Una semplice applicazione del metodo delle caratteristiche: la propagazione di un'onda di marea all'interno di un canale a sezione rettangolare.

In generale la propagazione di un'onda monodimensionale in una corrente a pelo libero è descritta nel piano orario (x,t) dal sistema differenziale alle derivate totali

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = c_{\pm} = U \pm \sqrt{\dfrac{g\Omega}{b}} \\ \dfrac{dU}{dt} \pm \sqrt{\dfrac{gb}{\Omega}} \dfrac{dh}{dt} \pm \sqrt{\dfrac{g}{b\Omega}} U \left.\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}\right|_h + gj = 0 \end{cases} \tag{1}$$

vigente sulle linee caratteristiche (C_+ e C_-).

Consideriamo adesso il caso semplificato che soddisfa alle ipotesi:

i. Sezione rettangolare, larghezza costante b

$$\Omega = bY \ , \qquad \left.\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right|_h = 0 \tag{2}$$

ii. Fondo orizzontale, non erodibile

$$h = Y \tag{3}$$

iii. Dissipazioni trascurabili

$$j \cong 0 \tag{4}$$

iv. Onde di piccola ampiezza

$$Y = Y_0 + Y_1(x,t) , \qquad \text{con} \qquad Y_1 << Y_0 \tag{5}$$

v. Numero di Froude <<1

$$|U| << \sqrt{gY} \tag{6}$$

Sostituendo le (2-5) nel sistema [1] e trascurando i termini proporzionali ad Y_1, il sistema di equazioni diviene:

$$\begin{cases} c\pm \cong c_0\pm = \pm\sqrt{gY_0} \\ \dfrac{d}{dt}(U \pm 2\sqrt{gY}) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Esempio: propagazione di un'onda di marea all'interno della Bocca di Chioggia.

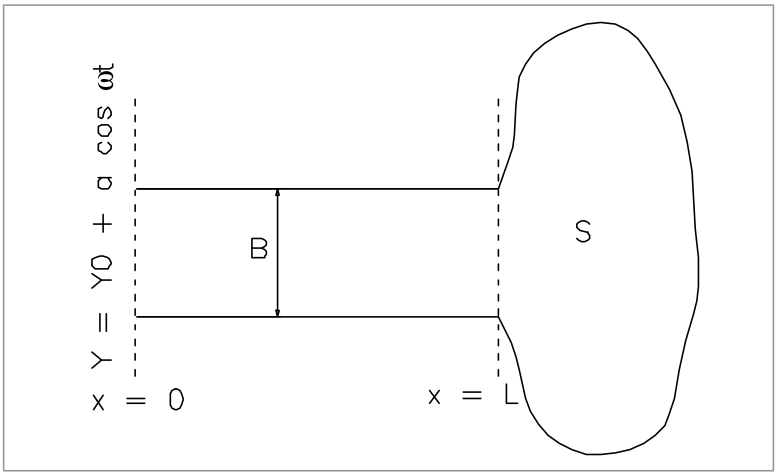
Le ipotesi sopra elencate descrivono con buona approssimazione la propagazione della marea all'interno di canali a sezione rettangolare costante. Il sistema [7] può quindi essere utilizzato per ottenere una stima degli andamenti di velocità e profondità all'interno di una delle bocche di porto della Laguna di Venezia che mettono in comunicazione il mare con quest'ultima.

Figura 1.1: Immagine da satellite della Laguna di Venezia. Si noti la Bocca di Chioggia.

Nel seguito ci riferiremo in particolare alla Bocca di Chioggia, evidenziata in *Figura 1.1*.

DATI:

$B = 570m$
$L = 4000m$
$T = 12.4h$
$Y_0 = 10m$
$a = 0.5m$
$S = 0.82 \cdot 10^8 m^2$



Condizioni al contorno:

x = 0 $\quad Y = Y_0 + a\cos(wt)$ oscillazione del livello imposta dalla marea.

x = L $\quad Q = S\dfrac{dY}{dt}$ oscillazione statica del livello nel bacino lagunare.

Condizioni iniziali:

$$\begin{cases} Y_i(x=0) = Y_i(x=L) = Y_0 + a\cos(0) = 10.5m \\ U_i(x=0) = U_i(x=L) = 0 \end{cases}$$ livello di alta marea in ogni sezione della bocca.

La determinazione di velocità e profondità nelle sezioni di estremità della bocca richiede la soluzione del sistema *[7]* nel piano orario *(x,t)*. Le linee caratteristiche sono rette di uguale pendenza (avendo ipotizzato che l'onda sia di piccola ampiezza), il che implica che le informazioni impieghino sempre lo stesso intervallo di tempo *Dt* a propagarsi lungo la distanza *L*:

$$\Delta t = \frac{L}{c_0} = \frac{L}{\sqrt{gY_0}} = 404s$$

Lungo la caratteristica positiva, che propaga nella sezione *x = L* informazioni relative alla sezione *x = 0*, va risolto il sistema:

$$c_{0+}\begin{cases} \left[U + 2\sqrt{gY}\right]_{t_i - \Delta t, x=0} = \left[U + 2\sqrt{gY}\right]_{t_i, x=L} \\ \left[Q\right]_{t_i, x=L} = B\left[YU\right]_{t_i, x=L} = S\dfrac{\left[Y\right]_{t_i, x=L} - \left[Y\right]_{t_i - 2\Delta t, x=L}}{2\Delta t} \end{cases}$$

Lungo la caratteristica negativa, che propaga nella sezione $x = 0$ informazioni relative alla sezione $x = L$, il sistema è invece:

$$c_{0-}\begin{cases}\left[U-2\sqrt{gY}\right]_{t_i-\Delta t,\,x=L}=\left[U-2\sqrt{gY}\right]_{t_i,\,x=0}\\ \left[Y\right]_{t_i,\,x=0}=Y_0+a\cos(wt_i)\end{cases}$$

La determinazione delle variabili U,Y nella sezione $x = L$ (rivolta in laguna) richiede la soluzione di un'equazione del tipo:

$$AY^{3/2}+BY+C=0$$

la cui soluzione va cercata per tentativi.

