SOLUZIONE COMPITINO del 31 marzo 2010

ESERCIZIO 1

Per un fluido termodinamico, l'eq.ne di stato in forma differenziale si può scrivere nella forma:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \epsilon^{-1}\, dp - \alpha\, dT$$

che si semplifica nel caso di trasformazione isobara ($dp = 0$) e di coefficiente di dilatabilità isobaro costante ($\alpha \stackrel{\sim}{=} \alpha_0$) in:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\alpha_0\, dT$$

Integrando si ottiene:

$$\frac{1}{\alpha_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} = -T + T_0$$

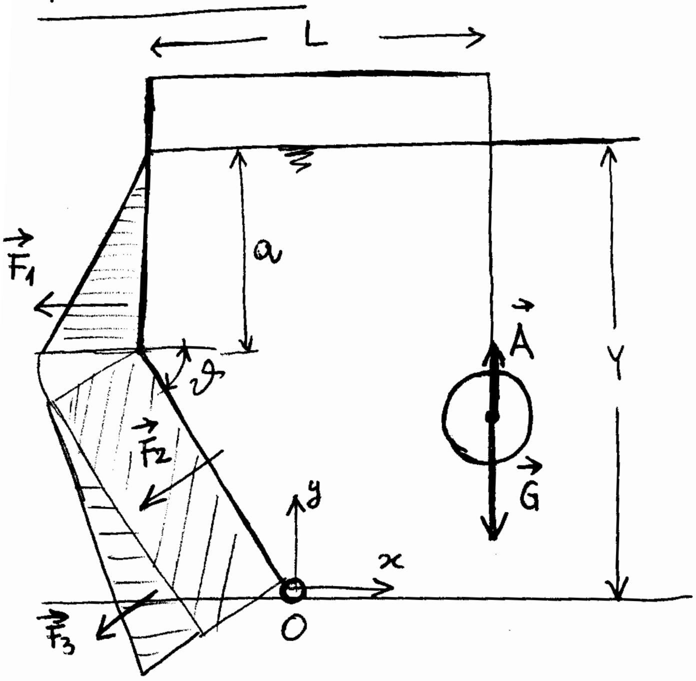
- FILA A: $T - T_0 = -\frac{1}{20 \cdot 10^{-5}} \ln\left(1 + 0.015\right) = -74{,}4\ \mathrm{K}$

- FILA B: $T - T_0 = -\frac{1}{19 \cdot 10^{-5}} \ln\left(1 + 0.009\right) = -47{,}2\ \mathrm{K}$

ESERCIZIO 2

Si vedano gli appunti del corso.

ESERCIZIO 3



$$\vec{F}_1 = (-F_1,\ 0)$$
$$\vec{F}_2 = (-F_2 \sin\vartheta,\ -F_2 \cos\vartheta)$$
$$\vec{F}_3 = (-F_3 \sin\vartheta,\ -F_3 \cos\vartheta)$$
$$\vec{A} = (0,\ A)$$
$$\vec{G} = (0,\ -G)$$

Moduli:

$$F_1 = \gamma \frac{a^2}{2} b$$

$$F_2 = \gamma a \frac{(Y-a)}{\sin\vartheta} b$$

$$F_3 = \gamma \frac{(Y-a)^2}{\sin\vartheta} \frac{b}{2}$$

$$A = \gamma V$$

$$G = \rho_v g V$$

Bracci:

$$b_1 = Y - \frac{2}{3} a$$

$$b_2 = \frac{(Y-a)}{2 \sin\vartheta}$$

$$b_3 = \frac{(Y-a)}{3 \sin\vartheta}$$

$$b_A = L - \frac{(Y-a)}{\cos\vartheta}$$

$$b_G = b_A$$

Per l'equilibrio:

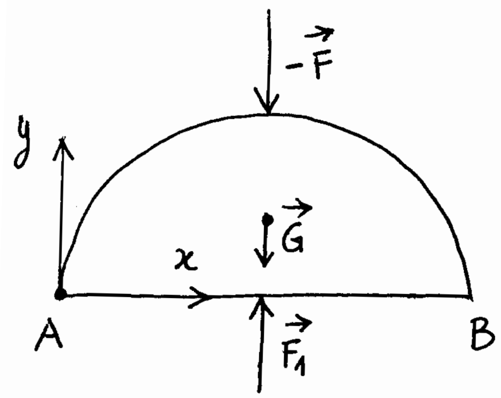
$$M_0 = F_1 b_1 + F_2 b_2 + F_3 b_3 + A b_A - G b_G = 0$$

da cui

$$\rho_v = \frac{F_1 b_1 + F_2 b_2 + F_3 b_3 + A b_A}{g V b_A}$$

- FILA A: $\rho_v \simeq 34791\ \mathrm{kg/m^3}$ (!)
- FILA B: $\rho_v \simeq 6393.4\ \mathrm{kg/m^3}$

