ESERCIZIO 1

FILA A

1. $\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = 1 \neq 0 \quad \rightarrow$ Moto non stazionario

2. $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2{,}2 - 2{,}2 = 0 \quad \rightarrow$ Moto incomprimibile

3. $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\omega}$

$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow$ Moto irrotazionale

4. $$\begin{cases} a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = 2.2(2 + 2.2x) \\ a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 1 - 2.2(-8 - 2.2y + t) \end{cases}$$

Nel punto $(x, y) = (2, -3)$:

$$\begin{cases} a_x = 2{,}2\,(2 + 2.2 \cdot 2) = 14.08 \ m/s^2 \\ a_y = 1 - 2.2(-8 + 2.2 \cdot 3 + t) = 4.08 - 2.2t \ m/s^2 \end{cases}$$

5. $\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2{,}2 \qquad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -2.2$

6. $$\vec{\mathbb{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}2 & 0 \\ 0 & -2{,}2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$

8. $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \rightarrow \frac{dx}{2{,}2x + 2} = \frac{dy}{-8 - 2{,}2y + t} \rightarrow \frac{\ln(2 + 2.2x)}{2{,}2} = -\frac{1}{2.2}\ln(-8 - 2{,}2y + t) + \text{cost}$

$2 + 2{,}2x = \frac{1}{-8 - 2{,}2y + t} + \text{cost}$

FILA B

1. $\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = 1 \neq 0$ → Moto non stazionario

2. $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ → Moto incomprimibile

3. $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$

$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 1 - 3 = -2 \neq 0$ → Moto rotazionale

4. $\begin{cases} a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = 3(x+t) \\ a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 1+3y \end{cases}$

Nel punto $(x,y) = (1,3)$

$\begin{cases} a_x = 3(1+t) \\ a_y = 1+9 = 10 \end{cases}$

5. $\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

6.
$$\vec{\mathbb{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7. $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$

$\omega_x = \omega_y = 0 \qquad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -2$

8. $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \rightarrow \frac{dx}{3y} = \frac{dy}{x+t} \rightarrow \int (x+t)\, dx = \int 3y\, dy$

$\frac{x^2}{2} + tx = \frac{3}{2}y^2 + cost$

ESERCIZIO 2

Si vedano gli appunti delle lezioni o le dispense del Prof. Blondea

ESERCIZIO 3

FILA A

Si consideri il volume di controllo compreso tra la sezione A e la sezione e si applichi il principio della quantità di moto.

Lungo x

$$G_x + \Pi_x = M_{u_x} - M_{i_x} + I_x$$

$$G_x = 0 \qquad I_x = 0 \qquad \Pi_x = p_A \Omega_1 - p_B \Omega_2 - F_x$$

$$M_{i_x} = \rho U_1^2 \Omega_1 = \rho Q U_1 \qquad M_{u_x} = \rho U_2^2 \Omega_2 = \rho Q U_2$$

[Per continuità: $Q = U_1 \Omega_1 = U_2 \Omega_2$]

Dunque :

$$F_x = p_A \Omega_1 - p_B \Omega_2 - \rho Q (U_2 - U_1) =$$
$$= p_A \Omega_1 - p_B \Omega_2 - \rho Q^2 \left(\frac{1}{\Omega_2} - \frac{1}{\Omega_1} \right)$$

Applicando il teorema di Bernoulli tra la sezione A e B :

$$H_A = H_B \rightarrow z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{U_B^2}{2g}$$

$$z_A = z_B \longrightarrow p_B = p_A + \frac{\rho}{2}\left(U_A^2 - U_B^2\right) = p_A + \frac{\rho Q^2}{2 \Omega_2^2}\left(\frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} - 1\right)$$

Sostituendo nell'espressione di F_x si trova :

$$F_x = p_A \Omega_1 \left(1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right) - \frac{\rho Q^2}{\Omega_2}\left(1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right) - \frac{\rho Q^2}{2\Omega_2}\left[\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)^2 - 1\right] =$$

$$= p_A \Omega_1 \left(1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right) - \frac{\rho Q^2}{2\Omega_2}\left[\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)^2 - 1 + 2\left(1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)\right] =$$

$$= p_A \Omega_1 \left(1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right) - \frac{\rho Q^2}{2\Omega_2}\left[1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right]^2$$

FILA B

Tra la sezione iniziale dell'ugello e la sezione terminale è possibile scrivere l'equazione della quantità di moto lungo l'asse dell'ugello:

$$G_z + \Pi_z = M_{u_z} - M_{i_z} + I_z$$

$z \uparrow$

$G_z = -\rho g V$ $\qquad I_z = 0$

$\Pi_z = p_1 \Omega_1 - p_0 \Omega_1 - F_z$ $\qquad p_0 = p_{atm}$

$M_{u_z} = \rho U_2^2 \Omega_2$ $\qquad M_{i_z} = \rho U_1^2 \Omega_1$

Da cui:

$$-\rho g V + (p_1 - p_0)\Omega_1 - F_z = \rho U_2^2 \Omega_2 - \rho U_1^2 \Omega_1$$

$$F_z = \rho U_1^2 \Omega_1 - \rho \Omega_2 U_2^2 + (p_1 - p_0)\Omega_1 - \rho g V$$

Dalla conservazione della massa:

$$Q = U_1 \Omega_1 = U_2 \Omega_2 \quad \rightarrow \quad U_2 = U_1 \frac{\Omega_1}{\Omega_2} = 14.5 \ m/s$$

Il volume del tronco di cono V risulta:

$$V = \pi h \frac{(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)}{3} = 3,7775 \cdot 10^{-3} \ m^3$$

Risulta dunque:

$$F_x = 2086.36 \ N$$

A tale forza esercitata dal fluido sull'ugello deve essere sottratto il peso proprio dell'ugello pari a $W = 691,21$ N, da cui si ottiene una forza netta $F_n = 1394,14$ N.

