SOLUZIONE COMPITINO del 4 Novembre 2008

ESERCIZIO 1

Per un fluido termodinamico, l'eq.ne di stato in forma differenziale si può scrivere come

$$\frac{d\rho}{\rho} = \epsilon^{-1} dp - \alpha\, dT$$

che si semplifica nel caso di trasformazione isoterma ($dT = 0$) e di coefficiente di comprimibilità costante ($\epsilon = \epsilon_0$) nella forma:

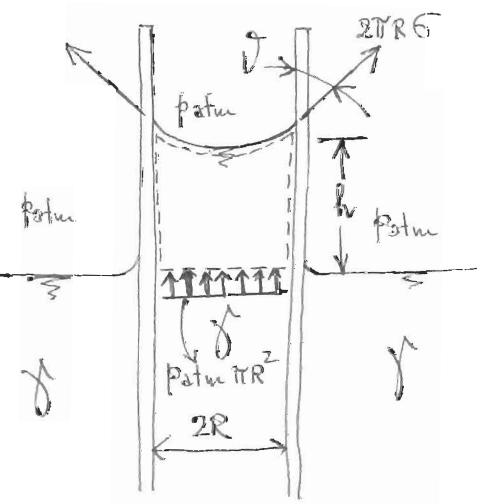
$$\frac{d\rho}{\rho} = \epsilon_0^{-1} dp$$

Integrando si ottiene:

$$\epsilon_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0} = p - p_0$$

- FILA A: $p - p_0 = 2 \cdot 10^9 \ln(1.01) = 1.99 \cdot 10^7 \text{ Pa} = 199 \text{ bar}$
- FILA B: $p - p_0 = 10^9 \ln(1.001) \cong 10^6 \text{ Pa} = 10 \text{ bar}$

ESERCIZIO 2



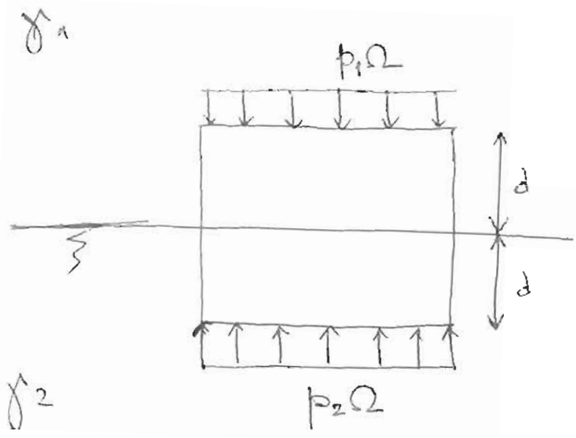
Considerando il bilancio delle forze nella direzione verticale per il volume di controllo tratteggiato, risulta:

$$\gamma h \pi R^2 = 2\pi R \sigma \cos\vartheta$$

da cui

$$h = \frac{2\sigma}{\gamma R} \cos\vartheta$$

ESERCIZIO 3 - FILA A



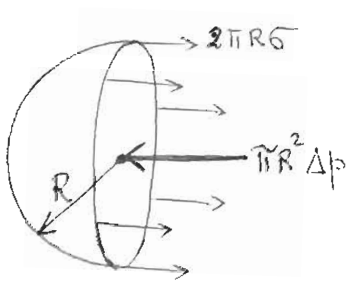
Considerando l'equilibrio di un cilindro a sezione circolare di area Ω e altezza $2a$, nella direzione verticale si trova:

$$p_1\Omega + \gamma_1 \Omega a + \gamma_2 \Omega a = p_2 \Omega$$

Nel limite di $a \to 0$ si ottiene:

$$p_1\Omega = p_2\Omega \Rightarrow p_1 = p_2$$

ESERCIZIO 3 - FILA B



Considerando ½ goccia sferica di raggio R immersa nell'atmosfera, per l'equilibrio delle forze in direzione orizzontale deve risultare