ESERCIZIO 4



$$\vec{F_1} = (0,\ F_1)$$
$$\vec{G} = (0,\ -G)$$
$$\vec{F} = (F_x,\ F_y)$$

Per l'equilibrio: $\vec{F_1} + \vec{G} - \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = \vec{F_1} + \vec{G}$

$$\begin{cases} \boxed{x} \quad F_x = 0 \\ \boxed{y} \quad F_y = F_1 - G \end{cases}$$

	FILA A	FILA B
$p_{gas} = \rho_m g \Delta h =$	52,189 kPa	39,142 kPa
$p_B = p_{gas} + \gamma a =$	55,132 kPa	40,123 kPa
$F_1 = p_B\, 2R =$	55,132 kN	16,049 kN
$G = \gamma \frac{\pi R^2}{2} =$	3,852 kN	0,616 kN
$F_y = F_1 - G =$	51,28 kN	15,43 kN
$M = F_y R =$	25,64 kN·m	3,09 kN·m

ESERCIZIO 5

La forza F dipenderà dalle caratteristiche del fluido (ρ e μ) o (ρ e ν), dalla lunghezza della piastra L e dalla velocità U_0:

$$F = f_1(\rho, \mu, L, U_0)$$

Essendo il fenomeno in esame di natura dinamica, è possibile individuare tre grandezze dimensionalmente indipendenti. Scegliamo ρ, L, U_0 e verifichiamo la loro indipendenza dimensionale:

$$[\rho] = ML^{-3}$$
$$[L] = L$$
$$[U_0] = LT^{-1}$$

Dunque

$$[\rho]^{\alpha}[L]^{\beta}[U_0]^{\gamma} = M^{\alpha}L^{-3\alpha}L^{\beta}L^{\gamma}T^{-\gamma} = M^{\alpha}L^{-3\alpha+\beta+\gamma}T^{-\gamma}$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ -3\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

L'annullarsi delle dimensioni del monomio $\rho^{\alpha} L^{\beta} U_0^{\gamma}$ implica che $\alpha=\beta=\gamma=0$ e dunque le tre grandezze sono dimensionalmente indipendenti. Il teorema π afferma che la relazione che fornisce la F può essere trasformata in:

$$\frac{F}{\rho^{\alpha_1} L^{\beta_1} U_0^{\gamma_1}} = f_2\left(\frac{\mu}{\rho^{\alpha_2} L^{\beta_2} U_0^{\gamma_2}}\right)$$

Siccome

$$[F] = MT^{-2}$$
$$[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$$

si noti che F è dimensionalmente una forza diviso una lunghezza

risulta

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ -3\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0 \\ -\gamma_1 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \\ \beta_1 &= 1 \\ \gamma_1 &= 2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{cases} \alpha_2 = 1 \\ -3\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = -1 \\ -\gamma_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_2 &= 1 \\ \beta_2 &= 1 \\ \gamma_2 &= 1 \end{aligned}$$

Si ottiene dunque

$$\frac{F}{\rho L U_0^2} = f_2\left(\frac{\mu}{\rho U L}\right)$$

Notando che $\mu / \rho U L$ è l'inverso del numero di Reynolds, la relazione può anche essere trasformata in

$$F = \rho U_0^2 L \; c_D(Re)$$

dove c_D è detto coefficiente di resistenza.

ESERCIZIO 6

• **FILA A**

Le dimensioni delle tre grandezze sono:

$$[\rho] = ML^{-3}$$
$$[\nu] = L^2T^{-1}$$
$$[L] = L$$

• **FILA B**

$$[\rho] = ML^{-3}$$
$$[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$$
$$[U] = LT^{-1}$$

Volendo individuare un monomio con dimensioni nulle è necessario determinare i coefficienti x, y, z del monomio $\begin{pmatrix} \rho^x \nu^y L^z \\ \rho^x \mu^y U^z \end{pmatrix}$ in modo tale che

Fila A:

$$\begin{cases} x = 0 \\ -3x + 2y + z = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$$

Fila B:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -3x - y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti risulta:

Fila A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fila B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e ha determinante pari a $\begin{matrix} -1 \\ +1 \end{matrix}$ $(\neq 0)$. Segue che x, y, z sono tutti nulli e quindi le grandezze assegnate sono dimensionalmente indipendenti.