ESERCIZIO 4

FILA A

Ponendo l'origine dell'asse delle z in corrispondenza dell'interfaccia fluido/gas del serbatoio si trova:

$$H_1 = \frac{p_g}{\gamma}$$
$$H_2 = b + \frac{U^2}{2g}$$

Il bilancio energetico impone:

$$H_1 - \frac{U^2}{2g}\Big[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{imbocco} \\ \text{rientrante}}}{1} + \frac{\lambda}{D}(a+b+c+d+a) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{gomiti}}}{2}\Big] = H_2$$

$$H_1 - H_2 = \Delta H = \frac{U^2}{2g}\left[3 + \frac{\lambda}{D}L_{TOT}\right] \qquad \text{con} \quad L_{TOT} = 12 \text{ m}$$

Ipotizzando come valore di primo tentativo $U = 1$ m/s si ottiene:
$$Q = U\Omega = U\frac{\pi D^2}{4} \rightarrow D = \sqrt{\frac{4Q}{\pi U}} = 0{,}050 \text{ m}$$

$$\left.\begin{array}{l} D = 0{,}050 \text{ m} \\ \epsilon = \frac{4r}{D} = 2{,}38 \cdot 10^{-3} \\ Re = \frac{UD}{\nu} = 5.05 \cdot 10^{4} \end{array}\right\} \lambda = 0{,}027$$

$$\Delta H = \frac{U^2}{2g}\left(3 + \frac{\lambda}{D}L_{TOT}\right) = 0.48 \text{ m}$$
$$H_1 - H_2 = 0{,}007 \text{ m}$$

$\Rightarrow$ Perdite troppo elevate rispetto alla differenza di carico totale $H_1 - H_2$
$\hookrightarrow$ aumentare il diametro

D[m]	ϵ	Re	λ	ΔH[m]	H_1-H_2 [m]	OUTPUT
0,050	$2.38\cdot10^{-3}$	$5.05\cdot10^{4}$	0,027	0.48	0,007	D ↑
0,10	$1.20\cdot10^{-3}$	$2.55\cdot10^{4}$	0,027	0,021	0,055	D ↓
0,08	$1.50\cdot10^{-3}$	$3.18\cdot10^{4}$	0,027	0,057	0.050	D ↑
0.09	$1.33\cdot10^{-3}$	$2.83\cdot10^{4}$	0.027	0.033	0.053	D ↓

Risulta dunque $\boxed{0.08 < D < 0.09 \text{ m}}$ $(D_{esatto} = 0.082 \text{ m})$

FILA B

Ponendo l'origine dell'asse delle z in corrispondenza del pelo libero del serbatoio 1 si trova:

$$H_1 = 0 \qquad\qquad H_2 = L_4 - a - L_2 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{U^2}{2g}$$

Il bilancio energetico risponde:

$$H_1 - \frac{U^2}{2g}\Big[\underbrace{0.5}_{\text{imbocco}} + \frac{\lambda}{D} L_{TOT} + \underbrace{4}_{\text{gomiti}}\Big] = H_2 \qquad \text{dove} \quad L_{TOT} = \sum_{i=1}^{5} L_i = 11\ m$$

$$H_1 - H_2 = \Delta H = \frac{U^2}{2g}\left[4{,}5 + \frac{\lambda}{D} 11\right]$$

Ipotizzando come valore di primo tentativo una velocità $U \simeq 1\ m/s$ si ottiene:

$$Q = U \frac{\pi D^2}{4} \rightarrow D = \sqrt{\frac{4Q}{\pi U}} = 0{,}0299\ m$$

$$\left.\begin{aligned} &D = 0.0299\ m \\ &\epsilon = \frac{y_r}{D} = 6.7 \cdot 10^{-3} \\ &Re = \frac{UD}{\nu} = 2.99 \cdot 10^{4} \end{aligned}\right\} \quad \lambda = 0.036$$

$$\Delta H = \frac{U^2}{2g}\left(4.5 + \frac{\lambda}{D} 11\right) = 0.899\ m$$

$$H_1 - H_2 = 2{,}256\ m$$

$\Rightarrow$ Perdite troppo modeste rispetto alla differenza di carico $H_1 - H_2$ dunque diminuire il diametro

$D\,[m]$	ϵ	Re	λ	$\Delta H\,[m]$	$H_1 - H_2\,[m]$	OUTPUT
0,0299	$6.7 \cdot 10^{-3}$	$2.99 \cdot 10^{4}$	0.036	0.899	2,256	D ↓
0,01	$2.0 \cdot 10^{-2}$	$8.91 \cdot 10^{4}$	0.049	236,55	−1,442	D ↑
0,02	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$4.46 \cdot 10^{4}$	0,039	6,59	2,353	D ↑
0,025	$8.0 \cdot 10^{-3}$	$3.57 \cdot 10^{4}$	0.037	2,15	2.50	D ↓

Risulta dunque: $\boxed{0{,}02 \leq D \leq 0{,}025\ m}$ $\qquad (D_{esatto} = 0{,}0242\ m)$