$$\Delta p \, \pi R^2 = 2\pi R \sigma$$

$$\downarrow$$

$$\Delta p = p_i - p_e = \frac{2\sigma}{R}$$

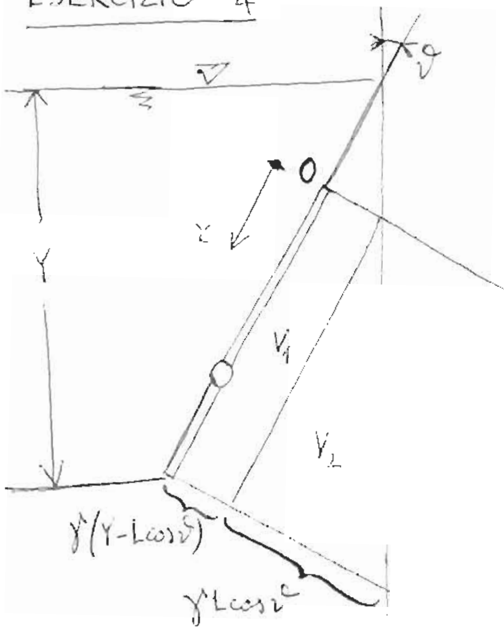
con p_i e p_e pressioni all'interno e all'esterno della goccia.

Nel caso di superficie non sferica è possibile mostrare che il salto di pressione è pari a

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

con R_1 e R_2 raggi principali di curvatura nel punto in considerazione.

ESERCIZIO 4



La forza complessiva F esercitata dal fluido sulla paratoia sarà data dai contributi:

$$V_1 = \gamma(Y - L\cos\vartheta)L \qquad V_2 = \gamma L\cos\vartheta \frac{L}{2} \quad \rightarrow F = V_1 + V_2$$

I bracci delle forze V_1 e V_2 rispetto al polo O saranno rispettivamente:

$$b_1 = \frac{L}{2} \quad ; \quad b_2 = \frac{2}{3}L$$

La coordinata del centro di spinta x_c si può dunque ottenere dall'equazione:

$$F x_c = V_1 b_1 + V_2 b_2 \quad \rightarrow \quad x_c = \frac{V_1 b_1 + V_2 b_2}{F}$$

$$x_c = \frac{\gamma(Y - L\cos\vartheta)L\cdot\frac{L}{2} + \gamma\frac{L^2}{2}\cos\vartheta\frac{2}{3}L}{\gamma(Y-L\cos\vartheta)L + \gamma L\cos\vartheta\frac{L}{2}} = \frac{Y\frac{L}{2} - \frac{L^2}{6}\cos\vartheta}{Y - \frac{L}{2}\cos\vartheta}$$

Per non avere momento attorno al punto c deve dunque risultare:

$$x_c = a$$

da cui:

$$\frac{\frac{YL}{2} - \frac{L^2}{6}\cos\vartheta}{Y - \frac{L}{2}\cos\vartheta} = a \quad \rightarrow \quad Y = \frac{\frac{L^2}{6}\cos\vartheta - a\frac{L}{2}\cos\vartheta}{\frac{L}{2} - a}$$

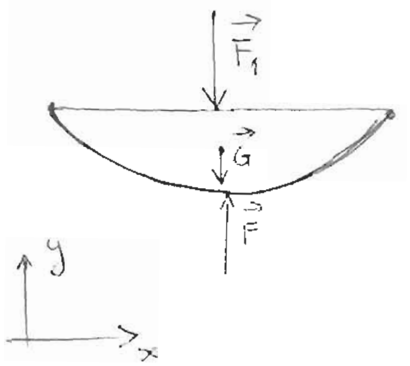
- FILA A:

  $(a = \frac{3}{5}L) \rightarrow Y = \frac{4}{3}L\cos\vartheta$

- FILA B:

  $(a = \frac{4}{7}L) \rightarrow Y = \frac{5}{3}L\cos\vartheta$

ESERCIZIO 5



Facendo riferimento al volume di controllo riportato in figura il bilancio delle forze impone:

$$\vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{G} = 0$$

Dove

$$\vec{F}_1 = (0, -F_1) \qquad \vec{F} = (F_x, F_y)$$

$$\vec{G} = (0, -G)$$

Dunque l'equilibrio orizzontale: $\quad F_x = 0$

" verticale: $\quad F_y - F_1 - G = 0$

Essendo:

$$F_1 = \gamma h R\sqrt{2} \qquad G = \gamma\left(\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}\right)$$

da cui

$$F_y = F_1 + G = \gamma h R\sqrt{2} + \gamma\left(\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}\right)$$

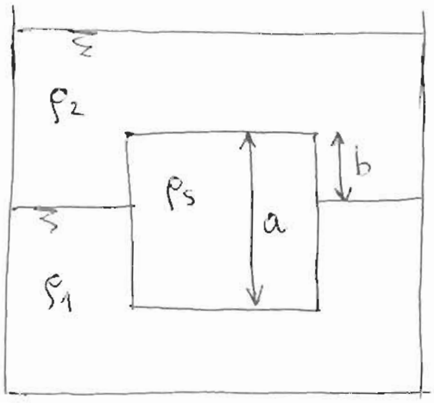
Il cilindro verrà espulso quando la spinta idrostatica eguaglierà il peso del cilindro:

$$\gamma h R\sqrt{2} + \gamma\left(\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}\right) = \gamma_c \pi R^2$$

ovvero quando il dislivello h sarà:

$$h = \frac{\gamma_c \pi R^2 - \gamma\left(\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}\right)}{\gamma R\sqrt{2}}$$

ESERCIZIO 6



Per il principio di Archimede deve risultare:

$$\rho_s g a^3 = \rho_1 g (a-b) a^2 + \rho_2 g b a^2$$

da cui

$$b = a \left(\frac{\rho_1 - \rho_s}{\rho_1 - \rho_2} \right)$$

- FILA A: $\quad b = 0.3 \cdot \left(\frac{1350 - 1080}{1350 - 800} \right) = 0.393 \text{ m}$
- FILA B: $\quad b = 1.8 \left(\frac{1450 - 1050}{1450 - 750} \right) = 1.029 \text{ m}$

ESERCIZIO 7

Similitudine di Froude $\rightarrow Fr = Fr_m \rightarrow \dfrac{U}{\sqrt{gL}} = \dfrac{U_m}{\sqrt{gL_m}}$

$\rightarrow$ Scala delle velocità: $\dfrac{U}{U_m} = \left(\dfrac{L}{L_m}\right)^{1/2}$

$\rightarrow$ Scala dei tempi: $\dfrac{T}{T_m} = \dfrac{L}{U}\dfrac{U_m}{L_m} = \dfrac{L}{L_m} \cdot \left(\dfrac{L_m}{L}\right)^{1/2} = \left(\dfrac{L}{L_m}\right)^{1/2}$

$\rightarrow$ Scala delle portate: $\dfrac{Q}{Q_m} = \dfrac{L^2 U}{L_m^2 U_m} = \left(\dfrac{L}{L_m}\right)^2 \left(\dfrac{L}{L_m}\right)^{1/2} = \left(\dfrac{L}{L_m}\right)^{5/2}$

Per avere similitudine di Froude e di Reynolds contemporaneamente bisognerebbe avere:

$$\begin{cases} Fr = Fr_m \\ Re = Re_m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{U}{U_m} = \left(\dfrac{L}{L_m}\right)^{1/2} \\ \dfrac{UL}{\nu} = \dfrac{U_m L_m}{\nu_m} \end{cases} \rightarrow \left\{ \dfrac{\nu_m}{\nu} = \left(\dfrac{L_m}{L}\right)^{3/2} \right.$$

- FILA A: Il diametro dei sedimenti nel modello $d_{s_m} = \dfrac{d_s}{50} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 20\ \mu m$
- FILA B: " " " $d_{s_m} = \dfrac{d_s}{40} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 50\ \mu m$