la portata che transita nel tubo coincide con quella in uscita dall'ugello, dunque:

$$Q = U\frac{\pi D^2}{4} = U_u\frac{\pi d^2}{4} \quad \Rightarrow \quad U = U_u\left(\frac{d}{D}\right)^2 = 0.91 \ m/s$$

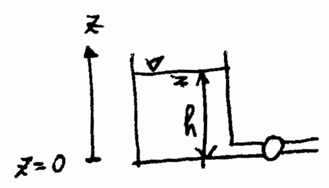
velocità nel tubo

Tra il serbatoio ① e l'uscita dell'ugello ② si può dunque scrivere:

$$H_1 - \Big(\underset{\uparrow \text{ imbocco}}{0.5} + \underset{\uparrow \text{ distribuite}}{\frac{\lambda}{D}(a+b)} + \underset{\uparrow \text{ gomito}}{1}\Big)\frac{U^2}{2g} + H_p = H_2$$

da cui

$$H_p = H_2 - H_1 + \left[1.5 + \frac{\lambda}{D}(a+b)\right]\frac{U^2}{2g}$$



$H_1 = h = 2 \ m$

$H_2 = U_u^2/2g + b = 9 \ m$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\varepsilon_r}{D} = 4\cdot 10^{-3} \\ Re = \dfrac{UD}{\nu} = 2.27\cdot 10^4\end{array}\right| \rightarrow \lambda = 0.033$$

$$H_p = 9 - 2 + \left[1.5 + \frac{0.033}{0.025}\cdot 15\right]\frac{(0.91)^2}{2g} = 7.88 \ m$$

$$P_{ASS} = \frac{P}{\eta} = \frac{\gamma Q H_p}{\eta} = \frac{34.4}{0.8} = 43 \ W$$