La sezione $x = 0$ non pone alcuna difficoltà poiché la condizione sulla profondità consente di determinare la soluzione esplicitamente.

Di seguito viene riportata una tabella che contiene i valori di U, Y in ciascuna delle due sezioni nelle prime fasi di propagazione della marea.

X	**t [s]**	**U[m/s]**	**Y[m]**
0	0	0	10,5
L	403,855	0	10,5
0	807,71	-0,00312	10,49678
L	1211,565	-0,0059	10,49965
0	1615,42	-0,01799	10,48714
L	2019,275	-0,02846	10,49797
0	2423,13	-0,05434	10,47123
L	2826,985	-0,07588	10,4935
0	3230,84	-0,11873	10,44924
L	3634,695	-0,15287	10,4845

Si noti come la velocità sia negativa, ovvero diretta in senso opposto all'asse x, supposto positivo movendosi verso la sezione $x = L$: questo non deve meravigliare, poiché si è imposta la condizione iniziale di livello massimo, a cui segue una diminuzione della profondità nella sezione in comunicazione con il mare secondo una legge cosinusoidale che determina la fase di abbassamento della marea in cui l'acqua esce dalla laguna, diretta verso il mare. La fase di bassa marea persiste fino all'istante in cui la profondità imposta nella sezione in comunicazione con il mare riprende a crescere, momento in cui si ha un'inversione del moto che precede la fase di alta marea in cui l'acqua entra in laguna.

I grafici riportati nel seguito descrivono gli andamenti di profondità e velocità nella sezione della bocca rivolta verso la laguna.

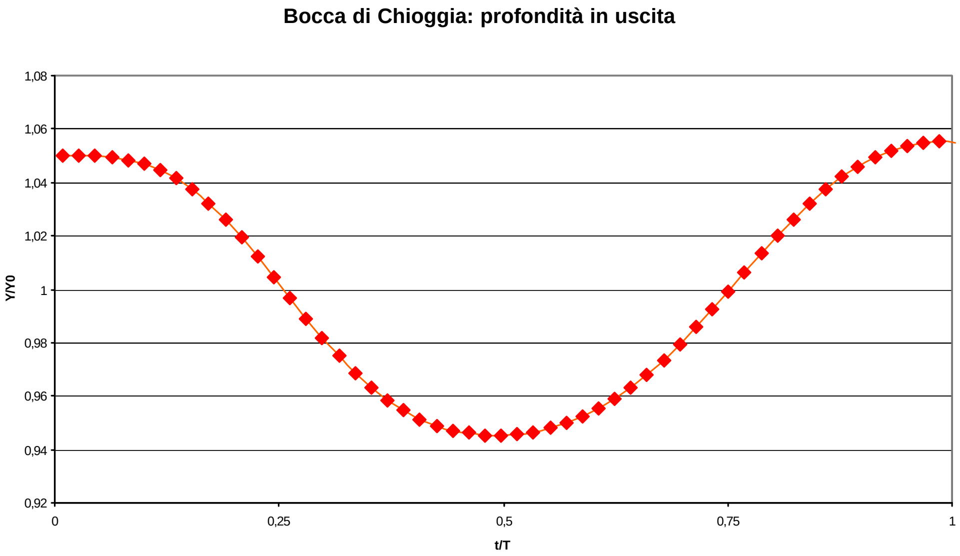


Figura 1.2: Andamento del livello nella sezione x = L (rivolta in laguna) della Bocca di Chioggia all'interno di un ciclo di marea.

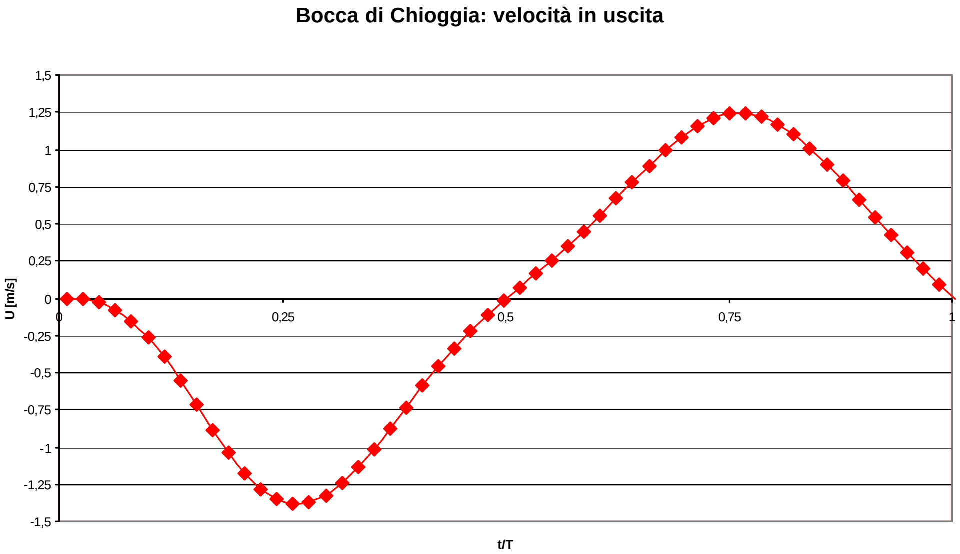


Figura 1.3: Andamento della velocità nella sezione x = L (rivolta in laguna) della Bocca di Chioggia all'interno di un ciclo di marea.